ГЛАВА 4

Элементы римановой геометрии и тензорного анализа

Физические теории описывают движение и взаимодействие различных физических объектов, которые организуются из частиц и полей. Все физические процессы протекают в пространстве и во времени. Например, движение материальной точки описывается в трёхмерном евклидовом пространстве законами Ньютона. Специальная теория относительности строится в четырёхмерном пространстве Минковского, теория тяготения тесно связана с геометрией риманова пространства, современная теория полей и их взаимодействий оперирует многомерными пространствами с различными геометрическими свойствами. В этой главе вводится пространство аффинной связности, которое, обобщая понятие трёхмерного евклидова пространства, сохраняет многие его свойства. На основе аффинного пространства строится понятие риманова пространства. Физические законы выражаются в виде соотношений между физическими величинами. Последние представляются в виде функций, заданных в точках пространства. Пространство удобно описывать с помощью систем координат. Так как физические законы не должны зависеть от выбора системы координат, то они должны записываться посредством величин, не зависящих от преобразований координат. Такими величинами являются тензоры. Следовательно, физические величины должны выражаться в виде соотношений между тензорами. В этой главе помимо геометрии риманова пространства рассматриваются также понятие тензора и действия с тензорами.

33. Точечно-векторная аксиоматика аффинного пространства

Основными понятиями, не подлежащими определению, являются *точка* и *вектор*. Эти понятия характеризуются перечислением их свойств в ниже следующих аксиомах.

Аксиома 33.1. *Существует по меньшей мере одна точка.*

Аксиома 33.2. *Каждой паре точек A, B, заданных в определенном порядке, поставлен в соответствие один и только один вектор $\overrightarrow{AB}$.*[2]

Аксиома 33.3. *Для каждой точки A и каждого вектора $\vec{x}$ существует одна и только одна точка B, такая что $\overrightarrow{AB}= \vec{x}$.*

Аксиома 33.4 (аксиома параллелограмма). *Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.*

Перечисленные аксиомы характеризуют свойства векторов и точек как элементов некоторого множества. Последующие аксиомы описывают действия над векторами. Из данных аксиом 33.1 — 33.4 вытекают простые следствия.

Следствие 33.4.1. *$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$ для любых A и B.*

[2]Обозначение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\vec{x}$, $\vec{a}$ и т.д.

Доказательство. Действительно, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ и по аксиоме 33.4 имеем $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$ — *нуль-вектор*, по определению.

Следствие 33.4.2. *Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\Rightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$.*

Доказательство. Действительно, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$.

♦ Вектор $\overrightarrow{BA}$ называют *обратным* к вектору $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$ и обозначают $\overrightarrow{BA}=-\vec{x}$.

Аксиома 33.5. *Суммой двух заданных векторов $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{y}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{x}+\vec{y}$ или, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.*

Рассмотрим простейшие свойства сложения векторов.

Следствие 33.5.1. *Результат сложения, $\vec{x}+\vec{y}$, не зависит от точки A.*

Доказательство. Действительно, $\overrightarrow{A'B'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{B'C'}=\vec{y}\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}=\vec{y}$, $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$.

Следствие 33.5.2. *Сложение векторов коммутативно: $\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.*

Доказательство. Положим $\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC'}$. Тогда $\vec{x}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC'}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC'}$; $\vec{y}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}$, $C=C'$.

Следствие 33.5.3. *Сложение ассоциативно: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.*

Доказательство повторяет аналогичное доказательство в элементарной векторной алгебре. Отметим, в частности, что $\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$, $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$.

Аксиома 33.6. *Пусть α — число. Каждому α и $\vec{x}$ сопоставлен вектор $\vec{y}=\alpha\vec{x}$ такой, что $1\vec{x}=\vec{x}$; $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$; $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$; $\alpha(\beta\vec{x})=(\alpha\beta)\vec{x}$.*

Следствие 33.6.1. $0\vec{x}=\vec{0}$.

Доказательство. Действительно, $0\vec{x}=\alpha\vec{x}-\alpha\vec{x}=\vec{0}$.

Следствие 33.6.2. $\alpha\vec{x}+0\vec{x}=\alpha\vec{x}$.

Доказательство. Поскольку $\alpha\vec{0}=\vec{0}$, $\alpha\vec{x}+\alpha\vec{0}=\alpha(\vec{x}+\vec{0})=\alpha\vec{x}$, то $\alpha\vec{0}=\alpha\vec{x}-\alpha\vec{x}=\vec{0}$.

◊ Аксиомы 33.1 — 33.6 позволяют по обычным правилам производить вычисления над векторами в пространствах любого, даже бесконечного числа измерений. Теория бесконечномерных пространств качественно сложнее конечномерного случая и строится как его обобщение. Чтобы векторное пространство оказалось конечномерным, необходимо ввести еще одну дополнительную аксиому. Введем предварительно понятие линейной зависимости векторов.

♦ Система векторов $\{\vec{x}_k\}$, $k=\overline{1,n}$, называется *линейно независимой*, если из соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{x}_k=\vec{0} \tag{33.1}$$

следует, что все $\alpha_k=0$. Если в соотношении (33.1) хотя бы один коэффициент α_j отличен от нуля, то система векторов $\{\vec{x}_k\}$, $k=\overline{1,n}$, назывется линейно зависимой.

Аксиома 33.7 (аксиома размерности). *Существует n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов линейно зависимы.*

♦ Пространство, удовлетворяющее аксиомам 33.1 — 33.7, называется *n-мерным аффинным пространством* и обозначается $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ и т.п.

34. Аффинная координатная система (аффинный репер)

♦ Любой фиксированный набор линейно независимых векторов $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ называется *базисом.*

♦ Совокупность базиса и выбранной точки O, из которой откладываются базисные векторы, называется *репером.*

◊ Пусть $\vec{e}_k$ $(k=\overline{1,n})$ — набор n линейно независимых векторов. Тогда для любого вектора $\vec{x}$, согласно аксиоме 33.7, имеем

$$\alpha\vec{x}+\sum_{k=1}^n \alpha_k\vec{e}_k=\vec{0}, \tag{34.1}$$

причем $\alpha\neq 0$. Следовательно,

$$\vec{x}=\sum_{k=1}^n x^k\vec{e}_k, \quad x^k=-\frac{\alpha_k}{\alpha}. \tag{34.2}$$

♦ Величины x^k называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$, $k=\overline{1,n}$.

Теорема 34.1. *Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ единственно.*

Доказательство. Предположим противное: существуют два разложения $\vec{x}$ по базису $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$, т.е.

$$\vec{x}=\sum_{k=1}^n x^k\vec{e}_k \quad \text{и} \quad \vec{x}=\sum_{k=1}^n y^k\vec{e}_k.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^n (x^k-y^k)\vec{e}_k=\vec{0}.$$

По условию, векторы $\vec{e}_k$ линейно независимы. Следовательно, последнее равенство возможно лишь в случае, когда

$$x^k-y^k=0 \quad \text{или} \quad x^k=y^k, \quad k=\overline{1,n},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 34.1.1. *Координаты нулевого вектора в любом базисе равны нулю, т.е.*

$$\left\{\vec{0}=\sum_{k=1}^n x^k\vec{e}_k\right\} \Leftrightarrow \{x^k=0\}.$$

Доказательство очевидно.

Любая точка M однозначно связана с вектором $\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектором. Координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в репере $\vec{e}_k$ будем также называть координатами точки M.

◊ *Соглашение о суммировании.* Здесь и в дальнейшем в выражениях вида

$$\vec{x}=\sum_{k=1}^n x^k\vec{e}_k=x^k\vec{e}_k,$$

где индекс, по которому ведется суммирование, встречается дважды (один раз вверху и один раз внизу), знак суммы будем опускать. Индекс суммирования называется *немым.* Очевидно, немые индексы можно переобозначать, не изменяя выражения $\vec{x}=x^i\vec{e}_i=x^k\vec{e}_k$.

35. Тензор общей структуры

Преобразования аффинного репера

Рассмотрим линейные преобразования векторов базиса

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'}\vec{e}_i, \qquad \vec{e}_i = B^{i'}_i\vec{e}_{i'}, \tag{35.1}$$

где $A = \|A^i_{i'}\|$ и $B = \|B^{i'}_i\|$ – невырожденные $n \times n$-матрицы.

Из (35.1) следует, что

$$\vec{e}_{i'} = A^s_{i'}\vec{e}_s = A^s_{i'}(B^{j'}_s\vec{e}_{j'}) = A^s_{i'}B^{j'}_s\vec{e}_{j'}.$$

Аналогично

$$\vec{e}_i = B^{i'}_i\vec{e}_{i'} = B^{i'}_i(A^j_{i'}\vec{e}_j) = B^{i'}_i A^j_{i'}\vec{e}_j,$$

откуда, вследствие линейной независимости векторов базиса, получаем, что матрицы A и B взаимно обратны и транспонированы, т.е. $B^{i'}_i = A^{i'}_i$, и

$$A^{i'}_i A^j_{i'} = \delta^j_i, \quad A^s_{i'}A^{j'}_s = \delta^{j'}_{i'}. \tag{35.2}$$

Здесь

$$\delta^j_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

– символ Кронекера.

Формулы преобразования координат вектора $\vec{x}$ при преобразовании базиса в соответствии с (35.1) получаются из следующей цепочки равенств:

$$\vec{x} = x^{i'}\vec{e}_{i'} = x^i\vec{e}_i = x^{i'}A^i_{i'}\vec{e}_i = x^i A^{i'}_i\vec{e}_{i'}$$

и имеют вид

$$\begin{cases} \vec{e}_{i'} = A^j_{i'}\vec{e}_j \\ x^{i'} = A^{i'}_j x^j \end{cases}, \qquad \begin{cases} \vec{e}_i = A^{j'}_i\vec{e}_{j'} \\ x^i = A^i_{j'}x^{j'} \end{cases}. \tag{35.3}$$

Как отмечено в п. 34., вектор однозначно определяется своими координатами в данном базисе. Нетрудно видеть, что умножение вектора на число приводит к умножению его координат на это число, сумме векторов отвечает сумма координат

$$\vec{x} \ \Leftrightarrow \ \{x^i\}, \quad \alpha\vec{x} \ \Leftrightarrow \ \{\alpha x^i\}, \quad \vec{x} + \vec{y} \ \Leftrightarrow \ \{x^i + y^i\}. \tag{35.4}$$

♦ Величина T, называется *контравариантным тензором первого ранга*, или *контравариантным вектором*, если при преобразовании базиса (35.1) в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ координаты тензора в этом базисе преобразуются по закону (35.3).

♢ Отметим, что координаты вектора $\vec{x}$ определяют контравариантный тензор первого ранга. Наоборот, координаты любого контравариантного тензора первого ранга можно рассматривать как координаты вектора.

♢ Подчеркнем, что вектор является инвариантным объектом по отношению к преобразованиям репера, формулы преобразования координат вектора (35.3) получены из условия этой инвариантности.

Ковариантный вектор (ковариантный тензор первого ранга)

♦ Вещественная функция $\varphi = \varphi(\vec{x})$, определенная на аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$, называется линейной формой, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{A}_n$ и любого числа α справедливо соотношение

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}), \quad \varphi(\alpha\vec{x}) = \alpha\varphi(\vec{x}). \tag{35.5}$$

♢ Линейную форму в бесконечно-мерном пространстве называют функционалом.

Пример 35.1. Пусть $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$ – базис в $\mathcal{A}_n$, а x^k – координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе. Показать, что отображение $\varphi(\vec{x}) = x^j$, которое ставит в соответствие вектору $\vec{x}$ его j-ю координату, будет линейной формой.

Решение: решить самостоятельно.

♦ Линейные формы $\varphi(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ называются равными, если их значения совпадают на всех векторах $\vec{x}$ из аффинного пространства $\mathcal{A}_n$.

Утверждение 35.1. *Линейная форма $\varphi(\vec{x})$ однозначно определяется своими значениями $a_k = \varphi(\vec{e}_k)$, $k = \overline{1,n}$, вычисленными на векторах базиса $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$.*

Действительно, линейная форма $\varphi(\vec{x})$ определена на всех векторах пространства $\mathcal{A}_n$ и, следовательно, определены значения $a_k = \varphi(\vec{e}_k)$, $k = \overline{1,n}$, на его базисных векторах. С другой стороны, пусть $a_k = \varphi(\vec{e}_k)$, $k = \overline{1,n}$, – значения линейной форма $\varphi(\vec{x})$ на базисных векторах, а x^k – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$. С учетом определения линейной формы (35.5) получим

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x^k\vec{e}_k) = x^k\varphi(\vec{e}_k) = a_k x^k.$$

Таким образом, значения a_k, $k = \overline{1,n}$, позволяют вычислить линейную форму на любом векторе $\vec{x}$ и, следовательно, полностью ее определяют.

Преобразование репера по формулам (35.3) приводит к следующим преобразованиям координат линейной формы:

$$a_k = A_k^{k'} a_{k'}; \quad a_{k'} = A_{k'}^k a_k$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_{k'} = A_{k'}^k \vec{e}_k \\ a_{k'} = A_{k'}^k a_k \end{array} \right. . \tag{35.6}$$

♦ Величина T, называется *ковариантным тензором первого ранга*, или *ковариантным вектором* (*ковектором*), если при преобразовании репера (35.1) в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ координаты тензора в этом репере преобразуются по закону (35.6).

♢ Отметим, что координаты линейной формы определяют ковариантный тензор первого ранга. Наоборот, координаты любого ковариантного тензора первого ранга можно рассматривать как координаты линейной формы.

Ковариантный тензор второго ранга

Аналогично, *ковариантым тензором второго ранга* называется скалярная билинейная функция $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$, т.е.

$$\varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y},\ \gamma\vec{z} + \delta\vec{p}) = \alpha\gamma\varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \alpha\delta\varphi(\vec{x}, \vec{p}) + \beta\gamma\varphi(\vec{y}, \vec{z}) + \beta\delta\varphi(\vec{y}, \vec{p}).$$

Подставим в $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ разложение векторов по базису $\vec{x} = x^k\vec{e}_k$, $\vec{y} = y^k\vec{e}_k$, получим

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(x^k\vec{e}_k,\ y^s\vec{e}_s) = x^k y^s\varphi(\vec{e}_k, \vec{e}_s) = a_{ks}x^k y^s = a_{k's'}x^{k'}y^{s'} = a_{ks}A^k_{k'}A^s_{s'}x^{k'}y^{s'}.$$

Выражение a_{ks} представляет собой координаты тензора второго ранга $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ в базисе $\{\vec{e}_k\}$. Отсюда следует преобразование координат тензора при преобразовании репера по формулам (35.3)

$$a_{k's'} = A^k_{k'}A^s_{s'}a_{ks}. \tag{35.7}$$

Линейный оператор

Компоненты ковариантного и контравариантного тензоров преобразуются по-разному (это видно из формул (35.3) и (35.6), где матрицы $A^{k'}_k$ и $A^k_{k'}$ взаимно обратны). Введем в рассмотрение объект, координаты которого при преобразовании репера преобразуются с участием матриц $A^{k'}_k$, $A^k_{k'}$ одновременно. Определим линейное преобразование векторов аффинного пространства друг в друга $\vec{y} = \mathsf{A}\vec{x}$, причем

$$\mathsf{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\mathsf{A}\vec{x} + \beta\mathsf{A}\vec{y}.$$

Положим

$$\vec{x} = x^k\vec{e}_k, \quad \mathsf{A}(x^k\vec{e}_k) = x^k\mathsf{A}(\vec{e}_k),$$

тогда $z_k\mathsf{A}(\vec{e}_k) = a^s_k\vec{e}_s$.

$$\mathsf{A}(\vec{x}) = x^k a^s_k\vec{e}_s = x^{k'}a^{s'}_{k'}\vec{e}_{s'} = A^k_{k'}A^{s'}_s a^s_k x^{k'}\vec{e}_{s'},$$

откуда

$$a^{s'}_{k'} = A^k_{k'}A^{s'}_s a^s_k. \tag{35.8}$$

A называется *линейным оператором* или *аффинором*. Как видно из (35.8), при преобразовании репера верхний индекс аффинора преобразуется как у контравариантного вектора, а нижний индекс — как у ковариантного вектора. Поэтому аффинор называют также один раз контравариантным и один раз ковариантным тензором. Примером такого тензора является δ^j_i — символ Кронекера. Это легко следует из формулы (35.8) и взаимной обратности матриц $A^{k'}_k$, $A^k_{k'}$.

Дадим теперь общее определение тензора.

♦Говорят, что задан $(k; l)$ — *валентный тензор* k — *раз контравариантный и* l — *раз ковариантный*, если в каждом репере заданы n^{k+l} чисел $a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}$, которые при преобразовании репера преобразуются по формуле

$$a^{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}_{j'_1 j'_2 \ldots j'_l} = A^{r_1}{}_{j'_1}A^{r_2}{}_{j'_2}\ldots A^{r_l}{}_{j'_l}A^{i'_1}{}_{s_1}A^{i'_2}{}_{s_2}\ldots A^{i'_k}{}_{s_k}a^{s_1 s_2 \ldots s_k}_{r_1 r_2 \ldots r_l}. \tag{35.9}$$

36. Операции с тензорами

Рассмотрим операции, позволяющие из одних тензоров строить новые тензоры. Этих операций четыре: сложение, умножение, свертывание тензоров и подстановка индексов тензора. Так как тензоры являются инвариантами относительно преобразования репера, то эти операции должны быть инвариантными. То, что эти операции являются действительно инвариантными, необходимо доказать. Доказательство заключается в проверке тензорного закона преобразования компонент (35.9) для объекта, получаемого в результате каждой операции. Доказательства просты, поэтому не приводятся.

Сложение тензоров

Операция сложения определяется для тензоров одинаковой валентности. Рассмотрим определение сложения для тензоров один раз контравариантных и дважды ковариантных. Суммой тензоров a^s_{ij} и b^s_{ij} называется тензор c^s_{ij}, координаты которого равны

$$c^s_{ij} = a^s_{ij} + b^s_{ij}.$$

Из этой формулы непосредственно вытекает, что если для a^s_{ij}, b^s_{ij} выполняется тензорный закон преобразования (35.9) (для тензоров данной валентности), то это же справедливо и для c^s_{ij}, тем самым c^s_{ij} является тензором. Аналогично определяется сложение двух тензоров одинаковой валентности любого вида.

Умножение тензоров

Операция умножения определена для тензоров различной валентности. Рассмотрим определение произведения для частного случая: определение для тензоров произвольной валентности очевидно.

Произведением двух тензоров R^{is}_j, Q_p называется тензор T^{is}_{jp}, координаты которого определяются по правилу

$$T^{is}_{jp} = R^{is}_j \, Q_p.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что если R^{is}_j, Q_p преобразуются при преобразовании репера по тензорному закону (35.9) (с учетом валентности R^{is}_j и Q_p), то для T^{is}_{jp} также справедлив тензорный закон преобразования (35.9), т.е. T^{is}_{jp} является тензором. Отметим, что при умножении тензора валентности $(k;l)$ и тензора валентности $(p;q)$ получается тензор валентности $(k+p;l+q)$.

Свертка индексов

Операция свертки определена для тензоров, имеющих хотя бы один верхний и один нижний индексы. Для тензора R^{li}_{jpk} (валентности (2;3)) выражение $T^l_{jk} = R^{ls}_{jsk}$ называется сверткой тензора R^{li}_{jpk} по верхнему индексу (i) и нижнему индексу (p). T^l_{jk} является тензором валентности (1;2). Можно проводить свертку по нескольким парам индексов (в каждую пару должен входить один верхний и один нижний индексы). При свертке тензора валентности $(k;l)$ по r парам индексов, валентность свертки равна $(k-r;l-r)$.

Подстановка индексов

Пусть задан тензор R_l^{ijk}. Выражение $B_l^{ijk} = R_l^{jik}$ является тензором, полученным из тензора R_l^{ijk} подстановкой его индексов $(i;j)$. В общем случае можно из заданного тензора стоить другие тензоры с помощью подстановок различных групп его индексов (причем группы верхних и нижних индексов переставляются независимо).

37. Тензорное поле. Дифференцирование тензоров

Мы рассмотрели понятие тензора, который связан с аффинным пространством только законом преобразования своих координат (35.9) при преобразовании репера. Для практического применения в физических задачах такое представление недостаточно. Необходимо рассматривать тензорные поля. Введем соответствующее определение. Говорят, что в n-мерном аффинном пространстве задано *тензорное поле валентности* $(k;l)$, если тензор такой структуры задан в каждой точке пространства

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l} = a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(M).$$

Здесь M — точка аффинного пространства. Тензор может быть определен не на всем пространстве, а только в некоторой его n-мерной области D и даже на некоторой m-мерной поверхности. Это значит, что точка M пробегает не все пространство, а только данную область. Если пространство отнесено к координатной системе (x), то компоненты тензора становятся функциями координат

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l} = a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x).$$

Мы будем предполагать, что все функции являются гладкими, т.е. дифференцируемыми нужное число раз.

Очевидно, что операции с тензорами переносятся на тензорные поля, отнесенные к одной и той же точке, например, сложение тензорных полей определяется по формуле

$$c^s_{ij}(M) = a^s_{ij}(M) + b^s_{ij}(M).$$

Рассмотрим в каждой точке пространства частные производные от тензорного поля

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l, r}(x) = \frac{\partial a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x)}{\partial x^r}.$$

Покажем, что производные $a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l, r}(x)$ образуют тензор валентности $(k; l+1)$, т.е. число верхних индексов остается прежним, а число нижних индексов увеличивается на единицу. Докажем это утверждение для тензорного поля какого-нибудь частного вида, например для $T^{ij}_s = T^{ij}_s(x)$, общий случай доказывается аналогично. Рассмотрим преобразование координат в аффинном пространстве вида (35.3): $x^{i'} = A^{i'}_i x^i$. Положение точки M аффинного пространства можно относить как к старым координатам x^i, так и к новым координатам $x^{i'}$. Продифференцируем формулу преобразования координат тензора (35.9) (записанную для тензорного поля $T^{ij}_s(x)$) по координате $x^{i'}$, получим, согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial T^{i'j'}_{s'}}{\partial x^{r'}} = A^{i'}_i A^{j'}_j A^s_{s'} \frac{\partial T^{ij}_s}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial x^{r'}}.$$

Подставив выражение

$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

(матрицы $A^i_{i'}$ и $A^{i'}_i$ взаимно обратны), из формул преобразования координат получим

$$\frac{\partial T^{i'j'}_{s'}}{\partial x^{r'}} = A^{i'}_i A^{j'}_j A^s_{s'} A^q_{r'} \frac{\partial T^{ij}_s}{\partial x^q},$$

что совпадает с тензорным законом преобразования (35.9) для производных

$$\frac{\partial T^{ij}_s}{\partial x^r}.$$

Отметим, что четыре операции над тензорами (сложение, умножение, свертка и подстановка индексов) относятся к тензорной алгебре. Понятие тензорного поля и дифференцирование относятся к тензорному анализу.

Произвол в выборе тензора заданной структуры

Мы ввели понятие тензора и установили операции над тензорами, что составляет основу тензорной алгебры. Однако не выяснили, существуют ли тензоры произвольного строения (т.е. с любым числом индексов наверху и внизу) и, если существуют, то с какой степенью произвола они определяются. Ясно, что если координаты тензора заданы в одной системе координат, то в силу тензорного закона (35.9), они существуют и в любой другой системе координат. Покажем, что всегда можно построить тензор, задав *произвольно* его координаты в какой-либо системе координат. Зададим произвольно координаты тензора, например a^i_{jk}, в некоторой системе координат S. Если некоторый тензор существует, то его координаты в другой системе координат S' определяются по a^i_{jk} в соответствии с тензорным законом (35.9):

$$a^{i'}_{j'k'} = A^j_{j'} A^k_{k'} A^{i'}_i a^i_{jk}. \tag{37.1}$$

Однако это не значит, что тензор уже построен. Нужно, чтобы тензорный закон преобразования (35.9) был справедлив при переходу не только от заданной системы координат S к любой координатной системе, но и при переходе *из любой* системы координат в *любую другую*. Покажем, что в нашем случае это свойство выполняется, и тем самым величина, заданная своими компонентами a^i_{jk} в системе координат S, является тензором. Для этого рассмотрим еще одну произвольную систему координат S''. Для нее аналогично (37.1) запишем

$$a^{i''}_{j''k''} = A^j_{j''} A^k_{k''} A^{i''}_i a^i_{jk}. \tag{37.2}$$

Формулы преобразования реперов, соответствующих системам координат S, S', S'', имеют вид $\vec{e}_{i'} = A^i_{i'}\vec{e}_i$, $\vec{e}_{i''} = A^i_{i''}\vec{e}_i$, $\vec{e}_{i''} = A^{i'}_{i''}\vec{e}_{i'}$. Подставив первое выражение в третье, получим $A^i_{i''} = A^{i'}_{i''}A^i_{i'}$. Для обратных преобразований, аналогично, $A^{i''}_i = A^{i'}_i A^{i''}_{i'}$. Кроме того, $A^{i'}_{i''} = A^i_{i''}A^{i'}_i$. Подставив (37.1) в (37.2), с учетом этих формул получим

$$a^{i''}_{j''k''} = A^j_{j''} A^k_{k''} A^{i''}_i A^{j'}_j A^{k'}_k A^i_{i'} a^{i'}_{j'k'} = A^{j'}_{j''} A^{k'}_{k''} A^{i''}_{i'} a^{i'}_{j'k'}.$$

Т.е. тензорный закон преобразования (35.9) имеет место при переходе между любыми двумя произвольными системами координат. Тем самым доказано, что a^i_{jk} является тензором.

38. Криволинейные координаты в аффинном пространстве. Тензоры произвольной структуры в криволинейных координатах

♦*Арифметическим пространством* n измерений называется множество точек, задаваемых набором n вещественных координат $(x^1, x^2, \dots x^n)$, x^i — вещественные числа. *Областью* (открытым множеством) в арифметическом пространстве называется множество точек, которое вместе с каждой его точкой $x = (x^1, x^2, \dots x^n)$ содержит и любую точку $y = (y^1, y^2, \dots y^n)$, для которой $| y^i - x^i | < \delta$.

Множество Ω точек n-мерного аффинного пространства называется областью, если аффинные координаты $(x^1, x^2, \dots x^n)$ точек $M \in \Omega$ образуют область в арифметическом пространстве. В области Ω ведем n непрерывных N раз дифференцируемых функций $f_j(x^1, x^2, \dots x^n)$, $j = 1, \dots, n$, и определим с их помощью преобразование координат $x^{j'} = f_j(x^1, x^2, \dots x^n)$. Координаты $x^{p'}$ пробегают область Ω'. Потребуем, чтобы это преобразование было обратимым: $x^p = g^p(x^{1'}, x^{2'}, \dots x^{n'})$. Для этого требуется отличие от нуля якобианов

$$\det\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right| \neq 0, \quad \det\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right| \neq 0,$$

матрицы которых взаимно обратны и, следовательно, невырождены.

Действительно, рассматривая x^i как сложную функцию от $x^1, x^2, \dots, x^n$ и учитывая зависимость x^i от $x^{i'}$, запишем

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}.$$

Так как производная одного аргумента по другому равна δ-символу Кронекера, $\partial x^i/\partial x^j = \delta^i_j$, то

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

Рассмотрим радиус-вектор некоторой точки в аффинном пространстве: $\vec{x} = x^i\vec{e}_i$. Выразим x^i через криволинейные координаты

$$\vec{x} = x^i\vec{e}_i = \sum_p g_p(x^{i'})\vec{e}_p = \vec{x}(x^{i'}).$$

Продифференцировав по $x^{i'}$, получим

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial x^{i'}} = \vec{x}_{i'} = \frac{\partial x^s}{\partial x^{i'}}\,\vec{e}_s.$$

Векторы линейно независимы в каждой точке аффинного пространства вследствие неособенности матрицы $\partial x^i/\partial x^{i'}$. Таким образом, в каждой точке аффинного пространства векторы $\vec{x}_{i'}$ могут рассматриваться как репер, который называется *локальным*, так как он изменяется от точки к точке. Для введения локальных реперов имеются основания. Преобразование линейных координат по формулам $x^{j'} = f^{j'}(x^1, x^2, \dots x^n)$ показывает, что сами криволинейные координаты не являются векторами, как это имело место для аффинных координат. Однако эти свойства восстанавливаются, если рассматривать криволинейные координаты в бесконечно малой окрестности данной точки M с координатами

x^i. Сместимся из точки $M(x^i)$ в бесконечно близкую точку $L(x^i + dx^i)$. Для радиус-вектора $\overrightarrow{ML} = \vec{x}(x^i + dx^i) - \vec{x}(x^i) \approx dx^i \vec{x}_i = \overrightarrow{dx}$, где $\vec{x}_i = \partial\vec{x}/\partial x_i$. Тогда с учетом того, что

$$\vec{x}_{i'} = \frac{\partial x^s}{\partial x^{i'}}\,\vec{e}_s, \qquad \vec{x}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_i} = \vec{e}_i,$$

запишем

$$\overrightarrow{dx} = dx^i \vec{x}_i = dx^i \vec{e}_i = dx^{i'}\,\frac{\partial x^s}{\partial x^{i'}}\vec{e}_s = dx^{i'}\,\vec{x}_{i'}. \tag{38.1}$$

Обозначив

$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \tag{38.2}$$

согласно правилу дифференцирования сложной функции получим $dx^{i'} = A^{i'}_i dx^i$, т.е. dx^i являются компонентами вектора (точнее, одноковариантного тензора). Выше мы показали, что эти матрицы взаимно обратны:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j, \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}. \tag{38.3}$$

Тогда из (38.1) получим

$$\vec{x}_{i'} = A^i_{i'}\vec{x}_i. \tag{38.4}$$

Векторы $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ преобразуются, как векторы базиса, и их можно выбрать в качестве векторов локального репера.

Рассмотрим произвольное тензорное поле, например $T^i_{jk}(M)$. Точка M может пробегать некоторую область Ω в пространстве или часть области. Координаты тензора можно отнести к некоторой криволинейной системе координат x^i. При преобразовании криволинейных координат по формуле

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

локальный репер преобразуется следующим образом:

$$\vec{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\vec{x}_i.$$

Вслед за преобразованием локального репера в каждой точке M координаты тензора $T^i_{jk}(M)$ преобразуются по обычному тензорному закону

$$T^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,T^i_{jk}(M). \tag{38.5}$$

Все тензорные алгебраические операции над тензорами можно перенести на тензорные поля, если выполнять эти операции над тензорным полем отдельно в каждой точке пространства.

39. Параллельное перенесение вектора

Важным свойством аффинного пространства является возможность откладывать вектор из любой точки (параллельно самому себе). Поставим вопрос, как это реализовать, когда рассматриваемая область Ω отнесена к криволинейной системе координат x^i. Пусть вектор $\vec{\xi}_0$ в некоторой точке M_0 задан своими координатами ξ_0^i. Если построить вектор с теми же координатами в другой точке M_1, то получим некоторый другой вектор, отличный от $\vec{\xi_0}$, так как локальные реперы в точках M_0, M_1 различны. Вообще говоря, перенесение вектора из точки M_0 в точку M_1 скачком не представляет интереса. Интерес представляет непрерывное перенесение вектора $\vec{\xi_0}$ по какой-либо кривой $\smile{M_0M_1}$, причем будем рассматривать непрерывное изменение координат вектора ξ^i на каждом бесконечно малом участке пути.

Зададим кривую $\overset{\smile}{M_0M_1}$ параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$ $(i = \overline{1,n})$, $t_0 \le t \le t_1$, где $x^i(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции. В каждой точке этого пути будем откладывать постоянный вектор $\vec{\xi} = \vec{\xi_0}$. При переходе от точки к точке вдоль кривой $\overset{\smile}{M_0M_1}$ будут изменяться векторы $\vec{x}_i = \vec{x}_i(t)$ локального репера $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$. Так как $\vec{\xi} = \xi^i\vec{x}_i$, то соответственно будут изменяться и компоненты вектора $\xi^i = \xi^i(t)$. С другой стороны, вектор $\vec{\xi} = \xi^i\vec{e}_i$ постоянен вдоль кривой $\overset{\smile}{M_0M_1}$, поэтому

$$d\vec{\xi} = \vec{0} = d\xi^k\vec{x}_k + \xi^k d\vec{x}_k. \tag{39.1}$$

Продифференцировав векторы локального репера, получим

$$d\vec{x}_i = \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial x^j}dx^j = \frac{\partial^2\vec{x}}{\partial x^j\partial x^i}dx^j = \vec{x}_{ij}dx^j. \tag{39.2}$$

Здесь обозначено $\vec{x}_{ij} = \dfrac{\partial^2\vec{x}}{\partial x^j\partial x^i}$. Разложим $\vec{x}_{ij}$ по векторам репера $\vec{x}_i$:

$$\vec{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k\vec{x}_k. \tag{39.3}$$

Величины $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x^1,\dots,x^n)$, определенные таким образом в данной системе криволинейных координат x^i для каждой точки M области Ω, называются *коэффициентами связности*. Отметим, что очевидное равенство $\vec{x}_{ij} = \vec{x}_{ji}$ влечет $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Из (39.2), (39.3) следует

$$d\vec{x}_i = \Gamma_{ij}^k\vec{x}_k dx^j.$$

Подставив это выражение в (39.1), получим

$$d\vec{\xi} = \vec{x}_k d\xi^k + \Gamma_{ij}^k\vec{x}_k\xi^i dx^j = 0,$$

откуда

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k\xi^i dx^j,$$

или

$$\frac{d\xi^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k\xi^i\frac{dx^j}{dt}.$$

Эти выражения задают закон преобразования компонент вектора $\vec{\xi}$, параллельно переносимого вдоль кривой $\overset{\smile}{M_0M_1}$ за бесконечно малый интервал времени dt относительно локального репера $\vec{x}_i$. В частном случае, когда координаты x^i аффинные:

$$\vec{x}(x^1,\dots,x^n) = x^i\vec{e}_i, \quad \vec{x}_i = \vec{e}_i, \quad \vec{x}_{ij} = 0,$$

из (39.3) следует

$$\Gamma^k_{ij} = 0.$$

Обратно, если в какой-нибудь системе координат $\Gamma^k_{ij} = 0$, то из (39.3) следует $\vec{x}_{ij} = 0$, $\vec{x}_i = \overrightarrow{\text{const}}$. Обозначив $\vec{x}_i = \vec{e}_i$, получим $\vec{x} = x^i\vec{e}_i + \vec{x}_0$. Такое выражение для радиуса-вектора показывает, что x^i- аффинные координаты (с началом в точке $\vec{x}_0$).

Из этих рассуждений следует утверждение: *чтобы криволинейные координаты в рассматриваемой области Ω оказались аффинными, необходимо и достаточно, чтобы в этих координатах тождественно обращались в нуль* Γ^k_{ij}.

40. Преобразование коэффициентов связности

Найдем преобразовпние коэффициентов связности при преобразовании координат $x^{i'} = x^{i'}(x)$. Продифференцировав $\vec{x}(x^1, \dots, x^n)$ как сложную функцию от $x^{i'}$, получим

$$\vec{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\vec{x}_i. \tag{40.1}$$

Продифференцировав еще раз, найдём

$$\frac{\partial \vec{x}_{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\vec{x}_i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}\vec{x}_i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\vec{x}_i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\vec{x}_{ij}.$$

Использовав определение (39.3),

$$\vec{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\vec{x}_k, \qquad \vec{x}_{i'j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}\vec{x}_{k'}. \tag{40.2}$$

и (40.1), найдем

$$\vec{x}_{i'j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k'}}\vec{x}_s = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\vec{x}_s + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^s_{ij}\vec{x}_s, \tag{40.3}$$

что приводит к равенству

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k'}}\vec{x}_s = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\vec{x}_s + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^s_{ij}\vec{x}_s, \tag{40.4}$$

т.е.

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^s_{ij}.$$

Умножив обе части этого равенства на $\partial x^{k'}/\partial x^s$ и просуммировав по s, с учетом (38.3) найдем окончательно

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^s} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}. \tag{40.5}$$

В полученном законе преобразования коэффициентов связности присутствует дополнительное слагаемое, включающее вторые производные, поэтому закон преобразования коэффициентов связности не является тензорным.

Будем называть совокупность величин Γ^k_{ij}, заданных в некоторой системе координат и преобразующихся по закону (40.5) при преобразовании координат, *объектом связности*. Объект связности задается обычно в некоторой области

Ω, поэтому под объектом связности более точно следует понимать *поле объекта связности.* Объект связности определяет всю геометрию пространства в некоторой области Ω.

Рассмотрим, каким образом по коэффициентам связности $\Gamma^{k'}_{i'j'}$, заданным в некоторой криволинейной системе координат, можно найти аффинные координаты.

Если x^s– аффинные координаты, а $x^{i'}$– криволинейные, то

$$\Gamma^k_{ij} = 0, \quad \Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}}. \tag{40.6}$$

Из (40.4) в этом случае найдем

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \Gamma^{k'}_{i'j'} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k'}}, \tag{40.7}$$

что является уравнением для аффинных координат x^s как функций криволинейных $x^s = x^s(x^{i'})$. Решение этих уравнений дает переход от аффинных координат к криволинейным.

41. Тензоры на многообразии (тензорные поля)

Как было показано в предыдущих разделах, основным инструментом при изучении геометрических объектов является система координат. С помощью систем координат для решения различных задач можно использовать дифференциальное и интегральное исчисление. Поэтому в математике специально вводится понятие, максимально обобщающее идею введения системы координат на некотором множестве. Таковым является *многообразие* — геометрический объект, который имеет локально (в некоторой области) строение n-мерного векторного пространства. В физике многообразия играют роль моделей пространства-времени, в механике служат фазовыми пространствами и т.д.

Элементарным многообразием (*n измерений класса* N) назовем любое множество $\mathcal{M}$, для которого задано взаимно однозначное отображение на связную область изменения n переменных x^k $(k = \overline{1,n})$, но задано лишь с точностью до произвольного преобразования класса N этих переменных в новые переменные $x^{k'}$.

Переменные $x^{k'}$ играют роль координат элементарного многообразия.

Многообразие определим как объединение $S = \bigcup\limits_s \mathcal{M}_s$, $s = \overline{1,l}$, где $\mathcal{M}$ – элементарное многообразие.

В неэлементарном многообразии нельзя ввести одну систему координат с обычными требованиями однозначности и непрерывности соответствия. Оно составляется путем “склеивания” (т.е. частичного отождествления) заходящих одно в другое элементарных многообразий.

Понятие тензора в данной точке многообразия вводится по аналогии с соответствующим понятием для аффинного пространства в криволинейной системе координат.

Говорят, что в данной точке M многообразия $\mathcal{M}$ задан *тензор p раз контравариантный и q раз ковариантный*, если в каждой системе координат (x^i) задана совокупность чисел $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$, преобразующихся при переходе к другой системе координат $(x^{i'})$ по закону

$$T^{i'_1 i'_2 \ldots i'_p}_{j'_1 j'_2 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{i_2}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{j'_2}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Здесь частные производные вычислены в точке M и компоненты тензора взяты в этой же точке.

В случае тензорного поля, когда тензор данного строения задан в каждой точке M многообразия (или в каждой точке некоторой поверхности или линии), координаты тензорного поля будут функциями точки:

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(M) = T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x^1, \ldots x^n),$$

которые будем считать непрерывными и дифференцируемыми нужное число раз.

Операции с тензорами в каждой точке сохраняют свой смысл.

42. Касательное аффинное пространство

Геометрию многообразия $\mathcal{M}_n$ в малой окрестности каждой точки можно приближенно сопоставить с геометрией аффинного пространства. Чтобы построить такое сопоставление, рассмотрим один раз контравариантные тензоры ξ^i в некоторой точке M многообразия $\mathcal{M}_n$. Возьмем экземпляр аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ с отмеченной на нем точкой O. Сопоставим каждому тензору ξ^i в точке M некоторый вектор $\vec{\xi}$ пространства $\mathcal{A}_n$ так, чтобы умножению тензора на число и сложению тензоров отвечали такие же операции над соответствующими векторами: $\xi^i \leftrightarrow \vec{\xi}$, $\eta^i \leftrightarrow \vec{\eta}$, $\Leftrightarrow \alpha\xi^i + \beta\eta^i \leftrightarrow \alpha\vec{\xi} + \beta\vec{\eta}$. Кроме того, требуется, чтобы в этом отображении получались все векторы пространства $\mathcal{A}_n$.

Данное отображение построим следующим образом. Выберем среди тензоров ξ^i n линейно независимых тензоров $\xi^i_{(k)}$ $(k = \overline{1, n})$, т.е. удовлетворяющих условию $\det|\xi^i_{(k)}| \neq 0$. Тогда любой тензор ξ^i можно разложить по этим тензорам:

$$\xi^i = \alpha^{(k)}\xi^i_{(k)}.$$

Выберем теперь в пространстве $\mathcal{A}_n$ n линейно независимых векторов $\vec{e}_{(k)}$ и установим следующее соответствие: $\xi^i_{(k)} \leftrightarrow \vec{e}_{(k)}$. Каждому тензору $\xi^i = \alpha^{(k)}\xi^i_{(k)}$ сопоставим вектор $\vec{\xi} = \alpha^{(k)}\vec{e}_{(k)}$. Точке M многообразия $\mathcal{M}_n$ сопоставляется точка O пространства $\mathcal{A}_n$.

Таким образом, для каждой точки M многообразия $\mathcal{M}_n$ построено аффинное пространство $\mathcal{A}_n$, имеющее с многообразием одну общую точку $M = O$, и тензоры ξ^i в точке M с сохранением линейных зависимостей между ними отображаются взаимно однозначно в векторы $\vec{\xi} \in \mathcal{A}_n$.

Такое пространство $\mathcal{A}_n$ называется *касательным аффинным пространством*, а его векторы $\vec{\xi}$ – *касательными векторами* в данной точке M многообразия $\mathcal{M}_n$.

Чтобы установить более глубокую связь многообразия $\mathcal{M}_n$ с его касательным пространством, рассмотрим кривую, проходящую через данную точку M многообразия. Под кривой будем понимать множество точек, заданных параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$, причем будем предполагать, что $dx^i(t)/dt \neq 0$, функции $x^i(t)$ непрерывно дифференцируемы необходимое число раз. Пусть при значении t координаты $x^i(t)$ определяют точку M, а при $t + dt$ – точку M'. Дифференциалы координат $dx^i = dx^i(t)$ образуют один раз контравариантный тензор. Действительно, при переходе в многообразии к новым координатам

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$$

для того же бесконечно малого смещения по кривой получим по формуле полного дифференциала:

$$dx^{i'}(t) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)dx^i(t). \tag{42.1}$$

Таким образом, dx^i при переходе к новой системе координат преобразуется по тензорному закону. В таком случае тензору dx^i соответствует вектор аффинного пространства: $dx^i\overrightarrow{dx} \in \mathcal{A}_n$.

Следовательно, бесконечно малому смещению из точки M по кривой в многообразии отвечает бесконечно малый вектор $\overrightarrow{dx}$ в точке M касательного пространства $\mathcal{A}_n$. Как видно из (42.1), вектор $\overrightarrow{dx}$ определяет бесконечно малое смещение вдоль кривой лишь с точностью до бесконечно малых 2-го порядка. Это можно понимать так, что с указанной точностью в малой окрестности каждой точки касательное пространство и многообразие совпадают. Подчеркнем, что касательные пространства в различных точках многообразия никак не связаны.

Введем в касательном пространстве локальный аффинный репер. Для этого зададим в многообразии некоторую систему координат x^i и рассмотрим в некоторой точке M линейно независимые тензоры $\xi^i_{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, с координатами $\xi^i_{(k)} = \delta^i_k$. Этим тензорам сопоставим в касательном пространстве $\mathcal{A}_n$ векторы $\vec{e}_k$ по формуле

$$\xi^i_{(k)} = \delta^i_k \leftrightarrow \vec{e}_k.$$

Векторы $\vec{e}_k$ в $\mathcal{A}_n$, отложенные от данной точки M, образуют *локальный репер* данной системы координат. Значение локального репера основано на следующем: если тензору ξ^i в точке M отвечает в касательном пространстве вектор $\vec{\xi}$, то его координаты относительно локального репера совпадают с ξ^i.

Рассматривая тензоры произвольного строения, можно сказать, что координаты любого тензора в многообразии $\mathcal{M}_n$ в данной точке M относительно криволинейных координат x^i есть и его координаты в касательном аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ относительно соответствующего локального репера.

43. Пространство аффинной связности L_n

В аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ в криволинейных координатах возникает поле объекта связности $\Gamma^k_{ij}(M)$, которое определяет геометрию пространства $\mathcal{A}_n$ в некоторой области Ω (см. разд. 39., 40.).

Если в произвольном многообразии $\mathcal{M}$ задать некоторым образом поле объекта связности $\Gamma^k_{ij}(M)$, $M \in \mathcal{M}_n$, то получим в многообразии $\mathcal{M}_n$ геометрию аффинной связности. Многообразие $\mathcal{M}_n$ становится при этом пространством аффинной связности L_n.

Объект связности в $\mathcal{M}_n$ определяется следующим образом. Если в данной точке M многообразия $\mathcal{M}_n$ для каждой системы координат x^i, область действия которой включает некоторую окрестность точки M, задана система чисел Γ^k_{ij}, преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой системе координат по закону

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}, \tag{43.1}$$

то говорят, что в точке M задан *объект связности.*

♦ *Пространством аффинной связности* L_n называют многообразие $\mathcal{M}_n$, в котором задано поле объекта связности $\Gamma^k_{ij}(M) = \Gamma^k_{ij}(x^s)$, т.е. объект связности задан в каждой точке M, причём функции $\Gamma^k_{ij}(x^s)$ дифференцируемы необходимое число раз.

Отметим, что в отличие от аффинного пространства $\mathcal{A}_n$, вообще говоря,

$$\Gamma^k_{ij} \neq \Gamma^k_{ji}.$$

Обозначим

$$S^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}). \tag{43.2}$$

Величины S^k_{ij} образуют тензор, что легко увидеть из закона преобразования (43.1). Тензор S^k_{ij} называется *тензором кручения* данного пространства L_n. Очевидно, что тензор кручения антисимметричен:

$$S^k_{ij} = -S^k_{ji}.$$

Если тензор кручения равен нулю, т.е. если $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, то говорят, что *пространство аффинной связности L_n без кручения.*

Аффинную связность произвольного вида можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}) + \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) = \Gamma^k_{(ij)} + S^k_{ij}. \tag{43.3}$$

44. Параллельный перенос в L_n

В разделе 39. показана связь параллельного переноса вектора в евклидовом пространстве в криволинейных координатах с коэффициентами связности Γ^k_{ij}. В пространстве аффинной связности L_n *определим* параллельное перенесение аналогичным образом.

Пусть вдоль некоторой кривой $x^i = x^i(t)$, $a \neq t \neq b$, где $x^i(t)$ непрерывно дифференцируемые функции, задано векторное поле $\xi^i = \xi^i(t)$.

Будем говорить, что вектор ξ^i параллельно переносится вдоль кривой, если при бесконечно малом смещении вдоль кривой координаты вектора $\xi^i(t)$ меняются по закону

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{44.1}$$

Подчеркнем, что в этом определении связываются не приращения, а дифференциалы вектора $d\xi^i$ и координат dx^i. Смысл определения в том, что дифференциалы $d\xi^i$ *линейно* (т.е. простейшим образом) выражаются через dx^i и начальные значения координат вектора ξ^i.

Для проверки корректности определения покажем, что оно сохраняет свою форму при переходе от одной системы координат к другой, $x^{i'} = x^{i'}(x)$.

Чтобы проверить это, вычислим $d\xi^{i'}$ при перемещении вдоль заданной кривой. Так как

$$\xi^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\xi^{j'}, \qquad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}dx^{i'},$$

то

$$d\xi^k = d\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\xi^{k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\xi^{j'}dx^{i'} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}d\xi^{k'},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\xi^{j'}dx^{i'} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}d\xi^{k'} = -\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\xi^{j'}dx^{i'} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}d\xi^{l'} = -\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Big(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\Big)\xi^{j'}dx^{i'} \Longrightarrow$$
$$d\xi^{k'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}\xi^{j'}dx^{i'}.$$

Таким образом, показано, что определение параллельного переноса (44.1) инвариантно относительно преобразований координат.

В силу линейности (44.1) относительно ξ^i линейные зависимости при параллельном переносе сохраняются, что легко проверяется непосредственно.

Пусть контравариантный вектор a^i параллельно переносится вдоль некоторой кривой в соответствии с (44.1). Рассмотрим понятие параллельного переноса ковариантного вектора ξ_i.

Будем говорить, что ковариантный вектор ξ_i *параллельно переносится вдоль кривой*, если свертка $\varphi = \xi_i a^i$ остается постоянной при перемещении вдоль рассматриваемой кривой.

Найдем закон изменения координат ковариантного вектора ξ_i, аналогичный (44.1).

Из условия $d\varphi = 0$ следует $d\xi_i a^i + \xi_i da^i = 0$. Подставив сюда (44.1), получим $d\xi_i a^i - \xi_i \Gamma^i_{sk} a^k dx^s = 0$, или

$$(d\xi_k - \Gamma^s_{ik}\xi_s dx^i)a^k = 0.$$

В силу произвольности a^i отсюда следует

$$d\xi_k = \Gamma^s_{ik}\xi_s dx^i. \tag{44.2}$$

Это есть искомый закон изменения координат ковариантного вектора ξ_i при параллельном переносе вдоль некоторой кривой.

Обобщая (44.2), введем понятие параллельного переноса тензора произвольной структуры и найдем соответствующий закон преобразования его координат.

Для определенности возьмем тензор вида T^i_{jk}. Пусть тензоры ξ_i, a^j, b^k переносятся параллельно вдоль некоторой кривой. Будем говорить, что тензор T^i_{jk} переносится параллельно вдоль этой же кривой, если $\varphi = T^i_{jk}\xi_i a^j b^k$ остается постоянной при перемещении вдоль кривой. Из условия постоянства $d\varphi = 0$ следует

$$dT^i_{jk}\xi_i a^j b^k + T^i_{jk} d\xi_i a^j b^k + T^i_{jk}\xi_i da^j b^k + T^i_{jk}\xi_i a^j db^k = 0.$$

Подставив в это выражение соотношения (44.1), (44.2), записанные для ξ_i, a^j, b^k, т.е. $da^i = -\Gamma^i_{sj}a^j dx^s$, $db^j = -\Gamma^j_{si}b^i dx^s$, $d\xi_k = \Gamma^l_{sk}\xi_l dx^s$, получим

$$(dT^i_{jk} + \Gamma^i_{lp}T^p_{jk}dx^l - \Gamma^s_{lj}T^i_{sk}dx^l - \Gamma^s_{lk}T^i_{js}dx^l)\xi_i a^j b^k = 0.$$

В силу произвольности ξ_i, a^j, b^k найдём

$$dT^i_{jk} = -\Gamma^i_{lp}T^p_{jk}dx^l + \Gamma^s_{lj}T^i_{sk}dx^l + \Gamma^s_{lk}T^i_{js}dx^l. \tag{44.3}$$

Это есть искомый закон преобразования координат тензора при параллельном переносе вдоль некоторой кривой.

45. Геодезические в L_n

Геодезические линии в пространстве L_n играют ту же роль, что и прямые линии в аффинном пространстве. Прямые линии обладают следующим свойством: вектор, направленный вдоль прямой в некоторой ее точке, будет направлен вдоль этой прямой в любой ее точке при параллельном переносе вектора вдоль прямой. Аналогично этому формулируется определение геодезической линии в пространстве L_n.

♦ *Кривая в пространстве L_n называется геодезической, если всякий вектор ξ^i касательный к этой кривой в некоторой точке, остается касательным к ней при параллельном переносе вдоль кривой.*

Пусть геодезическая задана уравнениями $x^i = x^i(t)$, $a \le t \le b$, и касательный вектор $\xi^i(t)$ вдоль нее переносится параллельно. В силу параллельности касательных векторов

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha(t)\xi^i. \tag{45.1}$$

Вместо параметра t на геодезической введем параметр $\tau = \int \alpha(t)dt$, тогда соотношение (45.1) примет вид $dx^i/d\tau = \xi^i$ на кривой $x^i = x^i(t) = x^i(\tau)$. Параметр τ называют *каноническим.*

Найдём вид дифференциального уравнения, определяющего геодезическую. Запишем требование, чтобы вектор $dx^i/d\tau$ переносился параллельно вдоль искомой кривой. Применим формулу (44.1) параллельного перенесения к вектору $\xi^i = dx^i/d\tau$, получим

$$d\frac{dx^i}{d\tau} = -\Gamma^i_{jl}\frac{dx^j}{d\tau}dx^l.$$

Отсюда, разделив на $d\tau$, найдём

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = 0. \tag{45.2}$$

Это есть дифференциальное уравнение геодезических, отнесенное к каноническому параметру, из которого определяются функции $x^i(\tau)$. Как следует из теоремы о существовании и единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, система (45.2) имеет множество решений, зависящих от $2n$ параметров. Для нахождения единственного решения системы (45.2) необходимо и достаточно задать для некоторого начального значения параметра $\tau = \tau_0$ значения искомых функций и их первых производных: $x^i(\tau_0)$, $(dx^i/d\tau)\big|_{\tau=\tau_0}$. Значения функций задают в пространстве L_n точку, а производные – некоторое направление. Поэтому можно сказать, что через каждую точку в каждом направлении пространства L_n проходит одна геодезическая.

Отметим также следующий момент. Если Г-символы разложить на симметричную и антисимметричную части по нижним индексам, то в (45.2) свертка с антисимметричной частью будет равна нулю. Поэтому Γ^k_{ij} и $\Gamma^k_{(ij)}$ определяют одинаковые геодезические.

46. Абсолютный дифференциал, ковариантная производная

В этом разделе мы рассмотрим важную конструкцию, которая позволяет из данного тензорного поля строить некоторое другое тензорное поле с помощью операции дифференцирования.

Пусть точка M в пространстве аффинной связности L_n перемещается по кривой $x^i = x^i(t)$. В каждой точке этой кривой задан тензор. Для определенности возьмем $T^i_{jk} = T^i_{jk}(t)$. Таким образом, задано тензорное поле, по крайней мере, вдоль кривой. Переходя от точки t на кривой к точке $t + dt$, запишем координаты тензорного поля в этих точках в виде

$$T^i_{jk}(t + dt) \simeq T^i_{jk}(t) + dT^i_{jk}. \tag{46.1}$$

Здесь мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка относительно dt, заменив приращения функций $T^i_{jk}(t)$ их дифференциалами. Такой же точности будем придерживаться в нижеследующих выражениях.

Непосредственно сравнивать между собой тензоры $T^i_{jk}(t)$ и $T^i_{jk}(t+dt)$ нет смысла, так как они заданы в разных точках пространства. Чтобы сравнение имело смысл, перенесем тензор $T^i_{jk}(t+dt)$ параллельно в точку t. Тогда оба тензора будут заданы в одной и той же точке, их разность будет также тензором.

Обозначим через $\widetilde{T}^i_{jk}$ тензор $T^i_{jk}(t+dt)$, параллельно перенесенный из точки $t+dt$ в точку t, тогда $T^i_{jk}(t+dt)$ можно записать в виде

$T^i_{jk}(t+dt) \simeq \tilde{T}^i_{jk} + d\tilde{T}^i_{jk}$. Дифференциал $d\widetilde{T}^i_{jk}$ параллельно переносимого тензора определяется равенством (44.3):

$$T^i_{jk}(t+dt) \simeq \tilde{T}^i_{jk}(t) + \Gamma^s_{lj}T^i_{sk}dx^l + \Gamma^s_{lk}T^i_{js}dx^l - \Gamma^i_{ls}T^s_{jk}dx^l.$$

Тогда из соотношения (46.1) найдём

$$\widetilde{T}^i_{jk} \simeq T^i_{jk} + dT^i_{jk} + \Gamma^i_{ls}T^s_{jk}dx^l - \Gamma^s_{lj}T^i_{sk}dx^l - \Gamma^s_{lk}T^i_{js}dx^l \tag{46.2}$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка. Отметим, что правая часть неравенства (46.2) линейна относительно T^s_{jk}.

Назовем *абсолютным* (*ковариантным*) *дифференциалом* DT^i_{jk} главную линейную часть разности $\widetilde{T}^i_{jk} - T^i_{jk}(t)$ между тензором $T^i_{jk}(t+dt)$, параллельно перенесенным из точки $t+dt$ в точку t, и тензором $T^i_{jk}(t)$. Из (46.2) следует

$$DT^i_{jk} = dT^i_{jk} + \Gamma^i_{ls}T^s_{jk}dx^l - \Gamma^s_{lj}T^i_{sk}dx^l - \Gamma^s_{lk}T^i_{js}dx^l. \tag{46.3}$$

Нетрудно увидеть правило, по которому составлено выражение абсолютного дифференциала. Абсолютный дифференциал тензора является тензором, координаты которого вычисляются следующим образом: берутся дифференциалы координат данного тензора и к ним приписываются дополнительные слагаемые с участием объектов связности, по одному для каждого индекса тензора. Закон составления этих слагаемых ясен из формулы (46.3). Его можно наглядно продемонстрировать на простейших примерах дифференцирования один раз ко- и контравариантных тензоров a^i, a_i:

$$Da^i = da^i + \Gamma^i_{sj}a^j dx^s, \quad Da_i = da_i - \Gamma^j_{si}a_j dx^s. \tag{46.4}$$

Отметим также еще одно важное свойство абсолютного дифференциала. Из формулы (44.3) для дифференциалов координат переллельно переносимого тензора и выражения (46.3) для абсолютного дифференциала следует, что при параллельном переносе тензора вдоль кривой абсолютный дифференциал равен нулю: $DT = 0$.

Мы рассматривали до сих пор тензорное поле, заданное вдоль некоторой кривой. Если тензорное поле задано во всем пространстве или в некоторой его области, то абсолютный дифференциал можно брать вдоль любого пути в этой области. Координаты тензора в данной системе координат будут функциями точки, $T^i_{jk} = T^i_{jk}(x)$. Тогда $dT^i_{jk}(x) = (\partial T^i_{jk}/\partial x^s)dx^s$, что дает возможность записать формулу (46.3) в виде

$$DT^i_{jk} = \nabla_l T^i_{jk}dx^l.$$

Здесь через $\nabla_l T^i_{jk}$ обозначены коэффициенты при dx^k в правой части (46.3) после подстановки туда $dT^i_{jk}(x)$:

$$\nabla_l T^i_{jk} = \frac{\partial T^I_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ls} T^s_{jk} - \Gamma^s_{lj} T^i_{sk} - \Gamma^s_{lk} T^i_{js}. \qquad (46.5)$$

Эти коэффициенты являются тензором по построению, который имеет один дополнительный ковариантный индекс по сравнению с исходным тензором.

Тензор $\nabla_l T^i_{jk}$ называется *абсолютной* (*или ковариантной*) производной тензора T^i_{jk} относительно координаты x^i. Очевидно, что ковариантные производные тензора играют по отношению к абсолютному дифференциалу ту же роль, что и обычные частные производные – к обычному полному дифференциалу.

Приведем формулы абсолютного дифференцирования один раз ко- и контравариантных тензоров a^i, a_i:

$$\nabla_i a^j = \frac{\partial a^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{is} a^s, \quad \nabla_i a_j = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \Gamma^s_{ij} a_s. \qquad (46.6)$$

Чтобы освоить технику абсолютного дифференцирования, необходимо установить правила, по которым абсолютное дифференцирование комбинируется с операциями тензорной алгебры.

Свойство 1 (Дифференцирование суммы тензоров).

Пусть $W^i_{jk} = U^i_{jk} + V^i_{jk}$, тогда

$$DW^i_{jk} = DU^i_{jk} + DV^i_{jk}.$$

Действительно, выпишем формулу дифференцирования (46.3) для U^i_{jk} и для V^i_{jk}:

$$DU^i_{jk} = dU^i_{jk} + \Gamma^i_{ls} U^s_{jk} dx^l - \Gamma^s_{lj} U^i_{sk} dx^l - \Gamma^s_{lk} U^i_{js} dx^l,$$
$$DV^i_{jk} = dV^i_{jk} + \Gamma^i_{ls} V^s_{jk} dx^l - \Gamma^s_{lj} V^i_{sk} dx^l - \Gamma^s_{lk} V^i_{js} dx^l.$$

Сложим эти формулы, приведем подобные слагаемые и учтем формулу для дифференциалов $dW^i_{jk} = dU^i_{jk} + dV^i_{jk}$. Получим формулу дифференцирования суммы тензоров в виде

$$D(U^i_{jk} + V^i_{jk}) = DU^i_{jk} + DV^i_{jk},$$

что и требовалось.

Свойство 2 (Дифференцирование произведения тензоров).

Аналогично получается формула дифференцирования произведения тензоров. В качестве примера приведем эту формулу для следующего случая:

$$D(U^{ilr}_{jk} V^s_{pq}) = D(U^{ilr}_{jk}) V^s_{pq} + U^{ilr}_{jk} D(V^s_{pq}).$$

Свойство 3 (Дифференцирование свернутого тензора).

Рассмотрим тензор U^{si}_{sjk}, полученный сверткой тензора U^{li}_{rjk} по первым верхнему и нижнему индексам. Запись абсолютного дифференцирования тензора U^{si}_{sjk} можно понимать двояко: как результат дифференцирования тензора U^{li}_{rjk} с последующей сверткой или как результат дифференцирования свернутого тензора U^{si}_{sjk}. Покажем, что оба способа вычисления абсолютного дифференциала приводят к одному и тому же результату. Рассмотрим вначале DU^{si}_{sjk} в первом смысле. Тогда сначала запишем

$$DU^{li}_{rjk} = dU^{li}_{rjk} + \Gamma^{l}_{qp}U^{pi}_{rjk}dx^q + \Gamma^{i}_{qp}U^{lp}_{rjk}dx^q - \\ -\Gamma^{p}_{qr}U^{li}_{pjk}dx^q - \Gamma^{p}_{qj}U^{li}_{rpk}dx^q - \Gamma^{p}_{qk}U^{li}_{rjp}dx^q. \qquad (46.7)$$

После этого положим $i = r = s$ и просуммируем по индексу s. Покажем, что слагаемые, отвечающие индексам l, r, взаимно уничтожатся. Выпишем эти слагаемые из (46.7):

$$\Gamma^{l}_{qp}U^{pi}_{rjk}dx^q - \Gamma^{p}_{qr}U^{li}_{pjk}dx^q.$$

Положив здесь $l = r = s$ и просуммировав по s, получим

$$\Gamma^{s}_{qp}U^{pi}_{sjk}dx^q - \Gamma^{p}_{qs}U^{si}_{pjk}dx^q.$$

Переобозначив индексы суммирования, находим, что это выражение равно нулю. Таким образом, индексы l, r в окончательном выражении для абсолютного дифференциала не участвуют. При дифференцировании свернутого выражения $D(U^{si}_{sjk})$ индекс s также не участвует в выражении для дифференциала. Поэтому оба способа вычисления абсолютного дифференцирования дают один и тот же результат, что и требовалось доказать.

47. Тензоры кручения и кривизны

Геометрический смысл тензора кручения можно пояснить следующим образом. Рассмотрим скалярное поле $v(x)$. Как было показано выше, частная производная $v_i = \partial v/\partial x^i$ является ковариантным вектором. Поэтому можно положить

$$v_i = \frac{\partial v}{\partial x^i} = \nabla_i v.$$

Вторая ковариантная производная от v равна:

$$\nabla_i v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij}v_k = \nabla_i\nabla_j v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\nabla_k v.$$

Вычисление второй ковариантной производной от v в другой последовательности даёт

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji}v_k = \nabla_j\nabla_i v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^j \partial x^j} - \Gamma^k_{ji}\nabla_k v.$$

Вычтя, получим антисимметризованное по индексам i, j выражение для второй производной:

$$\nabla_{[i}\nabla_{j]}v = -S^k_{ij}\nabla_k v. \qquad (47.1)$$

Выражение $[\nabla_i, \nabla_j] \equiv \nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i$ называется *коммутатором* производных ∇_i, ∇_j. Антисимметризация второй производной выражается через коммутатор по формуле $\nabla_{[i}\nabla_{j]} = 2[\nabla_i, \nabla_j]$. Таким образом, тензор кручения S^k_{ij} (43.2) является мерой "неперестановочности" (некоммутативности) второй ковариантной производной от скалярной функции. Эта некоммутативность есть следствие кривизны пространства аффинной связности L_n, которая отличает геометрию пространства L_n от геометрии аффинного пространства $\mathcal{A}_n$.

Тензор кручения не дает исчерпывающей характеристики кривизны пространства L_n. В качестве следующего шага в изучении свойств кривизны пространства L_n естественно рассмотреть коммутатор второй ковариантной производной от векторного поля в пространстве L_n.

Возьмем контравариантное векторное поле v^k. Первая ковариантная производная от него имеет вид $\nabla_j v^k = \partial_j v^k + \Gamma^k_{js} v^s$. Здесь и далее будем использовать обозначение $\partial_j v^k = \partial v^k / \partial x^j$. Вычислим вторую ковариантную производную от вектора v^k:

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_j v^k &= \partial_i(\nabla_j v^k) + \Gamma^k_{is}\nabla_j v^s - \Gamma^l_{ij}\nabla_l v^k = \\ &= \partial_i\partial_j v^k + \partial_i \Gamma^k_{js} v^s + \Gamma^k_{js}\partial_i v^s + \Gamma^k_{js}\nabla_j v^s - \Gamma^l_{ij}\nabla_l v^k = \\ &= \partial_i\partial_j v^k + \partial_i\Gamma^k_{js} v^s + \Gamma^k_{js}(\nabla_i v^s - \Gamma^s_{il} v^l) + \Gamma^k_{is}\nabla_j v^s - \Gamma^l_{ij}\nabla_l v^k.\end{aligned}$$

Окончательно

$$\nabla_i \nabla_j v^k = \partial_i\partial_j v^k + (\partial_i \Gamma^k_{js} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{is})v^s + \Gamma^k_{is}\nabla_j v^s + \Gamma^k_{jl}\nabla_i v^s - \Gamma^k_{js}\nabla_i v^s. \tag{47.2}$$

Поменяв местами индексы i, j и вычтя полученное равенство из (47.2), получим

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_j v^k - \nabla_j \nabla_i v^k = (\partial_i \Gamma^k_{js} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{js} - \partial_j \Gamma^k_{is} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{is})v^s - \\ -2S^l_{ij}\nabla_l v^k.\end{aligned} \tag{47.3}$$

Здесь S^l_{ij} – тензор кручения (43.2).

Введем обозначение

$$R^{\cdot\cdot\cdot k}_{ijs.} = \partial_i \Gamma^k_{js} - \partial_j \Gamma^k_{is} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{js} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{is}. \tag{47.4}$$

Тогда

$$2\nabla_{[i}\nabla_{j]} v^k = R^{\cdot\cdot\cdot k}_{ijs.} v^s - 2S^l_{ij}\nabla_l v^k. \tag{47.5}$$

Величины $R^{\cdot\cdot\cdot k}_{ijs.}$ являются коэффициентами четырехвалентного тензора, один раз контравариантного и три раза ковариантного в соответствии с расстановкой его индексов.

Тензор $R^{\cdot\cdot\cdot k}_{ijs.}$ называется *тензором кривизны*, или *тензором Римана–Кристоффеля* пространства L_n.

Тензор $R^{\cdot\cdot\cdot k}_{ijs.}$ вместе с тензором кручения S^l_{ij} характеризует уклонение геометрии пространства L_n от геометрии аффинного пространства $\mathcal{A}_n$.

Для ковариантного вектора v_k выражение аналогичное (47.5) имеет вид

$$2\nabla_{[i}\nabla_{j]} v_k = -R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ijk.} v_s - 2S^l_{ij}\nabla_l v_s. \tag{47.6}$$

Рассмотрим основные свойства тензора кривизны, непосредственно вытекающие из определения (47.4).

Тензор кривизны вместе с $\Gamma^i_{jk}(x)$ задан в каждой точке пространства L_n и образует в нем тензорное поле:

$$R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ijk.} = R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ijk.}(x).$$

Переставив первую пару индексов i, j в выражении (47.4) и сравнив с исходным выражением, получим, что тензор кривизны антисимметричен по первым двум индексам:

$$R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ijk.} = -R^{\cdot\cdot\cdot s}_{jik.}. \tag{47.7}$$

Подвергнем $R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ijk.}$ в (47.4) циклической перестановке индексов (построим $R^{\cdot\cdot\cdot s}_{jki.}$), затем еще раз ($R^{\cdot\cdot\cdot s}_{kij.}$) и полученные выражения сложим с исходным, получим

$$R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ijk.} + R^{\cdot\cdot\cdot s}_{jki.} + R^{\cdot\cdot\cdot s}_{kij.} = 2(\nabla_i S^s_{jk} + \nabla_j S^s_{ki} + \nabla_k S^s_{ij}) -$$

$$-4(S^p_{ij}S^s_{kp} + S^p_{jk}S^s_{ip} + S^p_{ki}S^s_{jp}). \tag{47.8}$$

Соотношение (47.8) называется *тождеством Риччи.*

Для ковариантных производных тензора кривизны имеет место следующее *тождество Бианки–Падова*:

$$\nabla_l R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ijk\cdot} + \nabla_i R^{\cdot\cdot\cdot s}_{jlk\cdot} + \nabla_j R^{\cdot\cdot\cdot s}_{lik\cdot} = 2(S^p_{li}R^{\cdot\cdot\cdot s}_{jpk\cdot} + S^p_{ij}R^{\cdot\cdot\cdot s}_{lpk\cdot} + S^p_{jl}R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ipk\cdot}). \tag{47.9}$$

Это свойство проверяется непосредственно, исходя из (47.4).

48. Связность и симметричные тензоры

Пусть в пространстве аффинной связности L_n без кручения ($\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$) задано поле симметричного невырожденного тензора ($a_{ij} = a_{ji}$), $\det|a_{ij}| \neq 0$. Элементы матрицы a^{ij}, обратной к матрице a_{ij}, $a_{is}a^{sj} = \delta^j_i$, являются компонентами дважды контравариантного тензора. Вычислим ковариантные производные:

$$\begin{aligned}
\nabla_k a_{ij} &= \partial_k a_{ij} - \Gamma^s_{ki}a_{sj} - \Gamma^s_{kj}a_{is},\\
\nabla_i a_{jk} &= \partial_i a_{jk} - \Gamma^s_{ij}a_{sk} - \Gamma^s_{ik}a_{js},\\
\nabla_j a_{ki} &= \partial_j a_{ki} - \Gamma^s_{jk}a_{si} - \Gamma^s_{ji}a_{ks}.
\end{aligned}$$

Вычтя из первого выражения второе и третье, получим с учетом симметричности Γ^s_{ji}

$$\nabla_k a_{ij} - \nabla_i a_{jk} - \nabla_j a_{ik} = \partial_k a_{ij} - \partial_i a_{jk} - \partial_j a_{ik} + 2\Gamma^s_{ij}a_{sk}.$$

Отсюда следует

$$2\Gamma^s_{ij}a_{sk} = -\partial_k a_{ij} + \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} + \nabla_i a_{jk} + \nabla_j a_{ik} - \nabla_k a_{ij}. \tag{48.1}$$

Умножив это равенство на обратную матрицу a^{ij}, представим Γ^s_{ij} в виде

$$\Gamma^s_{ij} = \left\{{s \atop ij}\right\} - \frac{1}{2}a^{sk}(\nabla_i a_{jk} + \nabla_j a_{ik} - \nabla_k a_{ij}). \tag{48.2}$$

Здесь использовано обозначение

$$\left\{{s \atop ij}\right\} = \frac{1}{2}a^{sk}(-\partial_k a_{ij} + \partial_i a_{jk} - \partial_j a_{ik}). \tag{48.3}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что величины $\left\{{s \atop ij}\right\}$ преобразуются при преобразовании координат $x^{i'} = x^{i'}(x)$ по закону (43.1) преобразования компонент объекта связности:

$$\left\{{k' \atop i'j'}\right\} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left\{{k \atop ij}\right\}.$$

Величины $\left\{{k \atop ij}\right\}$ называют *символами Кристоффеля тензора* a_{ij}. Ясно, что символы Кристоффеля тензора a_{ij} можно рассматривать как некоторую симметричную связность.

Пусть g_{ij} – симметричный тензор, такой, что

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad g^{is}g_{sj} = \delta^i_j. \tag{48.4}$$

Тогда по (48.3) имеем

$$\Gamma^s_{ij} = \frac{1}{2}g^{sk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \tag{48.5}$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что из (48.5) непосредственно следует (48.4).

49. Евклидово (псевдоевклидово) пространство

Переход от аффинной геометрии к геометрии евклидова пространства можно осуществить, введя в аффинном пространстве скалярное произведение векторов. Для этого зададим в аффинном пространстве симметричную билинейную форму

$$(\vec{\xi}\cdot\vec{\eta}) = \varphi(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \varphi(\vec{\eta},\vec{\xi}).$$

Форма *невырождена*, если для каждого $\vec{x} \neq 0$ найдется $\vec{y} \neq 0$ такой, что $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \neq 0$. Введем репер $\{\vec{e}_k\}$ и разложим по нему векторы $\vec{\xi},\vec{\eta}$: $\vec{\xi} = \xi^i\vec{e}_i$, $\vec{\eta} = \eta^i\vec{e}_i$. Подставив эти разложения в $\varphi(\vec{\xi},\vec{\eta})$, получим

$$\varphi(\vec{\xi},\vec{\eta}) = g_{ij}\xi^i\eta^j, \quad g_{ij} = \varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j). \tag{49.1}$$

Коэффициенты g_{ij} формы φ являются компонентами дважды ковариантного тензора. Условие симметричности формы φ равносильно условию симметричности тензора g_{ij}, $g_{ij} = g_{ji}$. Невырожденность формы φ равносильна невырожденности матрицы g_{ij}, $\det g_{ij} \neq 0$.

Тензор g_{ij} называется *метрическим* (*фундаментальным*) *тензором* пространства.

Введем также g^{ij} как матрицу, обратную к g_{ij}:

$$g^{is}g_{sj} = \delta^i_j. \tag{49.2}$$

Напомним, что g^{ij} являются компонентами дважды контравариантного тензора, который называется *контравариантным метрическим тензором.*

Метрический тензор позволяет ввести норму вектора:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\varphi(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{g_{ij}x^ix^j} - \text{норма} \quad |\vec{x}|. \tag{49.3}$$

♦Аффинное пространство, в котором задана билинейная невырожденная форма, называется *евклидовым*, если $\varphi(\vec{x},\vec{x}) > 0$, и *псевдоевклидовым*, если билинейная форма не имеет определенного знака, $\varphi(\vec{x},\vec{x}) \lesseqgtr 0$.

50. Риманово пространство

Римановым пространством V_n называется n-мерное многообразие $\mathcal{M}_n$, на котором задано поле поле дважды ковариантного, симметричного и невырожденного тензора:

$$g_{ij} = g_{ij}(M), \quad g_{ij} = g_{ji}, \quad \det|g_{ij}(M)| \neq 0. \tag{50.1}$$

Как показано в разд. 48., метрический тензор g_{ij} порождает объект связности, выражаемый символами Кристоффеля (48.5):

$$\Gamma^s_{ij} = \left\{{s \atop ij}\right\} = \frac{1}{2}g^{sk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}), \quad g^{is}g_{sj} \equiv \delta^i_j.$$

Таким образом, в римановом пространстве определена операция абсолютного дифференцирования. Она обладает некоторыми специфическими свойствами по сравнению с ковариантным дифференцированием в произвольном аффинном пространстве. Важным свойством является равенство нулю ковариантной производной от метрического тензора (48.4), (48.5): $\nabla_s g_{ij} = 0$.

В общем случае, если в пространстве задана некоторая симметричная связность Γ^i_{jk}, такая, что

$$\Gamma^s_{ji} = \Gamma^s_{(ji)} = \left\{ {s \atop ji} \right\}, \quad \nabla_s g_{ij} = 0, \tag{50.2}$$

то такая связность Γ^i_{jk} называется *связностью, согласованной с метрикой* g_{ij}.

В произвольном аффинном пространстве нет способа "превратить" ковариантный тензор в контравариантный и обратно. В римановом пространстве V_n такой способ есть. Он называется *операцией "поднятия" ("опускания") индекса* и заключается в свертывании данного тензора с метрическим тензором.

Понятие об операции поднятия и опускания индекса у тензора ясно из следующего примера. Возьмем для определенности тензор $T^{..i}_{jk.}$, один раз контравариантный и два раза ковариантный. Определим

$$T_{jki} = T^{..s}_{jk.} g_{si}. \tag{50.3}$$

Величины T_{jki} являются компонентами трижды ковариантного тензора, который называется тензором, полученным из тензора $T^{..s}_{jk.}$ с помощью *опускания индекса* s. Аналогично, $T^{j.i}_{.k.}$, определяемый как

$$T^{j.i}_{.k.} = T^{..i}_{sk.} g^{sj}, \tag{50.4}$$

называется тензором, полученным из тензора $T^{..s}_{jk.}$ путем *поднятия индекса* j.

Отметим очевидный факт, что последовательное применение операции опускания и поднятия индекса к одному и тому же тензору возвращает тензор в исходное состояние:

$$a^s \Longrightarrow a_s = a^l g_{ls}, \quad \tilde{a}^s = a_l g^{ls}, \quad \tilde{a}^s = a^s.$$

Это является прямым следствием соотношения (49.2) взаимной обратности матриц g^{ij}, g_{ij}.