МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Г.В. Вавилова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

*Рекомендовано в качестве учебно-методического пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 681.518.3(075.8)
ББК 32.973.202:22.1я73
В12

Вавилова Г.В.

В12 Математическая обработка результатов измерения: учебно-методическое пособие / Г.В. Вавилова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 160 с.

В пособии приведены необходимые сведения из теории вероятности и математической статистики, применяемые для обработки результатов измерения. Рассмотрены основные положения теории оценивания и проверки статистических гипотез. Изложены методы обработки результатов измерений (прямых и косвенных). Приведены способы расчета погрешностей по паспортным данным средств измерения, расчета случайных погрешностей, суммирование составляющих погрешности. Предложены примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения и контрольные вопросы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 200100 «Приборостроение».

УДК 681.518.3(075.8)
ББК 32.973.202:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор ТГАСУ
О.И. Недавний

Кандидат технических наук, доцент ТУСУРа
В.Ф. Отчалко

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Основные понятия теории вероятности

1.1. Элементарные события

Теория вероятностей – математическая наука, позволяющая по вероятности одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким–либо образом между собой.

Любой проводимый опыт (эксперимент) имеет результат. В теории вероятностей результат опыта называют *исходом опыта*.

При бросании монеты возможны два исхода: появление герба – один исход, появление цифры – другой исход. При бросании игральной кости возможны шесть исходов, а именно, появление цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6. При вынимании шаров из урны, в которой находится три красных и два синих шара, возможны пять исходов: два исхода, когда вынимаются синие шары, и три исхода, когда вынимаются красные шары.

Исход или группа исходов, удовлетворяющих определённым требованиям, называются *событием*.

Пример событий: появление при бросании монеты только герба; появление двух гербов при двукратном бросании монеты; появления дамы при вынимании карты из колоды игральных карт; поражение мишени при первом выстреле. Событие при проведении опыта может произойти, а может и не произойти. Если считаем событием появление герба при бросании монеты, а появилась цифра, то событие не произошло. Исходы опытов, соответствующие установленному событию, называются *благоприятными исходами.*

Исходя из вышесказанного, различают события: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие – это такое событие, которое всегда происходит в рассматриваемом эксперименте.

Невозможное событие – это такое событие, которое никогда не может наступить в рассматриваемом эксперименте.

Событие, которое при воспроизведении опыта может наступить, а может и не наступить, называется *случайным событием*.

Пример 1. В урне находится два белых шара, три черных шара. Вынимается один шар. Достоверным событием для данного эксперимента будет вынимание шара любого цвета; невозможным событие – вынимание зеленого шара; случайным событием – вынимание белого шара.

Несколько возможных событий образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

События, образующих полную группу: появление герба или появление цифры при бросании монеты; попадание или промах при выстреле в цель; появление четного или появление нечётного числа при бросании игральной кости.

Несколько событий в опыте называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно. Несовместными событиями являются попадание в цель и промах при одном выстреле в цель.

В частности, *если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.*

Пример 2. Приобретены два билета денежно–вещевой лотереи.

Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

Равновозможными событиями называются такие события в опыте, каждое из которых объективно не является более возможным, чем другое.

Пример 3. Имеется монета правильной цилиндрической формы, изготовленная из однородного материала; чеканка произведена без отклонений, влияющих на выпадение той или иной стороны монеты. Данные рассуждения приводят к выводу: появление герба и появление цифры при бросании монеты – события равновозможные.

1.2. Вероятность события. Относительная частота события.

Можно утверждать, что одни события более возможны, а другие менее возможны. Появление герба при одном бросании монеты более возможно, чем появление двух гербов при двух последовательных бросаниях монеты.

Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности нужно с каждым событием связать некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число называют вероятностью события. *Вероятность события* есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Вероятность события A называют отношение благоприятного числа исходов опыта к общему числу всех *равновозможных несовместных элементарных* исходов, образующих *полную группу*:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где m – благоприятное число исходов опыта, n – общее число исходов опыта.

Выражение (1.1) называется *классической формулой* для вычисления вероятности события.

Пример 1.. В ящике находятся три зеленых и два черных шара. Из урны вынимается один шар. Какова вероятность вынуть при этом черный шар.

<u>*Решение.*</u>

Общее число исходов в данном опыте равно пяти (по числу шаров в ящике) $n=5$. Число благоприятных исходов равно числу черных шаров в ящике $m=2$. Вероятность события, вынуть белый шар, определяем по классической формуле для вычисления вероятности (1.1)

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{5}.$$

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m=n$, следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m=0$, следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$, значит, $0 < \frac{m}{n} < 1$, следовательно,

$$0 < P(A) < 1.$$

Формула (1.1) применима только для определения вероятности события в опытах с *равновероятными* исходами, поэтому имеет ограниченное применение. Если игральная кость не имеет правильную кубическую форму или сделана из неоднородного материала, то нельзя считать появления чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросании кости равновероятными исходами. В этом случае нельзя утверждать, что при бросании кости вероятность появления какой-либо цифры равна 1\6.

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события A определяется формулой

$$W(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.2}$$

где m – число появлений события, n – общее число испытаний.

Сопоставляя определения *вероятности* и *относительной частоты*, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, *вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.*

Пример 2. При проверке качества изделий обнаружилось 5 нестандартных детали в партии из 95 отобранных случайным образом деталей. Определить относительную частоту появления нестандартной детали.

Решение.

Относительная частота появления нестандартных деталей определяется по формуле (1.2)

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{95} = \frac{1}{19}.$$

При проведении в одинаковых условиях опытов с достаточно большим числом испытаний в каждом относительная частота проявляет свойство устойчивости. Это проявляется в том, что относительная частота колеблется относительно некоторого постоянного числа, которое является вероятностью появления события.

Следовательно, полученную в результате опытов относительную частоту события можно принять за вероятность данного события. Чем больше число опытов, тем точнее определяется вероятность появления события в отдельно взятом опыте.

Пример 3. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение.

Пусть событие A – набрана нужная цифра. В результате опыта абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно $n = 10$. Благоприятным исходом опыта (наступление события A) является лишь один исход (нужная цифра лишь одна) $m = 1$. Так как все исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу, то используем классическую формулу определения вероятности (1.1)

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10}.$$

Пример 4. Указать ошибку «решения» задачи: «Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4 (событие A)».

Решение.

Всего возможны 2 исхода испытания: сумма выпавших очков равна 4, сумма выпавших очков не равна 4. Событию A благоприятствует один исход; общее число исходов равно двум. Следовательно, искомая вероятность, согласно формуле (1.1)

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Ошибка этого решения состоит в том, что рассматриваемые исходы не являются *равновозможными.*

Правильное решение. Общее число равновозможных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$ (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию A только 3 исхода: (1; 3), (3; 1), (2; 2) (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Пример 5. Вероятность того, что день будет пасмурный (событие A), $P(A) = 0.7$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение.

События «день пасмурный» и «день ясный» — противоположные и составляют полную группу событий. Поэтому искомая вероятность (произойдет событие $\overline{A}$, противоположное событию A)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Замечание. При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\overline{A}$, а затем найти искомую вероятность по формуле

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

Задача 2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях — нечетная.

Задача 3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Задача 4. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

Задача 5. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Определить относительную частоту поражения цели.

1.3. Основные формулы комбинаторики

При подсчете числа элементарных исходов, используется комбинаторика. *Комбинаторика* изучает количество комбинаций, подчиненных определенным условиям, которое можно составить из элементов, заданного конечного множества. Приведем наиболее употребительные из них.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

$$P_n = n!, \tag{1.3}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение.

Искомое число трехзначных чисел определяется по формуле (1.3)

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Размещениями называется комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом, либо их порядком элементов.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1). \tag{1.4}$$

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение.

Искомое число деталей определяется как комбинация размещение по формуле (1.4)

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Сочетаниями называется комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Порядок размещения элементов значения не имеет.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.5}$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

<u>*Решение.*</u>

Количество искомых способов представляет собой комбинацию сочетание из 10 по 2 детали по формуле (1.5)

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45.$$

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m C_n^m. \tag{1.6}$$

При решении задач комбинаторики используются следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект *A* может быть выбран из совокупности объектов *m* способами, а другой объект *B* может быть выбран *n* способами, то выбрать либо *A,* либо *B* можно *m* + *n* способами.

Правило произведения. Если объект *A* можно выбрать из совокупности объектов *m* способами и после каждого такого выбора объект *B* можно выбрать *n* способами, то пара объектов *(A, B)* в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 4. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

<u>*Решение.*</u>

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (формула (1.6))

$$n = C_{10}^6.$$

Благоприятное число исходов представляют собой пару событий: взять 4 детали из числа стандартных и оставшиеся 2 детали $(6-4=2)$ из числа нестандартных. Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей C_7^4 способами; при этом остальные детали должны быть нестандартными; взять же две нестандартные детали из $(10-7=3)$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами.

Общее количество благоприятствующих комбинаций определяются по правилу произведения

$$m = C_7^4 \cdot C_3^2.$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов в соответствии с классической формулой вычисления вероятности (1.1):

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают 3 деталь. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажется окрашенными.

Задача 2. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Задача 3. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

Задача 4. Сколько сигналов можно подать пятью различными флажками, поднимая их в любом количестве и в произвольном порядке?

1.4. Теорема сложения вероятностей

Суммой A + B двух событий A и *B* называют событие, состоящее в появлении события *A,* или события *B,* или обоих этих событий.

Пример 1. Произведены два выстрела. Событие *A* – попадание при первом выстреле, событие *B* – попадание при втором выстреле. Тогда событие *A* + *B* – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий без учета вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.7}$$

Если события несовместны, то вероятность их одновременного наступления исключена. Тогда слагаемое $P(AB)$ из формулы (1.7) будет равно нулю, следовательно, формула (1.7) примет вид:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.8}$$

Пример 2. В урне 50 шаров: 15 красных, 25 синих и 10 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

<u>*Решение.*</u>

Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

$$P(A)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}.$$

Вероятность появления синего шара (событие B)

$$P(B)=\frac{25}{50}=\frac{5}{10}.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому применима формула (1.8).

Искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=\frac{4}{5}.$$

Пример 3. Вероятность попадания в цель при стрельбе первого и второго лука соответственно равны: $P_1=0,75$; $P_2=0,88$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одновременном выстреле из двух луков.

<u>*Решение.*</u>

Вероятность попадания в цель из одного лука никаким образом не влияет на попадания из другого лука, и события могут произойти одновременно. Следовательно, событие A (попадание в цель из первого лука) и событие B (попадание в цель из второго лука) являются совместными.

Искомая вероятность определяется по формуле (1.7)

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,75+0,88-0,75\cdot 0,88=0,84.$$

Теорема сложения вероятности может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, для трех совместных событий

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Сумма вероятностей событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Пример 4. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и C. Вероятность получения пакета из города A равна 0,7, из города B – 0.2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

Решение.

События «пакет получен из города A», «пакет получен из города B», «пакет получен из города C» образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$0,7+0,2+p=1.$$

Отсюда искомая вероятность

$$p=1-0,9=0,1.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1=0,8$; $p_2=0,7$; $p_3=0,9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Задача 2. Зашедший в магазин мужчина что-нибудь покупает с вероятностью 0,1, а зашедшая женщина – с вероятностью 0,6. У прилавка один мужчина и две женщины. Какова вероятность того что по крайней мере одно лицо что-нибудь купит?

Задача 3. Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно.

1.5. Теорема умножения вероятностей

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если A – деталь годная, B – деталь окрашенная, то AB – деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A, B, C – появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность событий B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{1.9}$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т.е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д.

Пример 1. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

Решение.

Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие A)

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик – конусный, т.е. условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{7}{9}.$$

По теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Заметим, что, сохранив обозначения, легко найдем: $P(B) = \frac{7}{10}$, $P_B(A) = \frac{3}{9}$, $P(B) \cdot P_B(A) = \frac{7}{30}$, что наглядно иллюстрирует справедливость равенства

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Для независимых событий теорема умножения (1.9) имеет вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \tag{1.10}$$

т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Пример 2. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) – 0,7.

Решение.

События A и B независимые, поэтому, по теореме умножения (формула (1.10)), искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Обратите внимание, $P(A+B) > P(B) > P(AB)$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Система S состоит из двух независимых подсистем S_a и S_b (рисунок 1.1). Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k (схема параллельного подсоединения блоков подсистем).

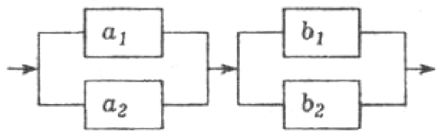

Рис. 1.1. Схема параллельного подсоединения блоков подсистем

Найти надежность системы - вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}8$, $P(b_k) = 0{,}9$.

Задача 2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задача 3. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

1.6. Формула Бернулли

Часто встречаются задачи, в которых один и тот же опыт повторяется неоднократно. Вероятность наступления события A в каждом опыте одинаковая и равна P.

Ставится задача вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществиться ровно k раз и, следовательно, не осуществиться $n - k$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью *формулы Бернулли*.

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \tag{1.11}$$

или, согласно формуле (1.5),

$$P_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Пример 1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равно $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течении 4 суток не превысит нормы.

Решение.

Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 = 0,099$$

Пример 2. Устройство, состоящее из пяти независимо работающих элементов, включается за время *T*. Вероятность отказа каждого из них за это время равна 0,2. Найти вероятность того, что откажут:

а) три элемента;

б) не менее четырех элементов;

в) хотя бы один элемент.

Решение.

Имеем схему Бернулли с параметрами p = 0,2 (вероятность того, что элемент откажет), n = 5 (число испытаний, то есть число элементов), k (число «успехов», отказавших элементов). Будем использовать формулу Бернулли (формула (1.11)):

Получаем:

а) Вероятность того, что откажут ровно три элемента из пяти:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,0512$$

б) Вероятность того, что откажут не менее четырех элементов из пяти (то есть или четыре, или пять):

$$P_5(\geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 + C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}0067$$

в) Вероятность того, что откажет хотя бы один элемент (находим через вероятность противоположного события - ни один элемент не откажет):

$$P_5(\geq 0) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

Задача 2. Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,1. Найти вероятность того, что событие A появится хотя бы 2 раза.

Задача 3. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимать)?

1.7. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое теория вероятности?
2. Дайте определение основным понятиям теории вероятности: исход опыта, группа исхода, вероятность события.
3. Достоверное, недостоверное, случайное событие. Дайте определение и приведите примеры.
4. Вероятность события: определение, свойства, классическая формула для вычисления вероятности.
5. Приведите основные формулы комбинаторики: перестановка, размещение, сочетание.
6. Сформулируйте правило суммы, правило произведения, используемые в комбинаторике.
7. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий; для совместных событий.

8. Сформулируйте теорема умножения вероятностей для зависимых событий; для независимых событий.

9. Что такое относительная частота. Чем отличаются понятия «относительная частота» и «вероятность события».

10. Запишите формулу Бернулли.

Глава 2. Случайные величины

2.1. Случайная величина

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие случайной величины. *Случайной величиной* (СВ) называется такая величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причём до завершения опыта неизвестно какое. Примером случайной величины может служить погрешность измерения.

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т.д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

Случайные величины делят на непрерывные и дискретные. Дискретная случайная величина в заданном диапазоне может принимать конечное число значений. Например, число попаданий при 10 выстрелах в цель является дискретной случайной величиной с возможными значениями от нуля до десяти. Непрерывная случайная величина в заданном диапазоне значений может принимать любое значение и число таких значений бесконечно. Границы непрерывной случайной величины могут быть точно определены, например координаты пасущейся на огороженном участке коровы, а чаще всего являются неопределёнными, расплывчатыми, например погрешность измерения.

Итак, случайные величины могут быть дискретными или непрерывными, а область возможных исходов может быть представлена конечным множеством, счетным или бесконечным.

2.2. Ряд, многоугольник и функция распределения дискретной случайной величины

Дискретной называют случайную величину, которая может принимать отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями (ДСВ).

Закон распределения случайной величины – любое правило, устанавливающее соответствие между значениями случайной величины и вероятностями ее наступления.

Дискретная случайная величина X может быть задана рядом распределения или функцией распределения (интегральным законом распределения).

Рядом распределения называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$, он может быть задан в виде таблицы 2.1:

Таблица 2.1

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

При этом вероятности p_i удовлетворяют условию

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, \tag{2.1}$$

так как события $\{X = x_i\}$, …, $\{X = x_n\}$ несовместны и образуют полную группу.

Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольником распределения.* Для его построения возможные значения случайной величины (x_i) откладываются по оси абсцисс, а вероятности p_i – по оси ординат; точки A_i с координатами (x_i, p_i) соединяются ломаными линиями.

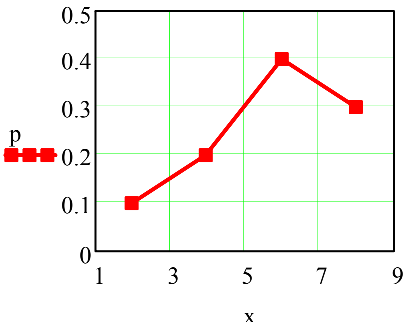

Рис. 2.1. Многоугольник распределения

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности того, что случайная величина X будет меньше этого значения x, то есть

$$F(x) = P(X < x). \tag{2.2}$$

Функция $F(x)$ для дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \tag{2.3}$$

где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

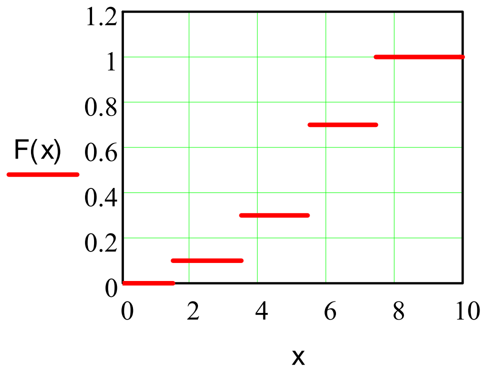

Рис. 2.2. Функция распределения

Функция распределения обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&1.\ F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1,\\
&2.\ F(x_1)\le F(x_2),\ \text{при}\ x_1<x_2,\\
&3.\ P(a\le X<b)=F(b)-F(a).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Пример 3. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеются 10 дефектных, выбраны случайным образом пять изделий для проверки их качества. Построить ряд распределений случайного числа X дефектных изделий, содержащихся в выборке.

Решение.

Так как в выборке число дефектных изделий может быть любым целым числом в пределах от 0 до 5 включительно, то возможные значения x_i случайной величины X равны:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5.$$

Вероятность $P(X=k)$ того, что в выборке окажется ровно k $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ дефектных изделий, равна

$$P(X = k) = \frac{C_{10}^k \cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5}.$$

В результате расчетов по данной формуле с точностью 0.001 получим:

$$p_1 = P(X=0) \cong 0{,}583, \qquad p_2 = P(X=1) \cong 0{,}340,$$
$$p_3 = P(X=2) \cong 0{,}070, \qquad p_4 = P(X=3) \cong 0{,}007,$$
$$p_5 = P(X=4) \cong 0, \quad p_6 = P(X=5) \cong 0.$$

Используя для проверки равенство $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$, убеждаемся, что расчеты и округление произведены правильно (см. таблицу 2.2).

Таблица 2.2

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,3401	0,070	0,007	0	0

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задача 2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины — числа стандартных деталей среди отобранных. Построить многоугольник распределения.

Задача 3. Для данного ряда распределения случайной величины X (таблица 2.3) найти функцию распределения вероятности $F(x)$ этой случайной величины и построить ее.

Таблица 2.3

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

2.3. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

Непрерывной называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторые конечные или бесконечные промежутки (НСВ).

Случайная величина называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция *f(x),* удовлетворяющая при любых х равенству:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{X} f(x)dx. \qquad (2.5)$$

Плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке, обозначаемая *f(x)*. Функция *f(x)* определяется соотношением

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{dF(x)}{dx}. \qquad (2.6)$$

График плотности распределения называется *кривой распределения*.

Непрерывная случайная величина задается либо *функцией распределения F(x)* (интегральным законом распределения), либо *плотностью вероятности f(x)* (дифференциальным законом распределения).

В геометрической интерпретации *F(x)* равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения *f(x)* и лежащей левее точки *x*.

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: $f(x)\geq 0$.
2. Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$ (2.7)

Пример 1. Изобразить графически плотность вероятности непрерывной случайной величины, заданной в следующем виде:

$$f(x)=\begin{cases} 0,5\cos x & при \quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & при \quad |x|>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и плотность.

<u>*Решение.*</u>

Сначала построим график плотности распределения.

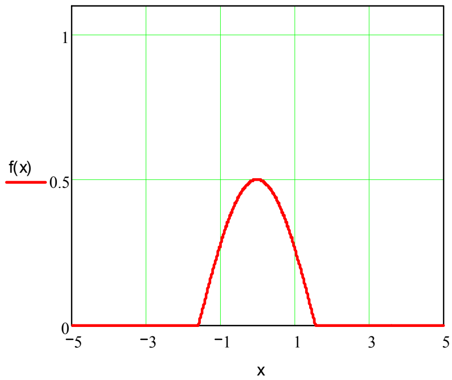

Рис. 2.3. График плотности распределения

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности по формуле (2.5)

для $x < -\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0,$

для $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \int\limits_{-\pi/2}^{x} 0,5 \cdot \cos x dx = \dfrac{1 + \sin x}{2},$

для $x > \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{x} 0dx = 1.$

Окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ -\infty < x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\sin x + 1}{2} \ \ \textit{при} \ \ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

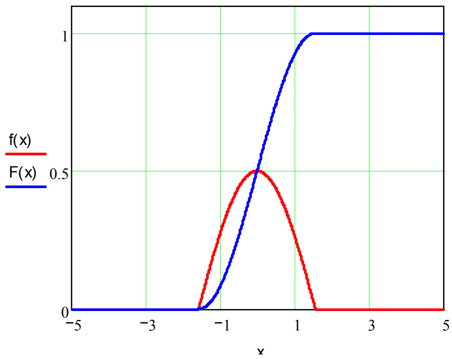

Рис. 2.4. График плотности распределения f(x) и функции распределения F(x)

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ x^2 & при \quad 0<x\le 1,\\ 1 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина *X* ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,75). (Использовать формулу Бернулли).

Задача 2. Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \sin x & при \quad 0<x\le \pi/2,\\ 1 & при \quad x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)* и построить ее.

Задача 3. Непрерывная случайная *X* задана плотность распределения $f(x)=\frac{3}{2}\sin 3x$ в интервале (0, π/3), вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (π/6, π/4).

2.4. Числовые характеристики случайной величины

Для решения практических задач бывает достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, которые позволяют представить основные особенности СВ в сжатой форме. Их называют *числовыми характеристиками СВ.*

Одна из основных характеристик СВ – *математическое ожидание*:

$$m_x=M[x]=\begin{cases}\sum\limits_i x_i\cdot P\{X=x_i\} & для \quad ДСВ,\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx & для \quad НСВ.\end{cases} \tag{2.8}$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение СВ и обладает следующими свойствами:

1. $M[c]=c$,
2. $M[c \cdot X]=c \cdot M[X]$,
3. $M[X+c]=M[X]+c$,
4. $M[X_1+X_2]=M[X_1]+M[X_1]$.

Модой случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или *f(x)* (для непрерывных СВ) достигает максимума. Обозначения: *Mx, Mo*.

Медианой случайной величины *X* называется такое ее значение, для которого выполняется условие $P\{X<Me\}=P\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин.

Геометрически медиана – это абсцисса тоски, в которой площадь, ограниченная кривой плотности распределения *f(x)*, делится пополам.

Начальный момент s-го порядка СВ *X* есть математическое ожидание *s*-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_S = M[X^S].$$

Центрированной случайной величиной называется отклонение СВ от математического ожидания:

$$\overset{0}{X} = X - m_x.$$

Центральный момент s-го порядка СВ *X* есть математическое ожидание *s*-й степени центрированной случайной величины:

$$\mu_s = M\left[\overset{0}{X^s}\right] = M\left[\left(X - m_x\right)^s\right].$$

Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен 0.

Коэффициентом асимметрии (или скошенности) распределения называется величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Для симметричной СВ $\mu_3 = 0$

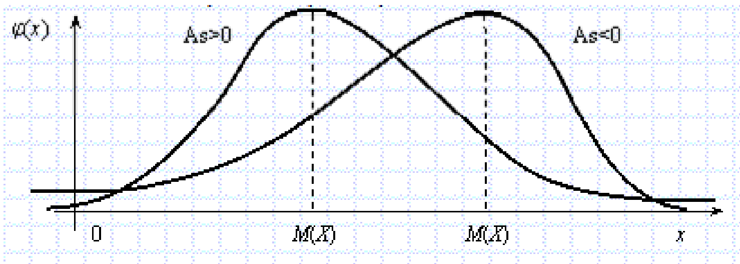

Рис. 2.5. Коэффициент асимметрии

Коэффициентом эксцесса (или островершинности) распределения называется величина

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Коэффициент эксцесса является обобщенной характеристикой плосковершинности плотности распределения.

Для нормального распределения эксцесс $E = 0$, для более островершинных законов распределения $E > 0$, а для плосковершинных $E < 0$.

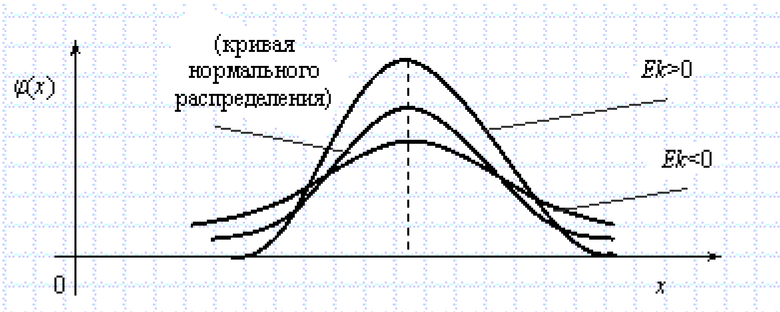

Рис. 2.6. Коэффициент эксцесса

Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины.

Расчетные формулы:

$$D[x] = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - m_x)^2 \cdot P\{X = x_i\} = \sum\limits_i x_i^{\,2} \cdot P\{X = x_i\} - (m_x)^2 & \text{для} \quad ДСВ, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (m_x)^2 & \text{для} \quad НСВ. \end{cases} \tag{2.9}$$

Вычислить дисперсию можно и через второй начальный момент:

$$D[X] = M\left[X^2\right] - m_x^2. \tag{2.10}$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и обладает следующими свойствами:

1. $D[c]=0,$
2. $D[X+c]=D[c],$
3. $D[c\cdot X]=c^2\cdot D[X],$
4. $\sigma[c\cdot X]=c\cdot\sigma[X].$

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ *X* называется характеристика

$$\sigma_x=\sigma\left[X\right]=\sqrt{D\left[X\right]}. \tag{2.11}$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Правило 3σ. Практически все значения СВ находятся в интервале $[m-3\sigma;m+3\sigma]$.

Пример 1. Из партии численностью 25 изделий, среди которых имеется шесть нестандартных, случайным образом выбраны три изделия. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

<u>*Решение.*</u>

По условию задачи СВ *X* принимает следующие значения: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$. Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно i $(i=0,\ 1, 2, 3)$ нестандартных изделий, вычисляется по формуле

$$p_i=P\{X=x_i\}=\frac{C_6^i\cdot C_{19}^{3-i}}{C_{25}^i},$$

откуда

$$p_1=0,41;\ p_2=0,43;\ p_3=0,11;\ p_4=0,05.$$

Дисперсию определим по формулам (2.10), (2.8)

$$\mathrm{D[X]=M[X^2]-(M[X])^2},$$
$$\mathrm{M[X]}=0\cdot 0,41+1\cdot 0,43+2\cdot 0,11+3\cdot 0,05=0,8;$$
$$\mathrm{M[X^2]}=0\cdot 0,41+1\cdot 0,43+2^2\cdot 0,11+3^2\cdot 0,05=1,32;$$
$$\mathrm{D[X]}=1,32-(0,8)^2=0,68;$$
$$\sigma\left[X\right]=\sqrt{D\left[X\right]}=0,82.$$

Пример 2. Непрерывная СВ распределена по закону Лапласа:

$$f(x) = b \cdot e^{-|x|}.$$

Найти коэффициент *b*, математическое ожидание *M[X]*, дисперсию *D[X]*, среднее квадратическое отклонение *σ[X]*.

<u>*Решение.*</u>

Для нахождения коэффициента *b* воспользуемся свойством нормировки плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2b\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx = 2b = 1$, откуда *b* = *1/2*. Так как функция $xe^{-|x|}$ - нечетная, то $M[x] = 0{,}5 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}dx = 0$, дисперсия *D[X]* и СКО $\sigma[X]$ соответственно равны:

$$D[x] = 0{,}5 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-|x|}dx = 2 \cdot 0.5\int\limits_{0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-|x|}dx = 2,$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x) = c \cdot (x^2 + 2 \cdot x)$ в интервале (0, 2); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр с и математическое ожидание величины *X*.

Задача 2. Найти дисперсию случайной величины *X*, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le -2, \\ x/4 + 1/2 & при \quad -2 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2. \end{cases}$$

Задача 3. Случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 6 \cdot x - \frac{45}{4}$ в интервале (3, 5); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины *X*.

Задача 4. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины *X*: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X) = 0{,}1$, $M(X^2) = 0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

Задача 5. Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины, заданной законом распределения:

Таблица 2.4

x_i	4.3	5.1	10.6
p_i	0.2	0.3	0.5

Задача 6. Сравните математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y, заданных следующими законами распределения:

Таблица 2.5

x_i	-1	1	2	3
p_x	0.48	0.01	0.09	0.42

y_i	-1	1	2	3
p_y	0.19	0.51	0.25	0.05

2.5. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое случайная величина: дискретная и непрерывная?
2. Как различаются законы функций и плотности распределения непрерывных и дискретных случайных величин?
3. Что такое числовые характеристики случайных величин?
4. Что такое математическое ожидание и дисперсия случайной величины? Приведите формулы для расчета математического ожидания и дисперсии непрерывной и дискретной случайных величин.
5. Дайте определение и приведите расчетные формулы начальных центральных моментов.
6. Что такое коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса? Приведите расчетные формулы.

Глава 3. Элементы математической статистики

3.1. Генеральная и выборочная совокупности

Математическая статистика – это раздел математики, посвященный математическим методам сбора, систематизации, обработки и интерпретации статистических данных, а также использование их для научных или практических выводов. Правила и процедуры математической статистики опираются на теорию вероятностей, позволяющую оценить точность и надежность выводов, получаемых в каждой задаче на основании имеющегося статистического материала. *Статистическими данными* называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется парии деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т.е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

Часто генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Однако если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений, или для облегчения теоретических выводов, допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправдывается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (достаточно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных выборки.

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается. На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо при формировании выборки обеспечить:

- Достаточный объем выборки;
- Репрезентативность (представительность).

Необходимый объем выборки зависит от решаемой задачи и от заданной точности и надежности получаемых результатов, в каждом конкретном случае определяется по-своему.

Выборка называется *репрезентативной (представительной),* если она правильно представляет генеральную совокупность. В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается. В предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

3.2. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, $x_i - n_i$ раз, $x_k - n_k$ раз и $\sum n_i = n$ – объем выборки.

Совокупность полученных результатов исследования выборки называется *статистической совокупностью* или *простым статистическим рядом*. Этот ряд может состоять, например, из значений результатов измерений диаметра валов привода, температуры прокатки подшипниковой стали или числа отказов электрорадиоаппаратуры за 1000 часов работы. Названные признаки являются случайными величинами. Их обозначают заглавными латинскими буквами X, Y, ... Ряд измерений объема n состоит из n значений, которые обозначаются малыми латинскими буквами, снабженными индексом, указывающим порядковый номер измерения: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами,* а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом.* Если закон распределения измеряемой случайной величины не известен заранее, то первым шагом к осмысливанию ряда наблюдений является построение *вариационного ряда.*

Различают дискретные и интервальные вариационные ряды. Для представления дискретных случайных величин используют дискретные вариационные ряды, для представления непрерывных случайных величин - в основном интервальные.

Число повторений значения x_i называют *частотам* n_i, а их отношения к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ – *относительными частотами.*

Таблица 3.1, позволяющая судить о распределении частот между значениями $x_1, x_2, \ldots, x_l$, называется *дискретным вариационным рядом*.

Таблица 3.1

x_i	x_1	x_2	…	x_l
n_i	n_1	n_2	…	n_l
W_i	W_1	W_2	…	W_l

Для проверки правильности выполненных операций следует проверить выполнение условий:

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n; \ \sum_{i=1}^{l} W_i = 1. \tag{3.1}$$

Пример 1. Задано распределение частот выборки объема n = 20 (Таблица 3.2). Записать распределение относительных частот.

Таблица 3.2

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

<u>*Решение.*</u>

Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

$$W_1 = \frac{3}{20} = 0,15;\ W_2 = \frac{10}{20} = 0,5;\ W_3 = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Запишем распределение относительных частот:

Таблица 3.3

X_i	2	6	12
W_i	0,15	0,50	0,35

Контроль: $W = 0,15 + 0,5 + 0,35 = 1.$

Для построения *интервального вариационного ряда* из всех реализаций непрерывной случайной величины X выбирают максимальное и минимальное значения и разбивают все значения от x_{min} до x_{max} на несколько интервалов.

Для определения оптимального числа интервалов l можно использовать формулу Стэрджеса:

$$l = 1 + 3,322 \cdot \lg n \tag{3.2}$$

Границы интервалов можно рассчитать по выражению

$$\begin{aligned} a_i &= x_{\min} + (i-1) \cdot h, \\ h &= \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $i = 1, \ldots, l + 1$.

Затем необходимо рассчитать число реализаций n_i случайной величины X, относящихся к i-му интервалу (абсолютные частоты), и определить относительные частоты $\frac{n_i}{n} = W_i$. Результаты заносятся в таблицу 3.4, которая позволят судить о распределении частот между интервалами значений непрерывной случайной величины X, называется *интерваль-*

ным вариационным рядом. Для проверки правильности выполнения операций при построении вариационного ряда следует также проверить выполнение условий (3.1).

Таблица 3.4

№ интервала	Границы i-го интервала	Абсолютные частоты	Относительные частоты
1	$a_1 - a_2$	n_1	W_1
2	$a_2 - a_3$	n_2	W_2
...	...	...	...
l	$a_l - a_{l+1}$	n_l	W_l

Пример 2. Пользуясь формулой Стэрджеса, определите интервал группировки сотрудников фирмы по уровню доходов, если общая численность сотрудников составляет 120 человек, а минимальный и максимальный доход соответственно равен 500 и 6500 у.е.

<u>*Решение.*</u>

Количество групп равно

$$l = 1 + 3,222 \cdot \lg 120 = 8$$

Границы интервалов рассчитываем в соответствии с формулой (3.3)

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l} = \frac{6500 - 500}{8} = 750,$$

$$a_i = x_{\min} + (i-1) \cdot h = 500 + (i-1) \cdot 750.$$

Интервалы выглядят следующим образом:

Таблица 3.5

№ группы	Величина интервала группировки
1	500-1250
2	1250-2000
3	2000-2750
4	2750-3500
5	3500-4250
6	4250-5000
7	5000-5750
8	5750-6500

Пример 3. Количество филиалов в городе у двадцати разных банков: 2, 4, 3, 5, 4, 4, 6, 5, 4, 3, 4, 3, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5, 4. Построить ряд распределения по имеющимся данным.

Решение.

Вариация признака носит дискретный характер, число вариант дискретного признака невелико, и значения признака у отдельных единиц совокупности повторяются, поэтому строится дискретный ряд распределения. Для его построения следует перечислить все встречающиеся варианты значений признака и подсчитать частоту повторения.

Дискретный ряд распределения, построенный по данным, выглядит следующим образом:

Таблица 3.6

Количество филиалов в городе, x	Число банков (или частота, n)	Относительная частота, W
2	1	1/20=0,05
3	5	5/20=0,25
4	8	8/20=0,40
5	4	4/20=0,20
6	2	2/20=0,10
Итого	20	1

Относительная частота W рассчитана как отношение соответствующей частоты к общей сумме частот.

Пример 4. Имеются следующие данные о размере прибыли двадцати коммерческих банков. Прибыль, млн. руб.: 3,7 4,3 6,7 5,6 5,1 8,1 4,6 5,7 6,4 5,9 5,2 6,2 6,3 7,2 7,9 5,8 4,9 7,6 7,0 6,9. Построить ряд распределения по имеющимся данным.

Решение.

Вариация признака носит непрерывный характер, значения признака у отдельных единиц совокупности не повторяются. Поэтому строится интервальный ряд распределения. Для его построения следует определить количество интервалов и величину интервала.

Количество интервалов заранее не задано, поэтому определим его по формуле Стэрджеса (3.2):

$$l = 1 + 3,222 \cdot \lg 20 = 5,3$$

Дробное число, характеризующее количество интервалов, желательно округлять в меньшую сторону, $l = 5$

Величина интервала (3.3)

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l} = \frac{8,1-3,7}{5} = 0,88$$

Число, характеризующее величину интервала, округляется с той же точностью, что и исходные данные. В нашем случае следует округлить до 0,1: h = 0,9.

Строим интервальный ряд распределения:

Таблица 3.7

№ группы	Группы по размеру прибыли x	Число банков (частота) n	Относительная частота, W
1	3,7 – 4,6	3	0,15
2	4,6 – 5,5	3	0,15
3	5,5 – 6,4	7	0,35
4	6,4 – 7,3	4	0,2
5	7,3 – 8,2	3	0,15
Итого		20	1

При подсчете частот воспользуемся принципом «включительно», согласно которому единица совокупности, имеющая значение признака, равное границе двух смежных групп (например, банк с прибылью 4,6 млн. руб.), включается в интервал, где он служит верхней границей (банк с прибылью 4,6 млн. руб. включим в группу с размером прибыли от 3,7 до 4,6 млн. руб.).

Расчет относительной частоты производится как отношение соответствующей частоты к общей сумме частот.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. По заданной выборке в виде распределения частот найти распределение относительных частот.

Таблица 3.8

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Задача 2. Пользуясь формулой Стэрджеса, определите интервалы групп, полученных в результате группировки работников магазина по среднемесячной выработке, если общая численность работников составляет 22 человека, а минимальная и максимальная среднемесячная выработка соответственно равны 100 тыс. руб. и 250 тыс. руб.

Задача 3. По имеющимся данным о числе товарных секций по двадцати магазинам города, построить ряд распределения:

Таблица 3.9

2	4	3	5	6
5	6	4	6	3
2	2	4	3	3
4	5	5	4	4

Задача 5. Имеются следующие данные о размере прибыли двадцати коммерческих банков. Прибыль, млн. руб.:

Таблица 3.10

4,7	9,1	6,2	6,8
5,3	5,6	7,2	5,9
7,7	6,7	7,3	8,6
6,6	7,4	8,2	8
6,1	6,9	8,9	7,9

Построить ряд распределения по имеющимся данным.

3.3. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X. Введем обозначения: n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x; n – общее число наблюдений (объем выборки). Ясно, что относительная частота события $X < x$ равна n_x/n. Если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и относительная частота, т.е. относительная частота n_x/n есть функция от x. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

Итак, по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \tag{3.4}$$

где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения.* Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого события. При больших n числа $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого в том смысле, что $\lim\limits_{n\to\infty} P\left[\left|F(x) - F^*(x)\right| < \varepsilon\right] = 1$ $(\varepsilon > 0)$. Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Такое заключение подтверждается и тем, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$. Действительно, из определения функции $F^*(x)$ вытекают следующие ее свойства:

1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0,1].
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределении генеральной совокупности.

Пример 1. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Таблица 3.11

варианты x_i	2	6	10
частоты n_i	12	18	30

Решение.

Найдем объем выборки: $n = 12 + 18 + 30 = 60$. Наименьшая варианта равна 2, следовательно,

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x \le 2.$$

Значение $X < 6$, а именно $x_1 = 2$, наблюдалось 12 раз, следовательно,

$$F^*(x) = \frac{12}{60} = 0.2 \text{ при } 2 < x \le 6.$$

Значения $X < 10$, а именно $x_1 = 2$, и $x_2 = 6$, наблюдались $12 + 18 = 30$ раз, следовательно,

$$F^*(x)=\frac{30}{60}=0,5 \text{ при } 6<x\le 10.$$

Так как $x=10$ — наибольшая варианта, то

$$F^*(x)=1 \text{ при } x>10.$$

Искомая эмпирическая функция:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\le 2, \\ 0,2 & \textit{при} \quad 2<x\le 6, \\ 0,5 & \textit{при} \quad 6<x\le 10, \\ 1 & \textit{при} \quad x>10. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 3.1.

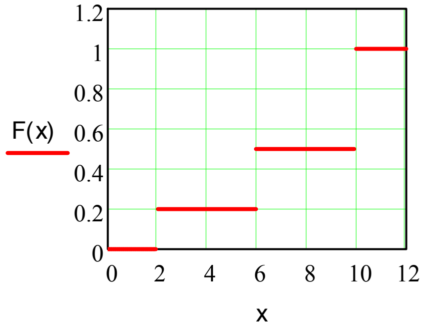

Рис. 3.1. Эмпирическая функция распределения

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Таблица 3.12

x_i	1	4	6
n_i	12	15	25

Задача 2. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Таблица 3.13

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

3.4. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки соединяют точки $(x_1;n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ..., $(x_k;n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладываются варианты x_i, а на оси ординат – соответствующий им частоты n_i. Точки $(x_i;\ n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ W_1)$, $(x_2;\ W_2)$, ..., $(x_k;\ W_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты W_i. Точки $(x_i;\ W_i)$ соединяют отрезками прямых, получают полигон относительных частот.

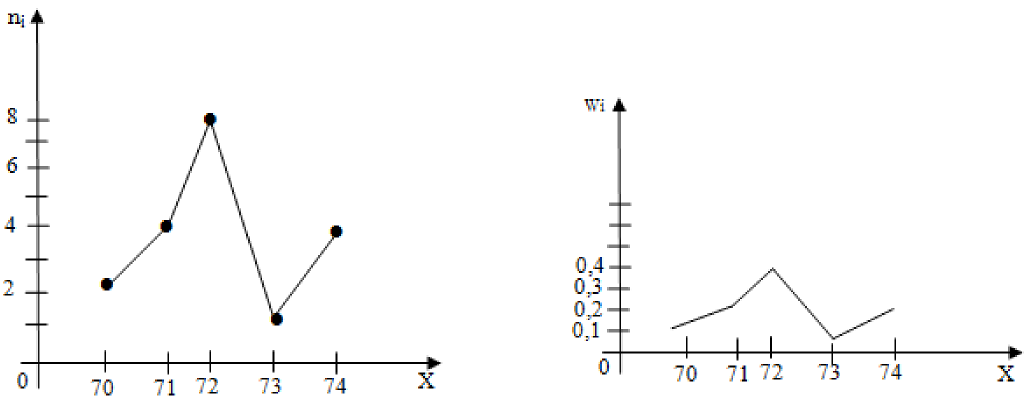

Рисунок 3.2. Полигон частот и полигон относительных частот

Пример 1. Построить полигон относительных частот:

Таблица 3.14

X	1.5	3.5	5.5	7.5
W	0.1	0.2	0.4	0.3

Решение:

При построении полигона по оси абсцисс откладываем значения случайной величины X, а по оси ординат – относительные частоты.

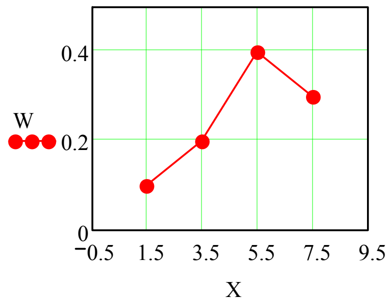

Рис. 3.3. Полигон относительных частот

В случае *непрерывного признака* целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. Число интервалов можно определить с помощью формулы Стэрджеса (3.2).

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h \cdot n_i / h = n_i$ – сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот т. е. объему выборки*.

На рисунке 3.4 изображена гистограмма частот распределения.

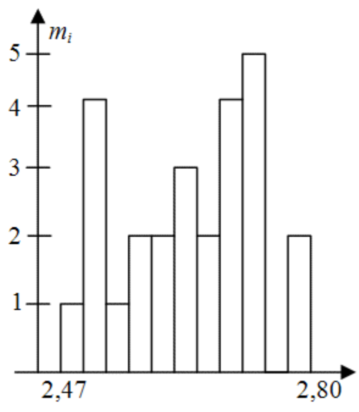

Рис. 3.4. Гистограмма частот

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению W_i / h (плотность относительной частоты).

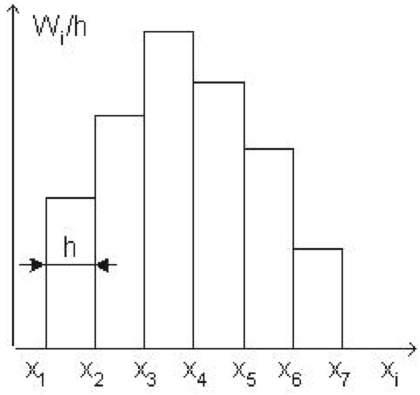

Рис. 3.5. Гистограмма относительных частот

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i / h. Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h \cdot W_i / h = W_i$ – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.*

Пример 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n=100$ (Таблица 3.15)

Таблица 3.15

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты n_i / h
1	1 – 5	10	2,5
2	5 – 9	20	5
3	9 – 13	50	12,5
4	13 – 17	12	3
5	17 – 21	8	2

Решение:

Построим на оси абсцисс заданные интервалы длины $h=4$. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям частоты n_i / h. Например, над интервалом (1-5) построим отрезок, параллельный оси абсцисс, на расстоянии $n_i / h = \frac{10}{4} = 2{,}5$; аналогично строят остальные отрезки гистограмм.

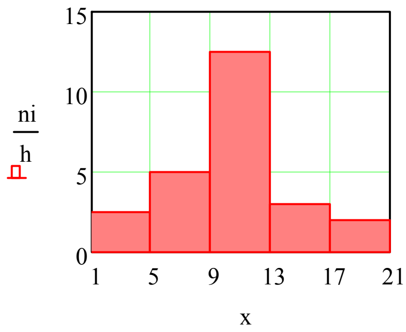

Рис. 3.6. Гистограмма

Пример 3. В таблице 3.16 приведено распределения населения России в 1997 г. по возрастным группам. Построить гистограмму.

Таблица 3.16

Все населе-ние	В том числе в возрасте								
	до 10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70 и старше	Всего
Численность населения	12,1	15,7	13,6	16,1	15,3	10,1	9,8	7,3	100,0

Решение.

Для построения гистограммы по оси абсцисс указывают значения границ интервалов и на их основании строят прямоугольники, высота которых пропорциональна частотам.

Однако в тех случаях, когда ширина всех интервалов группировки одинакова, вид гистограммы не изменится, если по оси ординат откладывать не величины $\frac{n_i}{h}$, а частоты интервалов n_i.

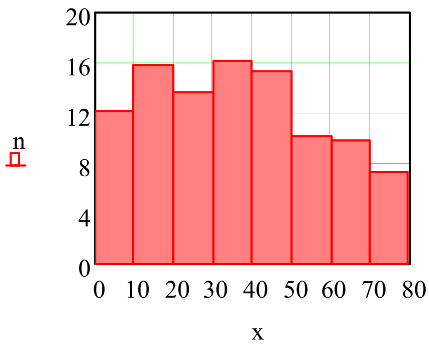

Рис. 3.7. Распределение населения России по возрастным группам

Пример 4. Приведено распределение 30 работников фирмы по размеру месячной заработной платы.

Таблица 3.17

№	Размер з/п руб. в месяц	Численность работников, чел.
1	до 5000	4
2	5000 – 7000	12
3	7000 – 10000	8
4	10000 –15000	6
	Итого:	30

Изобразить интервальный вариационный ряд графически в виде гистограммы.

Решение.

Неизвестная граница открытого (первого) интервала определяется по величине второго интервала: $7000-5000=2000$ руб. С той же величиной находим нижнюю границу первого интервала: $5000-2000=3000$ руб.

Для построения гистограммы в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладываем отрезки, величины которых соответствуют интервалам вариационного ряда.

Эти отрезки служат нижним основанием, а соответствующая частота – высотой образуемых прямоугольников.

Построим гистограмму:

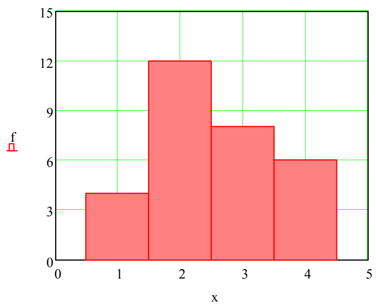

Рис. 3.8. Распределение работников по размеру месячной заработной платы

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Приводятся данные о распределении 25 работников одного из предприятий по тарифным разрядам: 4; 2; 4; 6; 5; 6; 4; 1; 3; 1; 2; 5; 2; 6; 3; 1; 2; 3; 4; 5; 4; 6; 2; 3; 4. Построить дискретный вариационный ряд и изобразить его графически в виде полигона распределения.

Задача 2. Построить гистограмму частот и гистограмму относительных частот распределенной выборки объемом n=100, представленной в таблице 3.18:

Таблица 3.18

Частичный интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i
5 - 10	4
10 - 15	6
15 - 20	16
20 - 25	36
25 - 30	24
30 - 35	10
35 - 40	4

Задача 3. При проверке на надежность партии измерительных приборов были проведены испытания выборки из $n=50$ приборов в течение $T=10000$ часов и зарегистрировано число отказов в течение этого времени каждого из приборов. В результате получены следующие данные: 0, 3, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 4, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 0. Требуется построить полигон частот и гистограмму.

Задача 4. По результатам тестирования по математике учащихся 7-го класса получены данные о доступности заданий теста (отношение числа учащихся, правильно выполнивших задания, к числу трестировавшихся учащихся), представленные ниже, в таблице 3.19. Тест содержал 25 заданий. Построить полигон и гистограмму.

Таблица 3.19

Доступность задания x, %	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
Количество задач n	1	1	5	7	7	3	1

3.5. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое генеральная совокупность; выборочная совокупность (выборка); объем выборки?
2. Какая выборка называется повторной; бесповторной?
3. Приведите признаки достоверности выборки.
4. Статистическая распределения выборки и эмпирическая функция распределения. Сходство и различия понятий.
5. Что такое полигон и гистограмма?

Глава 4. Основы теории оценивания

4.1. Статистические оценки параметров распределения

Основная цель статистического анализа состоит в исследовании свойств случайных величин. Экспериментальной основой таких исследований являются результаты многократных наблюдений случайной величины.

При статистическом анализе в каждом конкретном случае возможно решение ряда задач, каждая из которых в общем случае включает два этапа: обработку выборки и принятие решения. Поскольку существуют условия неопределенности из-за конечного объема и случайного содержания выборки, принимаемое решение носит вероятностный характер. Задачи статистического анализа делят на три обширных класса:

1. Статистическое оценивание;
2. Проверка статистических гипотез;
3. Построение статистических зависимостей.

Эти задачи существенно различаются как по внутреннему содержанию, так и по методам их решения. В этом разделе уделяется внимание первому классу задач: статистическому оцениванию. Задачи оценивания направлены на вычисление количественных характеристик случайных величин по конечной выборке. При этом различают правила оценивания, называемые *методами получения оценок.*

Применение методов математической статистики для обработки результатов измерений базируется на том, что многократные измерения соответствуют *выборочному методу*. Сущность *выборочного метода* заключается в следующем: имеется некоторая большая совокупность объектов, называемая *генеральной совокупностью*. Из этой совокупности случайным образом извлекается ограниченное число объектов, образующих *выборку*. Выборка подвергается детальному исследованию, по результатам которого требуется определить свойства (характеристики) генеральной совокупности.

В распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки, например значения количественного признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные в результате n наблюдений. Через эти данные и выражают оцениваемый параметр Θ. Поскольку истинное значение искомой величины получить принципиально невозможно, то в качестве его принимают некоторое найденное по выборке значение $\widetilde{\Theta}$. Полученное по результатам эксперимента приближенное значение $\tilde{\Theta}$ называют *оценкой истинного значения* параметра Θ, которую определяют как функцию результатов наблюдений объема *n*:

$$\tilde{\Theta} = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{4.1}$$

Чтобы оценки в большинстве опытов были максимально близки к истинному значению измеряемой величины, к ним предъявляют следующие требования.

1. *Несмещенность.* Оценку называют несмещенной, если при любом объеме выборки *n* математическое ожидание оценки равно истинному значению искомого параметра:

$$M\left[\overline{\Theta}\right] = \Theta. \tag{4.2}$$

Во многих случаях смещение убывает с возрастанием объема выборки.

2. *Эффективность.* Эффективной называю статистическую оценку, которая при постоянном объеме выборки *n* имеет наименьшую возможную дисперсию.

3. *Состоятельность.* Оценка является *состоятельной*, если при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Например, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

Состоятельность оценки означает, что чем больше объем выборки *n*, тем больше вероятность того, что ошибка не превысит сколь угодно малого положительного числа ε.

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\tilde{\Theta}_n - \Theta\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{4.3}$$

4. *Устойчивость* характеризует чувствительность оценки к аномальным результатам (промахам и выбросам).

4.2. Точечная оценка параметров распределения

Точечная оценка предполагает нахождение единственной числовой величины, которая и принимается за значение параметра. Такую оценку целесообразно определять в тех случаях, когда объем экспериментальных данных достаточно велик. Причем не существует единого понятия о достаточном объеме экспериментальных данных (ЭД), его значение зависит от вида оцениваемого параметра. При малом объеме ЭД точечные оценки могут значительно отличаться от истинных значений параметров, что делает их непригодными для использования.

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака X.

Генеральной средней $\bar{x}_г$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$\bar{x}_г = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}. \tag{4.4}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_N$ имеют ответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, то

$$\bar{x}_г = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N},$$

т. е. генеральная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Итак, если рассматривать обследуемый признак X генеральной совокупности как случайную величину, то математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака: $M(X) = \bar{x}_г$.

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n.

Выборочной средней $\bar{x}_в$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{4.5}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, то

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \tag{4.6}$$

т.е. выборочная средняя есть средняя взвешенная знаний признака с весами, равными соответствующим частотам.

Пусть из генеральной совокупности (в результате независимых наблюдений над количественным признаком X) извлечена повторная выборка объема n со значениями признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Генеральная средняя $\bar{x}_г$ неизвестна и требуется оценить ее по данным выборки. В качестве оценки генеральной средней принимают выборочную среднюю $\bar{x}_г$ (4.6). Можно доказать, что математическое ожидание этой оценки $\bar{x}_в$ равно $\bar{x}_г$: $M(\bar{X}_в) = \bar{x}_г$ следовательно $\bar{x}_в$– несмещенная оценка.

Легко показать, что выборочная средняя является и состоятельной оценкой генеральной средней. При увеличении объема выборки n выборочная средняя стремится по вероятности к генеральной средней, а это и означает, что выборочная средняя есть состоятельная оценка генеральной средней. Из сказанного также следует, что если по нескольким выборкам достаточно большого объема из одной и той же генеральной совокупности будут найдены выборочные средние, то они будут приближенно равны между собой. В этом и состоит свойство *устойчивости.*

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику – генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией $D_г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\bar{x}_г$.

$$D_г = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_г)^2}{N} \tag{4.7}$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – средним квадратическим отклонением.

Генеральным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}. \tag{4.8}$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеянность наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\bar{x}_в$, вводят сводную характеристику – выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\bar{x}_в$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выбору объема n различны, то

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2}{n} \tag{4.9}$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \tag{4.10}$$

Если в качестве оценки генеральной дисперсии принять выборочную дисперсию, то эта оценка будет приводить к систематическим ошибкам, давая заниженное значение генеральной дисперсии. Объясняется это тем, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой $D_г$, другими словами, математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой генеральной дисперсии, а равно

$$M[D_в] = \frac{n-1}{n} D_г. \tag{4.11}$$

Легко «исправить» выборочную дисперсию так, чтоб ее математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Достаточно для этого умножить $D_в$ на дробь $\frac{n}{n-1}$. Сделав это, получим *исправленную дисперсий* которую обычно обозначают через S^2:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2}{n-1}$$

Исправленная дисперсия является, конечно, несмещенной оценкой генеральной дисперсии, так как $M\left[S^2\right] = D_г$.

Итак, в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_в)^2}{n-1} \tag{4.12}$$

Для оценки же среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_в)^2}{n-1}} \tag{4.13}$$

Подчеркнем, что S не является несмещенной оценкой. Чтобы отразить этот факт, будем использовать понятие: «исправленное» среднее квадратическое отклонение.

Сравнивая формулы (4.9) и (4.12)

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_в)^2}{n}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_в)^2}{n-1},$$

видим, что они отличаются лишь знаменателями. Очевидно, при достаточно больших значениях n объема выборки выборочная и исправленная дисперсии различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$.

Пример 1. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти выборочную среднюю длину стержня, выборочную и исправленную дисперсию ошибок прибора.

Решение.

Выборочную среднюю найдем по формуле 4.5

$$\overline{x}_в = \frac{92+94+103+105+106}{5} = 100мм,$$

По формуле 4.9 найдем выборочную дисперсию

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_в)^2}{n} = \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34,$$

Исправленная выборочная дисперсия равна

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{5}{5-1} \cdot 34 = 42,5.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

Таблица 4.1

Рост	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178– 182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Указание. Найти середины интервала и принять их в качестве вариант.

Задача 2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$. Найти несмещенную оценку генеральной средней.

Таблица 4.2

Варианта x_i	2	5	7	10
Частота n_i	16	12	8	14

Задача 3. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8; 9; 11; 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

4.3. Методы получения точечных оценок

На практике при оценке параметров не всегда удается удовлетворить одновременно требование состоятельности, несмещенности и эффективности. Однако выбору оценки всегда должно предшествовать критическое рассмотрение ее со всех точек зрения.

Количественные значения оценок искомых величин в общем случае являются функциями элементов выборки.

Для нахождения алгоритмов вычисления оценок наиболее широкое распространение получили следующие методы: максимального правдоподобия, моментов, порядковых характеристик и др.

4.3.1. Метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия, предложенный Гауссом в 1848 г. и обобщенный Фишером, с теоретической точки зрения является наиболее разработанным методом получения оценок. Идея метода достаточно проста и наглядна: он основан на априорном (доопытном) распределении выборки. Если $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - результаты наблюдений при измерении параметра Θ имеют плотность распределения $f(x, \Theta)$, то наиболее вероятным значением оцениваемых величин будут такие, при которых совместная плотность распределения выборки, называемая *функцией правдоподобия,* достигает максимума. При независимых результатах наблюдений функция правдоподобия равна произведению плотностей распределения результатов наблюдений:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \tilde{\Theta}). \tag{4.14}$$

Для нахождения оценок необходимо исследовать функцию правдоподобия на экстремум. С целью упрощения вычислительной процедуры обычно максимизируют не саму функцию правдоподобия, а ее логарифм $\ln L(x, \tilde{\Theta})$. Если функция правдоподобия достаточно гладкая и дифференцируемая, то нахождение оценок сводится к решению нелинейного уравнения (уравнений) относительного искомого параметра (параметров) вида

$$\frac{d \ln L(x, \tilde{\Theta})}{d\tilde{\Theta}} = 0. \tag{4.15}$$

Пример 1. Оценить методом максимального правдоподобия неизвестных параметров m и σ^2 нормального закона распределения. Функция правдоподобия имеет вид

$$L\left(x, m, \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.16}$$

Логарифм функции правдоподобия:

$$\ln L\left(x, m, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m\right)^2}{2\sigma^2}.$$

Отсюда находим оценки максимального правдоподобия для параметров нормального распределения:

$$\frac{d\ln L\left(x, m, \sigma^2\right)}{dm} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m\right)}{\sigma^2} = 0,$$

$$m = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right). \tag{4.17}$$

$$\frac{d\ln L\left(x, m, \sigma^2\right)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m\right)^2 = 0,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2. \tag{4.18}$$

Таким образом, оценкой максимального правдоподобия математического ожидания нормального закона распределения является среднее арифметическое значение выборки (4.17), а оценкой дисперсии – среднее значение квадрата отклонения элементов выборки от среднего значения (4.18).

4.3.2. Метод моментов

Метод моментов предложен К. Пирсоном в 1894г. Сущность метода состоит в приравнивании теоретических моментов рассматриваемого распределения соответствующим эмпирическим моментам того же порядка и решении полученной системы уравнений относительно неизвестных параметров распределения. Выбирается столько эмпирических моментов, сколько требуется оценить неизвестных параметров распределения. Желательно применять моменты младших порядков, так как погрешности вычисления оценок резко возрастают с увеличением порядка момента.

Можно доказать, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценки соответственно начальных и центральных теоретических моментов того же порядка.

$$\bar{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right)^k,$$

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^k. \qquad (4.19)$$

Теоретическими моментами называются моменты, вычисленные аналитическим путем через плотность *f(x)* или функцию распределения *F(x)*. Теоретические моменты являются функциями параметров распределения:

$$\alpha_k = \alpha_k\left(\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_n\right),$$

$$\mu_k = \mu_k\left(\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_n\right). \qquad (4.20)$$

Рассмотрим случай, когда метод моментов используется для нахождения оценки одного параметра. Положим, что плотность распределения $f(x;\Theta)$ случайной величины X зависит только от одного параметра Θ, и необходимо найти оценку параметра Θ. Для нахождения оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра, используя, например, на основании выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ первый начальный момент.

Следуя методу моментов, приравняем, например, начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому $\alpha_1 = M_1$. Учитывая, что $\alpha_1 = M(X)$ и $M_1 = \bar{x}_в$, получим $M(X) = \bar{x}_в$.

Математическое ожидание $M(X)$, как видно из соотношения $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x;\Theta)dx = \varphi(\Theta)$, есть функция от Θ. Решив это уравнение относительно параметра Θ, найдем его точечную оценку $\bar{\Theta}$, которая является функцией от выборочной средней, следовательно, и от вариант выборки.

Метод моментов позволяет получить состоятельные, достаточные оценки, они при довольно общих условиях распределены асимптотически нормально. Смещение удается устранить введением поправок. Эффективность оценок невысокая, т.е. даже при больших объемах выборок дисперсия оценок относительно велика (за исключением нормального распределения, для которого метод моментов дает эффективные оценки). В реализации метод моментов проще метода максимального правдоподобия. Напомним, что метод целесообразно применять для оценки не более чем четырех параметров, так как точность выборочных моментов резко падает с увеличением их порядка.

4.4. Интервальное оценивание

Так как оценки являются случайными величинами, то их отклонения от оцениваемых параметров также случайны. Погрешности оценок принято характеризовать их дисперсиями или средними квадратическими отклонениями. Истинное значение искомого параметра может быть представлено точечной оценкой $\Theta = \overline{\Theta} \pm \sigma_{\overline{\Theta}}$, но данная оценка не всегда объективна.

Чтобы дать представление о точности и надежности оценки в математической статистике, пользуются так называемыми доверительными интервалами и доверительными вероятностями.

Доверительным интервалом называется интервал $[\Theta_{i1};\Theta_{i2}]$, между границами которого с заданной вероятностью $P = 1 - \alpha$ будет заключено истинное значение x_i, т.е.

$$P\left[\Theta_{i1} < \Theta_i < \Theta_{i2}\right] = 1 - \alpha.$$

Вероятность $P = 1 - \alpha$ принято называть *доверительной вероятностью,* а α – *уровнем значимости.*

Чем уже интервал $[\Theta_{i1};\Theta_{i2}]$, тем точнее оценка неизвестного параметра Θ_i. Задача состоит в нахождении по заданной доверительной вероятности границ этого интервала. Выбор доверительной вероятности P зависит от конкретных условий. В измерительной практике доверительная вероятность обычно принимается равной 0,90; 0,95; 0,98; 0,99 и реже (в особо ответственных случаях) 0,999.

С вероятностью P справедливо неравенство: $\overline{\Theta}_{p1} \le \Theta \le \overline{\Theta}_{p2}$. Представив отклонения квантилей от центра распределения через среднее квадратичное отклонение оценки $\Theta = \overline{\Theta} \pm t_p \sigma_{\overline{\Theta}}$, имеем интегральную оценку вида

$$\overline{\Theta} - t_p \sigma_{\overline{\Theta}} \le \Theta \le \overline{\Theta} + t_p \sigma_{\overline{\Theta}}. \quad (4.21)$$

Данное неравенство справедливо для симметричного распределения оценки. В противном случае имеют место два коэффициента t_1 *и* t_2.

Полученный доверительный интервал с вероятностью P заключает в себе (накрывает) истинное значение: истинное значение параметра постоянно, а доверительный интервал случайный по положению и ширине.

Определение законов распределения оценок – сложная и трудоемкая задача. Поэтому желательно найти такую функцию $f(\overline{\Theta}, \Theta)$, точное распределение которой известно и не зависит от Θ. Например, при интервальном оценивании параметров нормального распределения такими функциями являются переменные Стьюдента $t = (\bar{x} - m) \Big/ \sqrt{\frac{S^2}{n}}$ и Пирсона $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, которые, как известно, распределены соответственно по законам Стьюдента и хи-квадрат с $n - 1$ степенями свободы.

Построение доверительных интервалов для математического ожидания зависит от априорной информации о распределении генеральной совокупности. Для нормального закона с известной дисперсией среднее арифметическое нормально распределено с дисперсией $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, т.е. известно точное распределение оценки, поэтому интервальная оценка:

$$\bar{x} - U_p \sigma_{\bar{x}} \le m \le \bar{x} + U_p \sigma_{\bar{x}}, \tag{4.22}$$

где U_p — коэффициент стандартного нормального закона ($m = 0$, $\sigma = 1$) для двусторонней доверительной вероятности P. U_p находится из соотношения $P = 2\Phi(U_p)$, где $\Phi(U_p)$ - значение функции Лапласа. (Приложение 1, таблица 1).

При неизвестной дисперсии ряда наблюдений из нормальной совокупности среднее арифметическое распределено тоже по нормальному закону, но с неизвестной дисперсией: по выборке получена оценка $S_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n}$, т.е. точное распределение неизвестно. Поэтому в данном случае интервальная оценка строится на основе распределения Стьюдента:

$$\bar{x} - t_p S_{\bar{x}} \le m \le \bar{x} - t_p S_{\bar{x}}. \tag{4.23}$$

где t_p — коэффициент распределения Стьюдента для двусторонней доверительной вероятности P (Приложение 1, таблица 2).

Интервальная оценка дисперсии генеральной совокупности строится по распределению Пирсона. Для двусторонней доверительной вероятности P интервал имеет вид

$$\chi^2_{\frac{1-p}{2}} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{1+p}{2}}.$$

Решая уравнение относительно σ^2, находим

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+p}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-p}{2}}}, \qquad (4.24)$$

где χ^2 – коэффициент распределения Пирсона (Приложение 1, таблица 3).

Пример 1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания m нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\bar{x}_в = 14$ и объем выборки $n = 25$.

Решение.

По условию задачи известно генеральное среднее квадратическое отклонение, поэтому доверительный интервал представим в виде (4.22)

$$\bar{x}_в - U_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}_в + U_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Найдем U_p из соотношения $\Phi(U_p) = \frac{P}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$. По таблице значений функции Лапласа (Приложение 1, таблица 1) находим $U_P = 1,96$. Подставив данные, окончательно получим

$$14 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \le m \le 4 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}$$

Искомый доверительный интервал

$$12,04 \le m \le 15,96$$

Пример 2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

Таблица 4.3

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание *m* нормально распределенного признака *X* генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

<u>*Решение.*</u>

Выборочную среднюю и исправленной среднее квадратическое отклонение найдем соответственно по формулам

$$\bar{x}_в = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum n_i \left(x_i - \bar{x}_d\right)^2}{n-1}}$$

Подставив в эти формулы данные получим

$$\bar{x}_в = \frac{2\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1}{10} = 2$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum n_i \left(x_i - \bar{x}_d\right)^2}{n-1}} = 2{,}4$$

Пользуясь таблицей распределения Стьюдента (Приложение 1, таблица 2), по $P = 0.95$ и $n = 10$ находим $t = 2{,}26$.

Искомый доверительный интервал определяется по формуле (4.23)

$$\bar{x}_в - t\frac{S}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}_в + t\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$2 - 2{,}26\frac{2{,}4}{\sqrt{10}} \le m \le 2 + 2{,}26\cdot\frac{2{,}4}{\sqrt{10}}$$

Доверительный интервал $0{,}3 \le m \le 3{,}7$ покрывает неизвестное математическое ожидание *m* с надежностью 0,95.

Пример 3. По данным выборки объема $n = 16$ из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $S = 1$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

<u>*Решение.*</u>

Задача сводится к отысканию доверительного интервала (4.26). По таблице распределения χ^2 (Приложение 1, таблица 3).

$$\lambda^2_{\frac{1-p}{2}} = \lambda^2_{\frac{1-0.96}{2}} = 5{,}2 \quad \lambda^2_{\frac{1p}{2}} = \lambda^2_{\frac{1+0.96}{2}} = 28{,}3$$

Подставив найденные значения в формулу 4.26, получим

$$\frac{(16-1)\cdot 1^2}{28{,}3} \le \sigma^2 \le \frac{(16-1)\cdot 1^2}{5{,}2}$$

Доверительный интервал $0{,}53 \le \sigma^2 \le 2{,}88$ покрывает неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,96.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Произведено 10 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем «исправленное» среднеквадратическое отклонение S случайной ошибки измерений оказалось равным 0,8. Найти точность прибора с надежностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Задача 2. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания m нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$, выборочная средняя $\bar{x} = 4{,}1$ и объем выборки $n = 16$.

Задача 3. Найти минимальный объем выборки, при котором, с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней равна $\delta = 0{,}3$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1{,}2$ нормально распределенной генеральной совокупности.

4.5. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое оценка. Какие требования предъявляют к оценкам?
2. Поясните понятия: точечная оценка; генеральное и выборочное среднее; генеральная и выборочная дисперсия.
3. Какие методы оценивания применяют?
4. В чем заключается метод максимального правдоподобия?
5. В чем заключается метод моментов?
6. Что такое точечная оценка и интервальное оценивание?
7. Что такое доверительный интервал, доверительная вероятность?
8. Постройте доверительный интервал для математического ожидания.
9. Постройте доверительный интервал для дисперсии.

Глава 5. Проверка статистических гипотез

5.1. Статистические гипотезы. Ошибки первого и второго рода

Второй важнейшей задачей математической статистики после статистического оценивания параметров распределения является *статистическая проверка гипотез*.

Методы математической статистики позволяют проверить предположения о законе распределения некоторой случайной величины (генеральной совокупности), о значениях параметров этого закона (например, математического ожидания или дисперсии), о наличии корреляционной зависимости между случайными величинами, определенными на множестве объектов одной и той же генеральной совокупности.

Пусть по некоторым данным имеются основания выдвинуть предположения о законе распределения или о параметре закона распределения случайной величины. Задача заключается в том, чтобы подтвердить или опровергнуть это предположение, используя выборочные (экспериментальные) данные.

Статистическая гипотеза – это любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о параметрах известных распределений. Гипотезы о значениях параметров распределений или о сравнительной величине параметров двух распределений называются *параметрическими* гипотезами. Гипотезы о виде распределения называются *непараметрическими* гипотезами.

Проверить статистическую гипотезу – значит проверить, согласуются ли выборочные данные с выдвинутой гипотезой.

Примеры статистических гипотез:

1) генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения;

2) математические ожидания двух нормальных совокупностей равны между собой.

Первая гипотеза является непараметрической, а вторая - параметрической.

Вместе с выдвигаемой основной гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. В том случае, если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, противоречащая гипотеза окажется справедливой.

Нулевая (*основная или проверяемая*) гипотеза – это выдвинутая гипотеза, которая обозначается H_0.

Конкурирующая (альтернативная) гипотеза – это гипотеза H_1, которая противоречит нулевой гипотезе.

Пример 1. Пусть основная гипотеза H_0 состоит в том, что математическое ожидание m равно m_0. Тогда альтернативная гипотеза H_1 может состоять в предположении, что математическое ожидание m не равно (больше или меньше) значению m_0:

$$H_0: m = m_0;\ H_1: m \neq m_0 \text{ или } m > m_0.$$

При проверке гипотеза может подтвердиться, а может и не подтвердиться. Проверка статистических гипотез сопряжена с возможностью допустить ошибку.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута верная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята ложная гипотеза.

Вероятность совершения ошибки первого рода обозначается α и называется *уровнем значимости*. Уровень значимости α обычно задается близким к нулю (например, 0,05; 0,01; 0,02 и т.д.). Чем меньше уровень значимости α, тем меньше вероятность отвергнуть проверяемую гипотезу H_0, когда она верна, т.е. совершить ошибку первого рода.

При этом желательно, чтобы выбранный критерий минимизировал вероятность ошибки второго рода β (принимается гипотеза H_1 при верной гипотезе H_0). Вероятность не отклонить ложную гипотезу обозначается β. Вероятность дополнительного события, т.е. правильного отклонения гипотезы H_1, называют *мощностью критерия.* Численно мощность критерия $\pi = 1 - \beta$, равна вероятности того, что наблюдаемое значение статистики попадет в критическую область при верной альтернативной гипотезе H_1.

Проверка любой статистической гипотезы осуществляется с помощью статистического критерия.

Статистический критерий – это случайная величина (статистика), которая используется с целью проверки нулевой гипотезы.

Множество всех возможных значений выбранного статистического критерия разделяется на два непересекающихся подмножества: критичная область и область принятия гипотезы.

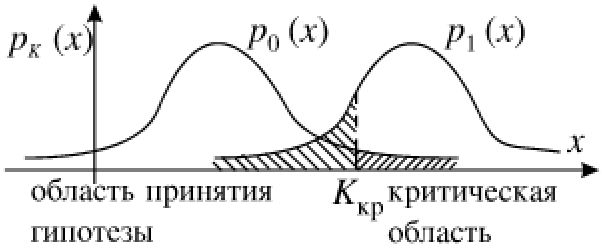

Рис. 5.1. Проверка статистической гипотезы

Критическая область – это множество возможных значений статистического критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Область принятия гипотезы – это множество возможных значений статистического критерия, при которых нулевая гипотеза принимается.

В том случае, если наблюдаемое значение статистического критерия (рассчитанное по выборочной совокупности) принадлежит критической области, нулевую гипотезу отвергают. Если же наблюдаемое значение статистического критерия принадлежит области принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается.

Критические точки (квантили) – это точки, которые разграничивают критическую область и область принятия гипотезы.

Порядок проверки статистической гипотезы таков:

1) задается уровень значимости α, выбирается статистический критерий K и вычисляется (обычно по таблицам для закона распределения K) значение $K_{кр}$; определяется вид критической области;

2) по выборке вычисляется наблюдаемое значение критерия $K_{набл}$;

3) если $K_{набл}$ попадает в критическую область, нулевая гипотеза отвергается; при попадании $K_{набл}$ в область принятия гипотезы нулевая гипотеза принимается.

Рассмотрим способы проверки некоторых статистических гипотез.

5.2. Гипотезы о значениях числовых характеристик

Гипотезы о равенстве среднего значения m и дисперсии σ^2 определенным числам m_0 и σ_0^2. Они возникают, например, при проверке качества функционирования измерительных устройств. Если m_0 - номинальное значение измеряемого параметра и $m \neq m_0$, то это означает, что прибор дает систематическую ошибку. Точность прибора определяется значением σ_0 и, если $\sigma > \sigma_0$, то это означает, что качество прибора не отвечает стандартным требованиям.

5.2.1. Сравнение средних

Сравнение средних – это проверка гипотезы о равенстве средних значений совокупностей, из которых получены выборки.

На практике часто встречаются ситуации, когда среднее значение данных одного эксперимента отличается от среднего значения данных другого, хотя условия эксперимента являются схожими. Тогда возникает вопрос, можно ли считать это расхождение незначимым, т.е. чисто случайным, или оно вызвано существенным различием двух генеральных совокупностей. Например, такие вопросы возникают при исследовании надежности технических систем, где результаты сравниваются с предыдущими измерениями; при контроле качества изделий, изготовленных на разных предприятиях; в финансах – при сравнении уровня доходности различных активов.

В зависимости от априорной информации о дисперсиях можно выделить несколько характерных случаев.

1. Математическое ожидание m_0 и дисперсия σ^2 известны. Проверяем гипотезу о равенстве математического ожидания m совокупности, из которой получена выборка объема n, генеральному среднему m_0. Нулевая гипотеза H_0: $m = m_0$, σ^2; альтернативная гипотеза H_1: $m \neq m_0$. Так как среднее арифметическое распределено нормально $N\left(m_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, то статистику

$$U = \frac{\left(\bar{x} - m\right)}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\left(\bar{x} - m\right)\cdot\sqrt{n}}{\sigma} \tag{5.1}$$

сравниваем с коэффициентами стандартного нормального закона для двусторонней доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$, где α — уровень значимости. Этот коэффициент можно определить с помощью таблицы значений функции Лапласа ((Приложение 1, таблица 1) на основе формулы

$$P = 2\Phi(U_{кр}).$$

Если $|U| < U_p$, то нулевая гипотеза принимается: выборка принадлежит генеральной совокупности со средним значением m_0.

Пример 1. По результатам $n = 9$ замеров установлено, что выборочное среднее время (в секундах) изготовления детали $\bar{x} = 48$. Предполагая, что время изготовления – нормально распределенная случайная величина с дисперсией $\sigma^2 = 9$, рассмотреть гипотезу $H_0 : m = 49$ против конкурирующей гипотезы $H_1 : m \neq 49$. Доверительная вероятность P = 95%.

Решение.

Здесь рассматривается простая гипотеза против сложной $m \neq 49$. На уровне P = 0,95 находим по таблицам нормального распределения (Приложение 1, таблица 1) U_{kp} = 1,96. По формуле (5.1)

$$U = \frac{\left(\bar{x} - m\right)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(48 - 49)\sqrt{9}}{3} = -1.$$

Так как $|U| < U_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. Выборка принадлежит генеральной совокупности со средним значением $m = 49$

2. Математическое ожидание m_0 известно, дисперсия σ^2 неизвестна, выборочная дисперсия S^2 найдена по выборке объема n. Гипотезы $H_0 :\ m = m_0$, S; $H_1 :\ m \neq m_0$. Статистика

$$t = \frac{\left(\bar{x} - m\right)}{S_{\bar{x}}} = \frac{\left(\bar{x} - m\right) \cdot \sqrt{n}}{S}, \qquad (5.2)$$

подчиняется распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1$. Нулевая гипотеза принимается, если $t < t_{кр}$, где $t_{кр} = t_{P;k}$ – коэффициент Стьюдента для двусторонней доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ ((Приложение 1, таблица 2).

Пример 2. По утверждению руководства фирмы, средний размер дебиторского учета равен 187,5 тыс. руб. Ревизор составляет случайную выборку из 10 счетов и обнаруживает, что средняя арифметическая выборка равна 175 тыс. руб. при среднем квадратичном отклонении 35 тыс. руб. Может ли оказаться в действительности правильным объявленный размер дебиторского счета? Доверительная вероятность $P = 0,95$

Решение.

Здесь m=187,5 тыс. руб., $\bar{x}$=175 тыс. руб., $n = 10$, $S = 35$, $P = 0,95$. Так как дисперсия неизвестна, то для проверки гипотезы $H_0 : \bar{x} = m$ воспользуемся распределением Стьюдента. Тогда

$$t = \frac{\left(\bar{x} - m\right)\sqrt{n}}{S} = \frac{(175 - 187,5)\sqrt{10}}{35} = -1,129.$$

Число степеней свободных $k = n - 1 = 9$

По таблице распределения Стьюдента (Приложение 1, таблица 2) при *P = 0,95* находим $t_{0,95;9} = 2,25$. Так как $t < t_{кр}$, то гипотеза H_0 о среднем размере дебиторского счета принимается на уровне доверия *P = 0,95*.

3. Сравнение двух выборочных средних $\bar{x}$ и $\bar{y}$, полученных по выборкам n_1 и n_2 из нормальных совокупностей с известными дисперсиями. Гипотезы H_0: $m_1 = m_2$, σ_1^2, σ_2^2; H_1: $m_1 \neq m_0$. Так как средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$ распределены нормально с параметрами m_1, $\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$ и m_2, $\frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}$, то разность средних ($\bar{x}$ - $\bar{y}$) также распределена нормально с дисперсией $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$. Поэтому статистика

$$U = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = |\bar{x} - \bar{y}| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1\sigma_2^2 + n_2\sigma_1^2}}. \qquad (5.3)$$

сравнивается с коэффициентами стандартного нормального распределения аналогично п.1.

Пример 3. Было произведено $n_1 = 12$ измерений диаметра вала (в мм). При этом оказалось, что среднее $\overline{x_1} = 10,2$, а стандартное среднее квадратичное отклонение $\sigma_1 = 0,05$. Затем вал поместили в условия с высокой температурой и провели $n_2 = 8$ измерений диаметра его оси. Среднее на этот раз оказалось равным $\overline{x_2} = 10,25$, а стандартное отклонение $\sigma_2 = 0,06$. Можно ли сделать вывод, что диаметр вала существенно увеличивается при увеличении температуры? Доверительная вероятность *P = 0,95*.

Решение.

Гипотеза H_0 состоит в том, что $m_1 = m_2$, против конкурирующей $H_1 : m_1 \neq m_2$. В этом случае критическая область двухсторонняя.

Будем считать, что результаты измерений диаметра вала являются нормально распределенными случайными величинами с известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2. Для проверки гипотезы H_0 составляем статистику (формула (5.3))

$$U=\frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{10,2-10,25}{\sqrt{\frac{0,05^2}{12}+\frac{0,06^2}{8}}}=-1,9487.$$

Так как при уровне значимости $\alpha=1-P=0,05$ критическое значение нормального распределения $U_{кр}$=1,96 и $|U|<U_{кр}$, то гипотеза H_0 на уровне доверия 0,95 принимается и можно считать, что диаметр вала существенно не увеличивается в условиях повышенной температуры.

4. То же, что по п. 3, но генеральные дисперсии $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ неизвестны. Гипотезы $H_0:\ m_1=m_2$, $H_1:\ m_1\neq m_2$. Статистика

$$t=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}},\tag{5.4}$$

подчиняется распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k=n_1+n_2-2$, где

$$S^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.\tag{5.5}$$

Если вычисленное значение статистики t принадлежит критической области, т.е. $t>t_{кр}$, то гипотеза о равенстве двух средних нормальных совокупностей отвергается, в противном случае гипотеза принимается.

Пример 4. Необходимо проверить гипотезу о равенстве средних m_1 и m_2 на уровне значимости $\alpha=0{,}05$ нормальных генеральных совокупностей с равными дисперсиями, если по объемам выборок $n_1=12$ и $n_2=20$ найдены выборочные значения $\bar{x}_1=10,7$ и $\bar{x}_2=11{,}9$, $S_1^2=3,55$ и $S_2^2=2,76$.

Решение.

Гипотезы $H_0:\ m_1=m_2,\ \sigma_1^2=\sigma_2^2;\ H_1:\ m_1\neq m_0$.

Вычислим статистику t по формулам (5.4) и (5.5):

$$S^2=\frac{(12-1)\cdot 3,55+(20-1)\cdot 2,76}{12+20-2}=3,05,$$

$$t = \frac{|10,7-11,9|}{\sqrt{3,05\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{20}\right)}} = 1,882.$$

По таблице коэффициентов Стьюдента (Приложение 2) находим $t_{0,95;30} = 2,042$. Поскольку статистика $t < t_{кр}$ на выбранном уровне значимости, отклонять нулевую гипотезу нет оснований: различие между средними можно считать случайным.

5. То же, что в п. 4, но $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Статистика

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}, \tag{5.6}$$

распределяется по закону Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$.

Если вычисленное значение статистики *t* принадлежит критической области, т.е. $t > t_{кр}$, то гипотеза о равенстве двух средних нормальных совокупностей отвергается, в противном случае гипотеза принимается.

Пример 5. Расходы сырья x_i и y_i на единицу продукции по старой и новой технологиям приведены в таблице 5.1. Предполагается, что генеральные совокупности *X* и *Y* имеют нормальные распределения с одинаковыми дисперсиями и средними m_1, m_2. Требуется проверить гипотезу $H_0: m_1 = m_2$ против $H_1: m_1 \neq m_2$. Доверительная вероятность $P = 90\%$.

Таблица 5.1

	По старой технологии				По новой технологии				
Расход сырья	x_i	304	307	308	y_i	303	304	306	308
Число изделий	n_x	1	4	4	n_y	2	6	4	1

<u>Решение.</u>

По данным выборки вычислим среднее значения и выборочные среднеквадратического отклонения.

$$\bar{x} = \frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{3} x_i n_x = 307,11; \quad S_x^2 = \frac{1}{n_x - 1}\sum_{i=1}^{3}(x_i - \bar{x})^2 = 1,1610;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{4} y_i n_y = 304{,}77\,; \quad S_y^2 = \frac{1}{n_y - 1}\sum_{i=1}^{4}(y_i - \bar{y})^2 = 2{,}192\,.$$

Так как о значениях генеральных дисперсий ничего не известно, предполагаем, что $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. (Строго говоря выдвинутую гипотезу о равенстве дисперсий нужно проверять, п. 5.2.2).

Тогда статистика (формула (5.6)) равна:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}} = \frac{307{,}11 - 304{,}77}{\sqrt{\frac{1{,}610}{9} + \frac{2{,}192}{13}}} = 4{,}29.$$

Статистика t имеет распределение Стьюдента с $k = n_x + n_y - 2 = 20$ степенями свободы. При $\alpha = 1 - P = 0.1$ находим $t_{0{,}1;20} = 1{,}725$ (Приложение 1, таблица 2). Поскольку условие $t < t_{кр}$ не выполняется, то гипотезу H_0 отвергаем, т.е. при переходе на новую технологию происходит изменение среднего расхода сырья.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 1{,}5$ г, фасует чай в пачке со средним весом $m = 80$ г. В случайной выборке объема $n = 16$ пачек средний вес $\bar{x} = 78{,}5$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность P = 99%.

Задача 2. Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, производит детали средней длины $m = 30$ мм. В случайной выборке объема $n = 25$ деталей средняя длина $\bar{x} = 30{,}1$ мм. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность P = 95%.

Задача 3. Производитель утверждает, что средний вес плитки шоколада не меньше $m = 50$ г. Инспектор отобрал 10 плиток шоколада и взвесил. Их вес оказался 49, 50, 51, 52, 48, 47, 49, 52, 48, 51 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес плитки шоколада распределен нормально. Доверительная вероятность P = 95%. Предполагаем, что генеральные дисперсии равны между собой.

Задача 4. С помощью двух измерительных установок проведены две серии измерений: $n_x = 10$, $n_y = 8$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,05$ определить значимо ли различаются между собой результаты двух серий измерений. Примем, что генеральные дисперсии между собой не равны.

5.2.2. Сравнение дисперсий

Гипотезы о дисперсиях в науке, технике, экономике, медицине, социологических исследованиях играют очень большую роль, поскольку измеряемое дисперсией рассеяние характеризует изменяемость интересующего признака в определенных условиях. Среднее значение сглаживает, затушевывает эти изменения, а дисперсия их выявляет.

Дисперсия характеризует точность приборов, технологических процессов, риск, связанный с отклонением доходности от заданного уровня, и т.д.

Сравнение дисперсий в измерительной практике принципиально необходимо при объединении двух и более рядов измерений.

1. Гипотеза о числовом значении дисперсии

Пусть имеется *n*-выборка из нормально распределенной случайной величины. Значения дисперсии генеральной совокупности σ^2 известно. По выборке найдено значение выборочной дисперсии S^2. Проверяем гипотезу о равенстве выборочной дисперсии, найденной по выборке, дисперсии генеральной совокупности. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma = \sigma_0$; конкурирующая гипотеза H_1: $\sigma \neq \sigma_0$, при этом математическое ожидание m может быть произвольным. В этом случае в качестве статистики выбираем величину

$$\psi = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}} \tag{5.7}$$

Известно, что статистика ψ имеет хи-квадрат распределение с $k = n - 1$ степенями свободы. Для заданного уровня значимости $\alpha = 1 - P$ выбираем $\psi_{кр}$ по таблице χ^2 – распределения (Приложение 1, таблица 3.). Если $|\psi| \le \psi_{кр}$ гипотезу H_0 принимаем.

Пример 1. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии σ^2 контролируемого размера изделий, которая не должна превышать 0,15. По данным из 25 отобранных изделий вычислена несмещенная дисперсия $\overline{S^2} = 0,25$. Выяснить, обеспечивает ли станок требуемую точность. Доверительная вероятность P = 99 %.

Решение.

Предположим, что размер изделия – нормальная случайная величина. Рассмотрим гипотезу $H_0 : \sigma^2 = 0,15$ и альтернативную $H_1 : \sigma^2 > 0,15$. Найдем по таблицам χ^2-расперделения (Приложение 1, таблица 3) при $n = 25$ и $P = 0,99$ $\psi_{кр} = 15,5$. Для проверки гипотезы вычислим статистику (формула (5.7))

$$\psi = \frac{(n-1)\overline{S^2}}{\sigma_0^2} = \frac{24 \cdot 0,25}{0,15} = 40.$$

Так как $\psi < \psi_{кр}$ не выполняется, то гипотеза о достижении станком требуемой точности отклоняется.

2. *Критерий Фишера* (критерий отношения дисперсий).

Пусть S_1^2, S_2^2 — две независимые оценки дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 по выборочным данным объемами n_1 и n_2 соответственно. По выборочным дисперсиям проверяют гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ при выбранном уровне значимости. Известно, что величина $\left(\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}\right) \Big/ \left(\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}\right)$ имеет распределение Фишера. В условиях справедливости нулевой гипотезы $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ статистика критерия Фишера

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \tag{5.8}$$

подчиняется F - распределению с $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ степенями свободы ((Приложение 1, таблица 4). Если вычисленная по выборочным дисперсиям статистика F (дисперсионное отношение) принадлежит критической области, т. е. $F \leq F_{\frac{P}{2};k_1;k_2}$ для односторонней области либо $F \leq F_{P;k_1;k_2}$ для двухсторонней области, то гипотеза о равенстве дисперсий отвергается.

Как правило, через S_1^2 обозначают большую из двух сравниваемых дисперсий.

При достаточно больших объемах выборок $(n_1, n_2 > 30)$ распределение выборочных дисперсий асимптотически стремится к нормальному закону с математическим ожиданием, равным истинному значению дисперсии σ^2, и с дисперсией $\frac{2\sigma^4}{(n-1)}$. Это позволяет применять критерий сравнения дисперсий, аналогичный сравнению средних. В условиях справедливости гипотезы о равенстве дисперсий генеральных совокупностей $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ статистика

$$U = \frac{|S_1 - S_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{2\cdot(n_1-1)} + \frac{S_2^2}{2\cdot(n_2-1)}}}, \tag{5.9}$$

где S_1 и S_2 — выборочные средние квадратические отклонения, подчиняется нормальному закону распределения $N(0,1)$. Поэтому если $U \geq U_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Пример 2. По независимым данным объемами $n_1 = 31$ и $n_2 = 25$ вычислены выборочные дисперсии $S_1^2 = 25,0$ и $S_2^2 = 16,0$. Необходимо проверить гипотезу о равенстве дисперсий исходных совокупностей на уровне значимости $\alpha = 0,01$. Так как объемы выборок сравнительно невелики, применим односторонний критерий Фишера. Вычислим статистику (5.8)

$$F = \frac{25,0}{16,0} = 1,563,$$

число степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 31 - 1 = 30$, $k_2 = n_2 - 1 = 25 - 1 = 24$.

По таблице распределения Фишера (Приложение 4) находим критическое значение $F_{0.99;30;24} = 2,47$. Так как $F < F_{0.99;30;24}$, то гипотеза о равенстве дисперсий принимается.

Для иллюстрации проверим эту же гипотезу по формуле (5.9), имея при этом в виду, что объем выборок для применения такого критерия недостаточен. Вычисляем $S_1 = 5$, $S_2 = 4$ и статистику

$$U = \frac{|5-4|}{\sqrt{\frac{25}{2\cdot 30} + \frac{16}{2\cdot 24}}} = 1,155$$

По таблицам нормального распределения ((Приложение 1, таблица 1) находим критическое значение $U_{0.99}=2,58$. Сравнивая вычисленное значение с критическим $|U|<U_{кр}$, приходим к заключению, что отклонять нулевую гипотезу нет оснований.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=17$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $S^2=0,24$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=0,18$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1:\sigma^2>0,18$.

Задача 2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1=9$ и $n_2=16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y**,** найдены исправленные выборочные дисперсии $S_x^2=34{,}02$ и $S_y^2=12{,}15$. При уровне значимости 0,01, проверить нулевую гипотезу $H_0:D(X)=D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1:D(X)>D(Y)$.

Задача 3. Для сравнения случайных погрешностей измерения электрического сопротивления мостов на разных диапазонах необходимо сравнить дисперсии. Были произведены измерения: на одном диапазоне число измерений $n_1=14$ и на втором – $n_2=10$. По данным выборок найдены исправленные выборочные дисперсии $S_1^2=0{,}84$ и $S_2^2=2{,}52$. При уровне значимости $\alpha=0{,}1$, проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Задача 4. Для сравнения точности двух измерительных приборов каждым из них были произведены многократные измерения и получены два ряда наблюдений:

Таблица 5.2

x	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,15	1,13
y	1,11	1,12	1,35	1,18	1,22	1,35	

При уровне значимости $\alpha=0{,}1$ необходимо проверить гипотезу $H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2$.

5.2. Критерии согласия

При проверке гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения используется специальная случайная величина – *критерий согласия.*

Критерий согласия – это статистический критерий проверки о предполагаемом законе неизвестного распределения. При проверке непараметрических гипотез используется несколько критериев согласия: χ^2-критерий Пирсона, λ-критерий Колмогорова.

λ-критерий Колмогорова. Этот критерий связан с расчетом эмпирических функций распределения (см. п. 3.4). λ-критерий Колмогорова применяется для проверки гипотезы о распределении непрерывной случайной величины. При его использовании сравниваются эмпирическая $F^*(x)$ и предполагаемая $F(x)$ функция распределения.

Алгоритм проведения проверки:

1. Производится выборка объемом $n \geq 50$.
2. Находим эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$
3. По данным выборки x_i для предполагаемой функции распределения $F(x)$ определим $F(x_i)$.
4. Вычислим значение статистики:

$$\lambda = \sqrt{n}\max_{x_i}\left|F(x_i) - F^*(x_i)\right| \tag{5.10}$$

5. По уровню значимости α из таблицы (Приложение 1, таблица 5) находим критическую точку $\lambda_{кр}$.
6. Если $\lambda < \lambda_{кр}$, то различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями несущественны. Если $\lambda < \lambda_{кр}$, то различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями существенны.

Если по выборке объема n получен дискретный вариационный ряд,

Таблица 5.3

Значения	x_1	x_2	…	x_k
Частоты	n_1	n_2	…	n_k

то для λ-критерия Колмогорова с известной теоретической функцией распределения $F(x)$ расчетная таблица имеет вид

Таблица 5.4

i	x_i	n_i	$W_i = \frac{n_i}{n}$	$F^*(x_i)$	$F(x_i)$	$\lvert F(x_i) - F^*(x_i) \rvert$

Если по выборке объема n получен интервальный вариационный ряд,

Таблица 5.5

Значения	$[a_1;a_2]$	$[a_2;a_3]$	…	$[a_k;a_{k+1}]$
Частоты	n_1	n_2	…	n_k

то расчетная таблица имеет вид

Таблица 5.6

i	a_i	n_i	$W_i = \frac{n_i}{n}$	$F^*(a_i)$	$F(a_i)$	$\lvert F(a_i) - F^*(a_i) \rvert$

В критерии Колмогорова параметры закона распределения $F(x)$ считаются известными заранее, так что, заменяя их выборочными значениями, мы всегда привносим некоторую ошибку.

χ2 - критерий Пирсона. Этот критерий связан с расчетом теоретических частот.

Теоретические (выравнивающие) частоты – это частоты n'_i, которые в отличие от фактически наблюдаемых эмпирических частот найдены с помощью вычислений.

Теоретические частоты n'_i рассчитываются по формуле

$$n'_i = n \cdot p_i, \qquad (5.11)$$

где n – объем выборки; p_i - это вероятность появления наблюдаемого значения x_i, рассчитанная при условии, что случайная величина X подчиняется предполагаемому закону распределения вероятностей.

На практике вычисление статистики λ – трудоемкая задача, поэтому часто применяют другой критерий, называемый χ^2-критерием. Его можно использовать для любых распределений. Чтобы воспользоваться этим критерием, выборочные данные представляют в виде интервального вариационного ряда.

Таблица 5.7

Значения	$[a_1;a_2]$	$[a_2;a_3]$	…	$[a_k;a_{k+1}]$
Частоты	n_1	n_2	…	n_k

По виду построенной гистограммы распределения делаем вывод о распределении случайной величины *X*. После этого вычисляем параметры предполагаемого распределения. Пусть эта функция имеет вид *F(x)* .

Для удобства вычислений составим таблицу,

Таблица 5.8

i	a_i	$F(a_i)$	a_{i+1}	$F(a_{i+1})$	$p_i = F(a_i) - F(a_{i+1})$	n_i	$C_i = \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$

где np_i - это теоретические частоты.

Вычисляем статистику

$$\chi = \sum_{i=1}^{k} C_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \tag{5.12}$$

Критическое значение $\chi_{кр}$ находится по таблице χ^2-распределения (Приложение 1, таблица 3) в зависимости от заданного уровня значимости α и числа степеней свободы.

Число степеней свободы находят по равенству

$$k = s - r - 1, \tag{5.13}$$

где s - число интервалов вариационного ряда; r - число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

Например, если предполагаемое распределение – нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание m и среднее квадратичное отклонение σ), и число степеней свободы равно $1 = s - 3$.

Если $\chi < \chi_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается. Если $\chi > \chi_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

Поскольку статистика χ имеет распределение χ^2 при $n \to \infty$, то:

1) критерий Пирсона следует применять только при больших n $(n > 30)$

2) необходимо, чтобы в каждом интервале вариационного ряда было достаточное количество наблюдений, по крайней мере, 5 наблюдений. Если в каком-нибудь интервале число наблюдений меньше пяти, имеет смысл объединить соседние интервалы, чтобы в объединенных интервалах было не меньше пяти. Поэтому при вычислении числа сте-

пеней свободы в качестве величины s берется соответственно уменьшенное число интервалов.

Критерий Колмогорова достаточно часто применяется на практике благодаря своей простоте. Однако в принципе его применение возможно лишь тогда, когда теоретическая функция распределения $F(x)$ задана полностью. Но такой случай на практике встречается весьма редко.

Обычно из теоретических соображений известен лишь вид функции распределения, а ее параметры определяются по эмпирическим данным. Поэтому, если при неизвестных значениях параметра применить критерий Колмогорова, взяв за значения параметров их оценки, то получим завышенное значение вероятности $P(\lambda)$, а значит, большее критическое значение $\lambda_{кр} = \lambda$. В результате есть риск принять гипотезу о законе распределения случайной величины как правдоподобную, в то же время как, на самом деле, она противоречит опытным данным. В критерии Пирсона это обстоятельство учитывается**.**

Пример 1. Значения наработки τ (в месяцах) на отказ некоторой технической системы приведены в таблице 5.9.

Таблица 5.9

0.173	0.748	0.393	0.638	1.669	0.720	1.089	1.139	0.784	0.414
0.285	5.479	1.885	1.075	1.632	1.374	0.337	2.457	2.795	0.271
4.623	0.642	4.092	5.641	0.766	1.418	0.747	0.414	0.946	2.132
0.384	1.281	0.909	0.226	0.697	0.943	0.583	0.925	1.257	1.214
1.514	0.251	1.138	0.904	0.337	0.338	1.374	1.443	0.371	1.697

Предполагая генеральный закон распределения логарифмически нормальным, проверить критерий согласия выборки с теоретическим законом с помощью критерия Пирсона. Доверительная вероятность $P = 90\%$.

<u>*Решение.*</u>

Для решения задачи перейдем к логарифмам данных $\ln x$ выборки.

Таблица 5.10

-1.754	-0.290	-0.934	-0.449	0.512	-0.329	0.085	0.130	-0.323	-0.882
-1.255	1.700	0.634	0.072	0.490	0.318	-1.088	0.899	1.028	-1.302
1.531	-0.443	1.409	1.730	-0.267	0.349	-0.292	-0.882	-0.056	0.757
-0.957	0.248	-0.095	-1.487	-0.361	-0.059	-0.540	-0.078	0.229	0.194
0.415	-1.382	0.129	-2.364	-1.088	-1.085	0.318	0.367	-0.992	0.529

Построим вариационный ряд распределения. Здесь $x_{\min} = -2{,}364$; $x_{\max} = 1{,}73$. Разобьем интервал (-2, 2) на 5 интервалов одинаковой длины $\Delta = 0{,}8$. Значение –2,364 отнесем в крайний левый интервал. Подсчитывая число элементов выборки, попадающих в каждый интервал, получим вариационный ряд (табл. 5.11).

Таблица 5.11

x_i	[-2; -1,2]	[-1,2; -0,4]	[-0,4; 0,4]	[0,4; 1,2]	[1,2; 2,0]
n	6	11	21	7	5

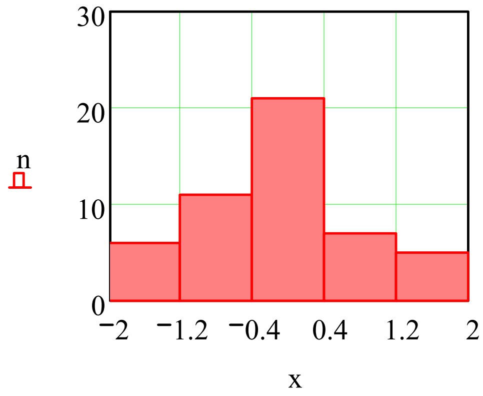

Рис. 5.2. Гистограмма

По виду построенной гистограммы распределения можно сделать вывод о нормальности распределения случайной величины *X*. Вычислим выборочные среднюю и дисперсию (п. 4.2)

$$\bar{x} = \frac{1}{50}(-1{,}6 \cdot 6 - 0{,}8 \cdot 11 + 0 \cdot 21 + 0{,}8 \cdot 7 + 1{,}6 \cdot 5) = -0{,}096;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{50}(-1{,}6^2 \cdot 6 - 0{,}8^2 \cdot 11 + 0^2 \cdot 21 + 0{,}8^2 \cdot 7 + 1{,}6^2 \cdot 5) = 0{,}7936;$$

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 0{,}7936 - 0{,}096^2 = 0{,}7844;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D = \frac{50}{49} \cdot 0{,}7844 = 0{,}8004;$$

$$S = \sqrt{S^2} = 0{,}895.$$

Найдем теоретические частоты попадания в интервалы (a_i, a_{i+1})

$$p_i = F(a_{i+1}) - F(a_i) = N\left(a_{i+1}, \bar{x}, S\right) - N\left(a_i, \bar{x}, S\right).$$

Для удобства вычислений составим таблицу 5.12.

Таблица 5.12

i	a_i	$F(a_i)$	a_{i+1}	$F(a_{i+1})$	$p_i = F(a_{i+1}) - F(a_i)$	n_i	$c_i = \dfrac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	-2.0	0.017	-1.2	0.109	0.092	6	0.078
2	-1.2	0.109	-0.4	0.367	0.258	11	0.253
3	-0.4	0.367	0.4	0.71	0.343	21	0.864
4	0.4	0.71	1.2	0.926	0.216	7	1.337
5	1.2	0.926	2	0.99	0.064	5	0.310
							∑=3.906

По χ^2-критерию Пирсона вычислим статистику (5.12)

$$\chi = \sum_{i=1}^{5} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 3,906 .$$

Если гипотеза о согласии H_0 верна, то ψ имеет χ^2- распределение с $k = 5-2-1 = 2$ степенями свободы. Для $P = 0,9$ по таблицам χ^2-распределения (Приложение 1, таблица 3) находим $\chi_{\text{кр}} = 4,605$. Так как $\chi < \chi_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. Отсюда следует вывод, что на уровне значимости $\alpha = 1-P$ наработку на отказ можно считать распределенной по логарифмически нормальному закону.

Задача 2. Респондентам был задан вопрос о том, сколько порций мороженого они съедают за неделю. Результаты опроса приведены таблице 5.13.

Таблица 5.13

Число порций, x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота, n	10	11	8	9	12	10	13	15	12

Определить с помощью λ-критерия Колмогорова на уровне значимости $\alpha = 0,05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке [0, 10].

Решение.

H_0: различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями несущественны, т.е. нет никаких предпочтений.

H_1: различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями существенны, т.е. предпочтения имеются.

Функция распределения случайной величины, равномерно распределенной на отрезке [0, 10], имеет следующий вид:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ \dfrac{x}{10},\ 0<x\le 10,\\ 1,\ x>10.\end{cases}$$

Заполним таблицу 5.14. Значения первых двух столбцов из условия задачи. В последней строке указана сумма чисел 2-го столбца.

Каждое число 2-го столбца делим на n=100 и результат записываем в 3-м столбце. Каждое число 4-го столбца равно сумме числа из этой же строки 3-го столбца и предыдущего 4-го столбца. Каждое число 1-го столбца подставляем в формулу (5.1) и результат записываем в 5-й столбец. 6-й столбец – это модуль разности 4-го и 5-го столбцов.

Определим наибольшее число в последнем столбце: $\max\limits_{x_i}\left|F(x_i)-F_n(x_i)\right|=0{,}12$.

Тогда статистика (5.10) $\lambda=\sqrt{n}\cdot\max\limits_{x_i}\left|F(x_i)-F_n(x_i)\right|=\sqrt{100}\cdot 0{,}12=1{,}12$.

По уровню значимости $\alpha=0{,}05$ из таблицы (Приложение 1, таблица 5) находим критическую точку $\lambda_{кр}=1{,}358$.

Так как $\lambda<\lambda_{кр}$ (1,12 < 1,358), то мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости $\alpha=0{,}05$. Данные выборки согласуются с равномерным распределением на отрезке [0, 10], т.е. нет никаких предпочтений.

Таблица 5.14

x_i	n_i	$w_i=\dfrac{n_i}{n}$	$F_n^*(x_i)$	$F(x_i)=0.1x_i$	$\left\|F(x_i)-F_n(x_i)\right\|$
1	2	3	4	5	6
1	10	0,10	0	0,1	0,1
2	11	0,11	0,10	0,2	0,1
3	8	0,08	0,21	0,3	0,09
4	9	0,09	0,29	0,4	0,11
5	12	0,12	0,38	0,5	0,12
6	10	0,10	0,50	0,6	0,1
7	13	0,13	0,60	0,7	0,1
8	15	0,15	0,73	0,8	0,07
9	12	0,12	0,88	0,9	0,02
10	0	0	1,00	1,00	0
Сумма	n=100	-	-	-	max=0.12

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Респондентам был задан вопрос о том, сколько порций мороженого они съедают за неделю. Результаты опроса приведены в таблице 5.15.

Таблица 5.15

Число порций	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	13	15	12	11	8	9	12	10	10

Определить с помощью λ-критерия Колмогорова на уровне значимости $\alpha = 0,05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке [0, 10].

Задача 2. В ОТК с точностью до 1 мм измерение 100 деталей, изготовленных на автоматическом станке. В таблице 5.16 приведены отклонения от номинального размера, разбитые на интервалы, количество деталей, попавших в каждый интервал. Оценить с помощью критерия Пирсона гипотезу о согласии выборочного распределения с нормальным законом распределения. Доверительная вероятность $P = 95\%$.

Таблица 5.16

Интервал $[a_i; a_{i+1}]$	$(-20;-15)$	$(-15;-10)$	$(-10;-5)$	$(-5;0)$	$(0;5)$	$(5;10)$	$(10;15)$	$(15;20)$
Частоты, n	3	6	8	12	25	20	13	8

5.4. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое статистическая гипотеза? Приведите примеры нулевой и конкурирующей гипотез.
2. Что означают ошибки 1 и 2 рода при проверке статистических гипотез.
3. Приведите порядок проверки гипотезы.
4. Как проверить гипотезы о сравнении средних при различных условиях?

a) Сравнение мат. ожидания выборки с мат. ожиданием ген. совокупности при известной дисперсии ген. совокупности.

b) Сравнение мат. ожидания выборки с мат. ожиданием ген. совокупности при неизвестной дисперсии ген. совокупности

c) Сравнение мат. ожиданий двух выборок из нормальных совокупностей с известными дисперсиями.

d) Сравнение мат. ожиданий двух выборок из нормальных совокупностей с неизвестными, но равными дисперсиями.

e) Сравнение мат. ожиданий двух выборок из нормальных совокупностей с неизвестными дисперсиями.

5. Как проверить гипотезы о сравнение дисперсий? Критерий Фишера.
6. Что такое непараметрические и параметрические гипотезы?
7. Критерии согласия. λ-критерия Колмогорова. χ^2-распределения Пирсона.

Глава 6. Корреляционный и регрессионный анализ

6.1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от одной или нескольких других величин.

Две случайные величины могут быть связаны либо функциональной зависимостью, либо зависимостью другого рода, называемой статистической, либо быть независимыми.

Если между значениями имеется такая связь, что любому x_i соответствует только одно значение y_i, то такая связь *называется функциональной.* Графически функциональная связь двух величин представляется какой-то кривой или, в частности, прямой линией $y=kx$.

Строгая функциональная зависимость реализуется редко, так как обе величины или одна из них подвержены действию случайных факторов, причем среди них могут быть и общие для обеих величин (под «общими» здесь подразумеваются такие факторы, которые воздействуют и на Y, и на X). В этом случае возникает *статистическая зависимость.*

Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой; в этом случае статистическую зависимость называют *корреляционной.*

Пример 1. Пусть Y – урожай зерна, X – количество удобрений. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай, т. е. Y не является функцией от X. Это объясняется влиянием случайных факторов (осадки, температура воздуха и др.). Вместе с тем, как показывает опыт, средний урожай является функцией от количества удобрений, т.е. Y связан с X корреляционной зависимостью.

На рисунке 6.1, а) величины X и Y независимы (изменения Y при изменении X вызваны случайными факторами и не связаны с X). Рисунок 6.1, б) иллюстрирует наличие статистической связи, где значение Y изменяется не только под действием случайных факторов, но и из-за изменения X. При отсутствии случайной, компоненты между X и Y существует функциональная связь (рисунок 6.1, в).

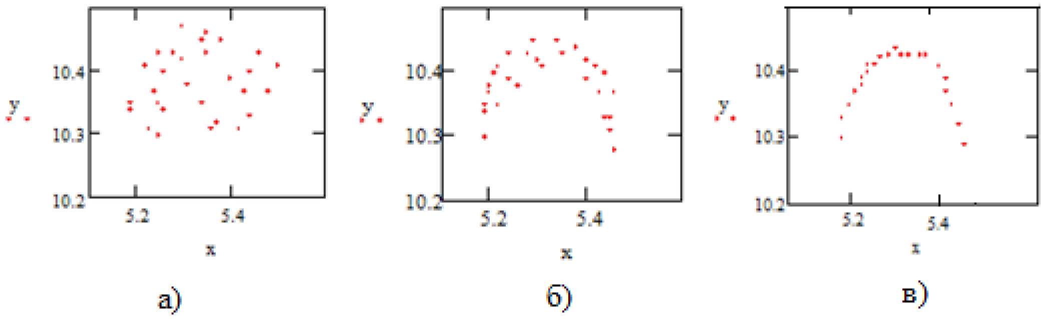

Рис. 6.1. Различные виды связи

6.2. Корреляционный анализ

Как известно из теории вероятности, дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Если для суммы двух случайных величин окажется, что $D(x+y) \neq D(x)+D(y)$, то это является признаком корреляционной зависимости между ними.

$$D(x) = M\left[(x - M[x])^2\right], \quad D(y) = M\left[(y - M[y])^2\right],$$

то

$$D(x+y) = M\left[(x + y - M[x+y])^2\right] = D(x) + D(y) + 2M[(x - M[x])(y - M[y])] \qquad (6.1)$$

Следовательно, наличие зависимости между случайными величинами x и y непосредственно вытекает из неравенства

$$M\left[(x - M[x])(y - M[y])\right] \neq 0. \qquad (6.2)$$

Однако обратное утверждение несправедливо: при превращении неравенства (6.2) в равенство независимость величин x и y не следует. Связь, которая вызывает отличие дисперсии суммы от суммы дисперсии, называется *корреляцией.*

Необходимым и достаточным условием корреляции является выполнение неравенства (6.2), левую часть которого называют *корреляционным моментом:*

$$K_{xy} = M\left[(x - M[x])(y - M[y])\right]. \qquad (6.3)$$

Корреляционный момент – размерная величина, количественно зависящая от рассеяния аргументов.

Поскольку значение корреляционного момента зависит от единиц измерения X и Y, то на практике чаще используют коэффициент корреляция ρ,. Нормированную безразмерную величину называют *коэффициентом корреляции:*

$$\rho = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D(x)D(y)}} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{6.4}$$

Коэффициентом корреляции является безразмерной величиной и определяет степень тесноты корреляционной связи между двумя величинами.

Рассмотрим основные свойства коэффициента корреляции ρ.

1. Если X и Y независимы между собой, то $\rho = 0$. Но ρ может быть равен нулю и для некоторых зависимых величин, которые называются в этом случае *некоррелированными*. Лишь для нормально распределенных случайных величин некоррелированность одновременно означает и независимость.
2. Значение ρ не изменится, если к X и Y прибавить или отнять постоянные числа или умножить их на какие-то положительные числа. Если же одну из величин, не меняя другой, умножить на -1, то коэффициент корреляции сменит знак.
3. Возможные значения коэффициента корреляции: $-1 \le \rho \le 1$.
4. Если коэффициент корреляции отличен от нуля, то он указывает на наличие статистической связи и характеризует ее силу: чем больше ρ по модулю, тем сильнее связь.
5. $\rho = \pm 1$ означает, что между величинами существует функциональная связь, но не любая, а *строгая линейная зависимость*

Таким образом, коэффициент корреляции – это показатель взаимного вероятностного влияния двух случайных величин, т.е. насколько связь между величинами близка к строгой линейной зависимости. Он отмечает как долю случайности, так и степень близости к линейной зависимости.

6.3. Оценивание коэффициента корреляции опытным путем

Для экспериментального оценивания коэффициента корреляции нужно провести n испытаний, в каждом из которых регистрировать одновременно X и Y , и получить n пар значений (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). Для наглядности эти пары значений можно отметить как координаты точек на плоскости. Образовавшаяся совокупность сразу дает представление о силе корреляции (рисунок 6.2, а) - сильная, б) - слабая, в) – отсутствие корреляции).

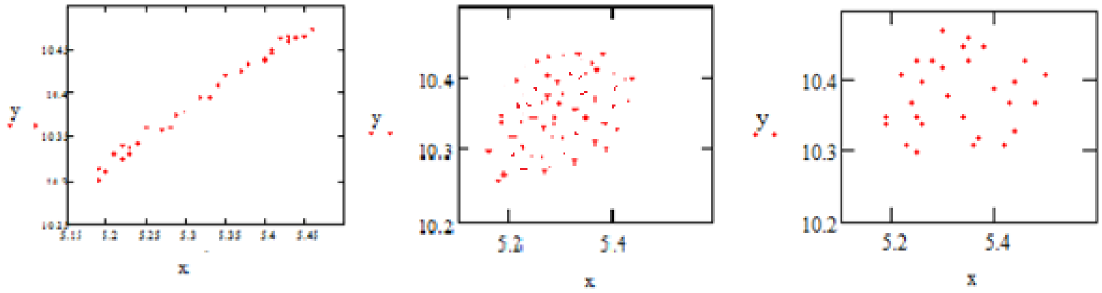

Рис. 6.2. Сила корреляции

Пример 1. Исследование зависимости между среднемесячными доходами X на семью (в тыс. у.е.) и расходами Y на покупку кондитерских изделий (в у.е.) представлено в таблице 6.1

Таблица 6.1

X	4,8	3,8	5,4	4,2	3,4	4,6	3,4	4,8	5,0	3,8	5,2	4,0	3,8	4,6	4,4
Y	75	68	78	71	64	73	66	75	75	65	77	69	67	72	70

Построить график зависимости $y = f(x)$ и сделать предварительный вывод о форме зависимости случайных величин.

<u>*Решение.*</u>

Корреляционное поле, построенное по статистическим данным, приведено на рисунке 6.3.

Анализ рисунка позволяет сделать вывод о наличии сильной линейной статистической связи между среднемесячными доходами семьи и затратами на приобретение ею кондитерских изделий. При этом связь имеет положительную тенденцию, т.е. с ростом переменной X наблюдается увеличение отклика Y.

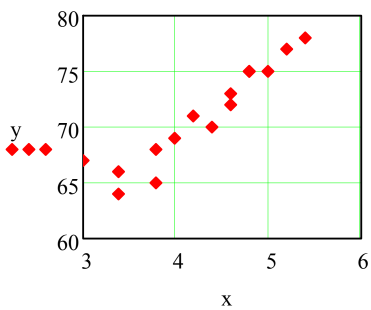

Рис. 6.3. График зависимости $y = f(x)$

Оценку зависимости между случайными величинами по выборочному коэффициенту корреляции называют *корреляционным анализом.* Выборочный коэффициент корреляции r вычисляют по формуле (6.4), где вместо истинных математических ожиданий и дисперсий берутся их оценки:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{6.5}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2, \; S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2. \tag{6.6}$$

Выборочные корреляционный момент и коэффициент корреляции равны:

$$K_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)(y_i - \overline{y}),$$

$$r = \frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i-1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)(y_i - \overline{y})}{S_x S_y}. \tag{6.7}$$

Для практических вычислений удобнее пользоваться следующими формулами:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}, \; \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}. \tag{6.8}$$

Пример 2. На основании наблюдений за развивающимся сайтом и изменением его средневзвешенной позиции по основным запросам в поисковой системе необходимо проверить, можно ли говорить о линейной зависимости между позицией сайта и числом посетителей. Исходные данные: X (число посетителей в сутки), Y (усредненная позиция сайта в поисковой системе) приведены в таблице 6.2

Таблица 6.2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	500	790	870	1500	2300	5600	100	20	5
Y	5.4	4.2	4.0	3.4	2.5	1.0	6.1	8.2	14.6

Решение.

1. На основании исходных данных, приведенных в таблице, рассчитаем средние значения для X и Y (по формуле 6.5)

$$X_{ср} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X = 1298,333\,,\ Y_{ср} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} Y = 5,489$$

Все необходимые для расчета коэффициента корреляции промежуточные данные и их суммы удобно представлять в виде таблицы:

Таблица 6.3

№	X	Y	$X-X_{ср}$	$Y-Y_{ср}$	$(Y-Y_{ср})\cdot(X-X_{ср})$	$(X-X_{ср})^2$	$(Y-Y_{ср})^2$
1	500	5,4	-798,333	-0,089	71,052	637335,579	0,008
2	790	4,2	-508,333	-1,289	655,241	258402,439	1,662
3	870	4,0	-428,333	-1,489	637,788	183469,159	2,217
4	1500	3,4	201,667	-2,089	-421,282	40669,579	4,364
5	2300	2,5	1001,667	-2,989	-2993,983	1003336,779	8,934
6	5600	1,0	4301,667	-4,489	-19310,183	18504338,979	20,151
7	100	6,1	-1198,333	0,611	-732,181	1436001,979	0,373
8	20	8,2	-1278,333	2,711	-3465,561	1634135,259	7,35
9	5	14,6	-1293,333	9,111	-11783,557	1672710,249	83,01
∑	-	-	-	-	-37342,667	25370400	128,069

2. Рассчитаем коэффициент корреляции по формуле (6.7)

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{9-1}\sum_{i=1}^{9}(X_i - X_{ср})^2} = 1780,81,\quad S_y = \sqrt{\frac{1}{9-1}\sum_{i=1}^{9}(Y_i - Y_{ср})^2} = 4,001,$$

$$r = \frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i-1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)(y_i - \overline{y})}{S_x S_y} = \frac{1}{9-1}\cdot\frac{-37342,66}{1780,81\cdot 4,001} = -0,655.$$

Коэффициент корреляции: $r = -0,655$.

Вывод: По значению коэффициента корреляции можно сделать вывод о том, связь между позицией сайта и числом посетителей достаточно слабая, не линейная и обратная.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. По данным некоторых экспериментальных исследований, приведенных в таблице 6.4. Построить график зависимости *y=f(x)* и рассчитать выборочный коэффициент корреляции.

Таблица 6.4

X	0,1	0,3	0,6	0,65	0,9	1,0	1,3	1,6	1,7	1,9	2,1	2,2	2,5
Y	0,3	0,5	1,0	1,6	1,3	1,6	2,0	1,8	1,6	2,0	1,7	1,9	2,0

6.4. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

При достаточно большом объеме выборочный коэффициент корреляции r приближается к истинному значению ρ, однако при сравнительно небольшом объеме выборки оценить степень связи затруднительно из-за неизвестной погрешности выборочного коэффициента корреляции. Распределение его зависит от истинного значения, которое неизвестно, поэтому на практике обычно ограничиваются лишь проверкой общей гипотезы о наличии корреляционной связи между наблюдаемыми величинами. Т.е. нужно проверять нулевую гипотезу $H_0 : \rho = 0$ – о том, что генеральный коэффициент корреляции равен нулю.

В качестве критериев значимости при проверке нулевой гипотезы могут быть использованы r-критерий или t-критерий (*r*- или ***t***- распределение).

Проверка с помощью r - критерия осуществляется в следующем порядке

а) по таблицам r – распределения (Приложение 1, таблица 6) определяется граничное значение критерия $r_{гр}$ по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 2$.

б) проверяется выполнение условия: $|r| < r_{гр}$. Если рассчитанное по выборочным данным значение r удовлетворяет этому условию, то нулевая гипотеза о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции ρ принимается и считается, что случайные величины некоррелированы между собой.

Проверка с помощью t-критерия осуществляется в следующем порядке:

а) вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = r_в \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}} \quad . \tag{6.9}$$

б) по таблицам t–распределения (Приложение 1, таблица 2) находится граничное значение критерия $t_{кр}$ по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 2$.

в) проверяется выполнение условия $|T_{набл.}| < t_{кр}$. Если условие выполняется, принимаем нулевую гипотезу: коэффициент корреляции r незначимо отличается от нуля, т.е. между случайными величинами отсутствует корреляционная связь. В противном случае случайные величины считаются коррелированными.

Пример 1. По выборке объема $n = 122$, найден выборочный коэффициент корреляции $r = 0{,}4$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции $H_0 : \rho = 0$ и конкурирующей гипотезе $H_1 : \rho \neq 0$.

Решение.

Найдем наблюдаемое значение критерия по формуле 6.9:

$$T_{набл} = r_в \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}} = 0{,}4\frac{\sqrt{122-2}}{\sqrt{1-0{,}4^2}} = 4{,}78$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $\rho \neq 0$, поэтому критическая область – двусторонняя.

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 122 - 2 = 120$ находим по таблице распределения Стьюдента (Приложение 1, таблица 2) для двусторонний критической области критическую точку $t_{0,05;120} = 1{,}98$.

Поскольку $T_{набл} > t_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочный коэффициент корреляции значимо отличат от нуля, т. е. X и Y коррелированны.

Пример 2. Пусть имеются данные по живой массе бычков при рождении X и последующей скорости роста Y (данные приведены в таблице 6.5).

Таблица 6.5

Номер бычка (i)	x_i, кг	y_i, г/сутки	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	40	1000	1600	1000000	40000
2	42	900	1764	810000	37800
3	35	850	1225	722500	29750
4	36	950	1296	902500	34200
5	45	920	2025	846400	41400
6	47	950	2209	902500	44650

7	40	810	1600	656100	32400
8	43	870	1849	756900	37410
9	41	930	1681	864900	38130
10	38	870	1444	756900	33060
Σ	407	9050	16693	8218700	368800
Среднее	40,7	905	-	-	-

Необходимо построить график зависимости скорости роста бычка от его массы при рождении. Рассчитать выборочный коэффициент корреляции и проверить его значимость отличия от нуля.

<u>*Решение.*</u>

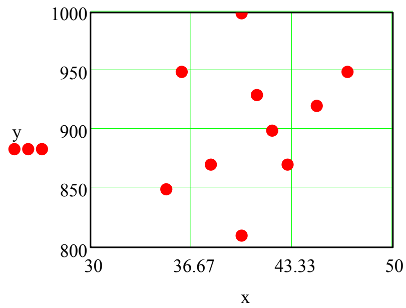

Рис. 6.4. График зависимости скорости роста бычка от его массы при рождении

Выборочный коэффициент корреляции рассчитывается по формуле (6.7).

$$r = \frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{S_xS_y}$$

Для удобства расчета воспользуемся формулами (6.8), и используем промежуточные вычисления, приведенные в исходной таблице данных:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n} = 368800 - \frac{407\cdot 9050}{10} = 465,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n} = 16693 - \frac{407^2}{10} = 128{,}1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}{n}=8218700-\frac{9050^2}{10}=28450.$$

Выборочное среднеквадратическое отклонение определяем по формулам (6.6)

$$S_x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{10-1}\cdot 128,1}=3,773,$$
$$S_y=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{10-1}\cdot 28450}=56,224.$$

Тогда выборочный коэффициент корреляции равен

$$r=\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i-1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{S_xS_y}=\frac{1}{10-1}\cdot\frac{465}{3,773\cdot 56,224}=0,244.$$

Необходимо проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции. В качестве нулевой гипотезы возьмем предположение, что коэффициент корреляции генеральной совокупности равен нулю $H_0: \rho=0$.

Для проверки гипотезы используем t- критерий.

Наблюдаемое значение критерия рассчитываем по формуле (6.9)

$$T_{набл}=r\,\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}=0б244\frac{\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0б244^2}}=0,711.$$

Число степеней свободы: $k=n-2=10-2=8$.

Критическое значение по таблицам t-распределения (Приложение 1, таблица 2) при уровне значимости $\alpha=1-P=1-0,95=0,05$ (доверительная вероятность принимается равной $P=0,95$, если не указано другое): $t_{0,05;8}=2,31$.

Проверив условие $\left|T_{набл.}\right|<t_{кр}$, принимаем нулевую гипотезу о равенстве коэффициента корреляции нулю.

Вывод. Корреляционный анализ выявил слабую взаимосвязь между живой массой телят при рождении и среднесуточными привесами до годовалого возраста. Отклонение выборочной оценки корреляции ($r=0,244$) от аналогичного параметра генеральной совокупности ($\rho=0$)

можно приписать случайной вариации. Другими словами, гипотеза об отсутствии связи между живой массой телят при рождении и среднесуточным привесом до годовалого возраста не вызывает возражения.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. По выборке объемом $n = 62$ найден выборочный коэффициент корреляции $r = 0,6$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $\rho = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $\rho \neq 0$. Использовать t – критерий для проверки гипотезы.

Задача 2. По экспериментальным данным, приведенным в таблице 6.6

1. Построить график зависимости y=f(x)
2. Рассчитать выборочный коэффициент корреляции
3. Проверить по r-критерию значимость отличия коэффициента корреляции от нуля

Таблица 6.6

X	-2	-3	-5	-6	-7	-10	-10	-13	-13	-15	-16	-17
Y	0,08	0,06	0,01	0,07	0,02	0,05	0,11	0,03	0,09	0,12	0,06	0,09

Задача 3. По выборке объема $n = 150$, извлеченной из нормально распределенной двумерной генеральной совокупности, вычислен выборочный коэффициент корреляции $r = -0,37$. Проверим при уровне значимости $\alpha = 0,01$ нулевую гипотезу H_0: $\rho = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе H_1: $\rho \neq 0$. Для проверки гипотезы использовать любой критерий.

6.5. Регрессионный анализ

Корреляционный анализ одновременно оценивает факт случайности или причинности зависимости от фактора, но и одновременно степень не случайности. Регрессионный анализ является более высокой ступенью анализа по сравнению корреляционным: он позволяет оценить как количественные характеристики степени связи между случайными величинами, так и характер этой связи, для чего необходимо получить зависимость среднего значения $\bar{y}$ величины от другой случайной величины x. Эту зависимость называют *регрессией*, а кривую, описывающую эту зависимость, – *линией регрессии.* Термин «регрессия» впервые введен английским социологом Гальтоном и, в первом приближении, означает «воспроизводимость».

Задача состоит в том, чтобы по парам экспериментальных данных (x_i,y_i) найти уравнение приближенной регрессии и оценить погрешность. Решение находится обычно методом наименьших квадратов. Регрессионный анализ имеет много общего с определением параметров функциональной зависимости по экспериментальным данным. Существенным отличием является то, что в этом случае обе величины случайные.

Рассмотрим нахождение линии регрессии $y = \alpha + \beta \cdot x$. По методу наименьших квадратов получаем систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \tag{6.10}$$

Решение системы уравнений (6.10) позволяет получить *коэффициент линейной регрессии:*

$$\beta = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{6.11}$$

Постоянную α называют *свободным членом регрессии.* Выразив его из первого уравнения системы (6.10) с учетом найденного значения β по уравнению (6.11), получим

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{6.12}$$

Полученные коэффициенты полностью определяют линейную регрессию по заданной выборке. Преобразовав выражение (6.12), получим другое выражение для свободного члена $\alpha = \bar{y} - \beta\bar{x}$. Отсюда уравнение регрессии

$$\bar{y} = \alpha + \beta\bar{x}. \tag{6.13}$$

Таким образом, первое уравнение системы (6.10) требует, чтобы линия регрессии проходила через точку с координатами ($\bar{x}, \bar{y}$) – центр тяжести поля экспериментальных точек. Из этого следует, что для определения линии регрессии достаточно определить ее угловой коэффициент β. Это равнозначно тому, что исходные данные центрируются, и начало координат переносится в точку $(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда уравнение регрессии будет иметь вид

$$y = \bar{y} + \beta\left(x - \bar{x}\right). \tag{6.14}$$

В уравнении регрессии присутствуют две случайные величины – среднее арифметическое $\bar{y}$ и коэффициент регрессии β. Дисперсия среднего $\sigma^2(\bar{y}) = \frac{\sigma_y^2}{n}$ или ее выборочное значение $S^2(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n}$.

Проведем оценку силы найденной связи. То, что исследуемая зависимость предполагается линейной, позволяет использовать для оценки силы связи выборочный коэффициент корреляции r. Формулу (6.11) для коэффициента регрессии можно представить в другом виде – через найденный по уравнению (6.5 и 6.6) выборочный коэффициент корреляции r:

$$\beta = \frac{n\sum_{i-1}^{n} x_i y_i - \sum_{i-1}^{n} x_i \sum_{i-1}^{n} y_i}{n\sum_{i-1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i-1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i-1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{\sum_{i-1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)\left(x_i - \bar{x}\right)}{\sum_{i-1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = r\frac{S_y}{S_x}. \tag{6.15}$$

Отсюда выборочный коэффициент корреляции будет выглядеть так:

$$r = \beta\frac{S_y}{S_x} = \beta\frac{\sqrt{n\sum_{i-1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} x_i\right)^2}}{\sqrt{n\sum_{i-1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} y_i\right)^2}}. \tag{6.16}$$

Уравнение линии регрессии через выборочный коэффициент корреляции имеет вид

$$y = \bar{y} + r\frac{S_y}{S_x}\left(x - \bar{x}\right). \tag{6.17}$$

Уравнения (6.14) и (6.17) - уравнения регрессии y по x. Коэффициент регрессии $\beta_{y/x}$ вычисляют по формуле (6.11). Если же находится обратная регрессия x по y в виде выражения (6.14) $x = \overline{x} + \beta_{y/x}(y - \overline{y})$, то коэффициент регрессии x по y находим по аналогии с уравнением (6.11):

$$\beta_{y/x} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2} = r\frac{S_x}{S_y}. \tag{6.18}$$

Очевидно, что полученные методом наименьших квадратов коэффициенты регрессии не равны $\beta_{y/x} \neq \beta_{x/y}$((6.11) и (6.18)), а их произведение будет $\beta_{y/x} \cdot \beta_{x/y} = r^2$. Следствием этого является то, что линии регрессии y по x и x по y не совпадают: первая проходит более полого, а вторая - более круто (рис. 6.5).

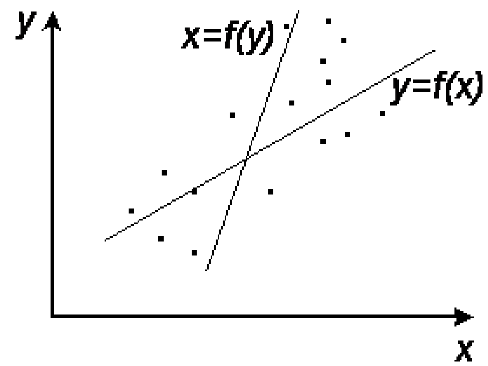

Рис. 6.5. Линейная регрессия

Пример 1. Имеются данные средней выработки на одного рабочего y (тыс. руб.) и товарооборота x (тыс. руб.) в 10 магазинах за квартал (таблица 6.7). Требуется:

1) определить зависимость (коэффициент корреляции) средней выработки на одного рабочего от товарооборота,

2) составить уравнение прямой регрессии этой зависимости.

Таблица 6.7

Магазины	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	10	14	21	23	27	32	39	45	55	61
y	3,8	4,8	5,9	6,1	6,2	6,3	6,6	7,4	8,5	9,7

Решение.

Связь между изучаемыми признаками может быть выражена уравнением прямой линии регрессии Y на X: $\overline{y} = \alpha + \beta\overline{x}$. Для вычисления параметров α, β и коэффициента корреляции r составим расчетную таблицу 6.8.

Таблица 6.8

Магазины	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Сумма**
X	10	14	21	23	27	32	39	45	55	61	**327**
Y	3,8	4,8	5,9	6,1	6,2	6,3	6,6	7,4	8,5	9,7	**65,3**
X^2	100	196	441	529	729	1024	1521	2025	3025	3721	**13311**
Y^2	14,44	23,04	34,81	37,21	38,44	39,69	43,56	54,76	72,25	94,09	**452,3**
XY	38	67,2	123,9	140,3	167,4	201,6	257,4	333	467,5	591,7	**2388**

1. Найдем выборочный коэффициент корреляции, предварительно преобразовав формулу (6.7) с учетом формул (6.8):

$$r=\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{S_xS_y}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}=$$

$$=\frac{10\cdot 2388-327\cdot 65,3}{\sqrt{10\cdot 13311-327^2}\cdot\sqrt{10\cdot 452,3-65,3^2}}=0,971$$

Так как коэффициент корреляции практически равен 1, можно сделать вывод, что связь средней выработки на одного рабочего и товарооборота в магазине очень сильная, прямая.

2. Параметры α, β найдем из системы уравнений (6.10)

$$\begin{cases}10\cdot\alpha+327\cdot\beta=65.3,\\ 327\cdot\alpha+13311\cdot\beta=2388.\end{cases}$$

Получаем α = *3,374*, β =*0,097* , тогда уравнение регрессии примет вид $f(x)=0{,}097+3{,}374\cdot x$.

Геометрическая иллюстрация:

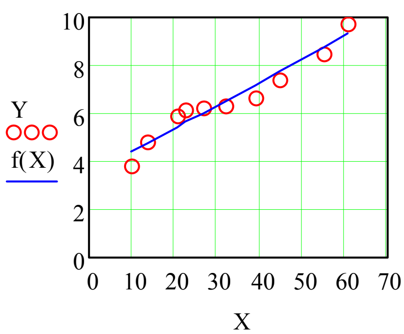

Рис. 6.6. График зависимости средней выработки на одного рабочего от товарооборота

Задача для самостоятельного решения

1. ***Задача 1.*** По данным, приведенным в таблице 6.9 построить график зависимости $y = f(x)$. Определить коэффициенты уравнения линейной регрессии и построить линию регрессии.

Таблица 6.9

X	2	3	7	10	14	16	19	20	22	24
Y	2	1	3	5	6	8	9	11	10	13

Задача 2. С целью анализа взаимного влияния зарплаты и текучести рабочей силы на пяти однотипных фирмах с одинаковым числом работников проведены измерения уровня месячной зарплаты X и числа уволившихся за год рабочих Y (Таблица 6.10). Найти линейную регрессию Y на X, выборочный коэффициент корреляции.

Таблица 6.10

X	100	150	200	250	300
Y	60	35	20	20	15

6.6. Контрольные вопросы и задания

1. Какую зависимость называют функциональной; статистической; корреляционной?
2. В чем состоит корреляционный анализ?
3. Что такое корреляционный момент.
4. Что такое коэффициент корреляции. Какими свойствами обладает коэффициент корреляции?
5. Приведите формулы для вычисления выборочного корреляционного момента и коэффициента корреляции.
6. Как проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции?
7. Дайте определения понятиям: регрессия, линия регрессии, коэффициент линии регрессии и свободная линия регрессии.
8. В чем состоит регрессионный анализ?

Глава 7. Погрешность измерения

7.1. Основные понятия и определения.

Основные понятия и определения приведены в соответствии с РМГ 29-99 (Рекомендации по межгосударственной стандартизации «Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения»)

Измерение – это совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

1. В простейшем случае, прикладывая линейку с делениями к какой-либо детали, по сути, сравнивают ее размер с единицей, хранимой линейкой, и, произведя отсчет, получают значение величины (длины, высоты, толщины и других параметров детали).

2. С помощью измерительного прибора сравнивают размер величины, преобразованной в перемещение указателя, с единицей, хранимой шкалой этого прибора, и проводят отсчет.

Или другое определение: *Измерение* – это процесс нахождения значения физической величины опытным путём с помощью специальных технических средств. Это определение относится только к области технических измерений, хотя существуют измерения в экономике, психологии, педагогике и других областях знаний.

В приведённом определении понятия измерения отражены три наиболее существенных момента:

- измерению подлежат только физические величины;
- для получения результата измерения нужно обязательно провести измерительный эксперимент;
- для осуществления измерительного эксперимента нужны специальные технические средства, имеющие нормированные метрологические характеристики.

От термина «измерение» происходит термин «измерять», которым широко пользуются на практике. Все же нередко применяются такие термины, как «мерить», «обмерять», «замерять», «промерять», не вписывающиеся в систему метрологических терминов. Их применять не следует. Не следует также применять такие выражения, как «измерение значения» (например, мгновенного значения напряжения или его среднего квадратического значения), так как значение величины – это уже результат измерений.

Математическая модель объекта измерения – упрощенное описание объекта измерения с помощью математических формул, адекватно отражающих интересующие субъект измерения свойства и связи между ними, необходимые для проведения измерительного эксперимента.

Физическая величина есть одно из свойств физического объекта, в качественном отношении общее для многих физических объектов, а в количественном отношении индивидуальное для каждого из них. Например, температура есть физическая величина присущая всем физическим объектам, но разная для каждого из них: в комнате температура воздуха может быть $20\,^{0}C$, а на улице –20 ^{0}C.

Вид измерения – совокупность приёмов обработки экспериментальных данных, используемых для нахождения результатов измерения. Всё многообразие измерений по этому признаку делят на четыре вида: прямые, косвенные, совместные и совокупные измерения.

Прямые измерения – измерения, при которых искомое значение физической величины находится непосредственно по показаниям средства измерения. Пример прямого измерения – измерение амперметром силы тока в электрической цепи.

Косвенные измерения – измерения, при которых искомое значение физической величины находится с использованием известной зависимости между этой величиной и другими величинами, подвергаемыми прямым измерениям. Пример косвенного измерения – измерение электрической мощности на участке электрической цепи с использованием показаний амперметра, вольтметра и известной зависимости

$$P = UI,$$

где U - показания вольтметра,

I - показания амперметра.

Совместные измерения – одновременные измерения нескольких разноимённых физических величин с целью установления зависимости между ними. Пример совместного измерения – экспериментальное нахождение зависимости сопротивления резистора от его температуры

$$R_t = R_0\left(1 + \alpha t + \beta t^2\right),$$

где R_t – сопротивление резистора при окружающей температуре t, R_0, α, β – коэффициенты, подлежащие экспериментальному определению.

Поставленная цель достигается решением системы из трёх уравнений, полученных в результате проведения трёх измерений сопротивления резистора при трёх различных значениях температуры спая. При проведении эксперимента измеряются разноименные физические величины: температура и электрическое сопротивление резистора.

Совокупные измерения – измерения нескольких одноименных физических величин, заключающиеся в проведении прямых измерений различных сочетаний этих величин и в последующем решении полученной системы алгебраических уравнений. Пример совокупного измерения – измерение сопротивления резисторов, соединённых треугольником, путём проведения трёх измерений сопротивлений между вершинами треугольника и последующего решения системы из трёх полученных алгебраических уравнений.

В процессе измерения физической величины θ экспериментально определяется приближенное значение (оценка истинного значения) $\overline{\theta}$, которое называют *результатом измерения. Точность измерения* отражает степень приближения результата измерения к истинному значению измеряемой величины и служит качественной характеристикой измерения. Количественной характеристикой точности является погрешность. *Погрешность измерения* – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины:

$$\Delta = \overline{\theta} - \theta \qquad (7.1)$$

Истинное значение физической величины идеальным образом отражает свойство данного объекта в количественном отношении, не зависит от нашего познания и является той абсолютной истиной, которую при проведении измерения пытаются выразить численным значением. Истинное значение физической величины не известно, поэтому не известна и погрешность измерения и, строго говоря, никогда не может быть найдена. Однако качество измерения, т.е. погрешность измерения, оценивать необходимо. Для этого в метрологии введено понятие *действительное значение* измеряемой физической величины x_d, под которым подразумевается результат измерения, полученный с наивысшей достижимой точностью.

7.2. Погрешность средств измерений и погрешность результата измерения.

Качество средств и результатов измерений принято характеризовать указанием их погрешностей. Так как характер проявления и причины возникновения погрешностей, как средств, так и результатов измерений весьма разнообразны, то в практике установилось деление погрешностей на разновидности, за каждой из которых закреплено определенное наименование.

В первую очередь погрешности измерений следует разделить на погрешность средств измерений и погрешности результатов измерений. *Погрешность результата измерения* – это число, указывающее возможные границы неопределенности полученного значения измеряемой величины. *Погрешность прибора (средства измерения)* – это его определенное свойство, для описания которого приходится использовать соответствующие правила.

Пример 1. Полагать, что, воспользовавшись вольтметром класса точности 1,0, т.е. имеющим предел приведенной погрешности, равный 1%, получим и результат измерения с погрешностью 1%, – грубейшая ошибка. Подчеркнем то, что погрешности средств измерений и погрешности результатов измерений – понятия не идентичные.

Исторически часть наименований разновидностей погрешностей закрепилась за погрешностями средств измерений, другая – за погрешностями результатов измерения, а некоторые применяются по отношению и к тем, и к другим.

7.3. Инструментальные и методические погрешности.

По причинам возникновения погрешности измерений разделяют на методические, инструментальные (аппаратурные), отсчитывания (субъективные), установки (внешние) и погрешности модели объекта (классификации).

Инструментальными (приборными или аппаратурными) *погрешностями средств измерений* называются такие, которые принадлежат данному средству измерений, могут быть определены при его испытаниях и занесены в его паспорт.

Однако, кроме инструментальных погрешностей, при измерениях возникают еще и такие погрешности, которые не могут быть приписаны данному прибору, не могут быть указаны в его паспорте и называются *методическими,* т.е. связанными не самим прибором, а с методом проведения измерений.

Очень часто причиной возникновения методической погрешности является то, что, организуя измерения, измеряют или вынуждены измерять не ту величину, которая должна быть измерена, а некоторую другую, близкую, но не равную ей. Этот прием замены того, что действительно подлежит измерению, тем, что несколько отличается от нужного, но проще осуществляется, очень широко используется и при разработке СИ, и в практике организации измерений. Он позволяет создавать наиболее простые, надежные и универсальные приборы и методы измерения. Но когда этот метод уже воплощен в приборе, то погрешности прибора должны быть изучены, определены и занесены в его паспорт. С этого момента вне зависимости от причин возникновения погрешности для пользователя все они являются инструментальными.

Так как методические погрешности не могут быть указаны в паспортных данных СИ, а должны оцениваться самим экспериментатором, то он обязан при выполнении измерений четко отличать фактически измеряемую им величину от величины, подлежащей измерению.

Такая оценка достаточно сложна. Она требует постановки обстоятельного экспериментального метрологического исследования принятого метода измерений.

Причиной погрешностей измерения может быть ограниченное знание объекта измерения, его физических свойств. Построение модели объекта при подготовке эксперимента, недостаточно полно отражающей физико-математические зависимости и связи, и отнесение его к определенному классу объектов приводят к *погрешности модели* (классификации). Последнюю зачастую относят к методической.

Погрешности *отсчитывания* вызываются субъективными особенностями экспериментатора (психофизиологическими качествами, уровнем подготовки, привычками, моральным состоянием и др.).

Погрешность *установки* – это погрешность вследствие отклонений условий эксперимента от нормальных, включая изменение условий окружающей среды, неправильное расположение измерительного оборудования.

Пример 1. Требуется определить методическую погрешность косвенного измерения электрической мощности, потребляемой резистором R при пропускании по нему электрического тока I_R. Схема измерения представлена на рисунке 7.1 Внутреннее сопротивление амперметра $R_A = 1\,Ом$; входное сопротивление вольтметра $R_B = 1000\,Ом$; показания амперметра $I_A = 1{,}5\,A$; показания вольтметра $U_B = 100\,B$.

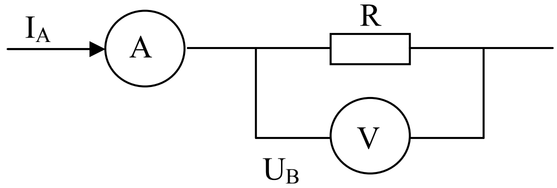

Рис. 7.1. Измерение мощности по методу амперметра и вольтметра (вариант 1)

<u>Решение</u>

По показаниям приборов измеренное значение мощности равно

$$P_И = U_B \cdot I_A, \tag{7.2}$$

где U_B – показание вольтметра,

I_A – показание амперметра.

По условиям задачи $U_B = 100B$, $I_A = 1{,}5A$ поэтому $P_И = 100 \cdot 1{,}5 = 150Bm$. Действительное значение потребляемой мощности равно

$$P_д = U_B \cdot I_R, \tag{7.3}$$

где I_R - электрический ток, протекающий по резистору R.

Показания амперметра определяются суммой токов, протекающих через резистор I_R и вольтметр I_B

$$I = I_R + I_B \tag{7.4}$$

После подстановки (7.5) в (7.3) получим

$$P_И = U_B \cdot (I_R + I_B) = P_д + U_B \cdot I_B \tag{7.5}$$

Второе слагаемое в (7.5) определяет методическую погрешность измерения $\Delta P_м$, обусловленную влиянием на результат измерения входного сопротивления вольтметра

$$\Delta P_м = U_B \cdot I_B = \frac{U_B{}^2}{R_B}. \tag{7.6}$$

Результат измерения после внесения поправки на методическую погрешность будет равен

$$P_д = P_И - \frac{U^2}{R_B}. \tag{7.7}$$

После подстановки численных значений получаем:

$$P_д = 150 - 10 = 140Bm,$$

$$\Delta P_м = \frac{100^2}{1000} = 10\ Вт,$$

$$\delta_м = \frac{10}{140} \cdot 100 = 7{,}1\ \%.$$

Таким образом, если результат измерения представить в соответствии с формулой (7.2), используя только показания приборов, то будет допущена методическая погрешность, относительное значение которой равно 7,1 %. Если результат измерения представить в соответствии с формулой (7.7), то методическая погрешность будет исключена.

При косвенном измерении мощности по схеме рисунка 7.1 методическая погрешность определяется только входным сопротивлением вольтметра. Чем больше входное сопротивление вольтметра, тем меньше методическая погрешность. При $R_В \to \infty$ имеем $\Delta P_М \to 0$. Внутреннее сопротивление амперметра на методическую погрешность при этом не влияет.

Пример 2. Требуется определить методическую погрешность косвенного измерения электрической мощности, потребляемой резистором *R* при пропускании по нему электрического тока I_R. Схема измерения представлена на рисунке 7.2. Внутреннее сопротивление амперметра $R_A = 1\,Ом$; входное сопротивление вольтметра $R_В = 1000\,Ом$; показания амперметра $I_A = 1{,}5\,A$; показания вольтметра $U_В = 100\,В$.

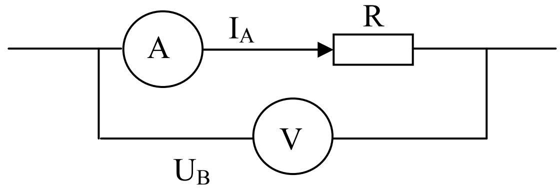

Рис. 7.2. Измерение мощности по методу амперметра и вольтметра (вариант 2)

<u>*Решение*</u>

Измеренное значение мощности по показаниям приборов (как и в примере 1) равно

$$P_И = U_В \cdot I_A = 100 \cdot 1{,}5 = 150\ Вт.$$

Показания вольтметра равны сумме падений напряжения на резисторе *R* и на внутреннем сопротивлении R_A амперметра

$$U_B = I_A \cdot (R + R_A) . \qquad (7.8)$$

Подставляя 7.8 в 7.2 получим

$$P_И = I^2 R + I^2 R_A , \qquad (7.9)$$

где $P_д = I^2 R$ - действительное значение мощности, потребляемой резистором;

$\Delta P_м = I^2 R_A$ - методическая погрешность измерения, определяемая внутренним сопротивлением амперметра.

Результат измерения с введением поправки на методическую погрешность будет равен

$$P_д = P_И - I^2 R_A$$

Подставляя численные значения показаний приборов $U_B = 100B$ и $I_A = 1{,}5A$ получим

$$P_д = 150 - (1{,}5)^2 \cdot 1 = 150 - 2{,}3 = 147{,}7Bm ,$$

$$\Delta P_м = 2{,}3Bm ,$$

$$\delta_м = \frac{2{,}3}{147{,}7} \cdot 100 = 1{,}5\% .$$

Методическая погрешность, при использовании для измерения схемы, изображенной на рисунке 7.2, определяется только внутренним сопротивлением амперметра и не зависит от входного сопротивления вольтметра.

В приведённых примерах методическая погрешность обусловлена влиянием средств измерения на объект измерения.

Задачи для самостоятельной работы.

Задача 1. Требуется определить методическую погрешность косвенного измерения сопротивления резистора *R* при пропускании по нему электрического тока I_R. Схема измерения представлена на рисунке 7.1 Внутреннее сопротивление амперметра R_A; входное сопротивление вольтметра R_B; показания амперметра I_A; показания вольтметра $U_{B.}$

Задача 2. Условия как в задаче 1. Схема измерительного эксперимента представлена на рисунке 7.2. Требуется определить методическую погрешность косвенного измерения сопротивления резистора R при пропускании по нему электрического тока I_R. Сравнить результаты задачи 1 и задачи 2. Сделать выводы, какой из способов измерительного эксперимента дает меньшую методическую погрешность.

7.4. Основная и дополнительная погрешности СИ.

Любой датчик, измерительный прибор или регистратор работают в сложных, изменяющихся во времени условиях. Это, прежде всего, обусловлено тем, что процесс измерения – это сложное, многогранное явление, характеризующееся множеством воздействующих на прибор (как со стороны объекта, так и внешней среды, источников питания и т.д.) отдельных факторов. Для получения результата требуется от прибора или датчика, чтобы он выделил из всего множества действующих на него величин только ту, которая называется *измеряемой*, и «отстроился» от действия на него всех остальных величин, которые являются *влияющими* (помехами).

Естественно, прибор наряду с чувствительностью к измеряемой величине неминуемо имеет некоторую чувствительность и к не измеряемым, влияющим величинам. Прежде всего, это температура, тряска и вибрации, напряжение источников питания прибора и объекта, коэффициент содержания гармоник питающих напряжений и т. п.

При аттестации или градуировке прибора в лабораторных условиях все значения влияющих величин могут поддерживаться в узких пределах их изменения (например, температура (20 ± 5) °С, напряжение питания ±5% номинального, коэффициент гармоник – не более 1% и т.д.). Такие оговоренные в технической документации условия поверки или градуировки принято называть *нормальными*, а погрешность прибора, возникающую в этих условиях, – *основной* погрешностью.

В эксплуатационных условиях, при установке прибора, например, на самолет, ему придется работать при изменении температуры от – 60 до +60 °С, давления от 1000 до 100 гПа, напряжения питания – на ±20%, коэффициента гармоник – от 1 до 10% и т. д., что приведет к появлению погрешностей больших, чем в нормальных (лабораторных) условиях.

Изменение показаний вследствие отклонения условий эксплуатации от нормальных называются *дополнительными* погрешностями. Они нормируются указанием *коэффициентов влияния* изменения отдельных влияющих величин на изменение показаний в виде Ψ_Θ, $\frac{\%}{K(°C)}$; Ψ_u,

$\dfrac{\%}{10\%\dfrac{\Delta U}{U}}$ и т. д. Хотя фактически эти функции влияния влияющих факторов, как правило, не линейны, для простоты вычислений их приближенно считают линейными и возникающие дополнительные погрешности определяют как

$$\gamma_{доп} = \Psi \Delta\Theta,$$

где Ψ – коэффициент влияния, а $\Delta\Theta$ – отклонение от нормальных условий.

Погрешность прибора в реальных условиях его эксплуатации называется *эксплуатационной* и складывается из его основной погрешности и всех дополнительных и может быть, естественно, много больше его основной погрешности. Таким образом, деление погрешностей на основную и дополнительные является чисто условным и оговаривается в технической документации на каждое средство измерений.

7.5. Систематические, прогрессирующие и случайные погрешности.

По характеру проявления во времени или от одного измерения к другому погрешности делят на систематические, случайные и промахи (грубые погрешности и выбросы). *Систематическими* называются погрешности, не изменяющиеся с течением времени или являющиеся не изменяющимися во времени функциями определенных параметров. Основной отличительный признак систематических погрешностей состоит в том, что они могут быть предсказаны и благодаря этому почти полностью устранены введением соответствующих поправок.

Особая опасность постоянных систематических погрешностей заключается в том, что их присутствие чрезвычайно трудно обнаружить. В отличие от случайных, прогрессирующих или являющихся функциями определенных параметров погрешностей постоянные систематические погрешности внешне себя никак не проявляют и могут долгое время оставаться незамеченными. Единственный способ их обнаружения состоит в *поверке* прибора путем повторной *аттестации* по образцовым мерам или сигналам.

Прогрессирующими (или дрейфовыми) называются непредсказуемые погрешности, медленно изменяющиеся во времени. Эти погрешности, как правило, вызываются процессами старения тех или иных деталей аппаратуры (разрядкой источников питания, старением резисторов, конденсаторов, деформацией механических деталей и т.п.). Особенностью прогрессирующих погрешностей является то, что они могут быть скорректированы введением поправки лишь в данный момент времени, а далее вновь непредсказуемо возрастают. Поэтому в отличие от систематических погрешностей, которые могут быть скорректированы поправкой, найденной один раз на весь срок службы прибора, прогрессирующие погрешности требуют непрерывного повторения коррекции и тем более частой, чем меньше должно быть их остаточное значение. Другая особенность прогрессирующих погрешностей состоит в том, что их изменение во времени представляет собой нестационарный случайный процесс и поэтому в рамках хорошо разработанной теории стационарных случайных процессов они могут быть описаны лишь с оговорками.

Случайными погрешностями называют непредсказуемые ни по знаку, ни по размеру (либо недостаточно изученные) погрешности. Они определяются совокупностью причин, трудно поддающихся анализу. Присутствие случайных погрешностей (в отличие от систематических) легко обнаруживается при повторных измерениях в виде некоторого разброса получаемых результатов. Таким образом, главной отличительной чертой случайных погрешностей является их непредсказуемость от одного отсчета к другому. Поэтому описание случайных погрешностей может быть осуществлено только на основе *теории вероятностей* и методов *математической статистики*. Конкретные примеры расчета случайной погрешности будут приведены в последующих разделах.

7.6. Абсолютная, относительная и приведенная погрешности.

По способу выражения различают абсолютную, относительную и приведённую погрешности.

Абсолютная погрешность описывается формулой

$$\Delta x = x_и - x_д, \tag{7.10}$$

и выражается в единицах измеряемой величины.

Абсолютная погрешность не может в полной мере служить показателе качества результата измерения. Так при измерении длины 100 мм абсолютная погрешность результата измерения в 0,1 мм может служить показателем высокой точности измерения, а при измерении длины 1 мм та же погрешность 0,1 мм будет служить показателем низкой точности измерения. Поэтому в метрологии вводится понятие относительная погрешность результата измерения.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности результата измерения к действительному значению измеряемой величины

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%. \tag{7.11}$$

Для нормирования инструментальной погрешности средства измерения используется часто приведённая погрешность.

Приведённая погрешность – это относительная погрешность, в которой абсолютная погрешность средства измерения отнесена к условно принятому значению X_m, постоянному во всём диапазоне измерений или его части

$$\gamma = \frac{\Delta x}{X_m} \cdot 100\% \qquad (7.12)$$

Принятое значение X_m называют нормирующим. Чаще всего за это значение принимается верхний предел измерения данного средства измерения.

Для приборов с равномерной или степенной шкалой, если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы, нормирующее значение X_m принимается равным верхнему пределу диапазона измерений. Если же нулевая отметка находится посредине шкалы, то X_m равно протяженности диапазона измерений.

Пример 1. Дан амперметр со шкалой от –30 до +60 А. Определить нормирующее значение.

Решение.

Нормирующее значение для данного прибора будет равно $X_m = 60 - (-30) = 90A$.

Основное отличие приведенной погрешности от относительной состоит в том, что *Δx* относится не к переменной текущей величине *x,* а к постоянной величине протяженности диапазона.

Приведенная погрешность удобна тем, что для многих многопредельных СИ она имеет одно и то же значение как для всех точек каждого поддиапазона, так и для всех его поддиапазонов, т.е. ее очень удобно использовать для нормирования свойств СИ.

Понятия абсолютной, относительной и приведенной погрешностей существующими стандартами установлены только для СИ, но их удобно использовать и при характеристике погрешностей результатов измерения.

Пример 2. Вольтметром со шкалой (0…100) В, имеющим абсолютную погрешность ΔV = 1В, измерены значения напряжения 0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 В. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графиков.

Решение.

Для записи результатов формируем таблицу 7.1, в столбцы которой будем записывать измеренные значения V, абсолютные ΔV, относительные δV и приведённые γV погрешности.

Значение абсолютной погрешности известно из условий задачи ($\Delta V = 1$В) и считается одинаковым для всех измеренных значений напряжения; это значение заносим во все ячейки второго столбца.

Значения относительной погрешности будем рассчитывать по формуле (7.11)

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} \cdot 100\%$$

При $V = 0$ В получаем

$$\delta V = \frac{1}{0} \cdot 100\% \to \infty,$$

При $V = 10$ В получаем

$$\delta V = \frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%,$$

Значения относительной погрешности для остальных измеренных значений напряжения рассчитываются аналогично. Полученные значения относительной погрешности заносим в третий столбец.

Для расчёта значений приведённой погрешности будем использовать формулу (7.12):

$$\gamma V = \frac{\Delta V}{V_m} \cdot 100\%$$

Предварительно определим нормирующее значение V_m. Так как диапазон измерений вольтметра – (0…100)В, то шкала вольтметра содержит нулевую отметку, следовательно, за нормирующее значение принимаем размах шкалы прибора, т.е.

$$V_m = |100B - 0B| = 100B$$

Так как величины ΔV и V_m постоянны при любых измеренных значениях напряжения, то величина приведённой погрешности так же постоянна и составляет

$$\gamma V = \frac{1}{100} \cdot 100\% = 1\%$$

Это значение заносим во все ячейки четвёртого столбца.

Таблица 7.1.

V, В	ΔV, В	δV, %	γV, %
0	1	∞	1
10	1	10,00	1
20	1	5,00	1
40	1	2,50	1
50	1	2,00	1
60	1	1,67	1
80	1	1,25	1
100	1	1,00	1

По данным таблицы 7.1 строим графики зависимостей абсолютной ΔV, относительной δV и приведённой γV погрешностей от результата измерений V (рисунок 7.3).

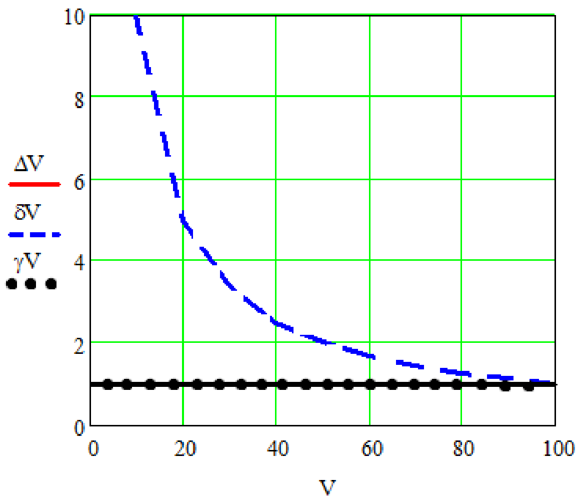

Рис. 7.3. Графики зависимостей абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений

В данном случае графики зависимостей абсолютной и приведённой погрешностей сливаются друг с другом и представляют собой горизонтальные прямые линии. График зависимости относительной погрешности представляет собой гиперболу. Так как диапазон измерений прибора – (0…100 В, то за пределы этого диапазона построенные графики не должны выходить.

Пример 3. При определении диаметра ведущего валика ручных часов допущена ошибка ± 5мкм, а при определении расстояния до Луны допущена ошибка ±5 км. Какое из этих двух измерений точнее? Диаметр часового вала d = 0,5 мм.

Решение.

Точность измерения определяется относительной погрешности (формула 7.11).

Относительная погрешность измерения диаметра часового вала:

$$\delta d = \frac{\Delta d}{d} \cdot 100\% = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} \cdot 100\% = 1\% .$$

Расстояние до Луны (справочные данные) – $L = 4 \cdot 10^5$ км.

Относительная погрешность измерения расстояния до Луны:

$$\delta L = \frac{\Delta L}{L} \cdot 100\% = \frac{5 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3} \cdot 100\% = 0{,}0012\%$$

ВЫВОД: Как видно второе измерение значительно точнее первого (приблизительно на три порядка).

Пример 4. Необходимо измерить ток I = 4 А. Имеются два амперметра: один класса точности 0,5 имеет верхний предел измерения 20 А, другой класса точности 1,5 имеет верхний предел измерения 5 А. Определите, у какого прибора меньше предел допускаемой основной относительной погрешности, и какой прибор лучше использовать для измерения тока I = 4 А.

Примечание. Формулы для определения класса точности рассматриваются в главе 8. Класс точности в данной задаче определяется по формуле:

$$\gamma = \frac{\Delta I}{I_m} \cdot 100\%,$$

где ΔI - абсолютная погрешность (предел допустимой основной погрешности);

γ - класс точности;

I_m - придел измерения.

Решение.

Пределы допускаемых основных погрешностей равны:
- при измерении тока амперметром класса 0,5

$$\Delta I_1 = \frac{\gamma I_{m1}}{100} = \frac{0,5 \cdot 20}{100} = 0,1A,$$

- при измерении амперметром класса 1,5

$$\Delta I_2 = \frac{\gamma I_{m2}}{100} = \frac{1,5 \cdot 5}{100} = 0,075A.$$

Так как абсолютная погрешность не может служить показателем качества, рассчитываем наибольшие относительные погрешности прибора по формуле (7.11):

- при измерении заданного тока амперметром класса 0,5

$$\delta_1 = \frac{\Delta I_1}{I} \cdot 100 = \frac{0,1}{4} \cdot 100 = 2,5\%,$$

- при измерении тока амперметром класса 1,5

$$\delta_1 = \frac{\Delta I_2}{I} \cdot 100 = \frac{0,075}{4} \cdot 100 = 1,9\%.$$

Прибор, имеющий меньшую относительную погрешность, дает лучший результат измерения. Следовательно, при измерении тока I = 4А лучше использовать прибор класса 1,5 с верхним пределом измерения 5А вместо прибора класса 0,5 с верхним пределом измерения 20А.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Амперметром со шкалой (0…50)А, имеющим относительную погрешность δI = 2%, измерены значения силы тока 0; 5; 10; 20; 25; 30; 40; 50 А. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графика.

Задача 2. Вольтметром со шкалой (0…50)В, имеющим приведенную погрешность γV= 2%, измерены значения напряжения 0; 5; 10; 20; 40; 50 В. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведённой погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблицы и графика.

Задача 3. Кислородомером со шкалой (0...25) % измерены следующие значения концентрации кислорода: 0; 5; 10; 12,5; 15; 20; 25%. Определить значения абсолютной и относительной погрешностей, если приведённая погрешность равна 2%. Результаты представить в виде таблицы и графика.

7.7. Аддитивные и мультипликативные погрешности.

При поверке или градуировке СИ получают ряд значений входной величины x_i и ряд соответствующих им значений выходной величины y_i. Если эти данные нанести на график с координатами x и y, то полученные точки разместятся в границах некоторой полосы (рис. 7.4).

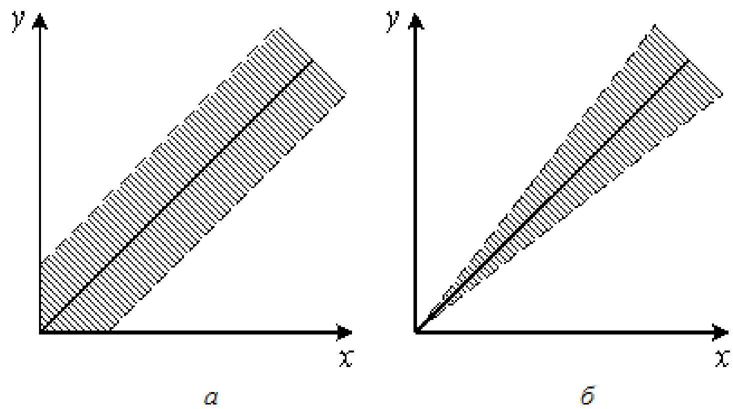

Рис. 7.4. Аддитивная и мультипликативная погрешности

В том случае, когда эти точки лежат в границах линий, параллельных друг другу (рисунок 7.4, а), т. е. абсолютная погрешность СИ во всем его диапазоне измерений ограничена постоянным (не зависящим от текущего значения x) пределом $\pm\Delta_0$, то такая погрешность называется *аддитивной,* т.е. получаемой путем сложения, или *погрешностью нуля.* Это понятие одинаково применимо как к случайным, так и к систематическим погрешностям.

Примерами систематических аддитивных погрешностей являются погрешности от постороннего груза на чашке весов, от неточной установки прибора на нуль перед измерением, от термоЭДС в цепях постоянного тока и т. п. Для устранения таких погрешностей во многих СИ предусмотрено механическое или электрическое устройство для установки нуля (корректор нуля).

Примерами случайных аддитивных погрешностей являются погрешность от наводки переменной ЭДС на вход прибора, погрешности от тепловых шумов, от трения в опорах подвижной части измерительного механизма, от ненадежного контакта при измерении сопротивления, погрешность от воздействия порога трогания приборов с ручным или автоматическим уравновешиванием и т. п.

Если же положение границ полосы погрешностей имеет вид (рисунок 7.4, б), т. е. ширина полосы возрастает пропорционально росту входной величины *x,* а при $x = 0$ равна нулю, то такая погрешность называется *мультипликативной,* т. е. получаемой путем умножения, или *погрешностью чувствительности* вне зависимости от того, является ли погрешность случайной или систематической. Причинами возникновения мультипликативных погрешностей могут быть: изменение коэффициента усиления усилителя, измерение жесткости мембраны датчика манометра или пружинки прибора, изменение опорного напряжения в цифровом вольтметре и т. д.

7.8. Грубые ошибки измерений или промахи

Промах (согласно РМГ-29-99) – погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. Иногда вместо термина «*промах*» применяется термин «*грубая погрешность измерений*» или «выброс».

Грубые ошибки (промахи) являются результатом неисправности средств измерения или резкими изменениями условий измерений или следствие неправильных действий эксперимента.

Типовыми причинами появления промахов являются неправильное считывание показаний, ошибки записи результатов, неисправность средств измерения, сбои в работе, кратковременные значительные изменения питающих напряжений и др.

Одним из условий правомерности статистической обработки выборки является требование ее однородности, т.е. принадлежности всех ее членов к одной и той же генеральной совокупности. Ясно, что совместно обрабатывать данные, принадлежащие двум совершенно различным генеральным совокупностям, бессмысленно. Однако дать формальное определение «чужим» отсчетам, т.е. перечислить объективные признаки, по которым их можно было бы достоверно отличать от «нужных» отсчетов, практически невозможно.

Если измерения и их последующая обработка проводятся одним и тем же человеком, то для исключения из выборки «неподходящих» отсчетов он может воспользоваться своими воспоминаниями о каких-либо нарушениях условий эксперимента в момент получения этих отсчетов, положиться на свою интуицию и т. п.

Но в тех случаях, когда обработка, а, возможно, и сам эксперимент проводятся ЭВМ без участия оператора, формальные методы исключения «чужих» для данной выборки отсчетов приобретают первостепенное значение.

Грубые погрешности измерений (промахи) могут сильно исказить $\bar{x}$, σ и доверительный интервал, поэтому обязательно их исключение из серии измерений. Обычно они сразу видны в ряду полученных результатов, но в каждом конкретном случае это необходимо доказать.

При однократных измерениях обнаружить промах не представляется возможным. Для уменьшения вероятности появления промахов измерения проводят два-три раза и за результат принимают среднее арифметическое полученных отсчетов. При многократных измерениях для обнаружения промахов используют статистические критерии, предварительно определив, какому виду распределения соответствует результат измерений.

7.9. Выбор критерия проверки результата на наличие промаха.

Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения x, не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат наблюдений рассматривают как содержащий грубую погрешность и его исключают.

Для выявления грубых погрешностей задаются уровнем значимости α того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений.

Существует много критериев выявления и отбрасывания промахов, но ни один из них не является универсальным. Выбор критерия зависит от цели измерений, но решение отбросить какие-то данные, в конечном счете, всегда субъективно.

7.9.1. Критерий 3σ.

Простейший из таких методов заключается в использовании «правила 3σ», когда по выборке с удаленными отсчетами, похожими на промахи, вычисляется оценка σ и граница цензурирования назначается в виде $|X_{гр}| = 3\sigma$, а все $|x_i| \geq 3\sigma$ признаются промахами и удаляются из дальнейших расчетов. Данный критерий надежен при числе измерений $n > 20 \div 50$.

Последовательность проверки следующая:

- Измеряем *n* раз числовые значения требуемой физической величины (x_i).
- Вычисляем среднее арифметическое значение физической величины ($\bar{x}$).
- Определяем среднее квадратичное отклонение измерений (σ).
- Утраиваем это значение (3σ).
- Сравниваем с разностью между отдельным измерением (x_i) и средним арифметическим значением физической величины ($\bar{x}$), т.е. ($x_i - \bar{x}$).
- Если разности ($x_i - \bar{x}$) оказываются больше 3σ, то эти значения физической величины исключают из общего числа измерений (*n*).

Стоит отметить, что «правило 3σ» во многих случаях может оказаться слишком «жестким» и обычно рекомендуется учитывать объем выборки и σ определять без использования отсчетов, предполагаемых промахами, а границу цензурирования назначать в зависимости от объема выборки *n*:

при $6 < n \leq 100$ $\quad |X_{гр}| = 4\sigma$;
при $100 < n \leq 1000$ $\quad |X_{гр}| = 4{,}5\sigma$;
при $1000 < n \leq 10000$ $\quad |X_{гр}| = 5\sigma$.

7.9.2. Критерий Романовского

Если $n < 20$, целесообразно применять критерий Романовского. При этом вычисляют отношение

$$\left|\frac{\bar{x} - x_i}{\sigma}\right| = \beta, \tag{7.13}$$

и вычисленное значение β сравнивают с теоретическим $\beta_{кр}$ - при выбираемом уровне вероятности *P* (Приложение 2, таблица 7). Причем среднее значение и среднеквадратическое отклонение рассчитываем без учета сомнительного результата измерений.

Обычно выбирают $P = 0{,}95 \div 0{,}99$, и если $\beta \geq \beta_{кр}$, то результат отбрасывают.

Пример 1. При диагностировании топливной системы автомобиля результаты пяти измерений расхода топлива составили 22, 24, 26, 28 и 48 л/100 км. Последний результат ставим под сомнение.

Решение.

В этом случае рассчитывают средний расход топлива на 100 км и соответствующее СКО

$$\bar{x} = \frac{22+24+26+28}{4} = 25\text{л}/100\text{км};$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3^2+1^2+(-1)^2+(-3)^2}{4-1}} = 2{,}6\text{л}/100\text{км}.$$

Поскольку n < 20, то по критерию Романовского при P = 0,99 и $n = 4$ определяем $\beta_{кр} = 1{,}73$, сравниваем с расчетным

$$\beta = \frac{|25-48|}{2{,}6} = 8{,}85 > 1{,}73.$$

Критерий свидетельствует о необходимости отбрасывания последнего результата.

7.9.3. Критерий Шовине

Если число измерений невелико (до 10), то можно использовать *критерий Шовине*. Из полученного ряда, содержащего n отсчетов, выбирается аномальный отсчет x_i и вычисляется модуль его отклонения от среднего значения в долях выборочного среднего квадратического отклонения:

$$Z = \frac{|\bar{x} - x_i|}{\sigma}, \tag{7.14}$$

Затем вычислить ожидаемое число M отсчетов, среди которых будет хотя бы один аномальный. Связь между M и Z приведена в (Приложение 2, таблица 8). Если $M > n$, то отсчет x_i считается промахом.

Пример 2. Измерение силы тока дало следующие результаты: 10,07; 10,08; 10,10; 10,12; 10,13; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,40 А. Не является ли промахом значение 10,40 А?

Решение.

Обработка данных приводит к значениям: $\bar{x}$ = 10,16А; σ = 0,094А.

По критерию Шовине $Z = \frac{|10{,}16 - 10{,}40|}{0{,}094} = 2{,}55$. По таблице (Приложение 2, таблица 8) получаем, что данное отклонение Z = 2,55 не может считаться промахом при M = 45 числа измерений $M > n$. Поэтому результат 10,40 является промахом.

7.9.4. Вариационный критерий Диксона

Вариационный критерий Диксона удобный и достаточно мощный (с малыми вероятностями ошибок). При его применении полученные результаты наблюдений записывают в вариационный возрастающий ряд $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). Критерий Диксона определяется как

$$K_Д = (x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_1). \tag{7.15}$$

Критическая область для этого критерия $P(K_Д > Z_\alpha) = \alpha$. Значения Z_α (Приложение 2, таблица 9).

Пример 3. Было проведено пять измерений напряжения в электросети. Получены следующие данные: 127,1; 127,2; 126,9; 127,6; 127,2 В. Результат 127,6 В существенно (на первый взгляд) отличается от остальных. Проверить, не является ли он промахом.

Решение.

Составим вариационный ряд из результатов измерений напряжения в электросети: 126,9; 127,1; 127,2; 127,2; 127,6 В. Для крайнего члена этого ряда (127,6 В) критерий Диксона (7.15)

$$K_Д = (127{,}6 - 127{,}2) / (127{,}6 - 126{,}9) = 0{,}4 / 0{,}7 = 0{,}57.$$

Как следует из (Приложение 2, таблица 9), по этому критерию результат 127,6 В может быть отброшен как промах лишь на уровне значимости α = 0,10.

7.9.5. Критерий Груббса-Смирнова

Выделить промахи из результатов измерения можно с помощью критерия Груббса-Смирнова или, что одно и тоже, по величине максимального отклонения.

Порядок проверки с помощью этого критерия следующий:

1) Среди элементов выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выделить минимальное $x_{\min}$ и максимальное $x_{\max}$ значения.
2) Рассчитать среднее значение $\bar{X}$ и исправленную дисперсию S^2.

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2},$$

3) Вычислить значения V_1 и V_2, соответствующие выборочным данным

$$V_1=\frac{x_{\max}-\overline{x}}{S},\ V_2=\frac{\overline{x}-x_{\min}}{S}, \tag{7.16}$$

где $\bar{x}$ - среднее значение результатов измерения,

S - среднее квадратическое отклонение.

4) По распределению Груббса-Смирнова найти граничное значение критерия $\beta_{гр}$ по уровню значимости $\alpha=1-P$ и объему выборки n. Значение критерия $\beta_{гр}$ находим в приложении 2, таблица 10.

5) Проверить выполнение неравенств

$$V_1<\beta_{гр}, \tag{7.17}$$

$$V_2<\beta_{гр}. \tag{7.18}$$

6) Если неравенства (7.17) и (7.8) выполняются, то нет основания считать минимальное и максимальное значения резко выделяющимися наблюдениями. Если не выполняется неравенство (7.17), то x_{max} нужно исключить из дальнейшего рассмотрения, если не выполняется неравенство (7.18), то нужно исключить x_{min}.

Пример 4. При многократном измерении напряжения электрического тока с помощью цифрового вольтметра получены значения в В: 10,38;10,37; 10,39; 10,38; 10,39; 10,44; 10,41; 10,5; 10,45; 10,39; 11,1; 10,45. Проверить полученные результаты измерений на наличие грубой погрешности с помощью критерия Груббса-Смирнова с вероятностью P= 0,95.

Решение.

1. Находится среднее арифметическое значение

$$\overline{U}=\frac{10{,}38+10{,}37+10{,}39+10{,}38+10{,}39+10{,}44+10{,}41+10{,}5+10{,}45+10{,}39+11{,}1+10{,}45}{12}=$$
$$=10.47B$$

2. Рассчитывается среднее квадратическое отклонение S_u данного ряда

$$S_u = \sqrt{\frac{1}{12-1}\sum_{i=1}^{12}\left(u_i - \overline{u}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{0.09^2 + 0.1^2 + 0.08^2 + 0.09^2 + 0.08^2 + 0.03^2 + 0.06^2 + 0.03^2 + 0.02^2 + 0.08^2 + 0.63^2 + 0.02^2}{11}}$$

$$S_u = 0.2\,.$$

Применение рассмотренных критериев требует осмотрительности и учета объективных условий измерений. Конечно, оператор должен исключить результат наблюдения с явной грубой погрешностью и выполнить новое измерение. Но он не имеет права отбрасывать более или менее резко отличающиеся от других результаты наблюдений. В сомнительных случаях лучше сделать дополнительные измерения (не взамен сомнительных, а кроме них) и затем привлекать на помощь рассмотренные выше статистические критерии.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. При измерении температуры получены значения в °С 21,2; 20, 1; 20,2; 20,3; 19,8; 20; 20,4; 20,3; 20,2; 20,0. Запишите среднее значение температуры после исключения грубых промахов по критерию Шовине при Р=0,90.

Задача 2. При десятикратном измерении тока получен ряд ее значений в мА. Результат измерений: 27,61; 29,81; 28,02; 28,22; 28,91; 27,04; 27,63; 27,11; 28,11; 28,28. Доверительная вероятность P = 0.950. Исключить промах по критерию «3σ».

Задача 3. При измерении силы электрического тока получены следующие значения (мА): 1,16; 1,15; 1,19; 1,17; 1,18; 1,14; 3,08; 1,13. Предварительно устранив значения, содержащие грубые погрешности, определить, оцените значение физической величины (I). Для исключения промахов использовать критерий Грубсса-Смирнова

7.10. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение следующих терминов:
   a) измерение, единство измерений;
   b) физическая величина, единица измерения физической величины;

c) погрешность, абсолютная погрешность, относительная погрешность, приведённая погрешность.

2. Виды измерения: прямые, косвенные, совместные и совокупные. Дайте определения.

3. Поясните на примере, как определяется абсолютная, относительная и приведённая погрешность средства измерения.

4. Что называется «нормирующим значением»? Поясните на примере, как находится нормирующее значение, в случае если шкала средства измерения содержит нулевую отметку, не содержит нулевую отметку.

5. Чем отличаются понятия: «погрешность средства измерения» и «погрешность результата»?

6. Что такое инструментальные и методические погрешности?

7. Что такое основная и дополнительная погрешности? Чем нормальные условия отличаются от рабочих?

8. Что такое систематические и случайные погрешности?

9. Что такое промахи? Перечислите и опишите критерии для исключения промахов.

Глава 8. Нормирования погрешностей средств измерений

Для проведения измерительного эксперимента используются различные средства измерения. С*редство измерения (РМГ 29-99)* определяется как техническое средство, используемое для измерения и имеющее нормированные метрологические характеристики. В первую очередь у средства измерения нормируется инструментальная погрешность.

Различные СИ (измерительные приборы и преобразователи, датчики, каналы ИИС и ИВК) обладают погрешностями, характер проявления которых может существенно различаться: у одних погрешность практически аддитивная, у других – погрешность имеет и аддитивную, и мультипликативную составляющие, у третьих зависимость погрешности от измеряемой величины оказывается еще более сложной. У каждого конкретного СИ имеется случайная и систематическая составляющие погрешности, причем их соотношение также может быть различным. Кроме того, условия работы даже однотипных СИ могут быть различными.

Для того чтобы ориентироваться в метрологических свойствах конкретного СИ, чтобы заранее оценить погрешность, которую внесет данное СИ в конкретный результат, пользуются так называемыми *нормированными* значениями погрешности. Под нормированным значением понимаются погрешности, являющиеся предельными для данного типа СИ. При этом как систематическая, так и случайная составляющие погрешности отдельных экземпляров СИ одного и того же типа могут различаться, однако в целом для этого типа СИ погрешности не превосходят гарантированного значения. Таким образом, нормируется основная и дополнительная погрешности. Именно эти границы основной погрешности, а также коэффициентов влияния и заносятся в паспорт каждого экземпляра СИ.

Правила, согласно которым назначаются эти границы, значения погрешностей и форма записи, иными словами вся процедура нормирования погрешности средств измерений, основываются на системе стандартов, обеспечивающих единство измерений.

8.1. Нормирование метрологических характеристик средств измерения.

ГОСТ 8.009-84 «Нормируемые метрологические характеристики средства измерения» устанавливает комплекс метрологических характеристик, которые должны быть известны при выпуске СИ. Комплекс нормируемых характеристик должен быть полным и позволять производить расчет погрешностей СИ не только в нормальных условиях, но и в реальных условиях эксплуатации.

Метрологическая характеристика (МХ) – это характеристика одного из свойств средства измерений, влияющая на результат измерений и на его погрешность.

Метрологические характеристики средств измерений необходимо учитывать:

- для определения результатов измерений и расчетной оценки характеристик инструментальной составляющей погрешности измерений;
- для расчета МХ каналов измерительных систем, состоящих из средств измерений с нормированными МХ;
- для оптимального выбора средств измерений.

Так же МХ используются в качестве контролируемых характеристик при контроле средств измерений на соответствие установленным нормам.

Стандарт предлагает следующую номенклатуру метрологических характеристик:

1. Характеристики, предназначенные для определения результатов измерений (без введения поправки)

- Функция преобразования измерительного преобразователя, (измерительного прибора) с неименованной шкалой или со шкалой, отградуированной в единицах, отличных от единиц входной величины, - $f(x)$.
- Цена деления шкалы измерительного прибора или многозначной меры.
- Вид выходного кода, число разрядов кода, цена единицы наименьшего разряда кода средств измерений, предназначенных для выдачи результатов в цифровом коде.

2. Характеристики погрешностей средств измерений

- Характеристики систематической составляющей погрешности средств измерений;
- Характеристики случайной составляющей погрешности средств измерений;
- Характеристики случайной составляющей $\overset{0}{\Delta}$ Н погрешности от гистерезиса – вариация Н выходного сигнала (показания) средства измерений и т. д.

3. Характеристики чувствительности средств измерений к влияющим величинам.

4. Динамические характеристики СИ.

5. Характеристики средств измерений, отражающие их способность влиять на инструментальную составляющую погрешности измерений вследствие взаимодействия средств измерений с любым из подключенных к их входу или выходу компонентов (таких как объект измерений, средство измерений и т.п.).

6. Неинформативные параметры выходного сигнала средства измерений.

Метрологические характеристики могут нормироваться как номинальные характеристики средств измерения данного типа либо для конкретного экземпляра средства измерения.

Характеристики погрешностей средств измерения нормируются путем установления:

- пределов (положительного и отрицательного) погрешности средства измерения данного типа,
- предела погрешности, математического ожидания и среднеквадратического отклонения погрешности средства измерения данного типа,
- предела допустимого среднеквадратического отклонения погрешности
- некоторыми другими способами.

Функция влияния нормируется путем установления номинальной функции влияния и пределов ее допустимого отклонения или граничных функций влияния (верхней и нижней).

Метрологические характеристики могут быть представлены в виде формул, таблиц, графиков или численных значения в единицах измеряемой величины или в процентах нормирующего значения

Все необходимые МХ приводятся в технической документации средства измерения

8.2. Класс точности средств измерений.

Второй подход к нормированию погрешностей СИ заключается в установлении для конкретного средства измерений класса точности.

Класс точности средств измерений – это обобщенная характеристика данного типа средств измерений, отражающая уровень точности, выражаемая пределами допускаемых основной и дополнительных погрешностей, а также другими характеристиками, влияющими на точность (РМГ 29-99).

Класс точности дает возможность судить о том, в каких пределах находится погрешность средства измерений одного типа, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполняемых с помощью каждого из этих средств. Это важно при выборе средств измерений в зависимости от заданной точности измерений. Класс точности средств измерений конкретного типа устанавливают в стандартах технических требований (условий) или в других нормативных документах

При установлении класса точности нет деления на погрешность систематическую и случайную. Оба вида погрешностей нормируются в виде предела основной и дополнительной погрешности. ГОСТ 8.401-80 не устанавливает классы точности СИ, для которых предусмотрены нормы отдельно для систематической и случайной составляющих погрешностей, а так же если необходимо учитывать их динамические характеристики. Классы точности устанавливаются в тех случаях, когда погрешности СИ могут быть выражены числом или сравнительно простой формулой.

Нормирование погрешностей СИ с помощью класса точности имеет существенные недостатки, сводящиеся к тому, что погрешности СИ имеющие разное происхождение оцениваются суммарно в виде одного числа. При этом невозможно определить, какова величина систематической составляющей погрешности СИ, и какова, величина случайной составляющей погрешности.

Другим недостатком является то, что погрешность в большинстве случаев оказывается завышенной. Если выпущена партия СИ, то далеко не все из них будут иметь предельное значение погрешности, установленное классом точности, однако при расчетах придется пользоваться предельным значением погрешности, соответствующим его классу точности.

Наконец, следует отметить еще один недостаток нормирования погрешности СИ с помощью класса точности. В настоящее время требования к допустимым отклонениям характеристик каналов связи является настолько высокими, что рабочие СИ (особенно ранних выпусков, но находящиеся в эксплуатации) не удовлетворяют потребностей практики. В этом случае приходится прибегать к специальным мерам, позволяющим уменьшать величины отдельных составляющих погрешности. Однако при использовании классов точности величины отдельных составляющих не известны и эффект, получаемый в этом случае, не может быть оценен.

Несмотря на недостатки, оценка погрешностей СИ на основе класса точности, является достаточно распространенной применительно к электроизмерительным СИ и ее целесообразно рассмотреть подробно.

Основные способы установления пределов допускаемых погрешностей и обозначения классов точности средств измерений установлены

ГОСТ 8.401 – 80. Основная погрешность СИ нормируется четырьмя различными способами. Чтобы четко уяснить себе эти различия и грамотно использовать нормируемые значения при расчете погрешностей результатов измерения, необходимо рассмотреть характер изменения относительной и абсолютной погрешности СИ в диапазоне значений измеряемой величины и обусловленные этим положения стандартов, регламентирующих нормирование погрешностей средств измерений.

Согласно ГОСТ 8.401 – 80 для указания нормированных значений погрешности измерений не могут использоваться произвольные числа. Выраженные в процентах, они могут иметь значения 6 – 4 – 2,5 – 1,5 – 1,0 – 0,5 – 0,2 – 0,1 – 0,05 – 0,02 – 0,01 – 0,005 – 0,002 – 0,001 и т. д. Значение класса точности прибора маркируется на его шкале. Для того чтобы различить, какая из погрешностей обозначена в качестве класса точности, используются специальные условные обозначения.

Основное различие в способах установления класса точности обусловлено разным соотношением аддитивной и мультипликативной составляющих в погрешности тех или иных СИ.

При чисто мультипликативной полосе погрешностей СИ (рисунок 7.4, б) абсолютная погрешность Δx возрастает прямо пропорционально текущему значению x измеряемой величина. Поэтому *относительная* погрешность, т.е. погрешность *чувствительности* такого преобразователя, $\delta = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$ (7.11) оказывается постоянной величиной при любом значении x и ее удобно использовать для нормирования погрешностей преобразователя и указания его класса точности.

Таким способом нормируются погрешности масштабных преобразователей (делителей напряжения, шунтов, измерительных трансформаторов тока и напряжения и т.п.). Класс точности прибора указан в виде одного числа δ, заключенного в кружок. Например, 1,5 обозначает, что δ =1,5%.

Граница относительная погрешность результата (в процентах) $\delta(x) = \delta$, а абсолютная его погрешность

$$\Delta x = \frac{\delta \cdot x}{100}. \tag{8.1}$$

Однако реально таких преобразователей не существует, так как невозможно создать преобразователь, полностью лишенный аддитивных погрешностей. Эти погрешности от шума, дрейфа, трения, наводок, вибраций и т.п. неизбежны в любых типах СИ. Поэтому для реальных СИ, погрешность которых нормируется лишь одним числом – погрешностью чувствительности δ_m, – всегда указываются границы рабочего диапазона, в которых такая оценка остается приближенно справедливой.

Пример 1. Провели измерение электрического сопротивления омметром класса точности $\delta_R = 1{,}0$. Показания омметра равны $R = 7{,}35 Ом$. Необходимо представить результат измерения.

<u>*Решение.*</u>

В соответствии с формулой 7.11

$$\delta_R = \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\%,$$

откуда границы абсолютной погрешности измерения равны (8.1)

$$\Delta R = \delta_R \frac{1}{100} = 1{,}0 \cdot 7{,}35 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}0735 \cong 0{,}07 \text{ Ом}.$$

Результат измерения

$$R = 7{,}35 \pm 0{,}07 \text{ Ом}.$$

с доверительной вероятностью *P*, использованной при определении класса точности омметра.

При чисто аддитивной полосе погрешностей (рисунок 7.4, *а)* остается неизменной для любых значений *x* граница абсолютной погрешности нуля $\Delta x = \Delta_0 = const$. Но нормировать абсолютное значение Δ_0 неудобно, так как для многопредельных приборов оно будет различным для каждого поддиапазона и в паспорте прибора пришлось бы перечислять эти значения для всех поддиапазонов.

Поэтому нормируют не абсолютное Δ_0, а приведенное значение этой погрешности: $\gamma_{пр} = \frac{\Delta x}{X_m} \cdot 100\%$ (7.12)

Класс точности прибора в этом случае указан одним числом γ (без кружка). Тогда абсолютная погрешность результата измерения

$$\Delta x = \frac{\gamma \cdot X_N}{100}, \qquad (8.2)$$

а относительная погрешность измерения (в процентах) находится по формуле

$$\gamma(x)=\frac{\Delta x}{x}=\gamma\frac{X_N}{x}, \qquad (8.3)$$

т. е. в этом случае при измерении, кроме отсчета измеряемой величины *x,* обязательно должен быть зафиксирован и предел измерений X_N, (или другое нормирующее значение) иначе впоследствии нельзя будет вычислить погрешность результата.

При уменьшении измеряемой величины *x* до значения абсолютной погрешности нуля Δ относительная погрешность результата измерения достигает $\gamma(x)=\Delta/x=\Delta/\Delta=1=100\%$. Такое значение измеряемой величины, когда $x=\Delta$ и $\gamma(x)=100\%$, называется *порогом чувствительности* СИ.

Отсюда *полный диапазон* $D_П$ измеряемых величин для любого преобразователя ограничивается снизу порогом чувствительности, а сверху – пределом измерений (рис. 8.1). Так как в области малых значений *x* погрешность измерений очень велика, то *рабочий диапазон* $D_П$ ограничивают снизу таким значением *x,* где относительная погрешность измерений $\gamma(x)$ не превосходит еще некоторого заранее заданного значения $\gamma_з$, равного, например, 4, 10 или 20%. В начальной части шкалы измерения недопустимы, в чем и заключается отрицательное влияние аддитивной погрешности, не позволяющее использовать один и тот же преобразователь для измерения как больших, так и малых измеряемых величин.

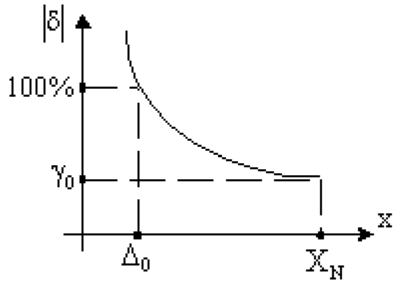

Рис. 8.1. Рабочий диапазона средства измерения

Пример 3. Провели измерение электрического напряжения вольтметром класса точности $\gamma_{кл}=1{,}5$. Показания вольтметра 735,1 В. Верхний предел измерения вольтметра 1000 В. Представить результат измерения.

Решение.

В соответствии с формулой (8.2)

$$\Delta U_m = \frac{1}{100} 1000 \cdot 1{,}5 = 15 \text{ В}.$$

Результат измерения с учётом правил округления

$$U_д = 735 \pm 15 \text{ В}$$

При одновременном присутствии аддитивной и мультипликативной составляющих полоса погрешностей имеет трапецеидальную форму*,* а текущее значение абсолютной погрешности *Δ(x)* в функции измеряемой величины x описывается соотношением

$$\Delta(x) = \Delta + \gamma x \tag{8.4}$$

где Δ – аддитивная,

γx – мультипликативная составляющая абсолютной погрешности.

Если все члены уравнения (8.4) разделить на предел измерений X_N, то для приведенного значения погрешности получим

$$\delta x = \frac{\Delta x}{X_N} = \frac{\Delta}{X_N} + \gamma \frac{x}{X_N} = c + d\left(\frac{X_N}{x} - 1\right) \tag{8.5}$$

Трапецеидальную форму полосы погрешностей имеют высокоточные потенциометры постоянного тока, цифровые вольтметры и другие высокоточные приборы. Формальным отличительным признаком для них является то, что их класс точности согласно ГОСТ 8.401—80 обозначается не одним, а двумя числами, записываемыми через косую черту, т.е. в виде условной дроби *c/d*. В этом случае удобнее вычислить относительную погрешность результата по формуле

$$\delta(x) = c + d\left(\frac{X_N}{x} - 1\right), \tag{8.6}$$

а уже затем найти абсолютную погрешность (8.1) $\Delta x = \frac{\delta \cdot x}{100}$.

Пример 4. Выполнены измерения электрического тока амперметром класса точности $c/d = 2{,}0/1{,}0$. Показания амперметра $I = 5{,}00A$. Верхний предел измерения амперметра $I_m = 10\ A$. Требуется представить результат измерения.

<u>*Решение.*</u>

В соответствии с формулами (8.1) и (8.6) границы абсолютной погрешности измерения тока равны.

$$\Delta I = \frac{I}{100}\left\{2{,}0 + 1{,}0\left(\frac{10}{5{,}00} - 1\right)\right\} = 0{,}05\left(2{,}0 + 1{,}0\right) = 0{,}15\ A.$$

Результат измерения $I_{\partial} = 5{,}00 \pm 0{,}15\ A$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Провели измерение напряжения вольтметром с классом точности $\delta_{кл} = 1{,}0$, показания вольтметра равны 5,00В. Представить результат измерения.

Задача 2. Провели измерение электрического напряжения вольтметром, у которого класс точности нормирован аддитивной погрешностью $\gamma_{кл} = 1{,}0$. Верхний предел измерения $U_m = 10\text{В}$, показания вольтметра $U_и = 5{,}00\text{В}$. Представить результат измерения.

Задача 3. Рассмотрим представление результата измерения электрического тока амперметром, класс точности которого задан коэффициентами *c/d* = 2,0/1,0. Предел измерения амперметра 10А, показания амперметра 4,53А. Представить результат измерения.

8.3. Правила округления значений погрешности и результата измерений

Рассчитывая значения погрешности, получают цифры с большим числом знаков. Однако исходными данными для расчета являются нормируемые значения погрешности СИ, которые указываются всего с одной или двумя значащими цифрами. Вследствие этого и в окончательном значении рассчитанной погрешности должны быть оставлены только первые одна-две значащие цифры. При этом приходится учитывать следующее. Если полученное число начинается с цифр 1 или 2, то отбрасывание второго знака приводит к очень большой ошибке (до 30—50%), что недопустимо. Если же полученное число начинается, например, с цифры 9, то сохранение второго знака, т.е. указание погрешности, например, 0,94 вместо 0,9, является дезинформацией, так как исходные данные не обеспечивают такой точности.

Исходя из этого, на практике установилось такое правило: если полученное число начинается с цифры, равной или большей $\sqrt{10} \approx 3$, то в нем сохраняется лишь один знак; если же оно начинается с цифр, меньших 3, т.е. с цифр 1 и 2, то в нем сохраняют два знака. В соответствии с этим правилом установлены и нормируемые значения погрешностей средств измерений: в числах 1,5 и 2,5% указываются два знака, но в числах 0,5; 4; 6% указывается лишь один знак.

В итоге можно сформулировать три правила округления рассчитанного значения погрешности и полученного экспериментального результата измерения.

1. Погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной, – если первая есть 3 и более.

2. Результат измерения округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности.

3. Округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним-двумя лишними знаками.

Пример 1. На вольтметре класса точности 2,5 с пределом измерений 300В был получен отсчет измеряемого напряжения x = 267,5В. Найти абсолютную, относительную погрешности. Представить результат измерения.

Решение.

Так как класс точности нормирован по аддитивной погрешности, то абсолютная погрешность рассчитывается по формуле (8.2)

$$\Delta = \frac{\gamma \cdot X}{100} = \frac{2,5 \cdot 300}{100} = 7,5B.$$

Относительная погрешность рассчитывается по формуле (8.3)

$$\gamma(x) = \frac{\Delta}{x} \cdot 100 = \frac{7,5}{267,5} = 2,81\% \approx 2,8\%.$$

Так как первая значащая цифра значения абсолютной погрешности (7,5 В) больше трех, то это значение должно быть округлено по обычным правилам округления до 8 В, в значении относительной погрешности (2,81%) первая значащая цифра меньше 3, поэтому здесь должны быть сохранены в ответе два десятичных разряда и указано $\gamma(x) = 2{,}8\%$. Полученное значение x = 267,5 В должно быть округлено до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности, т.е. до целых единиц вольт.

Таким образом, в окончательном ответе должно быть сообщено: «Измерение произведено с относительной погрешностью $\gamma(x) = 2{,}8\%$. Измеренное напряжение $x = (268 \pm 8)$ В или $x = 268\,\text{В} \pm 8\,\text{В}$.

При этом более наглядно указать пределы интервала неопределенности измеренной величины в виде $x = 260 \div 276B$ или $260B < x < 276B$.

Пример 2: Показание прибора - 5,361В, вычисленное значение абсолютной погрешности - ± 0,264В;

<u>*Решение*</u>.

Форма представления результата измерения

$$X = X_и + \Delta$$

Округленное значение абсолютной погрешности - Δ = ± 0,26 В.

Тогда результат измерения примет вид

$$5{,}36 \pm 0{,}26 \text{ В.}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Представить результат измерения в соответствии с правилами округления, при необходимости использовать приставки СИ.

1.	123357±678 А/м.
2.	123357±678 В.
3.	237,46±0,13 мм
4.	0,00283±0,00034 кг.
5.	1,045±0,000003 с.
6.	359623±307 с.
7.	0,000000047±0,0000000098 м.
8.	$67.89\cdot10^{-7}+49{,}3\cdot10^{-8}$ А
9.	589±0,69 Н.
10.	589±10,078 Н.

8.4. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое метрологические характеристики средств измерения, приведите примеры.

2. Что такое класс точности? Приведите способы обозначения класса точности согласно ГОСТ 8.401-80.

3. Представьте результаты измерения, полученные от средства измерения с классом точности, определенным по мультипликативной погрешности.

4. Представьте результаты измерения, полученные от средства измерения с классом точности, определенным по аддитивной погрешности.

5. Представьте результаты измерения, полученные от средства измерения с классом точности, определенным по мультипликативной и аддитивной погрешностям.

6. По каким правилам осуществляется округления погрешностей и результатов измерения.

Глава 9. Обработка результатов измерения

Непосредственной целью измерений является определение истинных значений постоянной или изменяющейся измеряемой величины. Результат измерений является реализацией случайной величины, равной сумме истинного значения измеряемой величины и погрешности измерений.

9.1. Обработка прямых измерений

Прямыми измерениями называют такие измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно по показаниям измерительного прибора, например, напряжение – по показаниям вольтметра, температуру - по показаниям термометра.

9.1.1. Прямые однократные измерения

Однократные измерения проводят тогда, когда случайная составляющая погрешности значительно меньше систематической погрешности средства измерения.

Регламентирующем документом является Р 50.2.038-2004 Рекомендации по метрологии «Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерений»

За результат однократного измерения $\tilde{\Theta}$ принимают значение величины, полученное при измерении.

Составляющие погрешности результата измерения должны быть известны до проведения измерения. Необходимо исключить известные систематические погрешности, т. е. внести соответствующие поправки.

Источниками погрешностей измерений могут быть:

1. Погрешность инструмента. Измерительный прибор невозможно изготовить абсолютно точно хотя бы потому, что при его настройке и градуировке приходится производить измерения, которые всегда отягощены погрешностями.

2. Погрешность метода измерений. Например, при взвешивании тела не учитывается выталкивающая сила воздуха, а она по-разному влияет на тела, обладающие различной плотностью.

3. Погрешности, связанные с физиологией наблюдателя. Например, отсчитывая показания по стрелочному прибору, наблюдатель смотрит правым глазом, а прибор расположен прямо перед ним.

4. Погрешности, связанные с особенностями объекта и зависимостью измеряемой величины от контролируемых окружающих условий. Например, измеряется диаметр детали на токарном станке, а деталь в результате обработки нагрелась и имеет температуру выше комнатной. Или, например, сильно шероховатая.

5. Погрешности, связанные с влиянием неконтролируемых внешних условий. Например, при взвешивании тела на аналитических весах это потоки воздуха, электрические поля, пылинки, садящиеся на взвешиваемое тело и гири.

Выполнение однократных измерений обосновано следующими факторами:

- производственная необходимость (разрушение образца, невозможность повторения измерения, экономическая целесообразность и т.д.);
- возможность пренебрежения случайными погрешностями;
- случайные погрешности существенны, но доверительная граница погрешности результата измерения не превышает допускаемой погрешности измерений;

Погрешность результата однократного измерения чаще всего представлена НСП (неучтенная систематическая погрешность).

При наличии нескольких НСП, заданных своими границами $\pm\Delta_i$, доверительную границу НСП результата измерения Δ_Σ (без учета знака) вычисляют по формуле

$$\Delta_\Sigma = k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^{2}}, \tag{9.1}$$

где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью и числом т составляющих Δ_i.

При доверительной вероятности $P = 0{,}95$ поправочный коэффициент k принимают равным 1,1.

При доверительной вероятности $P = 0{,}99$ поправочный коэффициент k принимают равным 1,45, если число суммируемых составляющих $m > 4$. Если же число составляющих равно четырем $(m = 4)$, то поправочный коэффициент $k \approx 1{,}4$; при $m = 3k \approx 1{,}3$; при $m = 2k \approx 1{,}2$. Более точное значение k определяют по графику $[k = f(m,1)]$ в соответствии с требованиями ГОСТ 8.207-76.

Форма представления результатов однократных измерений должна соответствовать МИ 1317-2004.

При симметричной доверительной погрешности результат однократного измерения представляют в форме

$$\overline{X} \pm \Delta X, \text{ при } P. \tag{9.2}$$

Значение результата измерения должно оканчиваться цифрами того же разряда, что и значение погрешности.

Пример 1. Однократное измерение напряжения на участке электрической цепи сопротивлением R = 4 Ом.

Участок электрической цепи представляет собой соединение нескольких резисторов, имеющих стабильное сопротивление. Ток в цепи - постоянный. Измерение выполняют в сухом отапливаемом помещении температурой до 30°С при магнитном поле до 400 А/м. Результат измерения U = 0,9 В

Для измерения выбирают вольтметр класса точности 0,5 (приведенная погрешность γ = 0,5%) с верхним пределом диапазона измерений $U_{пр}$ = 1,5 В и внутренним сопротивлением R_V = 1000 Ом. Вольтметр имеет магнитный экран.

Решение.

1. Инструментальная составляющая погрешности определяется основной и дополнительной погрешностями.

Основная погрешность прибора указана в приведенной форме. Следовательно, предел допускаемой основной погрешности вольтметра

$$\Delta_{осн} = \frac{\gamma \cdot U_m}{100} = \frac{0,5 \cdot 1,5}{100} = 0,0075B$$

Дополнительная погрешность из-за влияния магнитного поля не превышает $\Psi_м$ = 1,5 % нормирующего значения прибора и равна

$$\Delta_{доп.м} = \Psi_м \cdot U_m = 0,015 \cdot 1,5 = 0,0225B$$

Дополнительная температурная погрешность, обусловленная отклонением температуры от нормальной (20°С) на 10°С, не превышает Ψ_m = 60 % предела допускаемой основной погрешности, эта дополнительная погрешность равна

$$\Delta_{доп.t} = \Psi_t \cdot \Delta_{осн} = 0,6 \cdot 0,0075 = 0,0045B$$

2. Оценивание погрешности результата измерения.

Погрешность метода определяется соотношением между сопротивлением участка цепи R и сопротивлением вольтметра R_V. Сопротивление вольтметра известно: R_V = 1000 Ом. При подсоединении вольтметра к цепи исходное напряжение U_x изменяется на

$$U = U_x \frac{R}{R+R_V}$$

Отсюда методическая погрешность $\Delta_{\text{мет}}$ в абсолютной форме

$$\Delta_{\text{мет}} = -\frac{R}{R+R_V} U_x$$

Методическая погрешность $\delta_м$ в относительной форме

$$\delta_{\text{мет}} = -\frac{100R}{R+R_V} = \frac{4}{4+1000} = -0,4\%$$

Оцененная методическая погрешность является систематической составляющей погрешности измерений и должна быть внесена в результат измерения в виде поправки $\Delta_{\text{попр.}}$ = +0,004 В. Тогда результат измерения U с учетом поправки на систематическую погрешность

$$U = 0,90 + 0,004 = 0,904B.$$

Находим границы погрешности результата измерения.

Поскольку основная погрешность применяемого средства измерений и его дополнительные погрешности заданы границами, следует рассматривать эти погрешности как неисключенные систематические. Воспользовавшись формулой (9.1), находят доверительную границу неисключенной систематической погрешности результата измерения при доверительной вероятности P = 0,95:

$$\Delta_{\Sigma} = 1.1\sqrt{\Delta_{осн}{}^2 + \Delta_{доп.м}{}^2 + \Delta_{доп.t}{}^2} = 1,1\sqrt{0,0075^2 + 0,0225^2 + 0,0045^2} = 0,02655B$$

Результат измерения с учетом правил округления следует представить в форме

$$U = (0,904 \pm 0,027)B;\ P = 0,95.$$

9.1.2. Прямые многократные измерения

Если при проведении нескольких повторных измерений одной и той же физической величины $x_д$ в одинаковых условиях окажется, что результаты измерения (показания средства измерения) заметно различаются, то из этого следует вывод о присутствии в погрешности измерения случайной составляющей и о необходимости проводить многократные измерения с целью оценки значения случайной погрешности.

При наличии случайных погрешностей наблюдаемые значения измеряемой величины при многократных измерениях случайным образом рассеяны относительно ее истинного значения. В этом случае действительное значение находят как наиболее вероятное из серии отсчетов, а погрешность характеризуют шириной интервала, который с заданной вероятностью покрывает истинное значение.

Принято называть значение величины, полученное при отдельном наблюдении, *результатом наблюдения*, а среднее арифметическое группы результатов наблюдений – *результатом измерения*.

Прямые измерения с многократными наблюдениями – наиболее разработанная и изученная процедура обработки данных. Правила регламентированы стандартом (ГОСТ 8.207-76 «Прямые измерения с многократными наблюдениями») и содержат следующие операции:

1. Проведение измерений физической величины одним и тем же прибором. Представление в виде множеств показаний средства измерения $x_и = \{x_{и1} \cdots x_{иi} \cdots x_{иn}\}$.
2. Выявление и исключение грубых погрешностей (промахов).
3. Наилучшей оценкой истинного значения величины X является выборочное среднее значение $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, где x_i – результат измерения i-го X, n - число отсчетов.
4. Для оценки разброса отсчетов при измерении используется выборочное среднее квадратическое отклонение отсчетов

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

5. Выборочное среднее является случайной величиной и его разброс относительно истинного значения измеряемой величины оценивается выборочным средним квадратическим отклонением среднего значения

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{9.3}$$

Среднее квадратическое отклонение среднего из n отсчетов в $\sqrt{n}$ *раз меньше среднего квадратического отклонения одного отсчета*

6. Построение доверительных границ случайной составляющей погрешности результата измерения с принятой доверительной вероятностью P

$$\varepsilon = t\sigma_{\bar{x}} \tag{9.4}$$

где t **-** *безразмерный коэффициент доверия (коэффициент Стьюдента)*.

7. В зависимости от числа проведенных измерений n и для доверительной вероятности $P = 0{,}95$ из таблицы находим коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$ (Приложение 1, таблица 2). Напомним, *доверительной вероятностью (надежностью)* результата серии наблюдений называется вероятность P, с которой доверительный интервал включает истинное значение измеряемой величины.

При расчете случайной погрешности значение надежностью измерений, в зависимости от целей измерений и требований к ним принимают равной 0,9; 0,95; 0,96; 0,98; 0,99; 0,997; 0,999.

Чем больше доверительная вероятность, тем надежнее оценка интервала и, вместе с тем, шире его границы.

8. Полная погрешность Δ_Σ прямых измерений равна квадратичной сумме ее составляющих: инструментальной (или НСП) – $\Delta_и$ и случайной $\Delta_{сл}$

$$\Delta_\Sigma = \sqrt{\Delta_и^2 + \Delta_{сл}^2}. \tag{9.5}$$

9. Инструментальная погрешность измерительного прибора определяется по паспортным данным прибора (классу точности), с использованием уже известных формул (глава 8).

Инструментальная погрешность приборов для измерения линейных размеров может быть указана на самом приборе в виде абсолютной погрешности или в виде цены деления. Если на приборе не указан ни класс точности, ни абсолютная погрешность, то она принимается равной половине цены наименьшего деления.

Для приборов с цифровым отсчетом измеряемых величин метод вычисления погрешности приводится в паспортных данных прибора.

Если эти данные отсутствуют, то в качестве абсолютной погрешности принимается значение, равное половине последнего цифрового разряда индикатора.

Пример 1. Расчет погрешностей прямых многократных измерений.

С помощью секундомера проведено $n=3$ измерений 10 колебаний маятника. В результате получены экспериментальные данные:

$$t_1 = 15{,}3c;\ t_2 = 15{,}7c;\ t_3 = 15{,}4c.$$

Инструментальная погрешность секундомера $\Delta_{uc} = 0{,}2c$. Представить результат измерения.

Решение.

1. Рассчитываем среднее арифметическое значение:

$$\bar{t} = \frac{1}{3}(15{,}3 + 15{,}7 + 15{,}4) \approx 15{,}47c.$$

2. Находим оценку среднеквадратического отклонения результата измерения согласно формуле (9.3)

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(15{,}3-15{,}47)^2 + (15{,}7-15{,}47)^2 + (15{,}4-15{,}47)^2}{3(3-1)}} \approx 0{,}114c.$$

3. Из справочной таблицы для $n=3$ выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{0,95;3} = 4{,}30$.

4. Инструментальная погрешность секундомера дана в условии задачи $\Delta_{uc} = 0{,}2c$.

5. Определяем абсолютную погрешность измерения с учетом случайной и инструментальной погрешностей по формулам (9.4) и (9.5)

$$\Delta_t = \sqrt{(t_{0,95;3}\sigma)^2 + \Delta_{uc}^2} = \sqrt{(4{,}30\cdot 0{,}114)^2 + 0{,}2^2} \approx 0{,}529c.$$

6. Вычисляем относительную погрешность

$$\delta = \frac{\Delta_t}{\bar{t}}100\% = \frac{0{,}529}{15{,}47}100\% \approx 3{,}42\%.$$

7. Ограничиваем количество значащих цифр в погрешностях Δ_t и δ, а также в измеренном значении $\bar{t}$. Согласно правилам округления.

Окончательный результат измерения записываем в следующем виде:

$$t = (15{,}5 \pm 0{,}5)c; \qquad \delta = 3{,}4\%; \qquad P = 0{,}95.$$

9.2. Обработка косвенных измерений

При осуществлении косвенных измерений искомая физическая величина находится путем вычислений с использованием результатов прямых измерений других физических величин, функционально с ней связанных. Т.е. физическая величина z определяется функциональной зависимостью

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – непосредственно измеряемые величины или же величины, значения которых приводятся в справочных таблицах.

Обработка результатов косвенных измерений проводится в следующей последовательности:

1. Находим средние значения и погрешности (абсолютную и относительную) каждой из непосредственно измеренных величин: $x_1, x_2, ..., x_n$. Погрешности Δ_{x_i} и δ_{x_i} определяются из прямых измерений или же, как инструментальная погрешность прибора при доверительной вероятности P=0,95.

2. Находится значение z_{cp} искомой величины при средних арифметических значениях параметров

$$z_{cp} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$$

3. Погрешность искомой величины z_{cp} зависит от погрешностей непосредственно измеренных величин. Определение погрешности величины можно выполнить одним из двух способов.

Способ 1.

Вначале определяется абсолютная погрешность по формуле

$$\Delta z_{cp} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{\bar{x}_i} \right)^2}, \tag{9.6}$$

где $\Delta_{\overline{x_i}}$ – абсолютная погрешность величины. Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ вычисляются при $x_i = \overline{x_i}$.

Затем определяется относительная погрешность

$$\delta_{z_{cp}} = \frac{\Delta_{z_{cp}}}{z_{cp}} 100\% . \tag{9.7}$$

Приведенной формулой можно пользоваться при любом виде функции $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, однако она наиболее удобна, если независимые переменные или функции от них образуют сумму или разность. Например,

$$y = ax_1 + bx_2^3 + c\sin x_3 .$$

В случае, если переменные или функции от них образуют произведение или частное, удобнее пользоваться другой формулой (способ 2) для подсчета относительной погрешности результата косвенного измерения:

<u>Способ 2.</u>

Вначале определяется относительная погрешность по формуле

$$\delta_{z_{cp}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta_{\overline{x_i}} \right)^2} 100\% \tag{9.8}$$

где $\Delta_{\overline{x_i}}$ – абсолютная погрешность величины x_i. Частные производные $\dfrac{\partial \ln f}{\partial x_i}$ вычисляются при $x_i = \overline{x_i}$.

Затем определяется абсолютная погрешность по формуле

$$\Delta_{z_{cp}} = \frac{z_{cp} \delta_{z_{cp}}}{100} . \tag{9.9}$$

4. Округляем погрешности.

5. Округляем результат косвенных измерений и записываем с указанием единиц по следующей форме:

$$z = (\bar{z} \pm \Delta_{z_{ср}})(ед.изм.);\ \delta = ...\%\ ;\ P{=}0{,}95,$$

Пример 1. Измеряемая величина z является функцией одной переменной φ

$$z = 10\cos\varphi,$$

где φ – величина, полученная в результате прямых многократных измерений

$$\varphi_{ср} = (11{,}0 \pm 0{,}5)^{\circ};\quad \delta_{\varphi} = 5\%;\quad P = 0{,}95.$$

Решение.

При расчете погрешностей тригонометрических функций необходимо абсолютную погрешность угловых величин выражать в радианах

$$1^{\circ} = 0{,}0175 рад,$$

тогда

$$\Delta_{\varphi} = 0{,}5^{\circ} = 0{,}5 \cdot 0{,}0175 = 8{,}75 \cdot 10^{-3}\ рад.$$

Значение косвенно измеряемой величины

$$z_{ср} = 10 cos\varphi_{ср} = 10\cos(11{,}0^{\circ}) = 9{,}816.$$

Расчет погрешности будем проводить по способу 1. По формуле (9.6) рассчитаем абсолютную погрешность функции z и округлим ее

$$\Delta_z = \left|\frac{dz}{d\varphi}\Delta_{\varphi}\right| = 10\sin\varphi \cdot \Delta_{\varphi} = 10\sin(11{,}0^{\circ}) \cdot 8{,}75 \cdot 10^{-3} = 0{,}01167 \approx 0{,}017.$$

Относительную погрешность δ_z определяем по формуле (9.7) и округлим ее

$$\delta_z = \frac{\Delta_z}{z}100\% = \frac{0{,}0167}{9{,}816}100\% = 0{,}170 \approx 0{,}17\%.$$

Результат измерения с учетом правил представления результатов измерений записываем в виде

$$z = (9{,}816 \pm 0{,}017);\ \delta_z = 0{,}17\%;\ P{=}0{,}95.$$

Пример 2. Некоторая функция l является результатом суммирования двух величин $l = a + b$, где $a,\ b$ – прямо измеренные величины

$$a = (35{,}0 \pm 0{,}1)\textit{мм};\quad \delta_a = 0{,}29\%;\quad P = 0{,}95;$$
$$b = (15{,}0 \pm 0{,}1)\textit{мм};\quad \delta_b = 0{,}7\%;\quad P = 0{,}96.$$

Решение.

Значение косвенно измеряемой величины

$$l_{ср} = a_{ср} + b_{ср} = 35{,}0 + 15{,}0 = 50{,}0\textit{мм}.$$

Для расчета погрешностей функции l воспользуемся способом 1. По формуле (9.6) получаем выражение для абсолютной погрешности

$$\Delta_l = \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial a}\Delta_a\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial b}\Delta_b\right)^2} = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_b^2}\ .$$

Рассчитаем абсолютную погрешность и округлим ее

$$\Delta_l = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_b^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}1^2} = 0{,}141 \approx 0{,}14\textit{мм}\ .$$

Рассчитаем относительную погрешность δ_l по формуле (9.7) и округлим ее

$$\delta_l = \frac{\Delta_l}{l_{ср}}100\% = \frac{0{,}141}{50{,}0}100\% = 0{,}282\% \approx 0{,}28\%.$$

Результат измерения с учетом правил представления результатов измерений записываем в виде

$$l = (50{,}00 \pm 0{,}14);\ \delta_l = 0{,}28\%;\ P{=}0{,}95.$$

Пример 3. Функция l имеет вид $l = a - b$, используем для расчета результаты прямых измерений величин $a,\ b$ из предыдущего примера

$$a = (35{,}0 \pm 0{,}1) мм; \quad \delta_a = 0{,}29\%; \quad P = 0{,}95;$$
$$b = (15{,}0 \pm 0{,}1) мм; \quad \delta_b = 0{,}7\%; \quad P = 0{,}95.$$

Решение.

Значение косвенно измеряемой величины

$$l_{ср} = a_{ср} - b_{ср} = 35{,}0 - 15{,}0 = 20{,}0 мм.$$

Для расчета погрешностей функции l воспользуемся способом 1. По формуле (9.6) получаем выражение для абсолютной погрешности

$$\Delta_l = \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial a}\Delta_a\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial b}\Delta_b\right)^2} = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_b^2}.$$

Рассчитаем абсолютную погрешность и округлим ее

$$\Delta_l = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_b^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}1^2} = 0{,}141 \approx 0{,}14 мм.$$

Рассчитаем относительную погрешность δ_l по формуле (9.7) и округлим ее

$$\delta_l = \frac{\Delta_l}{l_{ср}} 100\% = \frac{0{,}141}{20{,}0} 100\% = 0{,}705\% \approx 0{,}7\%.$$

Результат измерения с учетом правил представления результатов измерений записываем в виде

$$l = (20{,}00 \pm 0{,}14); \ \delta_l = 0{,}7\%; \ P = 0{,}95.$$

Следует обратить внимание, что при одних и тех же значениях абсолютных погрешностей Δ_a и Δ_b (при близких значениях a и b) относительная погрешность разности значительно больше относительной погрешности суммы, полученной в предыдущем примере.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Рассчитаем погрешность измерения объема цилиндра $V = \frac{\pi D^2}{4} h$, где D и h - диаметр и высота цилиндра, значения, которых получены прямыми многократными измерениями:

$$D = (15{,}0 \pm 0{,}6)\,мм; \quad \delta_D = 4\%; \qquad P = 0{,}95;$$
$$h = (35{,}0 \pm 1{,}1)\,мм; \quad \delta_h = 3{,}1\%; \qquad P = 0{,}95.$$

Задача 2. Требуется определить плотность материала по прямо измеренным значениям массы m и объема V образца $\rho = \frac{m}{V}$. Масса образца получена взвешиванием на весах с инструментальной погрешностью $\Delta_{ит} = 0{,}1г$ $m = (81{,}9 \pm 0{,}1)г$; $\delta_m = 0{,}12\%$; P = 0,95. Объем образца получен косвенными измерениями $V = (10{,}52 \pm 0{,}24)см^3$; $\delta_V = 2{,}3\%$; P= 0,95.

9.3. Контрольные вопросы и задания

1. Из каких частей может складываться инструментальная погрешность?
2. Как происходит суммирование составляющих погрешностей?
3. Форма представления результата измерения.
4. Когда используются прямые многократные измерения? Приведите алгоритм обработки прямые многократные измерения.
5. Приведите алгоритм обработка косвенных результатов измерения.

Список литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1997. – 479 с. : ил.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов. Изд. 4-е, стер. – М.: Высш. Шк., 1998. – 400с.: ил.
3. Садовский Г.А. Теоретические основы информационно-измерительной техники: учебное пособие / Г. А. Садовский. – М. : Высшая школа, 2008. – 478 с. : ил.
4. Сергеев А.Г. Метрология: учебное пособие / А. Г. Сергеев, В. В. Крохин. – М. : Логос, 2002. – 408 с.
5. Жуков В.К. Теория погрешностей технических измерений: уч. пособие/ ТПУ. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 180 с.
6. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1991. – 304 с.: ил.
7. ГОСТ 8.401-80 Классы точности средств измерений. Общие требования.
8. ГОСТ 8.207-76 Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки наблюдений. Общие положения.
9. ГОСТ 8.009-84 Нормируемые метрологические характеристики средств измерений.
10. РМГ 29-99 Метрология. Основные термины и определения
11. МИ 1317-2004 Рекомендации. Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты и характеристики погрешности измерений. Форма представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроля.
12. Р 50.2.038-2004 Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результатов измерения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 1

Значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999

0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

Таблица 2

Критические точки распределения Стьюдента.

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (Доверительная вероятность Р)				
	0,1 (0,9)	0,05 (0,95)	0,02 (0,98)	0,01 (0,99)	0,001 (0,999)
1	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728

16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
35	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
45	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960
55	1,6730	2,004	2,3961	2,6682	3,4764
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,4350
80	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
90	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
110	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	3,3812
120	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	1,6448	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Таблица 3

Таблица критических точек распределения Пирсона χ^2.

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (Доверительная вероятность P)					
	0,01 (0,99)	0,025 (0,975)	0,05 (0,95)	0,95 (0,05)	0,975 (0,0025)	0,99 (0,01)
1	6,63490	5,02389	3,84146	0,00393	0,00098	0,00016
2	9,21034	7,37776	5,99146	0,10259	0,05064	0,02010
3	11,34487	9,34840	7,81473	0,35185	0,21580	0,11483
4	13,2767	11,14329	9,48773	0,71072	0,48442	0,29711
5	15,08627	12,8325	11,0705	1,14548	0,83121	0,55430
6	16,81189	14,44938	12,59159	1,63538	1,23734	0,87209
7	18,47531	16,01276	14,06714	2,16735	1,68987	1,23904
8	20,09024	17,53455	15,50731	2,73264	2,17973	1,64650
9	21,66599	19,02277	16,91898	3,32511	2,70039	2,08790
10	23,20925	20,48318	18,30704	3,94030	3,24697	2,55821
11	24,72497	21,92005	19,67514	4,57481	3,81575	3,05348
12	26,21697	23,33666	21,02607	5,22603	4,40379	3,57057
13	27,68825	24,7356	22,36203	5,89186	5,00875	4,10692
14	29,14124	26,11895	23,68479	6,57063	5,62873	4,66043
15	30,57791	27,48839	24,99579	7,26094	6,26214	5,22935
16	31,99993	28,84535	26,29623	7,96165	6,90766	5,81221

17	33,40866	30,19101	27,58711	8,67176	7,56419	6,40776
18	34,80531	31,52638	28,86930	9,39046	8,23075	7,01491
19	36,19087	32,85233	30,14353	10,11701	8,90652	7,63273
20	37,56623	34,16961	31,41043	10,85081	9,59078	8,26040
21	38,93217	35,47888	32,67057	11,59131	10,2829	8,89720
22	40,28936	36,78071	33,92444	12,33801	10,98232	9,54249
23	41,63840	38,07563	35,17246	13,09051	11,68855	10,19572
24	42,97982	39,36408	36,41503	13,84843	12,40115	10,85636
25	44,31410	40,64647	37,65248	14,61141	13,11972	11,52398
26	45,64168	41,92317	38,88514	15,37916	13,84391	12,19815
27	46,96294	43,19451	40,11327	16,15140	14,57338	12,87850
28	48,27824	44,46079	41,33714	16,92788	15,30786	13,56471
29	49,58788	45,72229	42,55697	17,70837	16,04707	14,25645
30	50,89218	46,97924	43,77297	18,49266	16,79077	14,95346
31	52,19139	48,23189	44,98534	19,28057	17,53874	15,65546
32	53,48577	49,48044	46,19426	20,07191	18,29076	16,36222
33	54,77554	50,72508	47,39988	20,86653	19,04666	17,07351
34	56,06091	51,96600	48,60237	21,66428	19,80625	17,78915
35	57,34207	53,20335	49,80185	22,46502	20,56938	18,50893
36	58,61921	54,43729	50,99846	23,26861	21,33588	19,23268
37	59,89250	55,66797	52,19232	24,07494	22,10563	19,96023
38	61,16209	56,89552	53,38354	24,8839	22,87848	20,69144
39	62,42812	58,12006	54,57223	25,69539	23,65432	21,42616
40	63,69074	59,34171	55,75848	26,5093	24,43304	22,16426
50	76,15389	71,42020	67,50481	34,76425	32,35736	29,70668

Таблица 4

Критические точки распределения F Фишера
(k_1 – число степеней свободы большей дисперсии,
k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

k_2	Уровень значимости α=0,01												
	k_1												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55
6	13,75	10,93	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,67
14	8,86	6,52	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51

15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,90	3,81	3,67	3,52	3,37
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,02	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08
19	8,19	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94
k_2	Уровень значимости α=0,05												
	k_1												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248
2,00	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45
3,00	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66
4,00	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80
5,00	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56
6,00	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87
7,00	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44
8,00	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15
9,00	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94
10,00	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77
11,00	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65
12,00	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54
13,00	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46
14,00	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39
15,00	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33
16,00	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28
17,00	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23
18,00	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19
19,00	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16
20,00	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12

Таблица 5

Критические значения λ_n для критерия Колмогорова

P	λ_n	P	λ_n	P	λ_n
0,01	0,44	0,40	0,77	0,90	1,22
0,05	0,52	0,50	0,83	0,95	1,36
0,10	0,57	0,60	0,89	0,98	1,52
0,20	0,65	0,70	0,97	0,99	1,63
0,30	0,71	0,80	1,07	0,999	1,95

Таблица 6

Значения коэффициента корреляции (r) при различных уровнях значимости (α)и числе степеней свободы (k)

Число степеней свободы k	Уровень значимости α		Число степеней свободы k	Уровень значимости α	
	0,05	0,01		0,05	0,01
1	0,997	1,000	24	0,388	0,496
2	0,950	0,990	25	0,381	0,487
3	0,878	0,959	26	0,374	0,478
4	0,811	0,917	27	0,367	0,470

5	0,754	0,874	28	0,361	0,463
6	0,707	0,834	29	0,355	0,456
7	0,666	0,798	30	0,349	0,449
8	0,632	0,765	35	0,325	0,418
9	0,602	0,735	40	0,304	0,393
10	0,576	0,708	45	0,288	0,372
11	0,553	0,684	50	0,273	0,354
12	0,532	0,661	60	0,250	0,325
13	0,514	0,641	70	0,232	0,302
14	0,497	0,623	80	0,217	0,283
15	0,482	0,606	90	0,205	0,267
16	0,468	0,590	100	0,195	0,254
17	0,456	0,575	125	0,174	0,228
18	0,444	0,561	150	0,159	0,208
19	0,433	0,549	200	0,138	0,181
20	0,423	0,537	300	0,113	0,148
21	0,413	0.526	400	0,098	0,128
22	0,404	0,515	500	0,088	0,115
23	0,396	0,505	1000	0,062	0,081

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Критерии для исключения промахов

Таблица 7

Критерий Романовского

Вероятность P	Число измерений n						
	4	6	8	10	12	15	20
0,99	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,08
0,98	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,95	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,90	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Таблица 8

Критерий Шовине

Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M
1	2	1.4	3	1.8	7	2.2	18	2.6	54
1.02	2	1.42	3	1.82	7	2.22	19	2.62	57
1.04	2	1.44	3	1.84	8	2.24	20	2.64	60
1.06	2	1.46	3	1.86	8	2.26	21	2.66	64
1.08	2	1.48	4	1.88	8	2.28	22	2.68	68
1.1	2	1.5	4	1.9	9	2.3	23	2.7	72
1.12	2	1.52	4	1.92	9	2.32	25	2.72	77
1.14	2	1.54	4	1.94	10	2.34	26	2.74	81

1.16	2	1.56	4	1.96	10	2.36	27	2.76	87
1.18	2	1.58	4	1.98	10	2.38	29	2.78	92
1.2	2	1.6	5	2	11	2.4	30	2.8	98
1.22	2	1.62	5	2.02	12	2.42	32	2.82	104
1.24	2	1.64	5	2.04	12	2.44	34	2.84	111
1.26	2	1.66	5	2.06	13	2.46	36	2.86	118
1.28	2	1.68	5	2.08	13	2.48	38	2.88	126
1.3	3	1.7	6	2.1	14	2.5	40	2.9	134
1.32	3	1.72	6	2.12	15	2.52	43	2.92	143
1.34	3	1.74	6	2.14	16	2.54	45	2.94	152
1.36	3	1.76	6	2.16	16	2.56	48	2.96	163
1.38	3	1.78	7	2.18	17	2.58	51	2.98	173

Таблица 9

Критерий Диксона

N	Z_α при α, равном			
	0,10	0,05	0,02	0,01
4	0,68	0,76	0,85	0,89
6	0,48	0,56	0,64	0,70
8	0,40	0,47	0,54	0,59
10	0,35	0,41	0,48	0,53
14	0,29	0,35	0,41	0,45
16	0,28	0,33	0,39	0,43
18	0,26	0,31	0,37	0,41
20	0,26	0,30	0,36	0,39
30	0,22	0,26	0,31	0,34

Таблица 10

Распределение Груббса-Смирнова

n	Уровни значимости α				n	Уровни значимости α			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,41	1,41	1,41	1,41	15	2,33	2,49	2,64	2,80
4	1,65	1,69	1,71	1,72	16	2,35	2,52	2,67	2,84
5	1,79	1,97	1,92	1,%	17	2,38	2,55-	2,70	2,87
6	.1,89	2,00	2,07	2,13	18	2,40	2,58	2,73	2,90
7	1,97	2,09	2,18	2,27	19	2,43	2,60	2,75	2,93
8	2,04	2,17	2,27	2,37	20	2,45	2,62	2,78	2,96
9	2,10	2,24	2,35	2,46	21	2,47	2,64	2,80	2,98
10	2,15	2,29	2,41	2,54	22	2,49	2,66	2,82	3,01
II	2,19	2,34	2,47	2,61,	23	2,50	2,68	2,84	3,03
12	2,23	2,39	2,52	2,66	24	2,52	2,70	2,86	3,05
13	2,26	2,43	2,56	2,71	25	2,54	2,72	2,88	3,07
14	2,30	2,46	2,60	2,76					

Учебное издание

ВАВИЛОВА Галина Васильевна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Научный редактор *доктор технических наук, профессор А.Е. Гольдштейн*

Корректура *Е.Л. Тен*
Компьтерная верстка *В.В. Михалев*
Дизайн обложки *А.И. Сидоренко*

Подписано к печати 11.07.2013. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 9,25. Уч.-изд. л. 8,36.
Заказ 779-13. Тираж 100 экз.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru