

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

С.Н. Янин

**ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ.
ЧАСТЬ I**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК 533.9(075.8)

ББК 22.333Я73

Я662

Янин С.Н.

Я662 Лекции по основам физики плазмы. Часть I / С.Н. Янин; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 78 с.

В учебном пособии конспективно изложены основные понятия физики плазмы, такие как идеальность, вырождение, квазинейтральность, радиус экранирования, степень ионизации, вводится понятие кулоновского логарифма, рассматриваются вопросы динамики установления равновесной функции распределения. На основе дрейфового приближения рассматриваются электрический, центробежный и градиентный дрейфы. Излагается последовательность вывода уравнений непрерывности, движения и теплопроводности на основе моментов кинетического уравнения. Рассматривается приближение одножидкостной гидродинамики и коэффициенты переноса.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 011200 «Физика».

УДК 533.9(075.8)

ББК 22.333Я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор
кафедры ФЭ ТУСУРа

С.В. Смирнов

Кандидат физико-математических наук,
заведующий лабораторией ПЭ ИСЭ СО РАН

Н.С. Сочугов

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2012

© Спицын В.Г., 2012

© Обложка. Издательство Томского

Введение

Плазмой называется частично или полностью ионизованный квазинейтральный газ. Слово **Плазма** происходит от греческого *πλάσμα* («вылепленное», «оформленное»). Плазма иногда называется четвёртым (после твёрдого, жидкого и газообразного) агрегатным состоянием вещества. В 1879 году его открыл английский ученый Уильям Крукс, исследовавший электрические явления в разряженных газах.

В физике термин «плазма» ввели в 1929 году американские ученые Ирвинг Ленгмюр и Леви Тонкс, проводившие зондовые измерения низкотемпературной газоразрядной плазмы. Такая плазма легко получается если к разрядному промежутку, содержащему газ при давлениях порядка $1 \dots 10^{-2}$ тор, приложить высокое напряжение. В этом случае происходит электрический пробой: постоянно присутствующие в газе заряженные частицы ускоряются в электрическом поле, взаимодействуют с атомами и молекулами, газ частично ионизуется, образовавшиеся электроны и ионы, двигаясь в направлении электродов соответствующей полярности, создают разрядный ток. Газовый разряд можно повсеместно наблюдать в лампах дневного света, при электрической сварке и в грозových разрядах.

Современная физика плазмы зародилась в начале 50-х гг. двадцатого века. Тогда были испытаны первые термоядерные взрывные устройства и выдвинута идея создания термоядерного реактора на основе управления реакциями синтеза. Для протекания термоядерной реакции необходимо создать условия по сближению атомных ядер на такое расстояние, когда начинают действовать силы притяжения между ними. То есть, нужна энергия для совершения работы против сил кулоновского отталкивания между ядрами. Самый простой способ преодолеть силы отталкивания – нагреть вещество до температур порядка сотен миллионов градусов. При такой температуре в результате столкновений атомы теряют электроны, и любое вещество переходит в плазменное состояние. Проблема создания, нагрева и удержания плазмы послужила причиной быстрого роста числа научных исследований в этой области.

Важным стимулом развития физики плазмы являются астрофизические исследования. Известно, что 99% видимого вещества во Вселенной находится в состоянии плазмы (здесь мы не говорим о так называемой скрытой массе, природа которой до сих пор не ясна).

Например, звезды, их атмосферы, газовые туманности и значительная доля межзвездного газа представляют собой плазму. За пределами земной атмосферы находится плазма радиационных поясов Земли и солнечного ветра.

Плазма может быть не только *ионно-электронная*. В физике полупроводников вводится понятие *электронно-дырочной* плазмы, состоящей из свободных электронов и положительно заряженных «дырок». В атмосфере пульсаров существует *электрон-позитронная* плазма. При столкновениях высокоэнергетических частиц, полученных в экспериментах на адронном коллайдере, возникает *кварк-глюонная* плазма. Мы будем рассматривать только *ионно-электронную* плазму.

1. Идеальность. Вырождение. Квазинейтральность.

В физике слово «ионизированный» означает, что от значительной части атомов или молекул отделён по крайней мере один электрон, а «квазинейтральный» отражает тот факт, что суммарный электрический заряд всей плазмы в целом приблизительно равен нулю. Квазинейтральность определяется электрическими силами, которые связывают положительные и отрицательные заряды в плазме. При смещении группы электронов относительно ионов, то есть при разделении зарядов, возникают электрические поля, стремящиеся восстановить квазинейтральность. Присутствие заряженных частиц делает плазму проводящей средой, которая взаимодействует с магнитными и электрическими полями.

В основе отличия свойств плазмы от характеристик нейтральных газов основную роль играют два фактора. Во-первых, взаимодействие частиц плазмы между собой характеризуется кулоновскими силами притяжения и отталкивания, убывающими с расстоянием достаточно медленно (по закону Кулона), в то время, как нейтральные частицы взаимодействуют на расстояниях порядка атомного диаметра.

По этой причине взаимодействие частиц в плазме является, строго говоря, не «парным», а «коллективным», то есть одновременно взаимодействует друг с другом большое количество частиц.

Во-вторых, электрические и магнитные поля очень сильно действуют на плазму (в отличие от нейтральных газов), вызывая появление в ней объёмных зарядов и токов и обуславливая целый ряд специфических свойств [1,3,4].

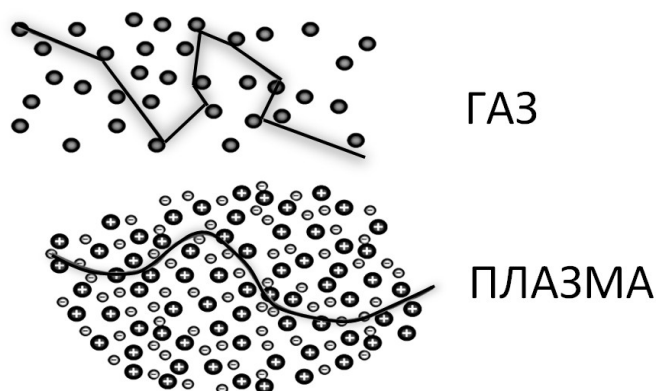


Рис. 1.1. Траектории движения частиц: 1-нейтральный газ; 2 – плазма

Как и идеальный газ, плазма во многих случаях описывается распределением Больцмана (статистически равновесной функцией распределения по импульсам \mathbf{p} и координатам \mathbf{r} частиц, движущихся по законам классической механики во внешнем потенциальном поле):

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = A \exp\left\{-\left[\mathbf{p}^2 / 2m + U(\mathbf{r})\right] / k_B T\right\}. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{p}^2 / 2m$ - кинетическая энергия частицы массой m , $U(\mathbf{r})$ - ее потенциальная энергия во внешнем поле, T - абсолютная температура. Постоянная A определяется из условия, что полное суммарное число частиц, находящихся в различных возможных состояниях, равно полному числу частиц в системе.

Когда потенциальной энергией во внешнем поле можно пренебречь ($U(\mathbf{r}) = 0$), распределение Больцмана переходит в распределение Максвелла:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (1.2)$$

где v – скорость частицы, T – температура плазмы, k_B – постоянная Больцмана, равная $1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/°К.

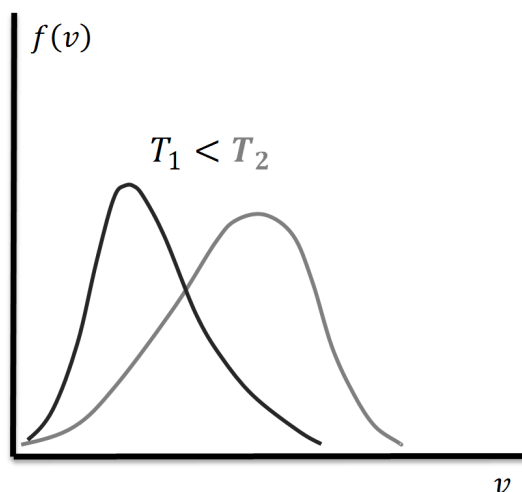


Рис.1.2. Общий вид функции распределения

Отсюда находится известная зависимость средней кинетической энергии от температуры:

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} m v^2 f(v) dv = \frac{3}{2} k_B T. \quad (1.3)$$

Таким образом, эта зависимость справедлива для максвелловского распределения. Если распределение частиц подчиняется другому закону, то и выражение будет другим.

Поскольку в физике достаточно часто распределение частиц по скоростям близко к максвелловскому, температуру принято измерять в энергетических единицах, отождествляя её с энергией $3/2 \cdot k_B T$. Удобной единицей измерения является электронвольт: $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$, что соответствует температуре 11600°K .

2. Способы классификации ионно-электронной плазмы

1. По роли квантовых эффектов

По роли квантовых эффектов плазму можно разделить на *классическую* и *вырожденную*. Вырожденной называется плазма, у которой существенную роль играют квантовые эффекты или, другими словами, когда среднее расстояние между частицами соизмеримо с длиной волны де Бройля:

$$\lambda_B = 2\pi\hbar / p, \quad (2.1)$$

где p – импульс частицы, равный \sqrt{mT} , а $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}$ – редуцированная постоянная Планка.

Рассмотрим плазму с температурой T , плотность которой равна n частиц в единице объема (среднее расстояние между частицами равно $n^{-1/3}$). При большой плотности существенными становятся квантовые эффекты, тогда как относительно разреженная плазма может описываться классической теорией. Получим условие, когда плазма может считаться *классической*.

Если λ_B мала по сравнению с межчастичным расстоянием $n^{-1/3}$, то плазма считается классической. Таким образом, условие классичности плазмы означает, что $\lambda_B = n^{-1/3}$. С учетом соотношения (2.1) его можно записать в виде

$$T \gg \frac{4\pi^2 \hbar^2 n^{2/3}}{m}. \quad (2.2)$$

Это неравенство по мере повышения концентрации плазмы нарушается сначала для электронов, а затем для ионов, так как масса частиц m входит в знаменатель.

Если условие (2.2) не выполняется, то плазма считается *вырожденной*.

2. Роли межчастичного взаимодействия

Важной характеристикой плазмы является относительная роль электростатического взаимодействия заряженных частиц друг с другом. По этому признаку плазму можно разделить на *идеальную* и *неидеальную*.

Идеальной называется плазма в которой средняя потенциальная энергия взаимодействия частиц W_E гораздо меньше средней кинетической энергии W_K . Такая плазма описывается уравнением Максвелла, и для нее справедливо выражение (1.3):

$$W_K : T. \quad (2.3)$$

Потенциальную энергию электростатического взаимодействия можно оценить используя математический аппарат физики твердого тела. Так же, как и в ионных кристаллах (NaCl, CsCl и др.), где положительно и отрицательно заряженные ионы выстроены в кристаллическую решетку, в плазме существуют положительные ионы и электроны. В силу кулоновского взаимодействия частицы одного знака стараются группироваться вокруг частиц другого знака, чем обусловлено экранирование Дебая, которое мы рассмотрим позднее. Представим, что в какой-то момент времени частицы в плазме распределились подобно ионам в кристалле. Если частицы однозарядные, то потенциальную энергию взаимодействия между ними можно записать в виде:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\pm e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}, \quad (2.4)$$

где \mathbf{R}_i – радиус-вектор i – той частицы. Множитель $1/2$ возникает вследствие того, что в выражении (2.4) каждое взаимодействие учитывается дважды.

В физике твердого тела это выражение для полной энергии электростатического взаимодействия преобразуется с помощью решеточных сумм [9] следующим образом:

$$W_E^{com} = -\frac{1}{2} N a_M \frac{e^2}{a}, \quad (2.5)$$

где N – общее количество частиц, a – постоянная решетки (в данном случае среднее расстояние между частицами, равно $n^{-1/3}$), a_M – постоянная Маделунга, равная 1,7476 для структуры типа NaCl.

Тогда энергии электростатического взаимодействия на одну частицу примет вид:

$$W_E = -\frac{1}{2} a_M \frac{e^2}{a}. \quad (2.6)$$

Отсюда можно сделать заключение, что для однозарядной плазмы потенциальная энергия, приходящаяся на одну частицу:

$$W_E \sim -\frac{e^2}{n^{-1/3}}. \quad (2.7)$$

Точное выражение для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия пробного заряда в плазме получается из решения задачи о экранирующем потенциале (при рассмотрении радиуса экранирования Дебая).

Используя выражения (2.3) и (2.7), запишем условие идеальности в виде:

$$T \gg e^2 n^{1/3}. \quad (2.8)$$

В физике вводится так называемый параметр неидеальности плазмы:

$$\gamma = \frac{e^6 n}{T^3}. \quad (2.9)$$

Соответственно, плазма называется идеальной, если

$$\gamma \ll 1. \quad (2.10)$$

В идеальной плазме кулоновское взаимодействие частиц мало, и во многих задачах им можно вообще пренебречь. Термодинамические свойства такой плазмы мало отличаются от свойств идеального газа.

Для *квантовой* (или *вырожденной*) плазмы, температура T которой мала по сравнению с $\hbar^2 n^{2/3} / m$, критерий идеальности изменяется.

Хотя выражение (2.4) для энергии электростатического взаимодействия сохраняет силу, кинетическая энергия частиц теперь определяется не столько температурой плазмы, сколько квантовыми эффектами, обусловленными принципом запрета Паули в соответствии с которым в одном квантовом состоянии может находиться не более двух фермионов с противоположно направленными спинами.

Примером квантовой ионно-электронной плазмы в обыденной жизни могут служить металлы. У них ионы находятся в узлах кристаллической решетки, а электроны представляют собой вырожденный газ. Верхний заполненный уровень электронов проводимости называется уровнем Ферми, а их энергия – энергией Ферми.

На нижнем уровне энергии находится два электрона, а по мере возрастания энергии, количество электронов на каждом энергетическом уровне увеличивается. Максимальное количество электронов в металле находится вблизи поверхности Ферми. Интересно отметить тот факт, что даже при нормальных условиях энергия фермиевских электронов соответствует температуре, близкой к температуре поверхности Солнца. Электрон просто не может отдать часть своей энергии, так как в этом случае он перейти на более низкий энергетический уровень, который занят. При среднем расстоянии между частицами $n^{-1/3}$ получается, что каждый электрон заперт в области размерами $\Delta x \sim n^{-1/3}$. В соответствии с принципом неопределенностей Гайзенберга

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar / 2, \quad (2.11)$$

частица, локализованная в интервале Δx , должна иметь импульс

$$p \sim \hbar / \Delta x \quad (2.12)$$

и, соответственно, кинетическую энергию

$$W_K = p^2 / 2m, \quad (2.13)$$

то есть:

$$W_K \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m}. \quad (2.14)$$

Эта оценка по порядку величины совпадает с Фермиевской энергией вырожденного электронного газа. Условие идеальности для квантовой плазмы из уравнений (2.7) и (2.14) принимает вид

$$n \ll n_* = \left(\frac{me^2}{\hbar^2} \right)^3. \quad (2.15)$$

Неравенства (2.2), (2.8) и (2.15) выделяют в плоскости переменных n, T четыре области (рис. 2.1).

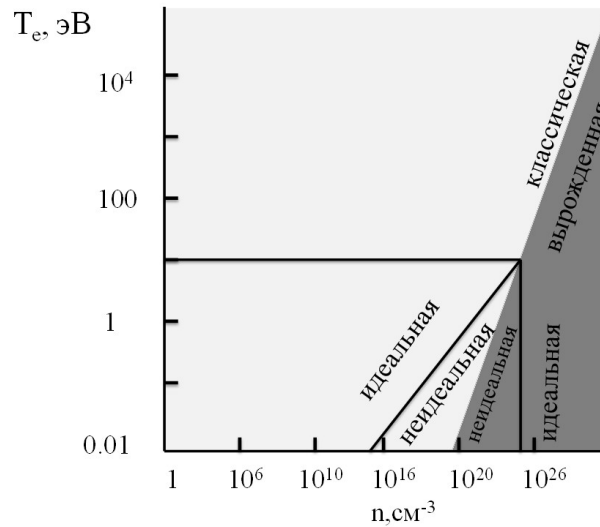


Рис. 2.1. Классификация плазмы: 1 — идеальная классическая плазма 2 — неидеальная классическая плазма; 3 — неидеальная квантовая плазма; 4 — идеальная квантовая

Это область классической идеальной плазмы (1), классической неидеальной плазмы (2), квантовых неидеальной (3) и идеальной (4) плазм. Все четыре области имеют одну общую точку, в которой

$$n : n_* = \left(\frac{me^2}{h^2} \right)^3 = a_B^{-3}, \quad (2.16)$$

$$T : T_* = \frac{1}{2} e^2 n_*^{1/3} = \frac{me^4}{2h^2} = 1Ry. \quad (2.17)$$

Здесь a_B - боровский радиус, а Ry — энергия Ридберга (энергия связи электрона в атоме водорода).

3. По температуре

Достаточно часто плазму подразделяют на *низкотемпературную* ($T < 10$ эВ) и *высокотемпературную* ($T \gg 10$ эВ). Такое деление в значительной степени условно, но оно отражает тот факт, что высокотемпературная плазма является полностью ионизованной, тогда как в низкотемпературной бывает важным учет наличия нейтральных частиц.

4. По условию термодинамического равновесия

К термодинамическому равновесию плазма, как и любая термодинамическая система, приходит через достаточно большой промежуток времени в условиях изоляции от окружающей среды. Таким образом, в *термодинамически равновесной плазме* концентрации ионов, электронов и нейтральных атомов постоянны, скорости прямых и обратных реакций равны между собой, нет передачи энергии между компонентами плазмы. Если эти условия нарушаются, плазма называется *неравновесной*.

Средние энергии различных типов частиц, составляющих плазму, могут отличаться между собой. В этом случае плазму нельзя характеризовать одним значением температуры. Различают электронную T_e , ионную T_i (она может быть своя для каждого типа ионов) и температуру нейтральных атомов T_a . Плазма, у которой температуры всех компонентов равны между собой, называется

изотермической. В противном случае плазма – *не изотермическая*. Например, плазма металлов равновесная, но не изотермическая.

5. По времени существования

По времени существования плазму можно разделить на *стационарную* и *нестационарную*. *Стационарная* обладает большим временем жизни по сравнению с временами релаксации в ней. *Нестационарная* (импульсная) живёт ограниченное время, определяемое как периодом установления равновесия в плазме, так и внешними условиями. Плазма, время жизни которой превышает характерное время переходных процессов, называется *квазистационарной*. Например, плазма в канале молнии образуется и поддерживается в результате прохождения через него электрического тока. Характерное время установления равновесия в проводящем канале $\sim 10^{-5}$ с, а характерное время расширения (то есть разрушения) этого проводящего канала $\sim 10^{-3}$ с, поэтому в течение прохождения основной части тока через проводящий канал плазму в нём можно считать квазистационарной.

6. По природе происхождения

Газоразрядная плазма образуется когда к разрядному промежутку прикладывается постоянное или переменное электрическое поле, достаточное для электрического пробоя газа. К этому типу относится не только плазма, генерируемая в различных ионно-плазменных приборах, но и возникающая при различных атмосферных явлениях.

Пучковая плазма возникает при прохождении пучка заряженных частиц через газ. Обычно для её создания используются пучки электронов с энергией в несколько сотен кэВ. При взаимодействии пучка заряженных частиц с атомами и молекулами газа происходит их ионизация.

Лазерная плазма - нестационарная плазменная среда, образующаяся при воздействии мощного лазерного излучения на вещество. Возникает при оптическом пробое в газовых средах, при облучении лазером твёрдой мишени, в оптических разрядах, поддерживаемых лазерным излучением.

Термоядерная плазма возникает в результате термоядерной реакции, когда лёгкие атомные ядра объединяются в более тяжёлые с выделением энергии. Наблюдается в звездах, при термоядерном взрыве, в установках для управляемого термоядерного синтеза, в лазерных термоядерных мишенях.

7. По месту возникновения

Выделяется ионосферная плазма, плазма солнечного ветра, межзвездного газа, солнечной короны и так далее.

Для ориентировки в порядках величин в таблице 2.1 приведены некоторые типичные параметры плазм, встречающихся в природе и технике.

Таблица 2.1

Параметры плазмы

Плазма	$n, \text{см}^{-3}$	$T, \text{эВ}$
Межзвездный газ	~ 1	≤ 1
Ионосфера Земли		
60...90 км от поверхности	$10^2 \dots 10^3$	$\sim 0,02$ (ионы)
>200 км	$\sim 10^6$	0,05...0,2 (ионы)
Солнечный ветер	5...10	5...20
Металл	$10^{22} \dots 10^{23}$ (ионы)	$\sim 1 \dots 10$ (электроны)
Магнитное удержание плазмы для УТС	$10^{12} \dots 10^{15}$	$10^3 \dots 10^4$
Инерциальное удержание плазмы для УТС	$10^{20} \dots 10^{24}$	$10^2 \dots 10^3$
Газовый разряд	$10^6 \dots 10^{12}$	~ 1
Солнечная корона	$\sim 10^6$	~ 100
		~ 1000

Солнечное ядро	$\sim 160 \text{ г/см}^3$	
----------------	---------------------------	--

3. Дебаевская экранировка. Энергия кулоновского взаимодействия частиц в плазме.

Важнейшей особенностью плазмы является ее *квазинейтральность*. Это понятие означает, что объемные плотности положительных и отрицательных заряженных частиц, из которых она образована, оказываются почти одинаковыми, то есть отрицательный заряд электронов в ней почти точно нейтрализует положительный заряд ионов. При любых воздействиях на нее плазма стремится сохранить свою квазинейтральность. Если в каком-то месте происходит случайное смещение (например, за счет флуктуации плотности) части электронов, создающее избыток электронов в одном месте и недостаток в другом, в плазме возникает сильное электрическое поле, которое препятствует разделению зарядов и быстро восстанавливает квазинейтральность.

Если в плазме есть разные сорта ионов, характеризующиеся зарядовыми числами Z_j и плотностью n_j , то условие квазинейтральности плазмы принимает следующий вид:

$$n_e = \sum_j n_j Z_j. \quad (3.1)$$

Кулоновское взаимодействие зарядов в плазме проявляется в отталкивании одноименно заряженных частиц и притяжении зарядов разного знака. В результате, вблизи положительного заряда увеличивается концентрация отрицательно заряженных частиц, которые экранируют положительный заряд. Из-за такой экранировки потенциал исходного заряда убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем по закону Кулона. Аналогичная картина имеет место и вблизи отрицательного заряда.

Для того чтобы описать эффект экранировки количественно воспользуемся распределением, которое получается из выражения (1.1), путем интегрирования его по всем импульсам частиц:

$$n_j(\mathbf{r}) = n_{0j} \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r})}{k_B T_j}\right) \quad (3.2)$$

Здесь $j = e, i, a$ - индексы частиц различного сорта, $n_j(\mathbf{r})$ - плотность частиц сорта j в точке \mathbf{r} , а n_{0j} — плотность числа частиц в отсутствие внешнего поля.

Иногда функцию распределения (1.1) называют распределением Максвелла – Больцмана, а выражение (3.2) – распределением Больцмана.

Отметим еще раз, что в функциях распределения (1.1), (1.2) и (3.2) буква T имеет смысл температуры, мы же температуру будем выражать в энергетических единицах, понимая под ней, по сути дела, кинетическую энергию. Поэтому далее постоянною Больцмана k_B мы будем опускать.

Найдем распределение электрического потенциала вокруг заряженной частицы в плазме. Если в нее поместить сторонний заряд q , то вокруг произойдет перегруппировка частиц плазмы. Распределение потенциала вблизи него обозначим φ . Тогда потенциальная энергия заряженной частицы будет $e_j\varphi$. Электроны и ионы плазмы (последние считаются однозарядными) распределяются в потенциале φ по закону Больцмана

$$n_j = n_{0j} \exp\left(-\frac{e_j\varphi}{T_j}\right) \quad (3.3)$$

Предполагая, что $|e_j\varphi| \ll T_j$, экспоненту в (3.3) можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться двумя первыми членами разложения:

$$\exp\left(-\frac{e_j\varphi}{T_j}\right) \approx 1 - \frac{e_j\varphi}{T_j}. \quad (3.4)$$

Отсюда найдем выражение для возмущения плотности δn связанное с потенциалом φ в предположении, что плазма двухкомпонентная, то есть в ней присутствуют только ионы одинаковой зарядности и электроны:

$$\delta n = n_i - n_e = -e \left(\frac{zn_{0i}}{T_i} + \frac{n_{0e}}{T_e} \right) \varphi, \quad (3.5)$$

где $e = e_i = -e_e$. Здесь учтена квазинейтральность плазмы, то есть выполнено условие $zn_{0i} = n_{0e}$. Индексами «0» обозначены концентрации ионов и электронов в невозмущенном состоянии.

Электрическое поле, обусловленное разделением зарядов, определяется из уравнения Пуассона:

$$\operatorname{div} E = 4\pi e(n_i - n_e) = 4\pi e\delta n. \quad (3.6)$$

Учитывая, что

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad (3.7)$$

получим:

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta n. \quad (3.8)$$

Подставим сюда выражение (5):

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta n = \frac{\varphi}{d^2}, \quad (3.9)$$

где d – радиус Дебая - Хюккеля, определяемый по формуле

$$\frac{1}{d^2} = 4\pi e^2 \left(\frac{zn_{0i}}{T_i} + \frac{n_{0e}}{T_e} \right). \quad (3.10)$$

Таким образом:

$$d = \sqrt{\frac{T_i T_e}{4\pi e^2 (T_i n_e + z^2 T_e n_i)}} \quad (3.11)$$

Будем искать сферически симметричное решение уравнения (3.9), которое принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\varphi}{d^2}. \quad (3.12)$$

Его решение, обращающееся в нуль при $r \rightarrow \infty$, имеет вид:

$$\varphi = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{d}\right). \quad (3.13)$$

Константа A определяется из условия, что при $r \rightarrow 0$, φ стремится к незэкранированному кулоновскому потенциалу q/r . Отсюда $A = q$, и окончательное решение принимает вид:

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{d}\right). \quad (3.14)$$

Потенциал (3.14) называется потенциалом Дебая - Хюккеля.

Как видно из выражения (3.11), обе компоненты плазмы дают вклад в экранирование заряда. Однако, это выражение содержит произведения температуры одних компонентов на концентрации других, что затрудняет изучение влияния на плазменные процессы ионов и электронов по отдельности. Поэтому вводится понятие ионного и электронного дебаевского радиуса [2]:

$$\frac{1}{d} = \sqrt{\frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2}} \quad (3.15)$$

$$r_{Di} = \sqrt{\frac{T_i}{4\pi z^2 e^2 n_i}} \quad (3.16)$$

$$r_{De} = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 n_e}} \quad (3.17)$$

В случае быстропротекающих процессов основную роль в экранировании играют электроны как наиболее подвижная компонента плазмы. Поэтому в потенциале Дебая – Хюккеля часто вместо d используется дебаевский радиус экранирования для электронов. При больших r он убывает значительно быстрее, чем неэкранированный кулоновский потенциал q/r (рис. 3.1).

Если в плазме есть несколько сортов заряженных частиц, то радиус экранирования определяется следующей формулой:

$$\frac{1}{d} = \sum_j \frac{4\pi e^2 Z_j^2 n_j}{T_j}. \quad (3.18)$$

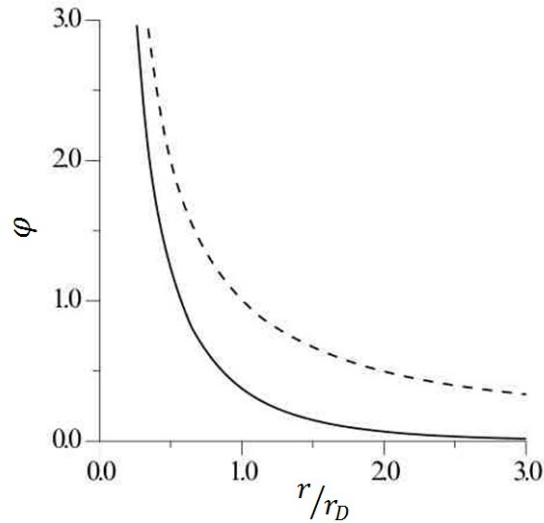


Рис. 3.1. Дебаевский (сплошная линия) и кулоновский (пунктир) потенциал в единицах q/d

Если размер плазменного образования соизмерим с дебаевским радиусом, то такой газ, по существу, не является плазмой, а представляет собой скопление отдельных заряженных частиц.

Даже если плазма в целом является квазинейтральной, то ее отдельные области размером порядка дебаевского радиуса и меньше являются существенно не квазинейтральными.

Вернемся к выражению (3.13). Потенциал $\varphi(r)$ можно представить суммой потенциалов пробного заряда q/r и потенциала экранирующего облака остальных частиц плазмы φ_{scr} , который можно найти как разность

$$\varphi_{scr} = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right) - \frac{r}{r_D}. \quad (3.19)$$

В пределе $r \rightarrow 0$ это выражение переходит в потенциал, который создают все остальные заряды плазмы в точке, где находится пробный заряд:

$$\varphi_{scr}(0) = q/r_D. \quad (3.20)$$

Зная $\varphi_{scr}(0)$, можно найти энергию взаимодействия пробного заряда с остальными частицами плазмы:

$$q\varphi_{scr}(0) = \frac{q^2}{r_D}. \quad (3.21)$$

Все вышесказанное о пробном заряде в полной мере справедливо для любой частицы плазмы. Таким образом, в плазме каждый заряд окружен экранирующим облаком, а его поле, с учетом экранировки, экспоненциально спадает с расстоянием в соответствии с выражением (3.14).

С помощью выражения (3.21) можно найти и энергию взаимодействия плазменных зарядов друг с другом. Для этого, необходимо просуммировать квадраты всех зарядов и результат разделить на величину дебаевского радиуса. Следует учесть, что при таком вычислении взаимодействие каждой пары зарядов учитывается дважды — один раз при умножении первого заряда на потенциал, в создании которого принимает участие второй заряд, а потом при умножении второго заряда на потенциал, в формировании которого принимает участие первый. Поэтому правильный результат получается дополнительным делением на 2. Таким образом, выражение для энергии в единице объема имеет следующий вид:

$$w = -\frac{1}{2} \sum_j \frac{1}{r_D} (Z_j e)^2 n_j. \quad (3.22)$$

В случае однозарядных ионов:

$$w = -\frac{ne^2}{r_D}. \quad (3.23)$$

Энергия $W_E = w/2n$, приходящаяся на одну частицу, равна

$$W_E = -\frac{e^2}{2r_D} = -\frac{T}{12N_D}. \quad (3.24)$$

Здесь мы ввели число частиц в сфере Дебая:

$$N_D = \frac{4}{3} \pi r_D^3 n. \quad (3.25)$$

Исходя из выражения (3.24) условие идеальности (малости энергии электростатического взаимодействия по сравнению с кинетической энергией частиц) можно записать в следующем виде:

$$N_D \gg 1. \quad (3.26)$$

Выражая N_D через плотность и температуру, легко убедиться, что неравенство (3.26) эквивалентно условию идеальности плазмы (2.8).

Дебаевский радиус характеризует пространственный масштаб, на котором происходит разделение зарядов в плазме (декомпенсация).

На рисунке 3.2 показана область разделения зарядов вблизи плазменной границы.

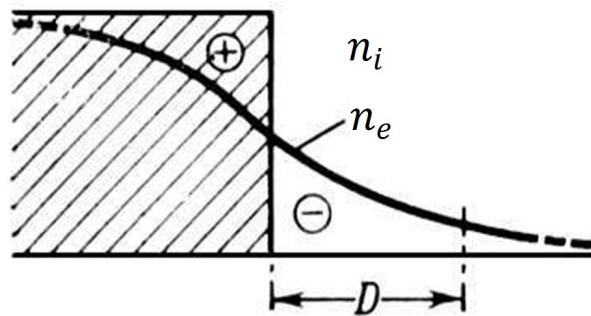


Рис. 3.2. Дебаевский радиус

Рассмотрим плоский слой электронов, который сместился от своего первоначального положения x_0 (когда плотность электронов была однородна и равна плотности ионов n_0) на расстояние x перпендикулярно своей плоскости. Тогда в области x_0 возникает зона избыточного положительного заряда с величиной $en_0(x-x_0)$ на единицу площади слоя, так как при своем движении слой «обнажает» ионный остов. При разделении зарядов возникает электрическое поле $E_x = 4\pi en_0(x-x_0)$, которые стремятся вернуть заряженные частицы в исходное положение. Приравняв ускорение электрона в слое (помноженное на массу) к возвращающей силе $-eE_x$, получим уравнение движения электрона:

$$m_e \ddot{x} = -4\pi e^2 n_0 (x - x_0) \quad (3.27)$$

Это уравнение описывает колебательное движение электрона с ленгмюровской частотой около его исходного положения:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}} \quad (3.28)$$

Если флуктуация плотности возникла в объеме с размером гораздо больше величины дебаевского радиуса, то тепловое движение не успевает её компенсировать за время ω_p^{-1} . В этом случае возникают плазменные колебания. Они сопровождаются изменением плотности электронов с периодом $2\pi/\omega_p$ вокруг среднего значения, равного плотности ионов. Эту частоту называют плазменной (и обозначают как ω_0 или ω_p) или электронной ленгмюровской частотой (обозначается ω_{Le}).

При выводе формулы для ленгмюровской частоты пренебрегалось возможностью вовлечения в движение ионов как значительно более массивной компоненты плазмы. Если отказаться от этого приближения, то можно показать, что формула для плазменной частоты будет иметь следующий вид [1,2]:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}, \quad (3.29)$$

$$\omega_{Le} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}}, \quad (3.30)$$

$$\omega_{Li} = \sqrt{\frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{m_i}}. \quad (3.30)$$

Здесь ω_{Le} и ω_{Li} - электронная и ионная ленгмюровские частоты.

4. Степень ионизации термодинамически равновесной плазмы. Формула Саха

Степень термической ионизации термодинамически равновесной плазмы определяется формулой Саха. Она была получена индийским

физиком Мегнадом Саха для описания процессов в атмосферах звезд в 1920 году. Независимо от него формула была получена американским химиком Ирвингом Ленгмюром в 1923 году. Поэтому она иногда называется уравнением Саха – Ленгмюра. Математически строго эта формула получается если воспользоваться методами статистической физики и рассмотреть процесс ионизации как химическую реакцию, потребовав минимума термодинамического потенциала в состоянии равновесия. В этом случае степень ионизации получается по аналогии с константой химического равновесия.

Воспользуемся менее строгим, но более наглядным подходом. Рассмотрим ионизацию атомарного водорода (диссоциация молекул водорода на атомы происходит при более низкой температуре, чем ионизация) [1].

Обозначим начальную концентрацию атомов n_{a0} . При ионизации возникают ионы с концентрацией n_i и электроны с концентрацией n_e (в нашем случае $n_e = n_i$). Количество оставшихся атомов, соответственно, равно $n_a = n_{a0} - n_i$.

На основе анализа вероятности электрону находиться в определенном энергетическом состоянии определим соотношение между ионами и нейтральными атомами. Если около протона находится связанный с ним электрон, то мы имеем атом, в противном случае это ион и свободный электрон. Вероятность того, что электрон находится в состоянии с энергией \mathcal{E}_k , можно представить в следующем виде:

$$w_k = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_k}{T}\right) \quad (4.1)$$

где A — константа, определяемая из условия нормировки полной вероятности на единицу. Отрицательные значения энергии электрона

($\mathcal{E}_k < 0$) соответствуют связанным состояниям, а положительные

($\mathcal{E}_k > 0$) - свободному движению. Энергия связанных состояний электрона в атоме водорода определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}_k = -\frac{me^4}{2\hbar^2 k^2}, \quad (4.2)$$

где k – главное квантовое число, принимающее целочисленные значения ($k = 1, 2, \dots$). Для упрощения вычислений предположим, что электрон может находиться только на основном энергетическом уровне ($k=1$, $\mathcal{E}_1 = -I$, где I – энергия Ридберга) или в непрерывном спектре с $\mathcal{E}_k > 0$.

Из условия нормировки найдем величину A :

$$\sum_k w_k = 1. \quad (4.3)$$

Отсюда:

$$A = \left[\sum_k \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_k}{T}\right) \right]^{-1}$$

$$= \left[\exp\left(\frac{I}{T}\right) + \sum_{\mathcal{E}_k > 0} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_k}{T}\right) \right]^{-1} \quad (4.4)$$

Несвязанные состояния образуют непрерывный спектр, поэтому сумму по положительным значениям энергии в (4.4) следует заменить на интеграл. Здесь мы воспользуемся квазиклассическим приближением, согласно которому каждому энергетическому состоянию электрона соответствует элементарный объем фазового пространства $d^3p d^3r$, равный $(2\pi\hbar)^3$:

$$\sum_{\mathcal{E}_k > 0} \rightarrow \int \frac{d^3p d^3r}{(2\pi\hbar)^3} \quad (4.5)$$

Кинетическая энергия свободных электронов в значительной части состояний непрерывного спектра гораздо больше потенциальной энергии их взаимодействия с ионами. Поэтому, мы будем пренебрегать потенциальной энергией и вычисления проводить в предположении, что энергия свободного электрона равна $p^2/2m$. Таким образом, член в выражении для A , обусловленный свободными электронами, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon_k > 0} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right) &= \int \frac{d^3 p d^3 r}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/2mT} \\
&= \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp e^{-p^2/2mT} \\
&= \frac{4\pi\nu}{(2\pi\hbar)^3} (2mT)^{3/2} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} \\
&= \frac{\nu m^{3/2} T^{3/2}}{2^{3/2} \pi^{3/2} \hbar^3}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

При вычислении использовался табличный интеграл:

$$\int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} = \sqrt{\pi} / 4. \tag{4.7}$$

В результате интегрирования по $d^3 r$ в выражение (4.5) вошел объем ν , приходящийся на один свободный электрон, каждый из которых может находиться в любой точке объема, занятого плазмой. Однако, при подсчете вероятности найти электрон рядом с заданным ядром не важно, какой именно из них есть тот самый электрон. Поэтому в качестве ν нужно взять объем, равный отношению полного объема плазмы к количеству свободных электронов, $\nu = n_e^{-1}$.

Выразив длину волны де Бройля через температуру (энергию) $\lambda_B = 2\pi\hbar / \sqrt{mT}$, запишем результат вычисления нормировочной константы в следующем виде:

$$A = (e^{1/T} + 1 / \lambda_B^3 n_e). \tag{4.8}$$

Вероятность w_a того, что рассматриваемый протон является ядром атома (т.е. вблизи него находится электрон в связанном состоянии), равна

$$w_a = \frac{e^{I/T}}{e^{I/T} + 1/\lambda_B^3 n_e}, \quad (4.9)$$

а вероятность w_i того, что электрон находится в непрерывном спектре (атом ионизован), равна

$$w_i = 1 - w_a = \frac{1/\lambda_B^3 n_e}{e^{I/T} + 1/\lambda_B^3 n_e}. \quad (4.10)$$

На основе этих выражений находим отношение плотностей ионов и электронов в плазме

$$\frac{n_i}{n_e} = \frac{w_i}{w_a} = \frac{e^{-I/T}}{\lambda_B^3 n_e}. \quad (4.11)$$

Отсюда находится выражение, связывающее между собой плотности ионов, электронов и нейтральных атомов через температуру плазмы - формулу Саха:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{e^{-I/T}}{\lambda_B^3}. \quad (4.12)$$

Однако, это выражение является не полным. У каждого электрона, иона или атома есть еще внутренние степени свободы. Например, в квантовой системе на одном энергетическом уровне может находиться два электрона с противоположно направленными спинами. В этом случае говорят, что уровень *вырожден*. Это обстоятельство учитывают, вводя статистический вес электрона g_e . В квантовой механике статистическим весом называется кратность вырождения уровня энергии. Как мы видим, $g_e = 2$. Поэтому в формуле (12) нужно под n_e понимать величину n_e/g_e , так как в формуле плотность электронов занижена в два раза. Аналогично, статистический вес имеют ион и атом. В частности, статистический вес атома водорода g_a в основном состоянии равен произведению статистических весов электрона g_e и протона g_i .

В окончательном виде формула Саха выглядит так:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{\lambda_B^3} \equiv K(T). \quad (4.13)$$

Здесь функция температуры $K(T)$ называется *константой равновесия*.

Степень ионизации плазмы α вводится как отношение концентрации ионов к концентрации атомных ядер:

$$\alpha = \frac{n_i}{n_{a0}}. \quad (4.14)$$

Тогда

$$n_e = n_i = \alpha n_{a0}, \quad (4.15)$$

$$n_a = (1 - \alpha) n_{a0}, \quad (4.16)$$

и из формулы Саха получаем:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{\lambda_B^3 n_{a0}}. \quad (4.17)$$

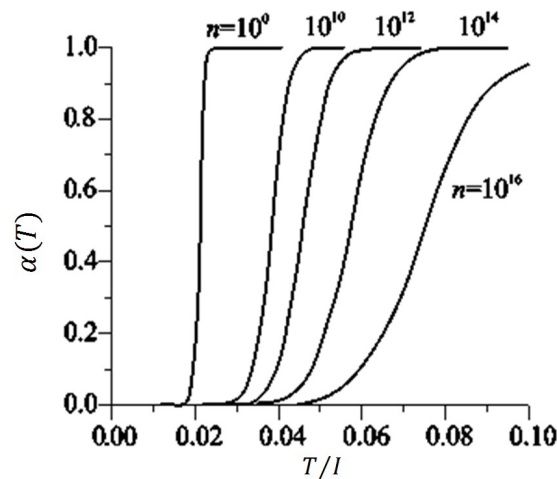


Рис. 4.1. Степень ионизации водородной плазмы при различных значениях плотности (указана на рисунке в единицах см^{-3}) [1]

На рисунке 4.1 представлена зависимость степени ионизации водородной плазмы от температуры при различных значениях плотности. Для других, более тяжелых элементов, качественная зависимость $\alpha(T)$ сохраняется. При малых температурах α равно нулю, а при больших - единице.

Следует напомнить, что формула Саха носит приближенный характер, так как она получена в предположении, что в плазме присутствуют только электроны, однозарядные ионы и нейтральные атомы, не учитываются многократная ионизация, возбуждение атомов и присутствие примесей. Не учитывается также и взаимодействие газа со стенками, при котором возможны ионизация газа электронами, испускаемыми горячей стенкой, и поверхностная ионизация (термическая десорбция положительных или отрицательных ионов с поверхностей твёрдых тел). Несмотря на столь ограничивающие допущения, формула применима во многих случаях, когда $\alpha \ll 1$.

5. Кулоновские столкновения. Кулоновский логарифм

Часто в плазме определяющую роль играют кулоновские столкновения между заряженными частицами. Рассмотрим следующую задачу: на рассеивающий центр заряда Z_2e налетает поток j частиц с зарядом Z_1e (рис. 5.1). Вычислим силу, действующую на него.

Обозначим прицельный параметр ρ . Тогда через колечко площадью $2\pi\rho d\rho$ в единицу времени пролетает $2\pi\rho d\rho j$ частиц. Каждая частица отклоняется на угол θ , зависящий от прицельного параметра, и передаёт рассеивающему центру продольный импульс

$$\Delta p_{\parallel} = mv(1 - \cos \theta). \quad (5.1)$$

Искомая сила F будет направлена вдоль скорости налетающего потока частиц и равна импульсу, передаваемому рассеивающему центру в единицу времени ($F = -dp/dt$),

$$F = \int_0^{\infty} jmv(1 - \cos \theta)2\pi\rho d\rho = jmv\sigma_{mp}, \quad (5.2)$$

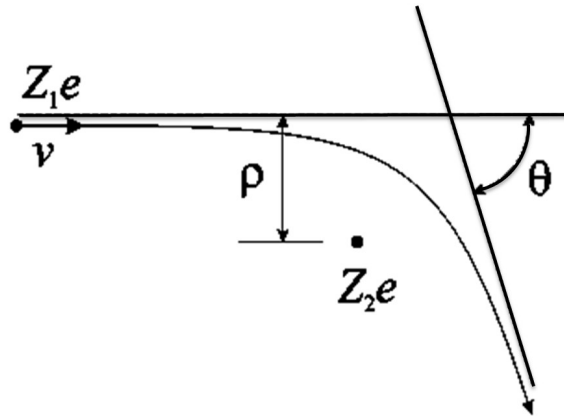


Рис. 5.1. Траектория заряда Z_1e , рассеивающегося на неподвижном кулоновском центре Z_2e

где

$$\sigma_{mp} = 2\pi \int_0^{\infty} (1 - \cos\theta) \rho d\rho, \quad (5.3)$$

называется *транспортным сечением*.

Для вычисления интеграла (5.3), необходимо знать зависимость θ от ρ .

Эту зависимость можно найти в приближении далеких пролетов, когда прицельное расстояние настолько велико, что угол θ можно считать малым, $\theta \ll 1$. Мы же воспользуемся формулой Резерфорда [5]:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m \rho v^2}. \quad (5.4)$$

Заметим, что эта формула получена в предположении, что масса налетающей частицы гораздо меньше массы рассеивающего центра (то есть в лабораторной системе координат). Известно, что основной вклад в транспортное сечение (5.3) вносят процессы рассеяния, происходящие на больших расстояниях. В этом случае $\theta \ll 1$, что позволяет разложить тангенс в выражении (5.4) в ряд по числам Бернулли и оставить только первый член разложения:

$$\theta = \frac{2Z_1Z_2e^2}{m\rho v^2}. \quad (5.5)$$

Используя разложение

$$1 - \cos \theta = \frac{1}{2}\theta^2, \quad (5.6)$$

окончательно находим

$$\sigma_{mp} = \frac{4Z_1^2Z_2^2e^4}{m^2v^4} \int \frac{d\rho}{\rho}. \quad (5.7)$$

Интеграл в выражении для транспортного сечения логарифмически расходится на нижнем и верхнем пределах. Расходимость при малых прицельных параметрах связана с используемым нами приближением далёких пролётов. Поскольку интеграл зависит от нижнего предела только логарифмически, то точное значение ρ_{\min} не очень существенно. В качестве ρ_{\min} можно выбрать прицельный параметр при котором происходит рассеяние на угол порядка $\pi/2$:

$$\rho_{\min} \sim \frac{Z_1Z_2e^2}{mv^2}. \quad (5.8)$$

Расходимость при больших значениях (ρ_{\max}) связана с тем, что кулоновский потенциал слишком медленно убывает с расстоянием. Однако, в плазме потенциал заряда экранируется, так что на расстояниях, больших дебаевского радиуса r_D , поле спадает экспоненциально. Учет этого обстоятельства приводит к тому, что прицельные расстояния, большие r_D , фактически не вносят вклада в (5.7), и поэтому в качестве верхнего предела ρ_{\max} в интеграле можно взять величину r_D :

$$\rho_{\max} \sim \left(\frac{T}{4\pi ne^2} \right) \quad (5.9)$$

Точное значение отношения $\rho_{\max} / \rho_{\min}$ не очень существенно, поскольку оно входит под знаком логарифма. Величину

$$\Lambda = \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \quad (5.10)$$

называют кулоновским логарифмом.

Под знаком логарифма в (5.10) стоит довольно большое число. Пусть для оценки $v^2 = 3T/m$, $Z_1 = Z_2 = 1$, тогда

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \frac{3T^{3/2}}{2\pi^{1/2} e^3 n^{1/2}} \sim N_D \gg 1. \quad (5.11)$$

Обычно в качестве Λ берут число 10...15.

Итак, для величины σ_{tr} мы получаем выражение

$$\sigma_{tr} = \frac{4\pi\Lambda Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2 v^4}. \quad (5.12)$$

Величина транспортного сечения уменьшается обратно пропорционально квадрату кинетической энергии налетающих частиц.

6. Релаксация импульса и энергии. Динамика установления равновесной функции распределения. Выравнивание электронной и ионной температур. Проводимость плазмы, убегание электронов

Если для газа такие понятия, как длина свободного пробега и частота столкновений достаточно очевидны, то для плазмы, в которой частицы (в области сферы Дебая) постоянно взаимодействуют между собой, их можно ввести опосредовано, используя выражение для транспортного сечения рассеяния. Для этого рассмотрим пучок быстрых электронов влетающий в холодную плазму. Изначально учтем только столкновения электронов пучка с ионами плазмы. Вследствие большой массы и малой тепловой скорости ионы можно считать бесконечно тяжелыми и покоящимися.

Пусть n - плотность ионов. Со стороны пучка на ионы действует сила (см. (5.2)) $m\nu j\sigma_{mp}n$.

В соответствии с третьим законом Ньютона, точно такая же сила действует на единицу объема падающего пучка в противоположном направлении. Разделив ее на плотность пучка n_b , найдем силу F , действующую на одну частицу пучка:

$$\vec{F} = -m\vec{\nu}j\sigma_{mp}n/n_b = \sigma_{mp}n\nu m\vec{\nu}. \quad (6.1)$$

Под действием этой силы пучок будет тормозиться, т. е. его направленная скорость ν будет уменьшаться:

$$\frac{d\vec{\nu}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = -\sigma_{mp}n\nu\vec{\nu}. \quad (6.2)$$

Уменьшение направленной скорости пучка не связано с потерей энергии электронами, поскольку их рассеяние происходит на неподвижных тяжелых ионах. Средняя скорость пучка изменяется вследствие того, что электроны в результате столкновений начинают отклоняться от первоначального направления движения. Оценим, как растет со временем средний квадрат угла рассеяния θ . Поскольку при рассеянии на малый угол θ продольная скорость электрона изменяется на величину $\Delta\nu = \nu(\cos\theta - 1) \approx -\nu\theta^2/2$, то уменьшению продольной скорости, описываемому уравнением (6.2), соответствует нарастание среднего квадрата угла:

$$\frac{d\langle\theta^2\rangle}{dt} = 2\nu\sigma_{mp}n. \quad (6.3)$$

Усреднение, обозначенное угловыми скобками, производится по всем электронам пучка. Выражение (6.3) справедливо до тех пор, пока среднеквадратичный угол рассеяния мал по сравнению с единицей,

$$\text{т.е. } \langle\theta^2\rangle^{1/2} \ll 1. \quad (6.4)$$

Из уравнений (6.2) и (6.3) вводится характерное время торможения τ . Оно по порядку величины равно $\tau = (n\sigma_{mp}\nu)^{-1}$; величину,

обратную τ , называют *частотой столкновений* (в данном случае электронов с ионами):

$$V_{eimp} = n\sigma v. \quad (6.5)$$

Произведение $V\tau$, которое имеет смысл пути, проходимого электроном в направлении движения пучка за характерное время торможения, называется *длиной свободного пробега*:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_{mp}}. \quad (6.6)$$

Такие понятия, как длина пробега, частота столкновений и транспортное сечение, можно ввести не только для частиц пучка, но и для частиц плазмы. Для этого выражения нужно усреднить по распределению скоростей частиц, взаимодействующих с рассеивающим центром. Усредненные по максвелловскому распределению скоростей формулы для σ_{mp} , V_{ei} и λ выглядят следующим образом:

$$\overline{\sigma_{mp}} \approx \frac{3 \times 10^{-13}}{T \mathcal{E} B} \text{ см}^2, \quad (6.7)$$

$$\overline{V_{ei}} = 3 \times 10^{-5} \frac{n \text{ см}^{-3}}{E \mathcal{E} B} \text{ с}^{-1}, \quad (6.8)$$

$$\overline{\lambda} = \frac{3 \times 10^{12} T \mathcal{E} B}{n \text{ см}^{-3}} \text{ см}. \quad (6.9)$$

На основе анализа столкновений частиц пучка с частицами плазмы можно найти скорость, с которой идет обмен импульсом и энергией между частицами. В этом случае нужно рассмотреть взаимодействие частиц в системе центра масс, а затем перейти в лабораторную систему координат. Средняя сила, действующая на рассеивающий центр, будет выглядеть следующим образом (пучок заряженных частиц падает в направлении оси z):

$$F_z^b = m_{ab} v_{app} j \sigma = m_{ab} v_a n_a v \frac{4\pi Z_a^2 Z_b^2 e^4 \Lambda}{m_{ab}^2 v_a^4} = \frac{4\pi Z_a^2 Z_b^2 e^4 \Lambda n_a}{m_{ab} v_a^2}. \quad (6.10)$$

Здесь $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$ — приведенная масса. Индексом a отмечены налетающие частицы, а индексом b - рассеивающий центр. Тогда средняя сила, действующая на налетающую частицу со стороны рассеивающего центра равна:

$$F_z^a = -\frac{n_b}{n_a} F_z^b \quad (6.11)$$

Эти формулы для получены для случая, когда пучок движется сквозь холодную плазму. Здесь сила трения пропорциональна обратному квадрату скорости налетающих частиц:

$$F_z^a \propto v_a^{-2}. \quad (6.12)$$

Если температура плазмы не равна нулю, то при вычислении силы трения необходимо произвести усреднение по функции распределения. Для максвелловского распределения в том случае, когда скорость налетающих частиц гораздо меньше тепловой скорости частиц плазмы ($v_a \ll v_{Tb}$), наблюдается следующая зависимость силы трения от скорости:

$$F_z^a = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{Z_a^2 Z_b^2 \Lambda n e^4}{m_{ab}} \left(\frac{m_b}{T_b} \right)^{3/2} v_a \quad (6.13)$$

То есть $F_z^a \propto v_a$.

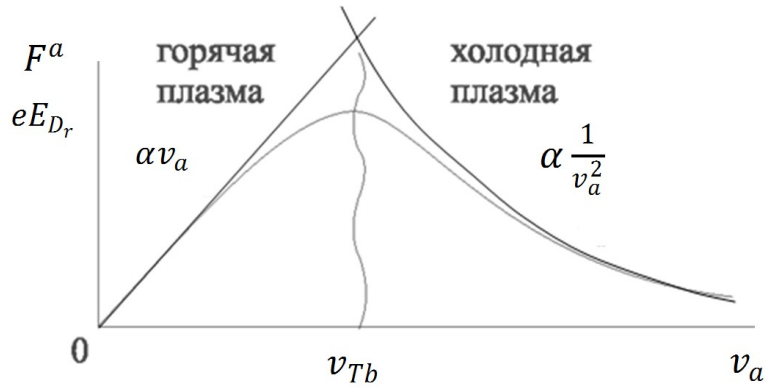


Рис. 6.1. Зависимость силы трения от скорости

На рисунке 6.1 представлена зависимость силы трения от скорости налетающих частиц. Для «горячей» плазмы сила трения пропорциональна скорости, а для холодной – ее обратному квадрату. Максимальная сила трения соответствует случаю, когда скорость налетающих частиц соизмерима с тепловой скоростью частиц плазмы.

Рассмотрим процесс протекания тока через плазму. Ток является откликом плазмы на внешнее электрическое поле \vec{E} . Под его действием начинают ускоряться заряженные частицы и возникнет сила трения \vec{F} со стороны ионов на электроны, которая в конечном итоге должна скомпенсировать электрическую силу, обусловленную электрическим полем:

$$e\vec{E} + \vec{F} = 0. \quad (6.14)$$

Обозначим через u среднюю направленную скорость электронов, установившуюся в результате баланса между ускоряющей силой и силой трения. Как следует из выражения (6.13), при $u \ll v_{Te}$ сила трения пропорциональна u :

$$F \sim m u v_{ei}, \quad (6.15)$$

причем частоту столкновений $\nu_{ei} \sim n_e \sigma v_e$ и сечение $\sigma_{tr} \sim \Lambda e^4 / T_e^2$ следует оценивать по тепловой скорости электронов. Полезно отметить, что скорость u относится только к *средней* направленной скорости движения электронов, тогда как *случайная* составляющая скорости будет равна v_{Te} . При усреднении по промежутку времени, за который происходит много столкновений, случайная составляющая силы

обращается в нуль, и остается только часть, направленная против скорости u . Если же скорость направленного движения электронов превысит их тепловую скорость, $u \gg v_{Te}$, то частоту столкновений ν_{ei} надо оценивать по скорости направленного движения u , тогда $F \propto u^2$.

Как видно из рисунка 6.1, сила F , рассматриваемая как функция u , достигает максимального значения F_{\max} , равного по порядку величины $m\nu_{Te} v_{ei}$ при $u \sim v_{Te}$.

Если $E > F_{\max}/e = E_{Dr}$, сила трения не может компенсировать силу, обусловленную действием электрического поля. В этом случае электроны будут безостановочно ускоряться. Такой эффект называется «убеганием» электронов. Минимальное электрическое поле, которое приводит к «убеганию», называется *полем Драйсера*:

$$E_{Dr} \sim \frac{\Lambda n e^3}{T_e} \sim \Lambda \frac{e}{r_D^2}. \quad (6.16)$$

Поле Драйсера есть критическое поле для вылета из плазмы основной группы электронов, имеющих скорость порядка тепловой. Однако даже при $E < E_{Dr}$ в плазме имеются электроны (так называемые максвелловские хвосты), скорость которых значительно превышает тепловую скорость. Сила трения, действующая на эти электроны мала, и они будут ускоряться даже в поле, меньшем чем поле Драйсера.

Рассмотрим вопрос о том, за какое время слабонервновесная плазма придет к максвелловскому распределению ?

Пусть в начальный момент электроны и ионы характеризуются неравновесными функциями распределения, отличными от максвелловских. Вследствие кулоновских столкновений функции распределения будут «максвеллизироваться».

Характерное время потери направленного импульса при рассеянии частей сорта a на частицах сорта b можно представить следующим образом:

$$\tau^{ab} = - \left(\frac{1}{\langle p_z^{ab} \rangle} \frac{d \langle p_z^{ab} \rangle}{dt} \right)^{-1}. \quad (6.17)$$

Выражение (6.11) перепишем в следующем виде:

$$\frac{d \langle p_z^{ab} \rangle}{dt} = - \frac{4\pi Z_a^2 Z_b^2 e^4 \Lambda n_b}{m_{ab} v_a^2} \frac{\langle p_z^{ab} \rangle}{m_a v_a}. \quad (6.18)$$

Отсюда, для холодной плазмы

$$\tau^{ab} = \frac{m_{ab} m_a v_{Ta}^3}{4\pi Z_a^2 Z_b^2 e^4 \Lambda n_b} = \frac{m_{ab} T_a^{3/2}}{4\pi Z_a^2 Z_b^2 e^4 \Lambda n_b \sqrt{m_a}}. \quad (6.19)$$

Таким образом, характерное время установления равновесия в электронном газе составляет порядка

$$\tau^{ee} \sim \frac{\sqrt{m_e} T^{3/2}}{4\pi \Lambda n e^4}. \quad (6.20)$$

Характерное время установления равновесия между ионами:

$$\tau^{ii} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \tau^{ee}. \quad (6.21)$$

Самое продолжительное время происходит процесс выравнивания температур между ионной и электронной подсистемами в силу большой разницы в массах:

$$\tau^{ie} \sim \frac{m_i}{m_e} \tau^{ee}. \quad (6.22)$$

7. Движение частиц в электрическом и магнитном полях

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле, которое происходит под действием силы Лоренца:

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (7.1)$$

$$\text{где } \dot{\vec{r}} = \vec{v}. \quad (7.2)$$

Умножая левую и правую части уравнения (7.1) на скорость и учитывая, что сила Лоренца перпендикулярна векторам \vec{v} и \vec{B} , получим выражение:

$$m\dot{\vec{v}}\vec{v} \equiv \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = 0. \quad (7.3)$$

Отсюда следует, что кинетическая энергия частицы сохраняется:

$$\frac{mv^2}{2} = \text{const}. \quad (7.4)$$

Постоянное во времени магнитное поле не производит работы над частицей. То есть модуль вектора скорости сохраняет постоянное значение.

Введем единичный вектор в направлении магнитного поля:

$$\vec{h} = \frac{\vec{B}}{B}. \quad (7.5)$$

Разложим вектор скорости на компоненты – параллельную магнитному полю и перпендикулярную ему:

$$v_{\parallel} = (\vec{v}\vec{h}), \quad (7.6)$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - v_{\parallel} \vec{h}. \quad (7.7)$$

Из выражения (7.1) следует, что

$$m\dot{v}_{\parallel} = 0, \quad (7.8)$$

продольное ускорение равно нулю, то есть постоянное однородное магнитное поле не меняет продольную компоненту скорости:

$$v_{\parallel} = \vec{v} \vec{h} = \text{const}. \quad (7.9)$$

Для ускорения поперек магнитного поля:

$$m\dot{\vec{v}}_{\perp} = \frac{e}{c} [\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}]. \quad (7.10)$$

Здесь поперечная компонента меняется только по направлению. Таким образом, движение частицы складывается из равномерного перемещения вдоль силовой линии поля и вращения вокруг силовой линии по окружности с постоянной угловой скоростью.

Если ввести вектор

$$\vec{\Omega} = \frac{e\vec{B}}{mc}, \quad (7.11)$$

то уравнение движения запишется в виде:

$$\dot{\vec{v}} = [\vec{v} \times \vec{\Omega}]. \quad (7.12)$$

Так как скорость постоянна, то это уравнение описывает вращение вектора \vec{v} . Поскольку проекция v_{\parallel} скорости на вектор $\vec{\Omega}$ неизменна, то стало быть вектор скорости вращается вокруг него. Модуль вектора $|\vec{\Omega}|$ представляет собой угловую скорость вращения и называется ларморовской или циклотронной частотой ω_H .

Траектория частицы представляет собой спираль, а радиус спирали - ларморовским радиусом

$$\rho = \frac{mv_{\perp}c}{|e|B} = \frac{v_{\perp}}{\omega_H}. \quad (7.13)$$

Как видно из выражений (7.11), (7.13), циклотронная частота зависит от массы и заряда частицы, напряженности магнитного поля, но не зависит от величины скорости. Ларморовский радиус определяется составляющей скорости, перпендикулярной магнитному полю, индукцией магнитного поля, массой и зарядом частицы. Следует отметить, что вектор угловой скорости положительно заряженной частицы антипараллелен, а отрицательно заряженной – параллелен магнитному полю.

8. Дрейфовое приближение

Если магнитное поле неоднородно и кроме него присутствует электрическое поле \vec{E} , то уравнения движения запишутся в виде:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad (8.1)$$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{q}{m} \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{\omega}_H]. \quad (8.2)$$

Здесь $\vec{\omega}_H = \frac{q\vec{B}(\vec{r})}{mc}$ - локальная циклотронная частота, зависящая

от величины магнитного поля в данной точке пространства.

Аналитическое решение уравнений движения возможно в случае, когда масштаб изменения электрического и магнитного полей велик по сравнению с ларморовским радиусом частицы и характерное время изменения полей гораздо больше продолжительности оборота по ларморовскому радиусу. Количественно эти условия можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \ll \omega_H, \quad \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} \ll \omega_H, \quad (8.3)$$

$$\frac{|\nabla B|}{B} \ll \frac{\omega_H}{v}, \quad \frac{|\nabla E|}{E} \ll \frac{\omega_H}{v}. \quad (8.4)$$

Эти условия выполнены тем лучше, чем больше величина магнитного поля, поскольку с его ростом возрастает ларморовская частота. Вместе с тем, величина напряженности электрического поля не должна быть слишком большой. На одном обороте частицы ее скорость должна меняться незначительно.

Оценим, как изменяется скорость заряженной частицы под действием электрического поля на одном обороте ларморовской спирали:

$$\Delta v \sim \frac{F}{m} \tau = \frac{qE}{m\omega} = c \frac{E}{B}. \quad (8.5)$$

Здесь τ - период обращения по спирали, F - сила, обусловленная действием электрического поля.

Таким образом, ограничение на величину напряженности электрического поля запишется в виде:

$$E \ll \frac{v}{c} B. \quad (8.6)$$

Если условия (8.3), (8.4) выполняются, то движение частицы можно представить как перемещение вдоль ведущего центра и вращение вокруг него с медленно меняющимся радиусом (рис. 8.1). Движение ведущего центра называют дрейфовым движением, а такой подход к описанию – дрейфовым приближением.

Формально радиус-вектор ведущего центра можно записать следующим образом:

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{1}{\omega_H} \left[\vec{v} \times \vec{h}(\vec{r}) \right], \quad (8.7)$$

где

$$\vec{\rho} = -\frac{1}{\omega_H} \left[\vec{v} \times \vec{h}(\vec{r}) \right]. \quad (8.8)$$

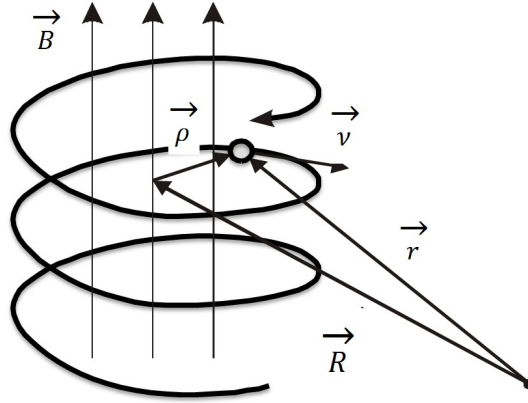


Рис. 8.1. Дрейфовое приближение: \vec{r} - радиус - вектор частицы; \vec{R} - радиус- вектор ведущего центра; $\vec{\rho}$ - радиус - вектор ларморовской спирали.

Рассмотрим, в общих чертах, метод получения дрейфовых уравнений. Продифференцируем выражение (8.7):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}} + \frac{1}{\omega_H} \left[\dot{\vec{v}} \times \vec{h}(\vec{r}) \right] + \frac{1}{\omega_H} \left[\vec{v} \times \dot{\vec{h}}(\vec{r}) \right] \\ - \frac{\dot{\omega}_H}{\omega_H^2} \left[\vec{v} \times \vec{h}(\vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Подставляем в него уравнения движения (8.1), (8.2), а также учитываем, что

$$\dot{\omega}_H = \frac{\partial \omega_H}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \omega_H, \quad (8.10)$$

$$\dot{\vec{h}} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{h}. \quad (8.11)$$

Здесь $\dot{\vec{h}} \equiv d\vec{h}/dt$ - производная Лагранжа, а $\partial\vec{h}/\partial t$ - производная Эйлера.

В полученном выражении величины $\vec{h}(\vec{r})$, $\omega_H(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ разлагаются в ряд Тейлора:

$$\vec{h}(\vec{r}) = \vec{h}(\vec{R}) + (\vec{\rho}\nabla)\vec{h}(\vec{R}), \quad (8.12)$$

и так далее. В итоге получается выражение для скорости ведущего центра

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}(\vec{\rho}, \vec{v}, \vec{E}(\vec{R}), \vec{B}(\vec{R}), \dots), \quad (8.13)$$

где члены с $\vec{\rho}$ и \vec{v} осциллируют с ω_H , а члены, содержащие $\vec{E}(\vec{R}), \vec{B}(\vec{R})$ и т.д. изменяются медленно.

После усреднения получается следующее выражение для скорости движения ведущего центра:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} = v_{\parallel}\vec{h} + \frac{c}{B^2}[\vec{E} \times \vec{B}] + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_H}[\vec{h} \times \vec{\alpha}] \\ + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_H B}[\vec{h} \times \nabla B]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Первый член этого уравнения описывает движение вдоль силовой линии, второй – электрический дрейф, третий – центробежный, а четвертый – градиентный дрейф.

На рисунке 8.2 представлена иллюстрация вектора кривизны. Здесь $\vec{\alpha}$ - вектор кривизны силовой линии ($\partial\vec{h}/\partial s$ - производная вдоль

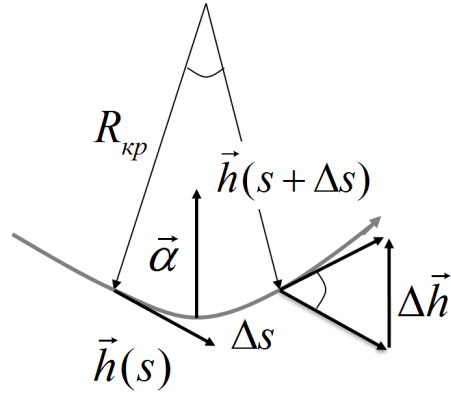


Рис. 8.2. Радиус кривизны силовой линии

силовой линии):

$$\vec{\alpha} = (\vec{h} \nabla) \vec{h} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial s}. \quad (8.15)$$

Так как

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta s}{R_{кр}}, \quad (8.16)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta \vec{h}}{\Delta s}, \quad (8.17)$$

то

$$|\vec{\alpha}| = \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{1}{R_{кр}}, \quad (8.18)$$

где $R_{кр}$ - радиус кривизны силовой линии.

Рассмотрим различные типы дрейфовых движений.

9. Электрический дрейф

Электрическим дрейфом называется дрейф заряженных частиц в однородном постоянном электрическом поле, перпендикулярном магнитному полю, другими словами, в скрещенных электрическом и магнитном полях. Электрическое поле, действующее в плоскости ларморовской окружности, ускоряет движение частицы в один полупериод ларморовского вращения и замедляет в другой.

На рисунке 9.1 магнитное поле направлено в сторону наблюдателя. Когда частица движется в направлении электрического поля, ее скорость увеличивается, и соответственно уменьшается, когда она движется в обратном направлении.

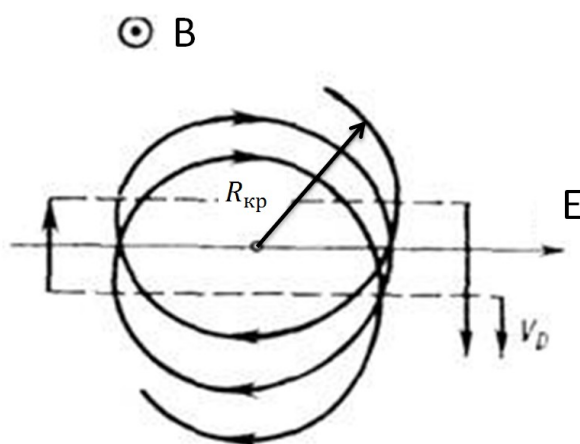


Рис. 9.1. Дрейф заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

В результате, вдоль направления электрического поля частица не смещается, но в направлении, перпендикулярном ему возникает разность скоростей v_D , так как составляющая скорости в одном направлении (на рисунке движение вниз) больше составляющей скорости при движении в противоположном направлении (движение вверх). Из-за разных радиусов ларморовской орбиты на различных участках траектория частицы не замкнута в направлении, перпендикулярном направлению электрического и магнитного полей. В этом направлении возникает дрейф. Скорость электрического дрейфа

$$\vec{v}_D = \frac{c}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}]. \quad (9.1)$$

Таким образом, она не зависит ни от знака и величины заряда, ни от массы частицы и одинакова для ионов и электронов по величине и направлению. Следовательно, электрический дрейф в магнитном поле приводит к движению всей плазмы в целом и не возбуждает дрейфовых токов.

10. Центробежный дрейф

При движении частицы со скоростью V_{\parallel} вдоль искривлённой силовой линии (рис. 10.1) с радиусом кривизны $R_{кр}$ возникает дрейф, обусловленный своим происхождением центробежной силой инерции (так называемый центробежный дрейф)

$$F_{ц} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_{кр}}. \quad (10.1)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что рассматриваемые дрейфы есть именно смещения центров ларморовских окружностей (мало отличающихся от смещений самих частиц) за счёт сил, перпендикулярных магнитному полю.

Центробежную силу можно выразить через вектор кривизны силовой линии магнитного поля

$$\vec{F}_{ц} = -mv_{\parallel}^2 \vec{\alpha}. \quad (10.2)$$

Она эквивалентна по своему действию электрическому полю

$$\vec{E}_{эkv} = \vec{F}_{ц} / q. \quad (10.3)$$

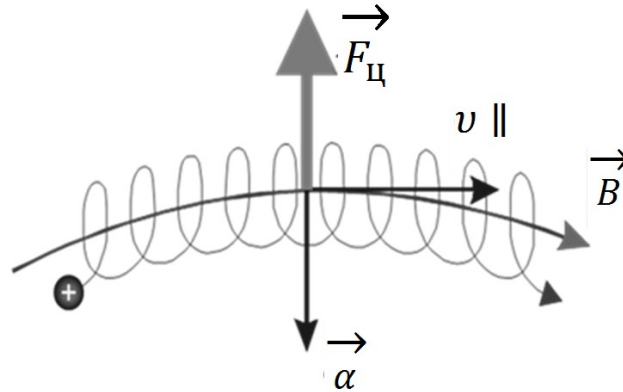


Рис. 10.1. Центробежный дрейф: смещение заряженных частиц происходит в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка

Отсюда, скорость центробежного дрейфа может быть записана следующим образом:

$$\vec{v} = \frac{c}{B^2} [\vec{E}_{\text{экв}} \times \vec{B}] = \frac{mv_{\parallel}^2 c}{qB^2} [\vec{B} \times \vec{\alpha}]. \quad (10.4)$$

Таким образом, вследствие центробежного дрейфа ионы и электроны в плазме смещаются в разные стороны.

11. Градиентный дрейф

Поперечная неоднородность магнитного поля, заключающаяся в сгущении и разрежении силовых линий (рис. 11.1), приводит к тому, что радиус орбиты в области сильного поля становится меньше, чем в области слабого.

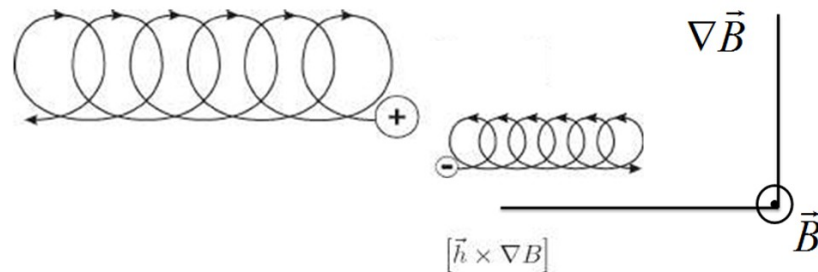


Рис. 11.1. Градиентный дрейф

На рисунке 11.1. показано движение заряженных частиц в условиях градиента магнитного поля. Силовые линии магнитного поля выходят из плоскости рисунка в сторону наблюдателя. Напряженность магнитного поля больше в верхней части рисунка и меньше в нижней. Это приводит к вращению частиц вокруг силовых линий магнитного поля по сложной траектории. Ларморовский радиус больше в области слабого поля и меньше в области более сильного. В результате происходит дрейф заряженных частиц со скоростью:

$$\vec{v} = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_H B} \left[\vec{h} \times \nabla B \right]. \quad (11.1)$$

Электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны.

12. Кинетическое уравнение с самосогласованным полем

Наиболее полным является описание плазмы с помощью кинетического уравнения. Каждый сорт частиц характеризуется функцией распределения

$$f = f(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (12.1)$$

Функция f определяется таким образом, чтобы величина $f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3r d^3v$ имела смысл числа частиц в элементарном объеме $d^3r d^3v$ шестимерного фазового пространства. Другими словами, функция распределения описывает плотность частиц в фазовом пространстве.

Шестимерный вектор $\vec{R}_6 = \{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$ - это радиус -вектор частицы в фазовом пространстве, а его производная по времени имеет смысл шестимерной скорости $\vec{V}_6 = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z\}$.

Для того, чтобы найти полное число частиц сорта N , необходимо проинтегрировать функцию распределения по пространству координат и скоростей:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (12.2)$$

Плотность потока частиц и плотность тока можно выразить следующим образом:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (12.3)$$

$$\vec{j} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v}. \quad (12.4)$$

Функция распределения удовлетворяет шестимерному уравнению непрерывности, поскольку она представляет собой плотность частиц в шестимерном фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_6(\vec{V}_6 f) = 0. \quad (12.5)$$

Здесь было использовано следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \text{div}_6(\vec{V}_6 f) &= \frac{\partial}{\partial x} \dot{x}f + \frac{\partial}{\partial y} \dot{y}f + \frac{\partial}{\partial z} \dot{z}f + \frac{\partial}{\partial v_x} \dot{v}_x f \\ &+ \frac{\partial}{\partial v_y} \dot{v}_y f + \frac{\partial}{\partial v_z} \dot{v}_z f. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Если в него подставить уравнения движения

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad (12.7)$$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}(\vec{r}, t)] \right) \quad (12.8)$$

то можно показать, что

$$\operatorname{div}_6 \vec{V}_6 = 0. \quad (12.9)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{div}_6 (\vec{V}_6 f) = \vec{V}_6 \nabla_6 f = \vec{v} \nabla f + \dot{\vec{v}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}. \quad (12.10)$$

Окончательно, вынося \vec{V}_6 из под оператора дифференцирования div_6 в выражении (12.5), запишем кинетическое уравнение в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \nabla f + \frac{e}{m} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}(\vec{r}, t)] \right) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (12.11)$$

В этом уравнении электрическое и магнитное поля содержат компоненты, медленно меняющиеся в пространстве и во времени, они соответствуют плавным изменениям скорости заряженных частиц $(\langle \vec{E} \rangle, \langle \vec{B} \rangle)$, и микрополя $(\vec{E}_{cl}, \vec{B}_{cl})$, соответствующие столкновениям частиц и, соответственно, дискретным изменениям скоростей:

$$\vec{E} = \langle \vec{E} \rangle + \vec{E}_{cl}, \quad (12.12)$$

$$\vec{B} = \langle \vec{B} \rangle + \vec{B}_{cl}. \quad (12.13)$$

Микрополя отличны от нуля на расстояниях порядка средних расстояний между частицами. Поскольку работа с функцией распределения предполагает, что в фазовом пространстве объемом $d^3 r d^3 v$ содержится достаточно большое количество частиц, уравнение (12.11) следует усреднить по большому ансамблю частиц. В первом

приближении это можно сделать путем пренебрежения микрополями. Оставшуюся часть электрического и магнитного полей обозначают по-прежнему, как \vec{E} и \vec{B} , но теперь уравнение (12.11) хотя формально и сохраняет свой прежний вид, но уже не учитывает столкновения частиц. Поля, входящие в него являются самосогласованными, так как определяются усредненной плотностью заряда и усредненным током в плазме. Эти поля описываются уравнениями Максвелла.

Кинетическое уравнение (12.11) с самосогласованным полем называется уравнением Власова. Если в нем $\partial f / \partial t$ оставить с левой стороны, а все остальные члены перенести в правую часть, то уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\dot{\vec{r}} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \dot{\vec{v}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}. \quad (12.14)$$

Отсюда следует его физический смысл: изменение функции распределения в данной точке пространства обусловлено приходом в нее частиц из других точек и с другими скоростями.

Теперь необходимо учесть процесс столкновения частиц между собой. Столкновения приводят к скачкообразному изменению скорости, которое представляет собой переброс в фазовом пространстве частиц из одной точки $\{\vec{r}_1, \vec{v}_1\}$ в другую $\{\vec{r}_2, \vec{v}_2\}$, причем $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. Такие перескоки описываются путем добавления в правую часть уравнения Власова дополнительного члена:

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \nabla f + \frac{q_a}{m_a} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}(\vec{r}, t)] \right) \cdot \dot{\vec{v}} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \sum_b St_{ab}. \quad (12.15)$$

Выражение St_{ab} называется интегралом столкновений частиц сорта a с частицами сорта b . Суммирование проводится по всем

сортам частиц. Физический смысл интеграла столкновений следующий: это количество частиц, которые появляются (или исчезают) в единице шестимерного объема фазового пространства в единицу времени.

В общем виде интеграл столкновений представляет собой сложную функцию – дифференциальную функцию от f_a и f_b . В простейшем случае, когда функция распределения частиц сорта b является максвелловской, а частота столкновений постоянна $V_{ab} = const$, интеграл столкновений может быть записан в следующем виде:

$$St_{ab} = -V_{ab} (f_a - f_{b_{\max}}). \quad (12.16)$$

Если интеграл столкновения равен нулю, то кинетическое уравнение переходит в бесстолкновительное кинетическое уравнение (уравнение Власова).

Исходя из физического смысла интеграла столкновений, как количества частиц, появляющихся (исчезающих) в пространстве скоростей в единицу времени, можно записать:

$$\int d^3v St_{ab} = 0. \quad (12.17)$$

То есть полное количество частиц при рассеянии сохраняется. Закон сохранения импульса запишется в виде:

$$\int d^3v m_a \vec{v} St_{ab} + \int d^3v m_b \vec{v} St_{ba} = 0, \quad (12.18)$$

$$\int d^3v m_a \vec{v} St_{aa} = 0. \quad (12.19)$$

Закон сохранения энергии сталкивающихся частиц:

$$\int d^3v \frac{m_a v^2}{2} St_{ab} + \int d^3v \frac{m_b v^2}{2} St_{ba} = 0, \quad (12.20)$$

$$\int d^3v \frac{m_a v^2}{2} St_{aa} = 0. \quad (12.21)$$

Кинетическое уравнение дает наиболее строгое и универсальное описание процессов, протекающих в плазме. Однако получить аналитическое решение многих задач на его основе удается получить далеко не всегда. Вместе с тем, в ряде случаев можно ограничиться более простым приближением.

13. Моменты кинетического уравнения

Самым эффективным методом получения общего решения кинетического уравнения является метод моментов. Под моментами понимают функции вида [8]:

$$\begin{aligned} M^0 &= \int f d\vec{v}, \\ M_i^1 &= \int v_i f d\vec{v}, \\ M_{ij}^2 &= \int v_i v_j f d\vec{v}, \\ &\dots\dots\dots \\ M_{i\dots}^N &= \int v_i \dots v_N f d\vec{v}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Моментами являются такие важные величины, как концентрация, средняя скорость частиц, потоки импульса и энергии, например:

$$n_a = \int f_a d\vec{v}, \quad (13.2)$$

$$\vec{u}_a = \frac{1}{n_a} \int \vec{v}_a f_a d\vec{v}, \quad (13.3)$$

$$\vec{v}'_a = \vec{v}_a - \vec{u}_a, \quad (13.4)$$

$$\frac{3}{2} T_a = \frac{1}{n_a} \int \frac{m_a (\vec{v}'_a)^2}{2} f_a d\vec{v}. \quad (13.5)$$

Идея метода моментов заключается в следующем. Решение кинетического уравнения представляется в виде ряда по ортогональным полиномам. Функция распределения записывается в форме ряда с коэффициентами, зависящими от координат и времени. Оказывается, что коэффициенты этого ряда выражаются через моменты кинетического уравнения. Таким решением кинетического уравнения мы заниматься не будем, а рассмотрим, каким образом из него получаются уравнения непрерывности, движения и теплопереноса.

Если макроскопические характеристики плазмы изменяются медленно по сравнению со временем электрон – электронных и ион – ионных столкновений, то кулоновские столкновения частиц приводят к максвеллизации функций распределения в электронном и ионном газах в каждом небольшом объеме плазмы:

$$f = f_M \equiv n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m (\vec{v} - \vec{u})^2}{2T} \right) \quad (13.6)$$

В данном случае параметры, характеризующие максвелловское распределение, изменяются в пространстве и во времени:

$$n = n(\vec{r}, t), \quad (13.7)$$

$$T = T(\vec{r}, t), \quad (13.8)$$

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t). \quad (13.9)$$

Здесь \vec{u} - гидродинамическая составляющая скорости. Распределение, при котором хотя бы один из этих параметров не является константой, называется локальным термодинамическим распределением. Использование кинетического уравнения для описания плазмы в этом состоянии излишне. Здесь достаточно установить, как будут меняться в пространстве и во времени концентрация, температура и скорость.

14. Уравнение непрерывности

Проинтегрируем выражение (12.5) по трехмерному пространству скоростей:

$$\int \left\{ \frac{\partial f_a}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_a f_a + \frac{q_a}{m_a} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} [\vec{v}_a, \vec{B}(\vec{r}, t)] \right) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} \right\} d\vec{v} = \sum_{a,b} St_{ab} \quad (14.1)$$

Интеграл от третьего слагаемого в выражении (14.1) будет равен нулю (Здесь нужно преобразовать интеграл по объему в интеграл по бесконечно удаленной поверхности в пространстве скоростей в соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса). Так как число частиц в кулоновских столкновениях сохраняется, интеграл от правой части уравнения (14.1) будет равен нулю. В итоге мы получаем следующее выражение:

$$\frac{dn_a}{dt} + \operatorname{div} n_a \vec{u} = 0. \quad (14.2)$$

Таким образом, мы получили уравнение непрерывности.

15. Уравнение движения

Следующее уравнение двухжидкостной магнитной гидродинамики получается путем умножения кинетического уравнения на $m_a \vec{v}_a$ и интегрирования по пространству скоростей:

$$\int \left\{ \frac{\partial f_a}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v}_a f_a + \frac{q_a}{m_a} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} [\vec{v}_a, \vec{B}(\vec{r}, t)] \right) \right\} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \sum_{a,b} St_{ab} \} m_a \vec{v}_a d\vec{v}. \quad (15.1)$$

Далее в уравнениях индекс a в скоростях частиц \vec{v}_a опускаем, так как все скорости относятся к частицам сорта a . В итоге получается выражение следующего вида:

$$m_a \frac{\partial n_a u_{a,\alpha}}{\partial t} + m_a \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int v_\alpha v_\beta f_a d\vec{v} - q_a \int \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_a, \vec{B}] \right)_\beta f_a \frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\beta} d\vec{v} = m_a \sum_{a,b} \int St_{ab} v_\alpha d\vec{v}. \quad (15.2)$$

Здесь
$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (15.3)$$

Индексы α и β в кинетическом уравнении соответствуют компонентам вектора скорости.

В правой части этого выражения член, содержащий интеграл столкновений между частицами одного сорта, обращается в нуль в силу сохранения импульса при таких процессах. Оставшийся член представляет собой силу трения на частицы сорта a со стороны частиц сорта b :

$$\vec{R}_{ab} = m_a \int St_{ab} v_\alpha d\vec{v}. \quad (15.4)$$

Из свойства интеграла столкновений следует, что $\vec{R}_{ab} = -\vec{R}_{ba}$.

Введем понятие тензора плотности потока импульса, переносимого компонентой плазмы a :

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int m_a v_\alpha v_\beta f_a d\vec{v}. \quad (15.5)$$

На рисунке 15.1 представлена иллюстрация потока вектора импульса через единичную площадку ΔS .

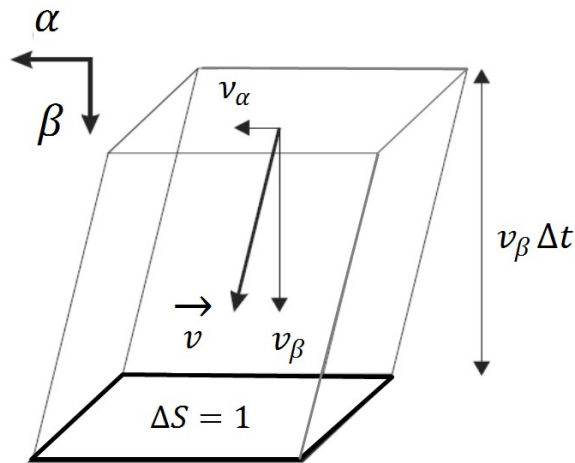


Рис. 15.1 Поток α импульса в направлении β через единичную площадку

Выделим в $\Pi_{\alpha\beta}$ перенос импульса, связанный с гидродинамическими составляющими скоростей:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int m_a (u_\alpha + v'_\alpha)(u_\beta + v'_\beta) f_a d\vec{v} = m_a n_a u_\alpha u_\beta + p_{\alpha\beta}. \quad (15.6)$$

Здесь $p_{\alpha\beta}$ - тензор давления:

$$p_{\alpha\beta} = m_a \int v'_\alpha v'_\beta f_a d\vec{v}. \quad (15.7)$$

Если функция распределения частиц сорта a является максвелловской ($f_a = f_M$), то тензор давления запишется в виде:

$$p_{\alpha\beta} = n_a T_a \delta_{\alpha\beta} = p_a \delta_{\alpha\beta}. \quad (15.8)$$

В этом случае давление p_a компоненты a является скалярной величиной. Здесь $p = nT$.

Если функция распределения отличается от максвелловской ($f_a \neq f_M$), то

$$p_{\alpha\beta} = n_a T_a \delta_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta}, \quad (15.9)$$

где $\pi_{\alpha\beta}$ - тензор вязких напряжений для частиц a .

Воспользуемся следующим преобразованием:

$$\begin{aligned} m_a \frac{\partial n_a u_{a,\alpha}}{\partial t} + m_a \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int v_\alpha v_\beta f_a d\vec{v} - q_a \int \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_a, \vec{B}] \right)_{\dot{\beta}} f_a \frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\beta} d\vec{v} = \\ m_a \frac{\partial n_a u_{a,\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = m_a \left(u_{a,\alpha} \frac{\partial n_a}{\partial t} + u_{a,\alpha} \frac{\partial n_a u_{a,\beta}}{\partial x_\beta} \right)_{\dot{\beta}} + \\ + m_a n_a \frac{\partial u_{a,\alpha}}{\partial t} + m_a n_a u_{a,\beta} \frac{\partial u_{a,\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial p_{a,\beta}}{\partial x_\beta} = \\ = m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}_a \nabla) \right)_{\dot{\beta}} u_{a,\alpha} + \frac{\partial p_a}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$m_a \left(u_{a,\alpha} \frac{\partial n_a}{\partial t} + u_{a,\alpha} \frac{\partial n_a u_{a,\beta}}{\partial x_\beta} \right)_{\dot{\beta}} = 0 \quad (15.11)$$

в силу уравнения непрерывности.

Окончательно, уравнение движения запишется в виде:

$$m_a n_a \frac{du_a}{dt} = -\nabla(n_a T_a) + q_a n_a \vec{E} + q_a n_a \left[\frac{\vec{u}_a}{c}, \vec{B} \right] + \vec{R}_a - \text{div} \pi_{\alpha\beta}. \quad (15.12)$$

Здесь $d/dt = \partial/\partial t + \nabla$ - производная Лагранжа.

16. Уравнение теплопереноса

Чтобы замкнуть систему уравнений для определения n, p, \vec{u} , необходимо еще одно уравнение – уравнение переноса тепла. Оно получается путем умножения кинетического уравнения на кинетическую энергию и интегрированию по скоростям:

$$\int \{ \text{кинeтическое _ уравнение} \} \frac{m_a v^2}{2} d\vec{v}. \quad (16.1)$$

В результате преобразований получается уравнение следующего вида:

$$n_a T_a \frac{ds_a}{dt} = -\text{div} q_a - \pi_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{a\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_a. \quad (16.2)$$

Здесь S_a - энтропия на одну частицу,

$$q_a = \int \frac{m_a (\vec{v}')^2}{2} \vec{v}' f_a d\vec{v}' \quad (16.3)$$

- плотность потока тепла,

$$Q_a = \sum_b \int \frac{m_a (\vec{v}')^2}{2} St_{ab} d\vec{v} \quad (16.4)$$

- удельная мощность источников тепла.

Таким образом, мы получили систему уравнений двухжидкостной гидродинамики, где одну жидкость представляют собой ионы, а вторую – электроны. Обе жидкости имеют в силу квазинейтральности одинаковую плотность в каждой точке пространства. Они связаны через интеграл столкновений (силу трения) и тензор вязких напряжений.

С точки зрения уравнения непрерывности обе жидкости ведут себя одинаково. С точки зрения других процессов (электропроводность, перенос тепла) – по-разному.

Возможно еще более грубое приближение, где плазма рассматривается как упругая среда, так называемое приближение одножидкостной гидродинамики.

17. Приближение одножидкостной гидродинамики

Уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики используются для описания медленных процессов, когда

$$n_i = n_e = n, \quad T_i = T_e = T, \quad (17.1)$$

$$u_i \ll c, \quad u_e \ll c, \quad (17.2)$$

$$P_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}. \quad (17.3)$$

Для их получения необходимо ввести следующие макроскопические характеристики: массовую плотность, гидродинамическую скорость, плотность тока и давление плазмы:

$$\rho = m_e n + m_i n \simeq m_i n, \quad (17.4)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho} (m_e n \mathbf{u}_e + m_i n \mathbf{u}_i) \approx \mathbf{u}_i. \quad (17.5)$$

$$\mathbf{j} = n (q_i \mathbf{u}_i + q_e \mathbf{u}_e), \quad (17.6)$$

$$p = p_i + p_e = 2nT. \quad (17.7)$$

В итоге, уравнение непрерывности будет записано в виде сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0. \quad (17.8)$$

Уравнение движения будет выглядеть следующим образом:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}]. \quad (17.9)$$

Здесь мы учли, что $\vec{R}_i = -\vec{R}_e$ и пренебрегли инерцией электронов. Член вида $[\mathbf{j}, \mathbf{B}]/c$ характеризует силу пондеромоторного взаимодействия тока в плазме с магнитным полем в единице объема.

Когда скорость относительного движения ионной и электронной компонент гораздо меньше гидродинамической скорости (джоулевым разогревом можно пренебречь) в качестве уравнения переноса можно использовать уравнение адиабаты:

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0. \quad (17.10)$$

Показатель адиабаты характеризует состояние плазмы: $\gamma = 3$ - отсутствуют столкновения между частицами, $\gamma = 5/3$ - нет теплообмена, $\gamma = 1$ - теплообмен хороший [1].

18. Коэффициенты переноса

Уравнения двухжидкостной гидродинамики были получены в предположении, что функции распределения всех частиц в плазме являются локально максвелловскими. Если плазма неоднородна, то функция распределения отличается от максвелловской. Это отличие приводит к возникновению процессов переноса, таких, как диффузия, вязкость и теплопроводность. Они стремятся привести плазму в термодинамически равновесное состояние. Уравнения, описывающие эти процессы, можно получить в рамках гидродинамики, их называют уравнениями переноса. Впервые они были получены независимо английским ученым Сидни Чемпенем и шведским ученым Давидом Энскогом. Поэтому метод получения коэффициентов переноса называется методом Чемпена – Энскога.

Если характерное время процессов переноса велико по сравнению с характерным временем столкновения между частицами, то функция распределения отличается от максвелловской незначительно:

$$f = f_m + \delta f, \quad \delta f \ll f_m, \quad (18.1)$$

$$f_m = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T} \right) \quad (18.2)$$

Здесь мы разделили функцию распределения на максвелловский остов и «возмущение». Это разделение неоднозначно. Для его устранения потребуем, чтобы концентрация, температура и гидродинамическая скорость, входящие в максвелловскую функцию распределения, определялись по точной функции распределения:

$$n = \int f d^3 v, \quad (18.3)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f d^3 v, \quad (18.4)$$

$$T = \frac{m}{3n} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f d^3 v. \quad (18.5)$$

Вместе с тем, добавка δf должна обладать следующими свойствами:

$$\int \delta f d^3 v = 0, \quad (18.6)$$

$$\int \mathbf{v} \delta f d^3 v = 0, \quad (18.7)$$

$$\int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \delta f d^3 v = 0. \quad (18.8)$$

Предположим, что в плазме с однородной плотностью существует градиент температуры вдоль оси z :

$$\nabla T_e = \mathbf{e}_z dT_e / dz. \quad (18.9)$$

Магнитное поле отсутствует, ионы покоятся вследствие их большой массы, ток через плазму не протекает $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Для того, чтобы выполнялись эти условия необходимо уравновесить градиент электронного давления:

$$\nabla p_e = n \nabla T_e. \quad (18.10)$$

Этого можно достичь, наложив на плазму внешнее электрическое поле, которое будет удерживать электроны:

$$\mathbf{E} = E \mathbf{e}_z. \quad (18.11)$$

В случае изолированной плазмы поле создается зарядами, скапливающимися на ее поверхности. В проводнике, каковым является плазма, электрическое поле возникает даже в условиях отсутствия тока, если есть градиент температуры (эффект Зеебека).

Запишем кинетическое уравнение для функции распределения электронов. Учтем, что наша задача стационарная ($\partial f / \partial t = 0$):

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v_z} = S t. \quad (18.12)$$

Далее воспользуемся лоренцевским интегралом столкновений (лоренцевской называется плазма, у которой столкновениями между электронами можно пренебречь) и учтем, что в силу симметрии задачи функция распределения не зависит от азимутального угла:

$$St = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (18.13)$$

Здесь введено обозначение $A = 2\pi^2 Z^2 e^4 n_i \Lambda / m^2$, где Λ - кулоновский логарифм.

Подставляя в выражение (18.13) функцию (18.1), учитывая, что f_m не зависит от θ при $\mathbf{u} = 0$, пренебрегая членами, содержащими f_m по сравнению с f в левой части уравнения, методом разделения переменных можно получить следующее выражение для величины электрического поля с градиентом температуры:

$$eE = \frac{5}{2} \frac{\partial T_e}{\partial z}. \quad (18.14)$$

Здесь E представляет собой поле, которое требуется для того, чтобы плазма была в равновесии.

Запишем сумму сил, действующих на электроны:

$$-\frac{\partial p_e}{\partial z} + neE + R_{T_e} = 0. \quad (18.15)$$

Выражая величину электрического поля через (18.14), получим:

$$R_{T_e} = -\frac{3}{2} \frac{\partial T_e}{\partial z}. \quad (18.16)$$

Здесь мы учли, что $\partial p_e / \partial z = n \partial T_e / \partial z$.

Эта сила, действующая на электроны со стороны ионов и обусловленная градиентом электронной температуры, называется термосилой. Своим происхождением она обязана сложной

зависимостью частоты столкновений электронов с ионами от скорости сталкивающихся частиц. Электроны, приходящие в некоторую область плазмы из более нагретых областей, испытывают меньшее торможение об ионы, чем приходящие из более холодных. В итоге, возникает результирующая сила трения, направленная против градиента температуры.

Полная сила, действующая на электроны со стороны ионов, складывается из термосилы и силы трения:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u. \quad (18.17)$$

Сила трения пропорциональна разнице средних скоростей ионной и электронной подсистем.

Помимо термосилы, используя метод Чемпена_Энско́го можно найти электронный поток тепла:

$$\mathbf{q} = \int \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f d^3v. \quad (18.18)$$

В данном случае он направлен вдоль оси Z и обусловлен только поправкой к функции распределения f_m :

$$q_z = \int \frac{mv^2}{2} v \cos \theta \delta f d^3v. \quad (18.19)$$

В результате получается следующее выражение:

$$q_z = -32 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{A} \left(\frac{T_e}{m} \right)^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial z}. \quad (18.20)$$

Или в векторной записи:

$$\mathbf{q}_T = -k \nabla T. \quad (18.21)$$

Здесь коэффициент пропорциональности между потоком тепла и градиентом электронной температуры k называется коэффициентом электронной теплопроводности.

Получим выражение для уравнения теплопроводности. Рассмотрим маленький объем плазмы ΔV . Внутренняя энергия, заключенная в нем, равна: $\int_{\Delta V} \frac{3}{2} n T dV$.

Так как плазма покоится, а ток отсутствует, то единственным каналом изменения энергии служит теплоперенос через границу объема, обусловленный градиентом температуры. Поэтому изменение энергии плазмы в выделенном объеме за единицу времени равно потоку тепла через его границу:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \frac{3}{2} n T dV = - \oint \mathbf{q} d\mathbf{S}. \quad (18.22)$$

Знак минус связан с тем, что вектор $d\mathbf{S}$ направлен по внешней нормали к границе объема, так что положительное значение потока тепла соответствует убыли внутренней энергии плазмы.

Поскольку объем покоится, производную по времени можно внести под знак интеграла (не дифференцируя пределы интегрирования), при этом она превращается в частную производную. Правую часть уравнения преобразуем по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\Delta V} dV \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} n T = - \int_{\Delta V} dV \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (18.23)$$

Так как объем можно взять сколь угодно малым, должны быть равны не только интегралы, но и подынтегральные выражения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} n T = - \operatorname{div} (k \nabla T). \quad (18.24)$$

Если плотность постоянна, то обе части можно поделить на n :

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \operatorname{div} (\chi \nabla T). \quad (18.25)$$

Это выражение называется уравнением теплопроводности. Входящий сюда коэффициент пропорциональности называется

коэффициентом температуропроводности. Он связан с коэффициентом теплопроводности следующим образом:

$$\chi = k / \left(\frac{3}{2} n \cdot \right) \quad (18.26)$$

Из этого уравнения следует, что за время t тепло распространяется на расстояние $l \sim \sqrt{\chi t}$.

19. Подвижность

Если в плазме присутствует электрическое поле, то к хаотической скорости каждой заряженной частицы добавляется скорость упорядоченного движения. В этом поле на электрон действует сила, сообщающая ему ускорение $-e\vec{E}/m$ в направлении, противоположном направлению поля. Поэтому между столкновениями электрон успевает приобретать кинетическую энергию, зависящую от ускорения и от среднего времени между столкновениями. В стационарном состоянии средние потери энергии электрона в одном столкновении равны средней энергии, приобретаемой между столкновениями. Средняя кинетическая энергия тогда постоянна и, соответственно, постоянна средняя скорость направленного движения, о которой говорят как о скорости дрейфа электрона. Она аналогична установившейся скорости тела, движущейся в вязкой жидкости, под действием постоянной силы. Столкновения ограничивают кинетическую энергию электрона, приобретаемую под действием поля. Макроскопически столкновения играют роль вязкого трения, обусловленного сопротивлением ионизованного газа.

Аналогичным образом электрическое поле действует и на ионы, которые в виду своей гораздо большей массы приобретают меньшее ускорение (в направлении поля), а следовательно, и дрейфовая скорость у них гораздо меньше, чем у электронов.

Среднее приращение энергии между столкновениями в газовом разряде зависит от отношения E/p , где p – давление газа. Пока оно меньше тепловой энергии, скорость дрейфа пропорциональна E . Для ионов линейная зависимость скорости дрейфа от поля сохраняется до значений порядка 10 В/торр. Для электронов линейность нарушается при значительно меньших значениях этого отношения. В слабых электрических полях скорость дрейфа выражается соотношением:

$$u = \mu E, \quad (19.1)$$

где μ - подвижность.

Если средний импульс частицы, который она приобретает в направлении поля $m u$, тогда скорость потери импульса равна $m u V$, где V - частота столкновений с передачей импульса. Сила, компенсирующая потерю импульса равна $e E$. В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$m u V = e E. \quad (19.2)$$

Отсюда:

$$\mu = u / E = e / m V, \quad (19.3)$$

$$\mu = (e / m) \tau = e \lambda / m \bar{c}, \quad (19.4)$$

Здесь τ - среднее время между столкновениями, а \bar{c} - средняя скорость теплового движения. Поскольку, \bar{c} зависит от температуры по закону $T^{1/2}$, а λ изменяется обратно пропорционально плотности газа, то:

$$\mu \sim T^{1/2} \text{ при } p = const, \quad (19.5)$$

$$\mu \sim 1 / p \text{ при } T = const. \quad (19.6)$$

Рассмотренная теория подвижности (теория Ланжевена) не всегда согласуется с экспериментом даже для ионов с низкими значениями отношения напряженности электрического поля к давлению. Теория перестает быть верной, когда скорость дрейфа становится сравнимой с тепловой скоростью. В этом случае наблюдается переход энергии, получаемой от поля в тепловую энергию. Этот эффект можно учесть, рассматривая одновременно передачу энергии и импульса.

Пусть доля энергии, передаваемой передаваемая электронами при каждом столкновении равна δ . Тогда за единицу времени V раз передается энергия $(1/2) m C^2 \delta$. Средняя мощность, получаемая электроном от поля равна $e E u$. В стационарном состоянии приобретаемая и теряемая мощности должны быть равны:

$$1/2\delta m C^2 v_m = eEu. \quad (19.7)$$

Так как среднеквадратичное значение скорости C не очень сильно отличается от $\bar{c} \sim \lambda v$, можно записать:

$$1/2\delta m \lambda_m^2 v_m^3 = eEu. \quad (19.8)$$

Подставляя (19.7) в это выражение, получим:

$$u = (\delta/2)^{1/2} (eE\lambda_m/m)^{1/2}. \quad (19.9)$$

Таким образом, получается параболическая зависимость скорости дрейфа от E/n , поскольку средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна концентрации частиц. Такая зависимость наблюдается экспериментально для ионов и электронов в широком диапазоне значений E . Однако, для электронов применимость этой формулы ограничена возрастанием роли неупругих столкновений с ионами.

20. Проводимость

Через подвижность ионов и электронов легко выразить проводимость плазмы. Если плазма содержит одинаковые концентрации электронов и однозарядных ионов, то плотность тока запишется как:

$$j = j_e + j_i = ne(u_e + u_i). \quad (20.1)$$

С учетом выражения для подвижности:

$$j = neE(\mu_e + \mu_i). \quad (20.2)$$

Тогда проводимость плазмы равна:

$$\sigma = j/E = ne(\mu_e + \mu_i). \quad (20.3)$$

Поскольку в плазме без магнитного поля подвижность электронов гораздо больше подвижности ионов, приближенно можно записать:

$$\sigma = ne\mu_e. \quad (20.4)$$

Если в электрическом разряде содержатся области значительного пространственного заряда, в которых концентрации ионов и электронов существенно различны, то компоненты электропроводности нужно рассматривать отдельно и может оказаться, что током ионов пренебречь нельзя.

21. Диффузия

Под диффузией обычно понимают процесс взаимного проникновения атомов или молекул одного вещества между атомами (молекулами) другого, приводящий к самопроизвольному выравниванию их концентраций по всему занимаемому объёму. В некоторых ситуациях одно из веществ уже имеет равновесную концентрацию и говорят о диффузии одного вещества в другом. При этом перенос вещества происходит из области с высокой концентрацией в область с низкой (против градиента концентрации).

Обычно под диффузией понимают процессы, сопровождающиеся переносом материи, однако иногда диффузионными называют также другие процессы переноса: теплопроводность, вязкое трение и т.п.

Все виды диффузии подчиняются одинаковым законам. Скорость диффузии пропорциональна разности концентраций, температур или зарядов (в случае относительно небольших величин этих параметров). В случае тепловой диффузии этот параметр называется теплопроводность, в случае потока электрических зарядов — электропроводность. Количество вещества, которое диффундирует в течение определённого времени, и расстояние, проходимое диффундирующим веществом, пропорциональны квадратному корню времени диффузии.

С точки зрения термодинамики движущим потенциалом любого выравнивающего процесса является рост энтропии. При постоянных давлении и температуре в роли такого потенциала выступает химический потенциал μ_{chem} , обуславливающий поддержание потоков вещества. Плотность потока частиц вещества в этом случае пропорциональна градиенту потенциала:

$$j \sim -n \left(\frac{\partial \mu_{chem}}{\partial x} \right) \quad (21.1)$$

В большинстве практических случаев вместо химического потенциала применяется концентрация n . Прямая замена μ на n становится некорректной в случае больших концентраций, так как

химический потенциал перестаёт быть связан с ней по логарифмическому закону. Если не рассматривать такие случаи, то вышеприведённую формулу можно заменить на следующую:

$$j = -D \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) \quad (21.2)$$

Она показывает, что плотность потока вещества пропорциональна коэффициенту диффузии и градиенту концентрации. Это уравнение выражает первый закон Фика.

Второй закон Фика связывает пространственное и временное изменения концентрации (уравнение диффузии):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (21.3)$$

Коэффициент диффузии зависит от температуры. Дополнительное поле, наложенное параллельно градиенту химического потенциала, нарушает стационарное состояние (В этом случае диффузионные процессы описываются нелинейным уравнением Фоккера—Планка).

Важную роль диффузия частиц играет в физике плазмы.

В кинетической теории газов показывается, что коэффициент диффузии приблизительно равен:

$$D = \lambda \bar{c} / 3. \quad (21.4)$$

Если принять $\bar{c} = v_T = \sqrt{3T/m}$, то можно получить следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{3\sqrt{3}T^{5/2}}{4\pi e^4 \Lambda n \sqrt{m}}. \quad (21.5)$$

Как видно из этого выражения, коэффициенты диффузии электронов и ионов очень сильно отличаются между собой (как квадратный корень из отношения масс) и очень сильно зависят от температуры (в обычном газе $D \sim \sqrt{T}$).

Диффузия заряженных частиц взаимосвязана с их подвижностью: обе приводят к перемещению массы. В случае диффузии перемещение

вызвано нескомпенсированными силами столкновений (вследствие градиента концентрации), а в случае подвижности – электрическим полем.

Ионы диффундируют со скоростью, выражаемого для одномерного потока формулой:

$$u_i = \frac{j_i}{n_i} = \frac{1}{n_i} D_i \frac{\partial n_i}{\partial x} = \frac{1}{p_i} D_i \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad (21.6)$$

где p_i - парциальное давление ионов, находящихся при пространственно однородном распределении температуры, $\partial p_i / \partial x$ – полная сила, действующая на ионы в единичном объеме. Электрическое поле, уравнивающее эту силу, определяется соотношением:

$$eEn_i = \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad (21.7)$$

или
$$E = (1/en_i) \frac{\partial p_i}{\partial x}. \quad (21.8)$$

Поле E вызовет за счет подвижности дрейф в обратном направлении с такой же по величине скоростью u_i . Таким образом, по определению подвижности:

$$\frac{u_i}{\mu_i} = E = \frac{1}{en_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{1}{en_i} \frac{u_i p_i}{D_i}. \quad (21.9)$$

Отсюда:

$$D_i / \mu_i = p_i / en_i = T / e. \quad (21.10)$$

Выражение (21.10) известно как соотношение Эйнштейна. Оно отражает тот факт, что отношение коэффициента диффузии к подвижности для ионов пропорционально средней энергии хаотического движения.

22. Амбиполярная диффузия

При достаточно высокой плотности заряженных частиц в результате разделения зарядов, обусловленного более быстрой диффузией электронов, создается заметное электрическое поле. Его действие сводится к увеличению скорости дрейфа ионов и уменьшению скорости дрейфа электронов. В результате возникает равновесное разделение зарядов, при котором электроны и ионы дрейфуют с одинаковыми скоростями. Это явление называется амбиполярной диффузией. Рассмотрим полный поток частиц для одномерного случая (дрейф происходит в направлении оси x). В равновесном состоянии плотность потока частиц одинакова для ионов и для электронов. Она содержит компоненты, обусловленные как обычной диффузией, так и дрейфом в электрическом поле [7]:

$$-D_e \frac{dn_e}{dx} - n_e \mu_e E = j_e = j_i = -D_i \frac{dn_i}{dx} + n_i \mu_i E. \quad (22.1)$$

Если плотность разделенных зарядов, при которой уравниваются скорости потоков, мала по сравнению с полной плотностью заряда, то можно записать, что:

$$n_e = n_i = n, \quad (22.2)$$

$$\frac{dn_e}{dx} = \frac{dn_i}{dx} = \frac{dn}{dx}. \quad (22.3)$$

Плотности потока $j = j_i = j_e$ можно выразить с помощью коэффициента амбиполярной диффузии:

$$j = -D_a \frac{dn}{dx}. \quad (22.4)$$

Таким образом:

$$-D_a \frac{dn}{dx} = -D_e \frac{dn}{dx} - n \mu_e E = -D_i \frac{dn}{dx} + n \mu_i E. \quad (22.5)$$

Отсюда, исключая E , получаем:

$$D_a = (D_e \mu_i + D_i \mu_e) / (\mu_i + \mu_e). \quad (22.6)$$

Так как $\mu_e \gg \mu_i$:

$$D_a = (D_e \mu_i + D_i \mu_e) / \mu_e. \quad (22.7)$$

Если все частицы плазмы находятся при одинаковой температуре, соотношение Эйнштейна применимо как к ионам, так и к электронам, то можно принять, что $D_e \mu_i = D_i \mu_e$. Тогда находим:

$$D_a = 2D_i. \quad (22.8)$$

Если температура электронов гораздо больше температуры ионов, то $D_e / \mu_e \gg D_i / \mu_i$ или $D_e \mu_i \gg D_i \mu_e$, то:

$$D_a = D_i \mu_i / \mu_e = (T_e / e) \mu_i. \quad (22.9)$$

Хотя формулы (22.8), (22.9) приближенные, но ими часто пользуются. Основная погрешность при их выводе заключается в том, что мы применили выражение (21.10) к электронам.

На основе написанных выше соотношений можно найти электрическое поле при амбиполярной диффузии:

$$E = \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \left(\frac{D_e - D_i}{\mu_e + \mu_i} \right) \quad (22.10)$$

Это поле связано с плотностью разделенных зарядов уравнением Пуассона.

Список литературы

1. Котельников И.А., Ступаков Г.В. Лекции по физике плазмы: Учебное пособие для студентов физического факультета НГУ.- Новосибирск: Новосибирский университет, 1996.- 136 с.
2. Жданов С.К., Курнаев В.А., Романовский М.К., Цветков И.В. Основы физических процессов в плазме и плазменных установках.- М.: МИФИ, 2000.- 377 с.

3. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы.- М.: Атомиздат, 1968.- 286 с.
4. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы.- М.: Мир, 1975.- 525 с.
5. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. В двух томах. Т. 1. Физика атомного ядра. Учебник для вузов. Изд. 3-е.- М.: Атомиздат, 1974.- 584 с.
6. Физический энциклопедический словарь/Гл. ред. А.М. Прохоров. Ред. кол. Д.М. Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. - М.: Сов. энциклопедия, 1983.- 928 с.
7. Ховатсон А.М. Введение в теорию газового разряда.- М.: Атомиздат, 1980.- 182 с.
8. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики . Том II.- М.: Наука, 1971.- 936 с.
9. Еремин Е.И., Сычев М.С. Модифицированный алгоритм улучшения сходимости решеточных сумм// Моделирование систем. – 2012, № 4(26),- с.13-22.

Содержание

Введение.....	3
1. Идеальность. Вырождение. Квазинейтральность.....	5
2. Способы классификации ионно-электронной плазмы.....	7
3. Дебаевская экранировка. Энергия кулоновского взаимодействия частиц в плазме.....	14
4. Степень ионизации термодинамически равновесной	

плазмы. Формула Саха.....	22
5. Кулоновские столкновения. Кулоновский логарифм.....	28
6. Релаксация импульса и энергии. Динамика установления равновесной функции распределения. Выравнивание электронной и ионной температур. Проводимость плазмы, убегание электронов.....	31
7. Движение частиц в электрическом и магнитном полях	37
8. Дрейфовое приближение	39
9. Электрический дрейф.....	44
10. Центробежный дрейф.....	45
11. Градиентный дрейф.....	46
12. Кинетическое уравнение с самосогласованным полем.....	47
13. Моменты кинетического уравнения.....	52
14. Уравнение непрерывности.....	54
15. Уравнение движения.....	54
16. Уравнение теплопереноса.....	58
17. Приближение одножидкостной гидродинамики.....	59
18. Коэффициенты переноса.....	61
19. Подвижность.....	66
20. Проводимость.....	68
21. Диффузия.....	69
22. Амбиполярная диффузия.....	72
Список литературы.....	74

Учебное издание

ЯНИН Сергей Николаевич

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ. ЧАСТЬ I

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати 05.11.2012. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл. печ. л. 10,87. Уч.-изд. л. 9,84.

Заказ . Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  **ТПУ**. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru