Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: ***Числовые последовательности***

**(бесконечно большие последовательности и их свойства, теорема Вейерштрасса)**

Лектор Янущик О.В.

2015 г.

# 3. Бесконечно большие последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой***, *если* $\forall M>0 \ \exists N\in\mathbb{N}$ *такое, что*

$$|x_n|>M, \ \forall n>N.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Расширим множество $\mathbb{R}$.

I способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементами, обозначаемыми $+\infty$ и $-\infty$ (называют: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность»)

При этом справедливо: $-\infty < r < +\infty, \ \forall r\in\mathbb{R}$.

II способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементом, обозначаемыми $\infty$ (называют: «бесконечность»)

При этом $\infty$ не связана с действительными числами отношением порядка.

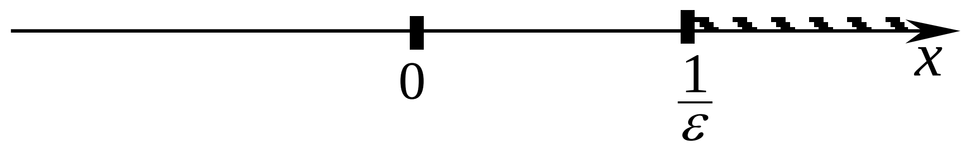
Множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называют ***расширенным множеством действительных чисел*** (способ расширения всегда понятен из контекста).

Обозначают: $\overline{\mathbb{R}}$ .

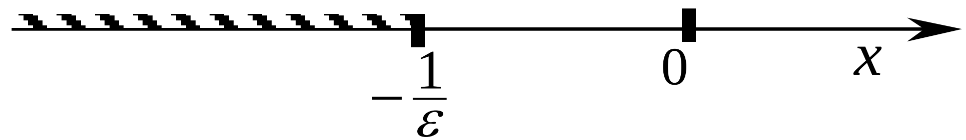
Элементы $-\infty$ , $+\infty$ , $\infty$ называют бесконечно удаленными точками числовой прямой.

ε-окрестностью точек $-\infty$, $+\infty$, $\infty$ считают следующие множества:

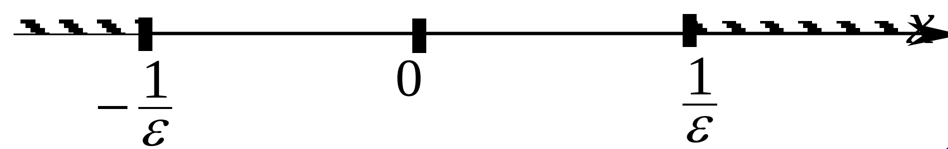
$U(+\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 1/\varepsilon \}$




$U(-\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1/\varepsilon \}$




$U(\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1/\varepsilon \}$



Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε-окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа.

(Геометрическая интерпретация бесконечно большой последовательности).

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad x_n \to \infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремится к ∞».

Частные случаи бесконечно больших последовательностей:

1) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \geq 0$ , $\forall n$ .

Тогда $|x_n| = x_n > M$ , $\forall n > N$

$\Rightarrow$ все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε-окрестности точки + ∞.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремится к + ∞».

2) $\{ x_n \}$ – бесконечно большая и $x_n \leq 0$ , $\forall n$ .

Тогда $|x_n| = -x_n > M$ , $\forall n > N$

$\Rightarrow$ $x_n < -M$ , $\forall n > N$

$\Rightarrow$ все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε-окрестности точки – ∞.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремится к – ∞».

# СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Если $\{x_n\}$ – б.б., то последовательность $\{1/x_n\}$ – б.м.

Если последовательность $\{\alpha_n\}$ – б.м, то $\{1/\alpha_n\}$ – б.б.

(связь бесконечно больших и бесконечно малых)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

2) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. последовательности одного знака, то их сумма $\{ x_n + y_n \}$ – б.б. того же знака.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО самостоятельно

3) Если $\{x_n\}$ – б.б., а $\{y_n\}$ – ограниченна, то их сумма $\{x_n + y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

5) Пусть $\{x_n\}$ – б.б., $\{y_n\}$ – сходящаяся, причем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \neq 0$$

Тогда их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называют* ***отделимой от нуля****, если существуют число* $K > 0$ *и номер* $N$ *такие, что* $|x_n| > K$, $\forall n > N$.

6) Если $\{x_n\}$ – ограниченная и отделимая от нуля, $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

7) Если последовательность $\{x_n\}$ – б.б. и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$|x_n| < |y_n| \quad (|x_n| \le |y_n|),$$

то последовательность $\{y_n\}$ тоже является б.б.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

8) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. одного знака и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \le z_n \le y_n$ .

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже является б.б. того же знака.

(лемма о двух милиционерах для б.б. последовательностей)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

***Замечание.***

Рассмотрим сумму б.б. разных знаков. Результат будет зависеть от вида последовательностей. Например:

а) $\{x_n\} = \{n^2 + n\},\ \{y_n\} = \{-n^2\}$.

$$\Rightarrow\ \{x_n + y_n\} = \{n\} \to +\infty\,.$$

б) $\{x_n\} = \{n^2\},\ \{y_n\} = \{-n^2 + 5\}$.

$$\Rightarrow\ \{x_n + y_n\} = \{5\} \to 5\,.$$

в) $\{x_n\} = \{n^2\},\ \{y_n\} = \{-n^2 + (-1)^n\}$.

$$\Rightarrow\ \{x_n + y_n\} = \{(-1)^n\} - \text{предела не имеет}\,.$$

В случаях, когда результат нельзя указать заранее, говорят, что «имеет место неопределенность».

Сумму б.б. разных знаков называют «неопределенностью вида $\infty - \infty$».

Другие виды неопределенностей:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0\cdot\infty,\ \frac{\infty}{\infty-\infty},\ \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty},\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0},\ldots$$

«Раскрыть неопределенность» означает найти предел в данном конкретном случае.

# 4. Теорема Вейерштрасса. Число e

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ .

Число $b \in \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$ называется ***верхней*** (***нижней***) ***границей множества X***, если

$$x \le b \ (a \le x), \quad \forall x \in X .$$

Если $b$ является верхней границей множества $X$ , то $\forall b_1 \ge b$ тоже является его верхней границей.

Если $a$ является нижней границей множества $X$ , то $\forall a_1 \le a$ тоже является его нижней границей.

Наименьшая верхняя граница множества $X$ называется его ***точной верхней границей*** (***супремумом***). Обозначают: $\sup X$

Наибольшая нижняя граница множества $X$ называется его ***точной нижней границей*** (***инфимумом***). Обозначают: $\inf X$

Очевидно, что

а) $M = \sup X \Leftrightarrow c < M \quad \exists x_1 \in X$ такой, что $c \le x_1 \le M$ ;

б) $m = \inf X \Leftrightarrow c > m \quad \exists x_2 \in X$ такой, что $m \le x_2 \le c$ .

ТЕОРЕМА 1.

*Всякое ограниченное сверху множество имеет супремум.*

*Всякое ограниченное снизу множество имеет инфимум.*

ТЕОРЕМА 2 (Вейерштрасса). *Монотонная и ограниченная числовая последовательность сходится.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ПРИМЕР. Докажем, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится.

Предел последовательности $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ принято обозначать буквой $e$.

Число $e$ – иррациональное. Доказано

$$e \approx 2{,}718281828459045 \,.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой***, *если* $\forall M>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}$ *такое*, *что*

$$|x_n|>M,\ \ \forall n>N.$$