МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИНК
_______________В.Н. Бориков
«___» ____________ 2015г.

Лабораторная работа №4
Применения MATHCAD для решения задач по проверке статистических гипотез

Томск - 2015

Цель работы: Научиться использовать MathCad для решения задач проверки статистических гипотез.

Проверка статистических гипотез

Статистическая гипотеза – это любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о параметрах известных распределений.

Проверить статистическую гипотезу – значит проверить, согласуются ли выборочные данные с выдвинутой гипотезой.

Критическая область – это множество возможных значений статистического критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Область принятия гипотезы – это множество возможных значений статистического критерия, при которых нулевая гипотеза принимается.

Порядок проверки статистической гипотезы таков:

1) задается уровень значимости α, выбирается статистический критерий K и вычисляется (обычно по таблицам для закона распределения K) значение $K_{кр}$; определяется вид критической области;
2) по выборке вычисляется наблюдаемое значение критерия $K_{набл}$;
3) если $K_{набл}$ попадает в критическую область, нулевая гипотеза отвергается; при попадании $K_{набл}$ в область принятия гипотезы нулевая гипотеза принимается.

Гипотезы о значениях числовых характеристик

Гипотезы о равенстве среднего значения m и дисперсии σ^2 определенным числам m_0 и σ_0^2. Они возникают, например, при проверке качества функционирования измерительных устройств. Если m_0 – номинальное значение измеряемого параметра и $m \neq m_0$, то это означает, что прибор дает систематическую ошибку. Точность прибора определяется значением σ_0 и, если $\sigma > \sigma_0$, то это означает, что качество прибора не отвечает стандартным требованиям.

Гипотеза о численной величине среднего значения

В зависимости от априорной информации о дисперсиях можно выделить несколько характерных случаев.

1 *Математическое ожидание m_0 и дисперсия σ^2 известны.*

Нулевая гипотеза H_0: $m = m_0$, σ^2; альтернативная гипотеза H_1: $m \neq m_0$.

Так как

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \in N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

то случайная величина [статистика]

$$U = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$$

сравниваем с коэффициентами стандартного нормального закона для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$, где α – уровень значимости. Этот коэффициент можно определить с помощью таблицы значений функции Лапласа. В Mathcad $U_{кр}$ = qnorm(P, 0, 1).

Если $|U| < U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается: выборка принадлежит генеральной совокупности со средним значением m_0.

Задача 1. По результатам $n=9$ замеров установлено, что выборочное среднее время (в секундах) изготовления детали $\bar{x}=48$. Предполагая, что время изготовления – нормально распределенная случайная величина с дисперсией $\sigma^2=9$, рассмотреть гипотезу $H_0: m=49$ против конкурирующей гипотезы $H_1: m\neq 49$. Доверительная вероятность *P* = 95 %.

2. *Математическое ожидание m_0 известно, дисперсия σ^2 неизвестна*

Выборочная дисперсия S^2 найдена по выборке объема n. Нулевая гипотеза H_0: $m=m_0$, S; альтернативная гипотеза H_1: $m\neq m_0$,

то случайная величина [статистика]

$$t=\frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{S}$$

подчиняется распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k=n-1$ и сравниваем с коэффициентом Стьюдента $t_{кр}=t_{P;k}$ для доверительной вероятности $P=1-\alpha$. В Mathcad $t_{n-1,P}$ = qt(P, n – 1).

Гипотеза H_0 принимается, если $|t| < t_{n-1,P}$.

Задача 2. По утверждению руководства фирмы, средний размер дебиторского учета равен 187,5 тыс. руб. Ревизор составляет случайную выборку из 10 счетов и обнаруживает, что средняя арифметическая выборка равна 175 тыс. руб. при среднем квадратичном отклонении 35 тыс. руб. Может ли оказаться в действительности правильным объявленный размер дебиторского счета? Доверительная вероятность $P=0,95$.

Гипотеза о числовом значении дисперсии

Значения дисперсии генеральной совокупности σ^2 известно. По выборке найдено значение выборочной дисперсии S^2.

Нулевая гипотеза H_0: $\sigma=\sigma_0$; конкурирующая гипотеза H_1: $\sigma\neq\sigma_0$, при этом математическое ожидание m может быть произвольным.

В этом случае случайная величина [статистика]

$$\psi=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

имеет хи-квадрат распределение с числом степеней свободы $k=n-1$. Для заданного уровня значимости P =1 – α выбираем такие U и V, чтобы

$$P(\chi^2_{n-1}\leq U)=P(\chi^2_{n-1}\geq V)=\frac{\alpha}{2}$$

и гипотезу H_0 принимаем, если

$$U<\psi<V$$

В Mathcad U = qchisq $\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$ и V = qchisq $\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$.

Задача 3. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии σ^2 контролируемого размера изделий, которая не должна превышать 0,15. По данным из 25 отобранных изделий вычислена несмещенная дисперсия $\overline{S^2}=0,25$. Выяснить, обеспечивает ли станок требуемую точность. Доверительная вероятность *P* = 99 %.

Проверка гипотезы о равенстве средних значений

На практике часто встречаются ситуации, когда среднее значение данных одного эксперимента отличается от среднего значения данных другого, хотя условия эксперимента являются схожими. Тогда возникает вопрос, можно ли считать это расхождение незначимым, т.е. чисто случайным, или оно вызвано существенным различием двух генеральных совокупностей. Например, такие вопросы возникают при исследовании надежности технических систем, где результаты сравниваются с предыдущими измерениями; при контроле качества изделий, изготовленных на разных предприятиях.

1. *Дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 известны.*

Сравнение двух выборочных средних $\overline{x}$ и $\overline{y}$, полученных по выборкам n_1 и n_2 из нормальных совокупностей с известными дисперсиями. Гипотезы $H_0: m_1 = m_2$, σ_1^2, σ_2^2; $H_1: m_1 \neq m_0$.

Случайная величина [статистика]

$$U = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

сравниваем с коэффициентами стандартного нормального закона для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$, где α – уровень значимости. Этот коэффициент можно определить с помощью таблицы значений функции Лапласа. В Mathcad $U_{кр}$ = qnorm(P, 0, 1).

Если $|U| < U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Задача 4. Было произведено $n_1 = 12$ измерений диаметра вала (в мм). При этом оказалось, что среднее $\overline{x_1} = 10,2$, а стандартное среднее квадратичное отклонение $\sigma_1 = 0,05$. Затем вал поместили в условия с высокой температурой и провели $n_2 = 8$ измерений диаметра его оси. Среднее на этот раз оказалось равным $\overline{x_2} = 10,25$, а стандартное отклонение $\sigma_2 = 0,06$. Можно ли сделать вывод, что диаметр вала существенно увеличивается при увеличении температуры? Доверительная вероятность *P = 0,95*.

1. *Дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но равны между собой $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.*

Статистика

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{n_1 S_1 + n_2 S_2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

подчиняется распределению Стьюдента с числом степеней свободы $\mathrm{k} = n_1 + n_2 - 2$ и сравниваем с коэффициентом Стьюдента $t_{кр} = t_{P;k}$ для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$. В Mathcad $t_{k,P}$ = qt(P, k).

Гипотеза H_0 принимается, если $|t| < t_{k,P}$.

Здесь S_1^2 и S_1^2 «неисправленные» выборочные дисперсии, т.е.

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2$$

Задача 5. Необходимо проверить гипотезу о равенстве средних m_1 и m_2 на уровне значимости $\alpha = 0,05$ нормальных генеральных совокупностей с равными дисперсиями, если по объемам выборок $n_1 = 12$ и $n_2 = 20$ найдены выборочные значения $\bar{x}_1 = 10,7$ и $\bar{x}_2 = 11,9$, $S_1^2 = 3,55$ и $S_2^2 = 2,76$.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий (критерий Фишера)

Гипотезы о дисперсиях возникают довольно часто, поскольку дисперсия характеризует такие важные показатели, как точность приборов, технологических процессов.

Пусть S_1^2, S_2^2 – две независимые оценки дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 по выборочным данным объемами n_1 и n_2 соответственно. По выборочным дисперсиям проверяют гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ при выбранном уровне значимости.

Случайная величина [статистика]

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

имеет распределение Фишера со степенями свободы $(n_1 - 1)$ и $(n_2 - 1)$.

Важно! Здесь числитель больше знаменателя.

Гипотезу H_0 принимаем, если

$$U < F < V$$

С помощью Mathcad находим U и V

$$U = qF\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 - 1\right) \text{ и } V = qF\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_2 - 1\right).$$

Задача 6. По независимым данным объемами $n_1 = 31$ и $n_2 = 25$ вычислены выборочные дисперсии $S_1^2 = 25,0$ и $S_2^2 = 16,0$. Необходимо проверить гипотезу о равенстве дисперсий исходных совокупностей на уровне значимости $\alpha = 0,01$.

Задание.

1. Решить задачи представленные в методических указаниях.
2. Решить задачи из ИДЗ №2 (по вариантам) с использование MathCad.

В отчете представить решение и выводы о принятии или отвержении гипотезы, в том числе и в терминах условия задачи.

Приложение 1.

Точечные оценки параметров распределения

Рассмотрим повторную выборку значений генеральной совокупности X . Пусть M(X) = a , D(X) = σ^2 генеральные средняя *и дисперсия совокупности.* В качестве оценок для a и σ рассмотрим *вы*борочную среднюю [среднюю арифметическую выборки]

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ 1 (в Mathcad } \bar{x} \text{ = mean(x))}$$

и выборочную дисперсию

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \text{ (в Mathcad } \sigma_в^2 \text{ = var(x)).}$$

Доказано, что $\bar{x}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой для a , причем

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \; .$$

Доказано, что M(S^2) = $\frac{n-1}{n}$D(X) , т.е. оценка S^2 является смещенной. На практике, чтобы избавиться от этого недостатка, для оценки неизвестной дисперсии генеральной совокупности пользуются исправленной несмещенной оценкой

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \quad \text{(в Mathcad } S^2 = \text{Var(x)).}$$