

Математический анализ  
Раздел: Введение в анализ

Тема: *Числовые последовательности*  
(основные определения, предел последовательности,  
свойства сходящихся последовательностей)

Лектор Янущик О.В.

2015 г.

## §2. Числовые последовательности

### 1. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. **Последовательностью** называется перенумерованное множество  
*(чисел – числовая последовательность,  
функций – функциональная последовательность и т.д.)*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. **Последовательностью** называется функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Если область значений последовательности – числовое множество, то последовательность называют **числовой**, если область значений – множество функций, то последовательность называют **функциональной**.

## Принято обозначать:

аргумент последовательности:  $n$  (или  $k$ )

значения функции:  $x_n$ ,  $y_n$  и т.д.

**Называют:**  $x_1$  – первый член последовательности,  
 $x_2$  – второй член последовательности и т.д.  
 $x_n$  –  $n$ -й (общий) член последовательности.

## Способы задания последовательностей:

1) явно (т.е. формулой  $x_n = f(n)$  )

2) рекуррентным соотношением

(т.е. формулой  $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$  )

## Записывают последовательность:

$\{ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \}$  – развернутая запись;

$\{ x_n \}$  – короткая запись (где  $x_n$  – общий член)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Числовая последовательность  $\{x_n\}$  называется

- **ограниченной снизу**, если  $\exists a \in \mathbb{R}$  такое, что  $a \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- **ограниченной сверху**, если  $\exists b \in \mathbb{R}$  такое, что  $x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- **ограниченной**, если  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  такие, что  $a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$

**Замечание.** Условие « $\exists a, b \in \mathbb{R}$  такие, что  $a \leq x_n \leq b$ » равносильно условию « $\exists M > 0$  такое, что  $|x_n| \leq M$ »

- **возрастающей (неубывающей)**, если
$$x_n < x_{n+1} \text{ (} x_n \leq x_{n+1} \text{), } \forall n \in \mathbb{N};$$
- **убывающей (невозрастающей)**, если
$$x_n > x_{n+1} \text{ (} x_n \geq x_{n+1} \text{), } \forall n \in \mathbb{N};$$

**Замечание.** Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие последовательности называются **монотонными**.

## 2. Предел последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число  $a \in \mathbb{R}$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$  если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Записывают:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad x_n \rightarrow a$

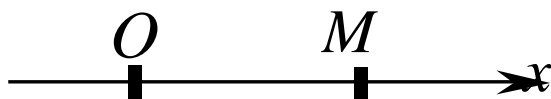
Говорят: последовательность  $\{x_n\}$  сходится (стремиться) к  $a$ .

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся***  
(***сходящейся к  $a$*** )

Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ предела последовательности

Пусть  $r \in \mathbb{R}$ ,  $M(r) \in Ox$



$M(r)$  – геометрическая интерпретация числа  $r \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ .



Интервал  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  называют  ***$\varepsilon$ -окрестностью точки***  $x_0$ .  
(геометрическое определение  $\varepsilon$ -окрестности точки)

Будем обозначать:  $U(x_0, \varepsilon)$

Имеем:  $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$

(алгебраическое определение  $\varepsilon$ -окрестности точки)



Из определения предела последовательности получаем: если  $\{x_n\} \rightarrow a$ , то с геометрической точки зрения это означает, что в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  находятся все члены последовательности  $\{x_n\}$ , за исключением может быть конечного их числа. (Геометрическая интерпретация предела последовательности).

$\Rightarrow a$  – точка «сгущения» последовательности  $\{x_n\}$ .

# СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Две последовательности, отличающиеся на конечное число членов, ведут себя одинаково относительно сходимости.

2) Последовательность может иметь не более одного предела  
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3) Если  $\{x_n\} \rightarrow a$ , то  $\{|x_n|\} \rightarrow |a|$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – очевидно, в силу  $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ .

4) Сходящаяся последовательность ограничена



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Последовательность, сходящуюся к нулю, называют **бесконечно малой**.

5) ЛЕММА 1 (о роли б.м. последовательностей). Число  $a \in \mathbb{R}$  является пределом последовательности  $\{x_n\} \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$ , где  $\{\alpha_n\}$  – бесконечно малая.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Суммой, разностью, произведением, частным двух последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  называются соответственно последовательности

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \quad (y_n \neq 0) \quad .$$

Последовательность  $\{cx_n\}$  называется *произведением*  $\{x_n\}$  на число  $c$  (произведение последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{c\}$ )

6) Пусть  $\{x_n\}$  – ограничена,  $\{\alpha_n\}$  – бесконечно малая. Тогда  $\{x_n \cdot \alpha_n\}$  – бесконечно малая.

7) Пусть  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  – сходящиеся и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже являются сходящимися последовательностями, причем  
(доказать самостоятельно)

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

СЛЕДСТВИЕ свойства 7. Если  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , то  $\forall c \in \mathbb{R}$  последовательность  $\{cx_n\}$  тоже сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ca$$

**Говорят:** «константу можно вынести за знак предела»

8) Пусть  $\{x_n\} \rightarrow a$  и  $x_n \geq 0$  (или  $x_n > 0$ ),  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $a \geq 0$ .

9) Пусть  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  – сходящиеся последовательности и  $x_n \leq y_n$  ( $x_n < y_n$ ),  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Тогда 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – следствие свойства 8.

## 10) ЛЕММА о двух милиционерах.

Пусть последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  сходятся к одному и тому же числу и  $\forall n \in \mathbb{N}$  имеет место неравенство

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда последовательность  $\{z_n\}$  тоже сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Число  $a \in \mathbb{R}$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$  если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$