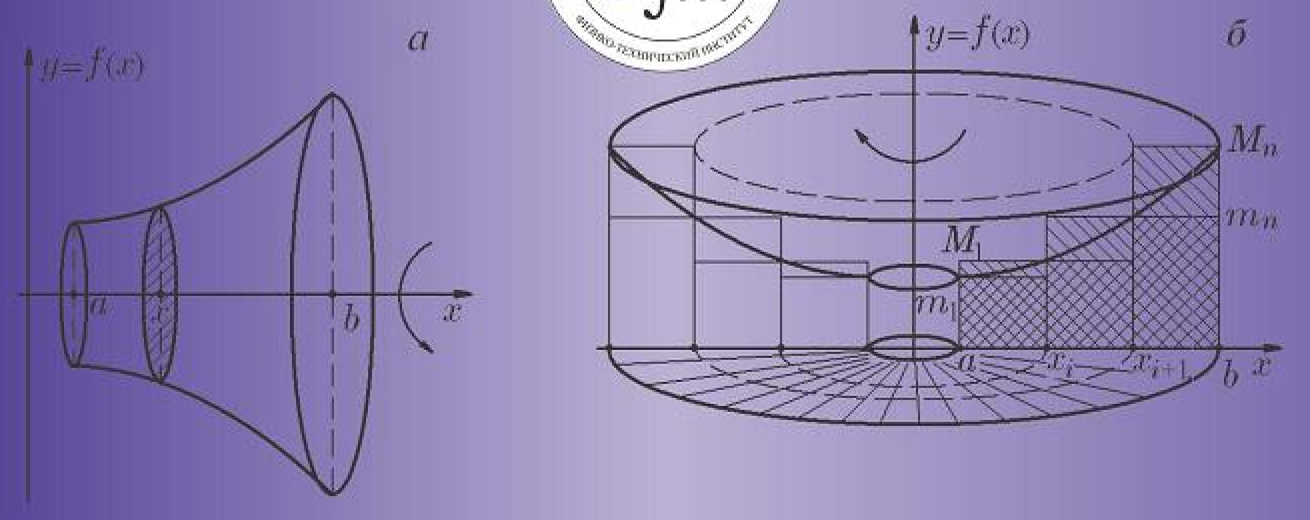
В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

для технических университетов

Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление

Часть III.3. Интегральное исчисление функций одной переменной

Учебники Томского политехнического университета

Министерство образования и науки
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж,
А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

для технических университетов

Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление

Часть III.3. Интегральное исчисление функций одной переменной

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Томск
2017

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
В937

Задорожный В.Н.

В937 Высшая математика для технических университетов. Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление. 3. Интегральное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов. – Томск: Изд-во Томского ЦНТИ, 2017. – 494 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение третьей части курса «Высшая математика» и содержит материал по разделу этого курса: «Дифференциальное и интегральное исчисление»: «Интегральное исчисление функций одной переменной». Оно содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу.

Предлагаемое пособие может быть полезно студентам, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов физических, инженерно-физических специальностей и студентов, обучающихся в системе элитного технического образования.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Работа частично поддержана Государственным заданием ВУЗам «Наука», регистрационный номер 3.6832.2017/БЧ.

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Осетрин К.Е.
Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
Багров В.Г.

ISBN 978-5-89702-425-4

Содержание

ГЛАВА 1

Неопределённый интеграл

1. Первообразная. Неопределённый интеграл, его свойства

В разделе «Функции одной переменной» части «Дифференциальное исчисление» мы ввели понятие производной и научились находить производные элементарных функций. Здесь мы будем решать обратную задачу: известна производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ и требуется найти саму функцию.

С механической точки зрения это означает, что по известной скорости движения материальной точки необходимо восстановить закон ее движения.

♦ Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $]a,b[$, если обе функции определены на этом интервале, причем функция $F(x)$ дифференцируема на $]a,b[$ и в каждой точке этого интервала выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

◊ Это определение справедливо и для бесконечного ($]-\infty,+\infty[$), и для полубесконечных ($]-\infty,b[$, $]a,+\infty[$) интервалов.

♦ Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если обе функции определены на этом отрезке, причем функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $]a,b[$ и в каждой точке этого интервала выполняется равенство (1.1).

Например, $F(x)=\sqrt{x}$ есть первообразная функции $f(x)=1/(2\sqrt{x})$ на $]0,\infty[$, так как $(\sqrt{x})'=1/(2\sqrt{x})$; $F(x)=\sin 2x$ есть первообразная функции $f(x)=2\cos 2x$ на $]-\infty,\infty[$, так как $F'(x)=(\sin 2x)'=2\cos 2x$, а $F(x)=\ln x$ есть первообразная функции $f(x)=1/x$ на $]0,\infty[$, так как $(\ln x)'=1/x$.

Теорема 1.1. *Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на $]a,b[$, то $F(x)+C$, где C – любое постоянное число, также является первообразной этой функции.*

Доказательство. Продифференцировав $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$, убеждаемся в справедливости утверждения.

Теорема 1.2. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на $]a,b[$, то $F_1(x)-F_2(x)=C$ на $]a,b[$, где C – некоторая постоянная.*

Доказательство. По условию $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$. Составим функцию $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Очевидно, что

$$\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

для всех $x\in]a,b[$. Отсюда в силу следствия 16.2.1 из теоремы Лагранжа (см. [16]) следует, что $\Phi(x)=C$, т.е. $F_1(x)-F_2(x)=C$.

Таким образом, из теорем 1.1 и 1.2 следует, что если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на $]a,b[$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на $]a,b[$ имеет вид $\Phi(x)=F(x)+C$, где C – константа.

♦ Семейство первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ на $]a,b[$ называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx. \tag{1.2}$$

Знак $\int$ называется *интегралом*; $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, а x – *переменной интегрирования*. Операция нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием функции* $f(x)$.

◊ В определении (1.1) производная $F'(x)$ есть отношение дифференциалов: $F'(x) = dF(x)/dx$, поэтому если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то подынтегральное выражение $f(x)dx = F'(x)dx = dF(x)$ является *дифференциалом первообразной* $F(x)$. Именно поэтому в подынтегральном выражении к функции $f(x)$ добавляется множитель dx.

Сравнение двух производных

$$\frac{d(\sin x^2)}{dx} = 2x\cos x^2 \neq \frac{d(\sin x^2)}{d(x^2)} = \cos x^2$$

наглядно иллюстрирует необходимость множителя dx в этом выражении.

Итак, если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1.3}$$

где C – произвольная постоянная.

◊ Дифференцирование есть действие прямое и однозначное, так как непрерывная функция $F(x)$ не может иметь двух различных производных. Так, если $F(x) = \sin x$, то $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ единственна. Интегрирование есть действие обратное, и оно есть действие многозначное, дающее для заданной функции $f(x)$ не один результат $F(x)$, а бесчисленное их множество $F(x) + C$. Так, для функции $f(x) = \cos x$ первообразной является множество $F(x) = \sin x + C$.

Ниже будет показано, что если $f(x)$ непрерывна на $]a, b[$ за исключением счетного множества точек этого промежутка, то для нее существует первообразная на $]a, b[$, а следовательно, и неопределенный интеграл.

Раздел математики, изучающий вопросы, связанные с интегрированием функций и свойствами их первообразных, называется *интегральным исчислением.*

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, следующих из его определения.

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Действительно, из определения интеграла следует

$$\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x) + C]' = f(x).$$

Свойство 2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Действительно,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Отсюда
$$d\int f(x)dx = d[F(x)+C] = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Свойство 3. Справедливо соотношение
$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

Имеем
$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

◊ Свойства 1–3 в различных формах описывают взаимную обратимость операций дифференцирования и интегрирования. Именно это отражает два возможных взгляда на происхождение термина «интеграл». Принято считать, что термин «интеграл» происходит от латинского *integer* — целый, подразумевая существование исходной функции, действие над которой, а именно ее дифференцирование, дает данную функцию. С другой стороны, существует свидетельство, что Я. Бернулли связывал этот термин с латинским *integro* — восстанавливать, подразумевая для данной функции операцию ее «восстановления» до первообразной, т.е. интегрирование.

Свойство 4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:
$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx,$$

где A – постоянное число.

Продифференцировав левую и правую части соотношения, убеждаемся в справедливости утверждения.

Свойство 5. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов
$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

если каждый из них существует.

Действительно,
$$\Big[\int f(x)dx + \int g(x)dx\Big]' = \Big[\int f(x)dx\Big]' + \Big[\int g(x)dx\Big]' = f(x) + g(x).$$

С другой стороны,
$$\Big\{\int [f(x)+g(x)]dx\Big\}' = f(x) + g(x),$$

т.е. функции
$$\int f(x)dx + \int g(x)dx \quad \text{и} \quad \int [f(x)+g(x)]dx$$

являются первообразными одной и той же функции $f(x)+g(x)$ и неопределенные интегралы от них совпадают.

Свойство 6. Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

и $u = \varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция от x, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Действительно, согласно определению, $F'(x) = f(x)$. Запишем сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу свойства инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du,$$

откуда

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C,$$

что и требовалось доказать.

◊ Последнее утверждение можно записать в виде

$$\int dF(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C. \tag{1.4}$$

Свойство 6 называют *свойством инвариантности функции интегрирования.*

2. Таблица основных формул интегрирования

При нахождении неопределенных интегралов пользуются таблицей интегралов, которую легко составить с помощью таблицы производных и определения неопределенного интеграла:

1. $\displaystyle\int 0 \cdot dx = C;$
2. $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1\ \alpha \in \mathbb{R};$

   $\displaystyle\int dx = x + C;$
3. $\displaystyle\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0;$
4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1;$

   $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C;$

   $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C;$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\Big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big| + C = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C;$

   $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C,$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C;$

10. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$

$\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C;$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C = 2\operatorname{arctg}(e^x) + C,$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0;$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0;$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C = \operatorname{arch}\frac{x}{a} + C, \quad |x| > a > 0;$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C, \quad |x| \neq a.$

Справедливость равенств, приведенных в ней, можно проверить дифференцированием. Кроме того, многие из этих формул получены ниже в примерах, иллюстрирующих отдельные методы интегрирования.

Доказано, что следующие интегралы не выражаются через элементарные функции:

1. $\displaystyle\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона;
2. $\displaystyle\int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx$ – интегралы Френеля;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;
4. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx$ – интегральный косинус;
5. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус.

Эти интегралы хотя и существуют, но не выражаются через элементарные функции. Существуют различные способы их вычисления, которые являются предметом изучения специальных разделов математики.

3. Методы интегрирования

3.1. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подведением под знак дифференциала

Метод непосредственного интегрирования состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ данного интеграла сравнивается с подынтегральными выражениями табличных интегралов и, если оно там есть, то интеграл найден. Если же он там отсутствует, то его нужно попытаться привести к одному или нескольким из табличных с помощью тождественных преобразований.

Пример 3.1. Найти

$$1)\ \int \sqrt[3]{x}dx;\quad 2)\ \int\Big(2e^x+\frac{3}{1+x^2}\Big)dx;\quad 3)\ \int\cos^2\frac{x}{2}dx;\quad 4)\ \int\operatorname{ctg}^2 x\,dx;$$
$$5)\ \int\frac{x^2}{1+x^2}dx;\quad 6)\ \int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx;\quad 7)\ \int(1+x^2)^2dx.$$

Решение. Использование тождественных преобразований, свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов дает:

$$1)\ \int\sqrt[3]{x}dx=\int x^{1/3}dx=\frac{3}{4}x^{4/3}+C;$$
$$2)\ \int\Big(2e^x+\frac{3}{1+x^2}\Big)dx=2\int e^xdx+3\int\frac{1}{1+x^2}dx=2e^x+3\operatorname{arctg}x+C;$$
$$3)\ \int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[\int dx-\int\cos x\,dx\Big]=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C;$$
$$4)\ \int\operatorname{ctg}^2x\,dx=\int\frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx=\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx=\int\Big(\frac{1}{\sin^2x}-1\Big)dx=$$
$$=\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int dx=-\operatorname{ctg}x-x+C;$$
$$5)\ \int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int\Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)dx=$$
$$=\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-\operatorname{arctg}x+C;$$
$$6)\ \int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\Big(\frac{1+x^2}{x(1+x^2)}+\frac{2x}{x(1+x^2)}\Big)dx=$$
$$=\int\Big(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\Big)dx=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{1+x^2}=\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C;$$
$$7)\ \int(1+x^2)^2dx=\int(1+2x^2+x^4)dx=\int dx+2\int x^2dx+\int x^4dx=$$
$$=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}+C.$$

Метод непосредственного интегрирования далеко не всегда позволяет свести исходный интеграл к табличным, и если сделать этого не удается, то применяются другие методы интегрирования. Очень близким к методу непосредственного интегрирования является метод интегрирования, называемый *подведением под знак дифференциала.* Этот метод позволяет свести исходный интеграл к табличным с помощью свойства 6 (см. соотношение (1.4)). Действительно, если исходный интеграл имеет вид

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

то, положив $\varphi(x) = u$, в силу свойства 6 имеем

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \tag{3.1}$$

Формула (3.1) выражает суть метода интегрирования подведением под знак дифференциала и существенно расширяет возможности применения таблицы основных формул интегрирования заменой в ней независимой переменной x на любую дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$.

Ниже в таблице приведены наиболее распространенные соотношения, которые используются при вычислении неопределенных интегралов методом подведения под знак дифференциала:

$$\begin{aligned}
&1.\ dx = \frac{1}{a}d(ax+b),\ \text{где } a, b \text{ — некоторые вещественные числа и } a \neq 0;\\
&2.\ x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1}),\ \alpha \neq -1,\ \alpha \in \mathbb{R};\\
&3.\ \frac{dx}{x} = d(\ln x);\\
&4.\ a^x dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x),\ a > 0,\ a \neq 1,\ \text{в частности, } e^x dx = d(e^x);\\
&5.\ \cos x\,dx = d(\sin x);\quad \sin x\,dx = -d(\cos x);\\
&6.\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x);\quad \frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\operatorname{ctg} x);\\
&7.\ \sin 2x\,dx = d(\sin^2 x) = -d(\cos^2 x) = -\frac{1}{2}d(\cos 2x);\\
&8.\ \frac{1}{1+x^2}dx = d(\operatorname{arctg} x) = -d(\operatorname{arcctg} x);\\
&9.\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x) = -d(\arccos x).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

При необходимости возможно использование нескольких формул из этой таблицы.

Пример 3.2. Найти

$$1)\ \int \sin 3x dx;\quad 2)\ \int \frac{dx}{x-2};\quad 3)\ \int \cos mx\,dx,\ m \neq 0;\quad 4)\ \int \cos x \sin^3 x\,dx;$$

$$5)\ \int \frac{3x^2-4x-1}{x^3-2x^2-x+1}dx;\quad 6)\ \int e^{x^2} x\,dx;\quad 7)\ \int x^x(1+\ln x)dx.$$

Решение. 1. Поскольку $dx = \frac{1}{3}d(3x)$, то

$$\int \sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\,d(3x).$$

Получили табличный интеграл:

$$\frac{1}{3}\int \sin 3x\, d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

2) Заметим, что $d(x-2) = dx$. Тогда интеграл запишется в виде

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{d(x-2)}{x-2}.$$

Это табличный интеграл:

$$\int \frac{d(x-2)}{x-2} = \ln|x-2| + C.$$

3) Заметим, что $d(mx) = m\,dx$. Тогда интеграл запишется в виде

$$\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\int \cos mx\, d(mx).$$

Это табличный интеграл:

$$\frac{1}{m}\int \cos mx\, d(mx) = \frac{1}{m}\sin mx + C.$$

4) Заметим, что $d(\sin x) = \cos x\, dx$. Тогда интеграл запишется в виде

$$\int \cos x \sin^3 x\, dx = \int \sin^3 x\, d(\sin x).$$

Это табличный интеграл от степенной функции:

$$\int \sin^3 x\, d(\sin x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

5) Заметим, что

$$d(x^3 - 2x^2 - x + 1) = (3x^2 - 4x - 1)dx,$$

т.е. числитель является дифференциалом знаменателя. Тогда интеграл запишется в виде

$$\int \frac{3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 1}dx = \int \frac{d(x^3 - 2x^2 - x + 1)}{x^3 - 2x^2 - x + 1}.$$

Получили табличный интеграл:

$$\int \frac{d(x^3 - 2x^2 - x + 1)}{x^3 - 2x^2 - x + 1} = \ln|x^3 - 2x^2 - x + 1| + C.$$

6) Поскольку $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$, то

$$\int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

7) Поскольку $x^x(1 + \ln x) = d(x^x)$, то

$$\int x^x(1 + \ln x)dx = \int d(x^x) = x^x + C.$$

Эти примеры достаточно просты и представляют собой, по сути, иллюстрацию применения таблицы подведения под знак дифференциала. Объединение методов непосредственного интегрирования и подведения под знак дифференциала позволяет вычислять интегралы более сложной структуры.

Пример 3.3. Найти

$$1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}};\quad 2)\ \int x^3\sqrt[3]{x^2+a}\,dx;\quad 3)\ \int x^2(1-x)^{20}dx;$$

$$4)\ \int \frac{x^2}{(1-x)^{20}}dx;\quad 5)\ \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx;\quad 6)\ \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx;\quad 7)\ \int |x|dx.$$

Решение. 1) С помощью тождественных преобразований избавляемся от знаменателя:

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}\,\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}} = \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{2a},\quad x>a.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = \frac{1}{2a}\int(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})dx =$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\int (x+a)^{1/2}d(x+a) + \int (x-a)^{1/2}d(x-a)\right] =$$
$$= \frac{1}{2a}\Big[\frac{2}{3}\sqrt{(x+a)^3}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-a)^3}\Big]+C = \frac{1}{3a}\big[\sqrt{(x+a)^3}+\sqrt{(x-a)^3}\big]+C.$$

2) Поскольку

$$x^3dx = x^2\cdot x\,dx = (x^2+a-a)\frac{1}{2}d(x^2+a),$$

то

$$\int x^3(x^2+a)^{1/3}dx = \int (x^2+a)^{1/3}(x^2+a-a)\frac{1}{2}d(x^2+a) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int (x^2+a)^{4/3}d(x^2+a) - a\int (x^2+a)^{1/3}d(x^2+a)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{3}{7}(x^2+a)^{7/3} - \frac{3a}{4}(x^2+a)^{4/3}\Big]+C.$$

3) Разложив x^2 по формуле Тейлора в окрестности точки $x=1$, имеем

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x)+1,$$

тогда

$$\int x^2(1-x)^{20}dx = \int [(1-x)^2-2(1-x)+1](1-x)^{20}dx =$$
$$= \int (1-x)^{22}dx - 2\int (1-x)^{21}dx + \int (1-x)^{20}dx =$$
$$= -\int (1-x)^{22}d(1-x) + 2\int (1-x)^{21}d(1-x) - \int (1-x)^{20}d(1-x) =$$
$$= -\frac{(1-x)^{23}}{23} + \frac{(1-x)^{22}}{11} - \frac{(1-x)^{21}}{21} + C.$$

4) Положив, как и в предыдущем примере,

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1,$$

найдем

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{20}}dx = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{20}}dx =$$
$$= \int (1-x)^{-18}dx - 2\int (1-x)^{-19}dx + \int (1-x)^{-20}dx =$$
$$= -\int (1-x)^{-18}d(1-x) + 2\int (1-x)^{-19}d(1-x) - \int (1-x)^{-20}d(1-x) =$$
$$= \frac{(1-x)^{-17}}{17} - \frac{(1-x)^{-18}}{9} + \frac{(1-x)^{-19}}{19} + C.$$

5) При $x \neq 0$ в силу равенства

$$\frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \frac{1-1/x^2}{x^2+1/x^2}dx = \frac{d(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2}$$

имеем

$$F(x) = \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{d(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+(1/x)-\sqrt{2}}{x+(1/x)+\sqrt{2}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{(x-1/\sqrt{2})^2+1/2}{(x+1/\sqrt{2})^2+1/2} + C. \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) получена в предположении $x \neq 0$. Однако непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $F(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ и ее производная дает подынтегральную функцию $(x^2-1)/(x^4+1)$. Следовательно, формула (3.3) справедлива для всех $x \in \mathbb{R}$.

6) Положив, как и в предыдущем примере,

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx = \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2},$$

при $x > 0$ имеем

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} + C_+, \qquad (3.4)$$

а при $x < 0$

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} + C_-. \qquad (3.5)$$

Найдем односторонние пределы этих выражений:

$$F(+0) = \lim_{x\to+0} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_+, \quad F(-0) = \lim_{x\to-0} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_-.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна на всей числовой оси, первообразная должна быть непрерывной в точке $x = 0$, т.е.

$$F(+0) = F(-0) = F(0)$$

или

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_+ = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_- = F(0). \tag{3.6}$$

Если положить $F(0) = C$, условие непрерывности (3.6) будет выполняться при $C_+ = C + \pi/2\sqrt{2}$, $C_- = C - \pi/2\sqrt{2}$ и, следовательно,

$$\left.\begin{matrix} C_+ \\ C_- \end{matrix}\right\} = C + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sign} x.$$

С учетом этого формулы (3.4) и (3.5) можно объединить в одну:

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sign} x\Big) + C, \quad x \neq 0;$$
$$F(0) = \lim_{x\to 0} F(x).$$

7) При $x > 0$ имеем

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_+.$$

При $x < 0$

$$-\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C_-.$$

В точке $x = 0$, согласно определению первообразной, должно быть $C_+ = C_- = C$, где C — произвольная константа. Поэтому для всех x с помощью знаковой функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

можем записать

$$\int |x| dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sign} x + C = \frac{x|x|}{2} + C.$$

Возможности использования множителя $|x|$ при внесении под знак дифференциала иллюстрируют следующие примеры.

Пример 3.4. Найти

$$1) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}; \quad 2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$$
$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; \quad 5) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Решение. Как было определено выше,

$$|x| = x \operatorname{sign} x.$$

При $x > 0$

$$\frac{dx}{x|x|} = \frac{dx}{x^2} = -d\Big(\frac{1}{x}\Big) = -d\Big(\frac{1}{x \operatorname{sign} x}\Big).$$

Аналогично при $x < 0$

$$\frac{dx}{x|x|} = -\frac{dx}{x^2} = d\Big(\frac{1}{x}\Big) = -d\Big(\frac{1}{x\operatorname{sign} x}\Big).$$

Следовательно, при $x \neq 0$

$$\frac{dx}{x|x|} = \frac{1}{\operatorname{sign} x}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{\operatorname{sign} x} d\Big(\frac{1}{x}\Big) = -d\Big(\frac{1}{|x|}\Big), \quad x \neq 0, \tag{3.7}$$

и, стало быть,

1) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+1/x^2}} = -\int \frac{d(1/|x|)}{\sqrt{1+(1/|x|)^2}} =$$
$$= -\ln\Big(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\Big) + C;$$

2) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1-1/x^2}} = -\int \frac{d(1/|x|)}{\sqrt{1-(1/|x|)^2}} =$$
$$= -\arcsin\frac{1}{|x|} + C, \ |x| > 1.$$

3) Подынтегральная функция определена для $x > 0$ и $x < -1$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}, & x > 0; \\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x-1}\sqrt{-x}} = -2\int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}}, & x < -1. \end{cases}$$

Получили табличные интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \begin{cases} 2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}) + C, & x > 0, \\ -2\ln(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x}) + C, & x < -1. \end{cases}$$

Две последние формулы можно объединить в одну с помощью $\operatorname{sign} x$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2(\operatorname{sign} x)\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|}) + C, \quad x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

4) Подынтегральная функция определена для $0 < x < 1$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C;$$

5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int \frac{dx}{x^2|x|(1+1/x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2\operatorname{sign} x}\int \Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^{-3/2} d\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big) =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sign} x}\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^{-1/2} + C = \frac{1}{\operatorname{sign} x}\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Рассмотрим несколько интегралов, содержащих тригонометрические функции.

Пример 3.5. Найти

$$1)\ \int \operatorname{tg} x\,dx;\quad 2)\ \int \operatorname{tg}^{-1} x\,dx;\quad 3)\ \int \operatorname{tg}^3 x\,dx;\quad 4)\ \int \frac{dx}{\sin x};\quad 5)\ \int \frac{dx}{\cos x};$$

$$6)\ \int \frac{dx}{\sin^4 x};\ 7)\ \int \frac{dx}{1+\cos x};\ 8)\ \int \frac{dx}{1+\sin x};\quad 9)\ \int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}},\ a\neq b.$$

Решение. Проведя тождественные преобразования, с учетом (3.2) найдем

$$1)\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C,\ x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi;$$

$$2)\int \operatorname{tg}^{-1} x\,dx=\int\operatorname{ctg} x\,dx=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C,\ x\neq\pi n;$$

$$3)\int\operatorname{tg}^3 x\,dx=\int\operatorname{tg} x\Big(\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)dx=\int\operatorname{tg} x\,d(\operatorname{tg} x)-\int\operatorname{tg} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C,\ x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi;$$

$$4)\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}=\int\frac{dx}{2\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2)}=$$

$$=\int\frac{d\,(\operatorname{tg}(x/2))}{\operatorname{tg}(x/2)}=\ln\Big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|+C,\ x\neq\pi n.$$

Этот же результат можно получить еще одним способом:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}=\int\frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C=$$

$$=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+C=\ln\Big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|+C.$$

$$5)\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d(x+\pi/2)}{\sin(x+\pi/2)}=\ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|+C,\ x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi.$$

Как и в предыдущем случае, возможен еще один способ вычисления этого интеграла:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C=$$

$$=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C=\ln\sqrt{\frac{1-\cos(x+\pi/2)}{1+\cos(x+\pi/2)}}+C=\ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|+C.$$

$$6)\int\frac{dx}{\sin^4 x}=-\int\frac{1}{\sin^2 x}d(\operatorname{ctg} x)=-\int(\operatorname{ctg}^2 x+1)d(\operatorname{ctg} x)=$$

$$=\quad -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x+C,\quad x\neq n\pi;$$

$$7)\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{dx}{2\cos^2(x/2)}=\int\frac{d(x/2)}{\cos^2(x/2)}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C,\ x\neq\pi(1+2n);$$

$$8)\int\frac{dx}{1+\sin x}=-\int\frac{d(\pi/2-x)}{1+\cos(\pi/2-x)}=-\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\Big)+C,\ x\neq-\frac{\pi}{2}(1+4\pi);$$

$$9)\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}=\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{a^2\sin x\cos x-b^2\cos x\sin x}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}dx=$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{a^2\sin x\,d(\sin x)+b^2\cos x\,d(\cos x)}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}=$$
$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int\frac{d(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}=\frac{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}{a^2-b^2}+C,\ a\neq b.$$

Интегрирование подведением под знак дифференциала результативно, если в подынтегральном выражении легко выделить в явном виде множитель $\varphi'(x)dx$, порождающий дифференциал $dt=\varphi'(x)dx$ для функции $f(\varphi(x))=f(t)$. В примере 3.3 его наличие очевидно, в примерах 3.4, 3.5 этот множитель можно выделить после несложных алгебраических или тригонометрических преобразований. Иногда для выделения этого множителя требуются более сложные преобразования или неоднократное использование метода подведения под знак дифференциала, как в следующих примерах.

Пример 3.6. Найти

$$1)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}};\quad 2)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}};\quad 3)\int\frac{x^4-1}{x(x^4+1)}dx;\quad 4)\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{-x}}};$$
$$5)\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}};\quad 6)\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\arcsin x(\ln\arcsin x)};\quad 7)\int\frac{dx}{\frac{1}{2}-\sin x}.$$

Решение. После тождественных преобразований с учетом (3.2) получим

$$1)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{x+\sqrt{x^2+a}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{1+x/\sqrt{x^2+a}}{x+\sqrt{x^2+a}}dx=$$
$$=\int\frac{d(x+\sqrt{x^2+a})}{x+\sqrt{x^2+a}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C;$$
$$2)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\int\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$
$$=\int\frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C;$$
$$3)\int\frac{x^4-1}{x(x^4+1)}dx=\int\frac{x^2}{x^4+1}\frac{x^4-1}{x^3}dx=\int\frac{1}{x^2+1/x^2}\Big(x-\frac{1}{x^3}\Big)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1/x^2)}{x^2+1/x^2}=\frac{1}{2}\ln\Big(x^2+\frac{1}{x^2}\Big)+C;$$
$$4)\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{-x}}}=\int\frac{e^{x/2}dx}{\sqrt{1+(e^{x/2})^2}}=2\int\frac{d(e^{x/2})}{\sqrt{1+(e^{x/2})^2}}=2\ln|e^{x/2}+\sqrt{1+e^x}|+C;$$
$$5)\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2\operatorname{sh}(x/2)\operatorname{ch}(x/2)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x/2)}{\operatorname{th}(x/2)\operatorname{ch}^2(x/2)}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\operatorname{th}(x/2))}{\operatorname{th}(x/2)}=\frac{1}{2}\ln\Big|\operatorname{th}\frac{x}{2}\Big|+C=\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}\Big|+C=\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{e^x-1}{e^x+1}\Big|+C;$$
$$6)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x(\ln\arcsin x)}=\int\frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x(\ln\arcsin x)}=$$

$$= \int \frac{d(\ln \arcsin x)}{\ln \arcsin x} = \ln|\ln \arcsin x| + C;$$

$$7) \int \frac{dx}{\frac{1}{2} - \sin x} = \int \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x}{\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right]} dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int \frac{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x) - \frac{3}{4}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]}{\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right]} dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int \frac{-\cos x\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right] + \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right]\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)}{\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right]} dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left\{\int \frac{d\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)}{\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)} - \int \frac{d\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right]}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x}\right\} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left\{\ln\left|\frac{1}{2} - \sin x\right| - \ln\left|1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right|\right\} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \ln\left|\frac{\frac{1}{2} - \sin x}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x}\right| + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ln\left|\frac{\sin(\pi/6) - \sin x}{1 - \cos(x - \pi/6)}\right| + C.$$

3.2. Интегрирование методом подстановки или замены переменной

Как следует из примера 3.6, интегрирование методом подведения под знак дифференциала в отсутствие множителя $\varphi'(x)$ требует нестандартных и зачастую неочевидных преобразований, которых можно избежать, используя метод замены переменной или метод подстановки. Идея этого метода состоит в замене переменной x на новую независимую переменную t. Эту замену в общем случае можно осуществить с помощью соотношения

$$\varphi(x) = u(t) \tag{3.8}$$

и, в частности, заменой вида

$$\varphi(x) = t \tag{3.9}$$

или

$$x = u(t). \tag{3.10}$$

Для исходного интеграла вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

наиболее эффективной является замена (3.9), т.е. $\varphi(x) = t$, поскольку $\varphi'(x)dx = dt$ и, следовательно,

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C. \tag{3.11}$$

Формула (3.11), по сути, повторяет формулу (3.1) рассмотренного выше метода подведения под знак дифференциала.

Для интегралов вида

$$\int f(x)dx \tag{3.12}$$

та же замена $t = \varphi(x)$ дает

$$\int f(x)dx = \int \frac{f(x)}{\varphi'(x)}\varphi'(x)dx = \int g(t)dt, \tag{3.13}$$

где $g(t) = f(x)/\varphi'(x)\big|_{\varphi(x)=t}$.

В свою очередь, замена $x = u(t)$ с учетом $dx = u'(t)dt$ дает

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt = \int g(t)dt, \tag{3.14}$$

где $g(t) = f(u(t))u'(t)$.

Обе подстановки должны быть такими, чтобы полученные интегралы (3.13) и (3.14) по переменной t были проще исходных, а еще лучше — табличными или легко сводились к таковым, например с первообразными $G(t)$:

$$\int g(t)dt = G(t) + C. \tag{3.15}$$

С учетом (3.15) для интегралов (3.13) и (3.14) будем иметь

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\varphi(x)) + C = F(x) + C; \tag{3.16}$$

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(u^{-1}(x)) + C = F(x) + C. \tag{3.17}$$

Обе цепочки равенств (3.16) и (3.17) не требуют неочевидных преобразований, а содержат последовательности стандартных операций, однозначно определяемых подстановкой. К сожалению, общего правила, которое указывало бы, как выбрать нужную подстановку, не существует. Умение находить такие подстановки достигается опытом, хотя для некоторых типов интегралов существуют стандартные наборы подстановок, облегчающие их вычисление. Рассмотрение этих наборов мы предварим примерами, иллюстрирующими применение подстановок (3.9), (3.10) вообще и использование формул (3.16), (3.17) в частности, заметив, что функция $u(t)$ в (3.10) должна быть обратимой, обеспечивая существование $t = u^{-1}(x)$.

Пример 3.7. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$$

методом подведения под знак дифференциала и методом подстановки.

Решение. 1. *Метод подведения под знак дифференциала*

Этот интеграл уже был вычислен методом подведения под знак дифференциала в примере 3.6. В качестве иллюстрации возможностей этого метода приведем еще один вариант его использования

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C.$$

2. *Метод замены переменной или подстановки*

Как было указано выше, существуют два способа замены переменной: (3.9) и (3.10). Рассмотрим оба.

2.1. Введем новую переменную t соотношением вида (3.9), а именно: $t = e^x$, тогда $dt = e^x dx$. Теперь, следуя (3.13), подынтегральную функцию домножим и разделим на функцию e^x:

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x - e^{-x})},$$

и запишем этот интеграл через переменную t:

$$\int \frac{e^x dx}{e^x(e^x - e^{-x})} = \int \frac{dt}{t(t - t^{-1})} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Вернувшись к исходной переменной $t = e^x$, получим

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C.$$

2.2. Введем теперь новую переменную t соотношением вида (3.10): $x = \ln t$, тогда $dx = dt/t$, и, следуя (3.14), найдем

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{dt/t}{t - 1/t} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Чтобы вернуться к старой переменной, из $x = \ln t$ получим $t = e^x$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C.$$

Пример 3.8. Найти

$$1)\ \int e^{x^2} x\,dx; \quad 2)\ \int 4x^2\sqrt[3]{x^3 + 1}dx.$$

Решение. 1. Воспользуемся заменой вида (3.9), т.е. сделаем подстановку $x^2 = t$, тогда $2x\,dx = dt$, т.е. $x\,dx = \frac{1}{2}dt$.

Следовательно,

$$\int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C.$$

Окончательно имеем

$$\int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

2. Воспользуемся заменой вида (3.8), т.е. сделаем подстановку $x^3 + 1 = t^3$. Тогда $3x^2 dx = 3t^2 dt$ и

$$4\int x^2\sqrt[3]{x^3 + 1}dx = 4\int t^3 dt = t^4 + C.$$

Окончательно получим

$$4\int x^2\sqrt[3]{x^3 + 1}dx = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^4} + C.$$

Пример 3.9. Вычислить интегралы

$$1)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}};\quad 2)\ \int \frac{x^4-1}{x(x^4+1)}dx;$$

$$3)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{-x}}};\quad 4)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$$

методом замены переменной вида $t=\varphi(x)$.

Решение. Эти интегралы были вычислены в примере 3.6 методом подведения под знак дифференциала, что упрощает подбор подстановки.

1. Положив $t=1+\sqrt{1+x^2}$, с учетом $dt=(x/\sqrt{1+x^2})dx$ имеем

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\int \frac{(x/\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}\Big/\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\int \frac{(x/\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$$

2. Положив $t=x^2+1/x^2$, с учетом $dt=2(x-1/x^3)dx$ имеем

$$\int \frac{(x^4-1)dx}{x(x^4+1)}=\int \frac{(x^4-1)2(x-1/x^3)dx}{x(x^4+1)2(x-1/x^3)}=\frac{1}{2}\int \frac{(x^4-1)2(x-1/x^3)dx}{(x^4+1)(x^4-1)/x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2(x-1/x^3)dx}{x^2+1/x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln\Big(x^2+\frac{1}{x^2}\Big)+C.$$

3. Положив $t=e^{x/2}$, с учетом $dt=\frac{1}{2}e^{x/2}dx$ имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{-x}}}=\int \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}dx}{\frac{1}{2}e^{x/2}\sqrt{1+e^{-x}}}=2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=2\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C=2\ln|e^{x/2}+\sqrt{t^2+1}|+C.$$

4. Положив $t=2/x$, с учетом $dt=-\frac{2}{x^2}dx$ имеем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int \frac{-(2/x^2)dx}{-\frac{2}{x^2}x\sqrt{x^2-4}}=-\frac{1}{2}\int \frac{-(2/x^2)dx}{\sqrt{1-(2/x)^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{2}\arcsin t+C=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}+C.$$

Эту первообразную с помощью известного тригонометрического соотношения

$$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}$$

можно представить в виде

$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}+C=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x}+\bar{C},$$

где $\bar{C}=C-\pi/4$ — новая произвольная постоянная. Отсюда следует, что за счет тождественных преобразований, а также в связи с возможностью выбора постоянной интегрирования неопределенный интеграл можно записать в нескольких различных, но эквивалентных формах.

Пример 3.10. Вычислить интегралы

$$1)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}};\quad 2)\ \int \frac{x^4-1}{x(x^4+1)}dx;$$

$$3)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{-x}}};\quad 4)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$$

методом замены переменной вида $x = u(t)$.

Решение. В предыдущем примере 3.9 подбор подстановок вида $t = \varphi(x)$ для данных интегралов упрощался использованием результатов примера 3.6, в котором эти интегралы были вычислены методом подведения под знак дифференциала. В данном примере можно воспользоваться результатами уже примера 3.9, представив найденные там подстановки $t = \varphi(x)$ в виде $x = \varphi^{-1}(t)$. Проще, однако, оказывается провести ряд подстановок вида $x = u(t)$, которые последовательно упрощают подынтегральную функцию.

1. Воспользуемся заменой

$$x = \sqrt{y-1}, \tag{3.18}$$

упрощающей подынтегральную функцию. Поскольку $dx = dy/2\sqrt{y-1}$, то

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = \int \frac{\sqrt{y-1}dy/2\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+y^{3/2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(1+\sqrt{y})}}.$$

Теперь с помощью замены

$$y = z^2, \quad dy = 2z\,dz, \tag{3.19}$$

подынтегральная функция упростится еще больше:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(1+\sqrt{y})}} = \frac{1}{2}\int \frac{2z\,dz}{\sqrt{z^2(1+z)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z}}.$$

Наконец, замена

$$z = t-1 \tag{3.20}$$

с учетом $dz = dt$ приводит исходный интеграл к табличному:

$$I_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C. \tag{3.21}$$

Чтобы вернуться к исходной переменной, воспользуемся цепочкой замен, обратных заменам (3.18)–(3.20):

$$\begin{array}{ll} z = t-1, & t = 1+z; \\ y = z^2, & z = \sqrt{y}; \\ x = \sqrt{y-1}, & y = 1+x^2. \end{array}$$

Тогда

$$t = 1+z = 1+\sqrt{y} = 1+\sqrt{1+x^2}, \tag{3.22}$$

и подстановка (3.22) в (3.21) дает значение интеграла

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

2. Воспользуемся заменой

$$x = \frac{1}{\sqrt{y}}, \tag{3.23}$$

упрощающей подынтегральную функцию. Поскольку $dx = -dy/2y\sqrt{y}$, то

$$I_2 = \int \frac{(x^4-1)dx}{x(x^4+1)} = \int \frac{\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(-\frac{dy}{2y\sqrt{y}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{1}{y^2}+1\right)} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-y^2)dy}{y(1+y^2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1+y^2-2y^2)dy}{y(1+y^2)} = -\frac{1}{2}\left[\int \frac{dy}{y} - \int \frac{2y\,dy}{1+y^2}\right].$$

Для того чтобы не вводить еще одну переменную, во втором интеграле воспользуемся подведением под знак дифференциала, тогда

$$I_2 = -\frac{1}{2}\left[\int \frac{dy}{y} - \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2}\right] = -\frac{1}{2}(\ln|y| - \ln|1+y^2|) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y^2}{y}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|y + \frac{1}{y}\right| + C. \tag{3.24}$$

Вернемся к исходной переменной, воспользовавшись заменой, обратной (3.23). Тогда $y = 1/x^2$ и, следовательно, из (3.24) следует

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln\left|y+\frac{1}{y}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + C.$$

3. Воспользуемся заменой

$$x = 2\ln t, \tag{3.25}$$

поскольку $dx = 2dt/t$, то

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{-x}}} = \int \frac{2dt/t}{\sqrt{1+t^{-2}}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 2\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C. \tag{3.26}$$

Чтобы вернуться к исходной переменной, воспользуемся заменой, обратной (3.25). Тогда $t = e^{x/2}$ и, следовательно,

$$I_3 = 2\ln|t+\sqrt{1+t^2}| + C = 2\ln(e^{x/2} + \sqrt{1+e^x}) + C.$$

4. Воспользуемся заменой

$$x = \frac{2}{t}, \tag{3.27}$$

поскольку $dx = -2dt/t^2$, то

$$I_4 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{-\frac{2dt}{t^2}}{\frac{2}{t}\sqrt{\frac{4}{t^2}-4}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin|t| + C.$$

Чтобы вернуться к исходной переменной, воспользуемся заменой, обратной (3.27), т.е. $t = 2/x$ и, следовательно,

$$I_4 = -\frac{1}{2}\arcsin t + C = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{|x|} + C.$$

Пример 3.11. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad I_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad |x| < a.$$

Решение. Начнем с интеграла I_1, который вычислим двумя способами, соответствующими различным заменам переменных.

1 способ. Введем переменную t заменой

$$x = a \sin t, \tag{3.28}$$

тогда

$$dx = a \cos t\, dt, \quad a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 t, \tag{3.29}$$

и, следовательно,

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos t\, dt}{a \cos t} = \int dt = t + C.$$

Поскольку из соотношения (3.28) следует $t = \arcsin(x/a)$, то

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \tag{3.30}$$

2 способ. Введем переменную t заменой

$$x = a \cos t, \tag{3.31}$$

тогда

$$dx = -a \sin t\, dt, \quad a^2 - x^2 = a^2 \sin^2 t, \tag{3.32}$$

и, следовательно,

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{a \sin t\, dt}{a \sin t} = -\int dt = -t + \bar{C}.$$

Поскольку из соотношения (3.31) следует $t = \arccos(x/a)$, то

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + \bar{C}. \tag{3.33}$$

Выражение (3.33) можно свести к полученному ранее выражению (3.30) с помощью равенства

$$\arcsin \frac{x}{a} + \arccos \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$$

заменой произвольной постоянной $C = \bar{C} + \pi/2$ (см. пример 3.9).

Чтобы вычислить интеграл I_2, воспользуемся заменой (3.28), тогда

$$I_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a^2 \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\Big(t + \frac{1}{2} \sin 2t\Big) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C.$$

Поскольку $\sin t = x/a$ и $t = \arcsin(x/a)$, то

$$\cos t = \cos\Big(\arcsin\frac{x}{a}\Big) = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

и

$$I_2 = \int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\Big(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\Big)+C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Этот же результат можно получить с помощью замены (3.31).

Пример 3.12. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}};\quad I_2 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\quad |x| > a > 0.$$

Решение. Начнем с интеграла I_1, который вычислим тремя способами, соответствующими различным заменам переменных.

1 способ. Введем переменную t заменой

$$x = a\,\mathrm{sh}\,t,\quad a > 0, \tag{3.34}$$

тогда

$$dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt,\quad x^2+a^2 = a^2(\mathrm{sh}^2\,t+1) = a^2\,\mathrm{ch}^2\,t, \tag{3.35}$$

и, следовательно,

$$I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int\frac{a\,\mathrm{ch}\,t\,dt}{a\,\mathrm{ch}\,t} = \int dt = t + C. \tag{3.36}$$

Из соотношения (3.34) следует $t = \mathrm{arsh}(x/a)$, тогда

$$I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathrm{arsh}\,\frac{x}{a} + C. \tag{3.37}$$

Неопределенный интеграл (3.37) можно записать в иной форме. Приняв во внимание, что $\mathrm{sh}\,t = (e^t - e^{-t})/2 = x/a$ или

$$e^{2t} - 2\Big(\frac{x}{a}\Big)e^t - 1 = 0,$$

найдем

$$e^t = \frac{x\pm\sqrt{x^2+a^2}}{a}.$$

Поскольку $e^t > 0$, то $e^t = (x+\sqrt{x^2+a^2})/a > 0$ и

$$t = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln a$$

и, следовательно, из (3.36) получим

$$I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln a + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \bar{C}. \tag{3.38}$$

Этот же результат можно получить из (3.37), если воспользоваться формулой (12.27) разд. «Обратные гиперболические функции» [16], определяющей явный вид

$$\operatorname{arsh}\frac{x}{a} = \ln\Big[\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \Big(\frac{x}{a}\Big)^2}\Big] = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a, \quad a > 0.$$

2 способ. Введем переменную t заменой

$$x = a\operatorname{ctg} t, \quad a > 0, \tag{3.39}$$

тогда

$$dx = -\frac{a}{\sin^2 t}dt, \quad x^2 + a^2 = a^2\Big(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1\Big) = \frac{a^2}{\sin^2 t},$$

и, следовательно,

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\int \frac{(a/\sin^2 t)dt}{a/\sin t} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\Big|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big| + C = \ln\Big|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\Big| + C. \tag{3.40}$$

Формула (3.40) дает дает еще одно, уже тригонометрическое, представление интеграла I_1. Его, как и гиперболическое представление (3.37), можно записать в виде логарифма (3.38). Действительно, поскольку

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)} = \frac{2\cos^2(t/2)}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} = \frac{1 + \cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} + \operatorname{ctg} t = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} + \operatorname{ctg} t,$$

то с учетом (3.39) получим

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} + \operatorname{ctg} t| + C =$$
$$= \ln\Big|\sqrt{1 + \Big(\frac{x}{a}\Big)^2} + \frac{x}{a}\Big| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| - \ln a + C.$$

3 способ. Введем переменную t заменой

$$\sqrt{x^2 + a^2} = t - x. \tag{3.41}$$

Разрешив (3.41) относительно t, получим

$$t = \sqrt{x^2 + a^2} + x. \tag{3.42}$$

Разрешив (3.41) относительно x, найдем

$$x = \frac{t^2 - a^2}{2t}. \tag{3.43}$$

Так как

$$\sqrt{x^2 + a^2} = t - x = t - \frac{t^2 - a^2}{2t} = \frac{t^2 + a^2}{2t}$$

и

$$dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2}dt,$$

то

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\dfrac{t^2+a^2}{2t^2}dt}{\dfrac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C. \tag{3.44}$$

Таким образом, все три замены позволяют свести исходный интеграл I_1 к табличным, которые окончательно можно записать единообразно в форме (3.38). Заметим, что интеграл I_1 был вычислен ранее в примере 3.6 методом подведения под знак дифференциала.

Перейдем теперь к вычислению интеграла I_2. Рассмотрим три способа.

1-й способ. Введем переменную t заменой

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad a > 0, \tag{3.45}$$

тогда

$$dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt, \quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\mathrm{ch}^2\,t-1)} = a\,\mathrm{sh}\,t,$$

и, следовательно,

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\,\mathrm{sh}\,t\,dt}{a\,\mathrm{sh}\,t} = \int dt = t + C.$$

Соотношение (3.45) определяет положительную ветвь обратного гиперболического косинуса (12.27) (см. разд. «Обратные гиперболические функции» [16])

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = t + C = \mathrm{arch}_+\left(\frac{x}{a}\right) + C = \ln\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right] + C, \quad x \geqslant a. \tag{3.46}$$

Аналогично для отрицательной ветви

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = t + C = \mathrm{arch}_-\left(\frac{x}{a}\right) + C = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right| + C, \quad x \leqslant -a. \tag{3.47}$$

Формулы (3.46) и (3.47) можно объединить для $|x| \geqslant a$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{Arch}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right| + C = \\ &= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + \bar{C}, \quad \bar{C} = C - \ln a. \end{aligned} \tag{3.48}$$

2-й способ. Введем переменную t заменой

$$x = \frac{a}{\sin t}, \quad a > 0, \tag{3.49}$$

тогда

$$dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt, \quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = a\frac{\cos t}{\sin t},$$

и, следовательно,

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{-(a\cos t/\sin^2 t)dt}{a\cos t/\sin t} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right| + C. \tag{3.50}$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 3.5 (№ 4). Формулу (3.50) можно представить в виде (3.48). Действительно, из соотношения (3.49) имеем

$$t = \arcsin\frac{a}{x},$$

откуда следует оценка $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$ или

$$\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| < 1. \tag{3.51}$$

С другой стороны, с помощью тригонометрического тождества

$$\frac{a}{x} = \sin t = \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{\cos^2(t/2)+\sin^2(t/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(t/2)}{1+\operatorname{tg}^2(t/2)}$$

получим квадратное уравнение

$$\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} - 2\frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{t}{2} + 1 = 0,$$

откуда с учетом (3.51) найдем

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\dfrac{2x}{a} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{1}{a}(x \pm \sqrt{x^2-a^2}) = \frac{a}{x \mp \sqrt{x^2-a}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a}{x+\sqrt{x^2-a}}, & x > a \\ \dfrac{a}{x-\sqrt{x^2-a}}, & x < -a. \end{cases} \tag{3.52}$$

Подстановка (3.52) в (3.51) дает

$$I_2 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C =$$

$$= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + \bar{C}, \quad |x| > a.$$

3-й способ. Введем переменную t заменой

$$\sqrt{x^2-a^2} = t - x. \tag{3.53}$$

Разрешив (3.53) относительно t, получим

$$t = \sqrt{x^2-a^2} + x. \tag{3.54}$$

Выразим из (3.53) переменную x:

$$x = \frac{t^2+a^2}{2t}. \tag{3.55}$$

Так как

$$\sqrt{x^2-a^2} = t - x = t - \frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t}$$

и

$$dx = \frac{t^2 - a^2}{2t^2}dt,$$

то

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{\frac{t^2 - a^2}{2t^2}dt}{\frac{t^2 - a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C. \quad (3.56)$$

Как и в предыдущем случае, все три замены позволяют свести исходный интеграл I_2 к табличным, которые окончательно можно записать в форме (3.48). Заметим, что интеграл I_2 был вычислен ранее в примере 3.6 методом подведения под знак дифференциала.

Из этого примера следует, что сведение исходного интеграла к табличному возможно с помощью различных подстановок. Ниже мы сформулируем наиболее эффективные подстановки для различных классов подынтегральных функций, рассмотрев предварительно еще один метод интегрирования — интегрирование по частям.

3.3. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется процедура вычисления интеграла по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \quad (3.57)$$

где u и v – дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (3.57) вычисление интеграла $\int u\,dv$ сводится к нахождению другого интеграла: $\int v\,du$. Ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

Теорема 3.1. *Пусть даны две дифференцируемые на* $]a, b[$ *функции* $u(x)$ *и* $v(x)$. *Тогда справедливо соотношение* (3.57).

Доказательство. Действительно,

$$d(uv) = v\,du + u\,dv. \quad (3.58)$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv.$$

Если существует интеграл $\int u\,dv$, то существует и интеграл $\int v\,du$, причём

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv,$$

т.е.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Это и есть формула *интегрирования по частям* (3.57), которая применяется к выражениям, представимым в виде произведения двух сомножителей. При этом в качестве u берётся функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть легко найден. Чтобы удачно разбить подынтегральное выражение на множители, нужна практика и некоторые рекомендации, которые мы сформулируем ниже.

Следствие 3.1.1. Если $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ — взаимно обратные функции и

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3.59}$$

то

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) - C. \tag{3.60}$$

Действительно, в силу свойства 6 из равенства (3.59) следует, что

$$\int f(u)du = F(u) + C, \tag{3.61}$$

где $u = \varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция от x. Положив $u = \varphi(x) = f^{-1}(x)$, из (3.61) найдем

$$\int f(f^{-1}(x))d(f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(x)) + C,$$

а поскольку, согласно определению обратной функции,

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

то

$$\int x\, d(f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(x)) + C.$$

Левую часть этого соотношения по формуле интегрирования по частям (3.57) можно записать как

$$\int x\, d(f^{-1}(x)) = xf^{-1}(x) - \int f^{-1}(x)dx.$$

Тогда

$$xf^{-1}(x) - \int f^{-1}(x)dx = F(f^{-1}(x)) + C,$$

откуда и следует формула

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) - C,$$

совпадающая с формулой (3.60).

Так как критерием существования пары взаимно обратных функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ являются их монотонность и непрерывность [16], то из существования интеграла (3.59) следует существование интеграла (3.60).

$\Diamond$ Если формулу интегрирования по частям (3.57) можно условно назвать интегральным аналогом формулы дифференцирования произведения двух функций, то формулу (3.60) естественно назвать *интегральным аналогом формулы дифференцирования обратной функции.*

$\blacklozenge$ Соотношение (3.60) называется *формулой интегрирования обратной функции.*

Пример 3.13. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int \arcsin x\,dx \quad I_2 = \int \ln x\,dx; \quad I_3 = \int x\ln x\,dx;$$
$$I_4 = \int (x+2)\cos x\,dx; \quad I_5 = \int x^3 e^{x^2}dx; \quad I_6 = \int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}.$$

Решение. *1 способ.* Воспользуемся формулой интегрирования по частям (3.57). Для удобства изложения разбиение подынтегрального выражения на u и dv будем записывать в виде комментариев, выделенных вертикальными линиями. Для первого интеграла существует единственный вариант разбиения:

$$I_1 = \int \arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x, & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Для второго интеграла

$$I_2 = \int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = uv - \int v\,du = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} =$$
$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Для третьего интеграла I_3 существуют два варианта разбиения подынтегрального выражения на u и dv. Рассмотрим оба и оценим эффективность каждого из них:

$$\text{а) } I_3 = \int x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x\,dx, & v = \displaystyle\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C. \qquad (3.62)$$

Простота промежуточных интегралов говорит о целесообразности и эффективности данного разбиения.

Теперь рассмотрим другой вариант разбиения:

$$\text{б) } I_3 = \int x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx; \\ dv = \ln x\,dx, & v = \displaystyle\int \ln x\,dx. \end{matrix} \right|.$$

Как видим, при таком разбиении найти функцию v оказывается затруднительным, и, следовательно, такое разбиение не является целесообразным.

Для четвертого интеграла I_4 также существуют два варианта выбора u и dv. Первый из них:

$$\text{а) } I_4 = \int (x+2)\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x+2, & du = dx \\ dv = \cos x\,dx, & v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= (x+2)\sin x - \int \sin x\, dx = (x+2)\sin x + \cos x + C,$$

является эффективным.

Второй вариант:

$$\text{б) } I_4 = \int (x+2)\cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = \cos x, & du = -\sin x\, dx \\ dv = (x+2)dx, & v = \dfrac{(x+2)^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x+2}{2}\cos x - \int \frac{(x+2)^2}{2}\sin x\, dx.$$

В этом случае функция v находится достаточно просто, однако полученный интеграл

$$\int \frac{(x+2)^2}{2}\sin x\, dx$$

оказывается сложнее, чем исходный I_4. Следовательно, второй вариант выбора u и dv неэффективен, и его использование нецелесообразно.

Для вычисления пятого интеграла используем следующее разбиение:

$$I_5 = \int x^3 e^{x^2} dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2x\, dx \\ dv = xe^{x^2}dx, & v = \dfrac{1}{2}e^{x^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \int xe^{x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C.$$

Можно проверить, что это единственный вариант разбиения подынтегрального выражения на u и dv, приводящий к вычислению интеграла.

Для вычисления интеграла I_6 выберем u и dv следующим образом:

$$I_6 = \int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \begin{vmatrix} u = xe^x, & du = e^x(1+x)dx \\ dv = \dfrac{dx}{(1+x)^2}, & v = -\dfrac{1}{1+x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x(1+x)dx}{1+x} = -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

2 способ. Воспользуемся формулой интегрирования обратной функции (следствие 3.1.1). С ее помощью два первых интеграла легко вычисляются по формуле (3.60).

Действительно, если $f(x) = \sin x$, то $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Тогда, согласно (3.60) и с учетом того, что

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

имеем

$$I_1 = \int \arcsin x\, dx = x\arcsin x + \cos(\arcsin x) - C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} - C.$$

Этот результат с точностью до знака произвольной постоянной совпадает с результатом, полученным по формуле интегрирования по частям (3.57).

Аналогично, если $f(x) = e^x$ и $f^{-1}(x) = \ln x$, то, согласно (3.60) и с учетом того, что

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

имеем

$$I_2 = \int \ln x\,dx = x\ln x - e^{\ln x} - C = x\ln x - x - C.$$

Разумеется, и этот интеграл совпадает с найденным по формуле (3.57).

Возвращаясь к формуле интегрирования по частям (3.57), можно заметить, что если интеграл в правой части формулы не сводится к табличному, но удовлетворяет условиям теоремы 3.1, то к нему снова можно применить формулу интегрирования по частям. Очевидно, что эту формулу можно применять столько раз, сколько необходимо для сведения интеграла к табличному.

Пример 3.14. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int x^2 e^x dx; \quad I_2 = \int (\ln x)^2 dx; \quad I_3 = \int (\arcsin x)^2 dx.$$

Решение. Двукратное применение формулы интегрирования по частям дает

$$I_1 = \int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - \int 2xe^x dx =$$
$$= \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{vmatrix} = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] =$$
$$= x^2e^x - 2[xe^x - e^x] + C = e^x[x^2 - 2x + 2] + C.$$

Аналогично вычисляется второй интеграл:

$$I_2 = \int (\ln x)^2 dx = \begin{vmatrix} u = (\ln x)^2, & du = 2(\ln x)\dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x(\ln x)^2 - \int 2(\ln x)\frac{1}{x}x\,dx =$$
$$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x(\ln x)^2 - 2\left[x\ln x - \int dx\right] =$$
$$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - x] + C.$$

Третий интеграл также вычисляется с помощью двукратного интегрирования по частям:

$$I_3 = \int (\arcsin x)^2 dx = \begin{vmatrix} u = (\arcsin x)^2, & du = \dfrac{2\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} =$$
$$= x(\arcsin x)^2 - \int \frac{x(2\arcsin x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} u = \arcsin x, & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \dfrac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = -2\sqrt{1-x^2} \end{vmatrix} =$$
$$= x(\arcsin x)^2 - \left[-2\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int (2\sqrt{1-x^2})\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$$
$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int dx =$$
$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

Следующие примеры иллюстрируют возможность комбинирования интегрирования по частям с рассмотренными ранее другими методами интегрирования.

Пример 3.15. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int \frac{x}{2}\sin\sqrt{x}dx; \quad I_2 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}; \quad I_3 = \int \sin 2x \ln(\cos x)dx.$$

Решение. Для вычисления интеграла I_1 сначала воспользуемся заменой переменной:

$$x = t^2, \quad dx = 2t\,dt, \tag{3.63}$$

тогда

$$I_1 = \int \frac{x}{2}\sin\sqrt{x}dx = \int \frac{t^2}{2}(\sin t)2t\,dt = \int t^3 \sin t\,dt. \tag{3.64}$$

Теперь трехкратное интегрирование по частям дает

$$I_1 = \int t^3\sin t\,dt = \begin{vmatrix} u = t^3, & du = 3t^2dt \\ dv = \sin t\,dt, & v = -\cos t \end{vmatrix} = -t^3\cos t + 3\int t^2\cos t\,dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t^2, & du = 2t\,dt \\ dv = \cos t\,dt, & v = \sin t \end{vmatrix} = -t^3\cos t + 3\Big[t^2\sin t - 2\int t\sin t\,dt\Big] =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t, & du = dt \\ dv = \sin t\,dt, & v = -\cos t \end{vmatrix} = -t^3\cos t + 3t^2\sin t - 6\Big[-t\cos t + \int \cos t\,dt\Big] =$$

$$= -t^3\cos t + 3t^2\sin t + 6t\cos t - 6\sin t + C.$$

Возвратившись к исходной переменной $t = \sqrt{x}$, можем записать

$$I_1 = -\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 3x\sin\sqrt{x} + 6\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 6\sin\sqrt{x} + C.$$

Для интеграла I_2, прежде чем использовать интегрирование по частям, проведем тождественные преобразования вида

$$I_2 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\Big[\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^2}\Big] = \frac{1}{a^2}(J_1 - J_2), \tag{3.65}$$

где интеграл

$$J_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_1 \tag{3.66}$$

является табличным, а интеграл J_2 вычислим интегрированием по частям:

$$J_2 = \int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^2} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{(a^2+x^2)^2}, & v = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{1}{2(a^2+x^2)} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} = -\frac{x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_2. \tag{3.67}$$

Подстановка (3.66) и (3.67) в (3.65) дает

$$I_2 = \frac{1}{a^2}\Big[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_1 + \frac{x}{2(a^2+x^2)} - \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - C_2\Big] =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C,$$

где C — произвольная постоянная: $C = (C_1 - C_2)/a^2$.

Для интеграла I_3 используем тригонометрическое равенство $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и замену переменной

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x\,dx.$$

Тогда можно записать

$$I_3 = \int \sin 2x \ln(\cos x)dx = \int 2\sin x\cos x \ln(\cos x)dx = -2\int t\ln t\,dt.$$

Последний интеграл вычислен в примере 3.13 и определяется формулой (3.62), поэтому

$$I_3 = -2\int t\ln t\,dt = -2\Big[\frac{t^2}{2}\Big(\ln t - \frac{1}{2}\Big)\Big] + C = t^2\Big(\frac{1}{2} - \ln t\Big) + C,$$

и с учетом того, что $t = \cos x$, получим

$$I_3 = \int \sin 2x \ln(\cos x)dx = \cos^2 x\Big(\frac{1}{2} - \ln(\cos x)\Big) + C.$$

Процедуру многократного интегрирования по частям обобщает следующая теорема.

Теорема 3.2 (обобщенная формула интегрирования по частям). *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ на промежутке $]a, b[$ непрерывно дифференцируемы вплоть до $(n+1)$-го порядка включительно, то справедливо соотношение*

$$\int u(x)\,d(v^{(n)}(x)) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) + (-1)^{n+1}\int d(u^{(n)}(x))v(x). \quad (3.68)$$

Соотношение (3.68) называется *обобщенной формулой интегрирования по частям.*

Доказательство. Применив к левой части (3.68) формулу интегрирования по частям (3.57), получим

$$\int u\,d(v^{(n)}) = uv^{(n)} - \int du\,v^{(n)}, \quad (3.69)$$

а поскольку

$$du\,v^{(n)} = u'dx\,v^{(n)} = u'\,d(v^{(n-1)}),$$

то (3.69) можно записать в виде

$$\int u\,d(v^{(n)}) = uv^{(n)} - \int u'\,d(v^{(n-1)}).$$

Применив к интегралу в правой части еще раз формулу интегрирования по частям (3.57), найдем

$$\int u\,d(v^{(n)}) = uv^{(n)} - \Big[u'v^{(n-1)} - \int d(u')\,v^{(n-1)}\Big] = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int u''d(v^{(n-2)}).$$

После n-кратного применения формулы (3.57) придем к обобщенной формуле интегрирования по частям (3.68).

Следствие 3.2.1. Формулу (3.68) можно записать в виде

$$\int u(x)v^{(n+1)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}(x)v(x)\,dx =$$

$$= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} + ... + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx. \quad (3.70)$$

Следствие 3.2.2. Если функция $u(x)$ представляет собой полином степени n, т.е. $u(x) = P_n(x)$, то

$$\int P_n(x)v^{(n+1)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P_n^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) + C. \quad (3.71)$$

Соотношение (3.71) непосредственно следует из (3.69), поскольку $P_n^{(n+1)}(x) = 0$.

Еще одну возможность использования формулы (3.70) раскрывают два следствия, которые зачастую называют *циклическим интегрированием по частям.*

♦ Интеграл $\int u\,dv$ называется *циклическим порядка* k, если существует такая функция $w(x)$, что при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ справедлива формула

$$\int u^{(k)}v\,dx = w(x) + \alpha\int uv^{(k)}dx. \quad (3.72)$$

Циклические интегралы 1-го порядка называются просто *циклическими.*

Следствие 3.2.3. Формулу (3.70) при $n = 0$, т.е.

$$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx, \quad (3.73)$$

для циклических интегралов 1-го порядка можно преобразовать к виду

$$\int uv'\,dx = \frac{1}{1+\alpha}[uv - w(x)] + C, \quad \alpha \neq -1. \quad (3.74)$$

Действительно, при $k = 1$ из (3.72) найдем

$$\int u'v\,dx = w(x) + \alpha\int uv'dx,$$

подставив которое в (3.73), получим цикл, где исходный интеграл с разными коэффициентами ($\alpha \neq -1$) присутствует в обеих частях равенства. Разрешив его, найдем выражение для исходного интеграла с точностью до произвольной постоянной C в виде (3.74).

Следствие 3.2.4. Формулу (3.70) при $n = 1$, т.е.

$$\int uv''dx = uv' - u'v + \int u''v\,dx, \quad (3.75)$$

для циклических интегралов 2-го порядка можно преобразовать к виду

$$\int uv''\,dx = \frac{1}{1-\alpha}[uv' - u'v + w(x)] + C, \quad \alpha \neq 1. \quad (3.76)$$

Действительно, при $k = 2$ из (3.72) найдем

$$\int u''v\,dx = w(x) + \alpha \int uv''dx,$$

подставив которое в (3.75), получим цикл, где исходный интеграл с разными коэффициентами ($\alpha \neq -1$) присутствует в обеих частях равенства. Разрешив его, найдем выражение для исходного интеграла с точностью до произвольной постоянной C в виде (3.76).

Пример 3.16. Исходя из обобщенной формулы интегрирования по частям, доказать справедливость формул

$$\int P_n(x)e^{ax}dx = \Big[P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{a} + \frac{P_n''(x)}{a^2} + ... + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n}\Big]\frac{e^{ax}}{a} + C; \tag{3.77}$$

$$\int P_n(x)\cos ax\,dx = R_n(x)\frac{\sin ax}{a} + Q_n(x)\frac{\cos ax}{a} + C; \tag{3.78}$$

$$\int P_n(x)\sin ax\,dx = Q_n(x)\frac{\sin ax}{a} + R_n(x)\frac{\cos ax}{a} + C, \tag{3.79}$$

где $P_n(x)$ — полином степени n:

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + ... + p_nx^n, \tag{3.80}$$

а

$$R_n(x) = P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - ...; \tag{3.81}$$

$$Q_n(x) = \frac{P_n'(x)}{a} - \frac{P_n'''(x)}{a^3} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5} - ... . \tag{3.82}$$

Решение. Положив в (3.70)

$$v^{(n+1)}(x) = e^{ax}, \tag{3.83}$$

будем иметь

$$v^{(n)}(x) = \frac{e^{ax}}{a}, \quad v^{(n-1)}(x) = \frac{e^{ax}}{a^2}, \quad ..., \quad v^{(n-k)}(x) = \frac{e^{ax}}{a^{k+1}}, \quad v(x) = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}}. \tag{3.84}$$

Подстановка (3.83), (3.84) в (3.70) и дает формулу (3.77).

Положив в (3.70)

$$v^{(n+1)}(x) = \cos ax, \tag{3.85}$$

будем иметь

$$v^{(n)}(x) = \frac{\sin ax}{a}, \quad v^{(n-1)}(x) = -\frac{\cos ax}{a^2}, \quad v^{(n-2)}(x) = -\frac{\sin ax}{a^3}, \quad ... . \tag{3.86}$$

Подстановка (3.85), (3.86) в (3.70) дает формулу (3.78).

Наконец, положив в (3.70)

$$v^{(n+1)}(x) = \sin ax, \tag{3.87}$$

будем иметь

$$v^{(n)}(x) = -\frac{\cos a}{a}, \quad v^{(n-1)}(x) = -\frac{\sin ax}{a^2}, \quad v^{(n-2)}(x) = \frac{\cos ax}{a^3}, \quad ... . \tag{3.88}$$

и подстановка (3.87), (3.88) в (3.70) дает формулу (3.79).

Пример 3.17. Вычислить

$$I_1 = \int (x^4 + 4x^3 + 2)e^{2x}dx; \quad I_2 = \int (x^4 + 4x^3 + 2)\cos 2x\,dx;$$
$$I_3 = \int (x^4 + 4x^3 + 2)\sin 2x\,dx.$$

Решение. Поскольку подынтегральные функции содержат полиномы четвертой степени, то интегралы можно свести к табличным посредством четырехкратного интегрирования по частям или с помощью следствия из обобщенной формулы интегрирования по частям в виде (3.70). Удобнее, однако, воспользоваться соотношениями (3.77)–(3.79), позволяющими вычислять интегралы именно данного вида. Действительно, поскольку

$$P_4(x) = x^4 + 4x^3 + 2, \tag{3.89}$$

то

$$P_4'(x) = 4x^3 + 12x^2,\ P_4''(x) = 12x^2 + 24x,\ P_4'''(x) = 24x + 24,\ P_4^{(4)}(x) = 24, \tag{3.90}$$

и, следовательно, согласно (3.77), с учетом того, что $a = 2$, найдем

$$I_1 = \int (x^4 + 4x^3 + 2)e^{2x}dx = \Big[P_4(x) - \frac{P_4'(x)}{2} + \frac{P_4''(x)}{4} - \frac{P_4'''(x)}{8} + \frac{P_4^{(4)}(x)}{16}\Big]\frac{e^{2x}}{2} + C =$$
$$= \Big\{x^4 + 4x^3 + 2 - \frac{1}{2}[4x^3 + 12x^2] + \frac{1}{4}[12x^2 + 24x] - \frac{1}{8}[24x + 24] + \frac{1}{16}24\Big\}\frac{e^{2x}}{2} + C =$$
$$= \Big(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 3x + \frac{1}{2}\Big)\frac{e^{2x}}{2} + C.$$

Для интегралов I_2, I_3, исходя из (3.89), (3.90), по формулам (3.81), (3.82) вычислим величины

$$R_4(x) = P_4(x) - \frac{P_4''(x)}{a^2} + \frac{P_4^{(4)}(x)}{a^4} = (x^4 + 4x^3 + 2) - \frac{1}{4}(4x^3 + 12x^2) + \frac{1}{16}24 =$$
$$= x^4 + 4x^3 - 3x^2 - \frac{5}{8}; \tag{3.91}$$
$$Q_4(x) = \frac{P_4'(x)}{a} - \frac{P_4'''(x)}{a^3} = \frac{1}{4}(4x^3 + 12x^2) - \frac{1}{8}(24x + 24) = 2x^3 + 6x^2 - 3x - 3. \tag{3.92}$$

Тогда подстановка (3.91), (3.92) в (3.78) дает

$$I_2 = \int (x^4 + 4x^3 + 2)\cos 2x\,dx =$$
$$= \Big(x^4 + 4x^3 - 3x^2 - \frac{5}{8}\Big)\frac{\sin 2x}{2} + (2x^3 + 6x^2 - 3x - 3)\frac{\cos 2x}{2} + C,$$

и, соответственно, подстановка (3.91), (3.92) в (3.79) дает

$$I_3 = \int (x^4 + 4x^3 + 2)\sin 2x\,dx =$$
$$= (2x^3 + 6x^2 - 3x - 3)\frac{\sin 2x}{2} - \Big(x^4 + 4x^3 - 3x^2 - \frac{5}{8}\Big)\frac{\cos 2x}{2} + C.$$

Перейдем теперь к рассмотрению примеров, иллюстрирующих применение циклического интегрирования по частям.

Пример 3.18. Вычислить

$$I_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx; \quad I_2 = \int \sqrt{x^2 + a}dx.$$

Решение. В данном случае однократное интегрирование по частям цели не достигает. Действительно, единственно возможное разбиение подынтегрального выражения дает

$$I_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 - x^2}, & du = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx; \tag{3.93}$$

$$I_2 = \int \sqrt{x^2 + a}dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{x^2 + a}, & du = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 + a}}. \tag{3.94}$$

Интегралы в правых частях (3.93) и (3.94) не проще исходных, но могут быть сведены к ним тождественными преобразованиями:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{-a^2 + a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx =$$

$$= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I_1, \tag{3.95}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}}dx = \int \sqrt{x^2 + a}dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} =$$

$$= I_2 - a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|. \tag{3.96}$$

Подстановка (3.95) в (3.93), а (3.96) в (3.94) дает выражения

$$I_1 = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I_1;$$
$$I_2 = x\sqrt{x^2 + a} - I_2 + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|,$$

которые можно рассматривать как линейные алгебраические уравнения относительно величин I_1 и I_2, соответственно. Отсюда с точностью до произвольной постоянной получим

$$I_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\Big[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\Big] + C;$$
$$I_2 = \int \sqrt{x^2 + a}dx = \frac{1}{2}\big[x\sqrt{x^2 + a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|\big] + C.$$

Пример 3.19. Вычислить

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin^3 x}; \quad I_2 = \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

Решение. Проинтегрировав по частям, найдем

$$I_1 = \frac{dx}{\sin^3 x} = \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{\sin x} & du = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} & V = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right| = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - \int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}dx.$$

Интеграл в правой части равенства не проще исходного, но с учетом соотношения

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

его можно привести к виду

$$I_1 = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - \int \Big[\frac{1}{\sin^2 x} - 1\Big]\frac{dx}{\sin x} = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \int \frac{dx}{\sin x}.$$

С учетом результатов примера 3.5 запишем

$$I_1 = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - I_1 + \ln\Big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|.$$

Следовательно,

$$I_1 = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\Big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big| + C.$$

Аналогично

$$I_2 = \frac{dx}{\cos^3 x} = \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{\cos x} & du = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos x}dx.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

то

$$I_2 = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int \Big[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big]\frac{dx}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}.$$

С учетом результатов примера 3.5 запишем

$$I_2 = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - I_2 + \ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\Big)\Big|.$$

Следовательно,

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\Big)\Big| + C.$$

Следующие примеры иллюстрируют образование цикла с помощью двукратного интегрирования по частям.

Пример 3.20. Вычислить

$$I = \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{3/2}}dx.$$

Решение. В данном случае важным является правильное разбиение подынтегрального выражения. Проведем его следующим образом:

$$I = \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & du = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}dx = \dfrac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \\ dv = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx, & v = \displaystyle\int e^{\operatorname{arctg} x} d(\operatorname{arctg} x) = e^{\operatorname{arctg} x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & du = \dfrac{-x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} \\ dv = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx, & v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} - \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} + \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx \right] = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}(x-1) - I.$$

Таким образом, в результате двукратного интегрирования по частям получим соотношение

$$I = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} - I,$$

откуда

$$I = \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

Циклическое интегрирование по частям оказывается эффективным не только при использовании для исходного интеграла одного уравнения, но и системы соответствующих уравнений, как в следующих примерах.

Пример 3.21. Вычислить

$$I_1 = \int e^{ax} \sin bx\, dx, \quad I_2 = \int e^{ax} \cos bx\, dx. \tag{3.97}$$

Решение. Рассмотрим несколько способов вычисления этих интегралов.

1-й способ. В каждом интеграле (3.97) проведем однократное интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^{ax} \sin bx\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin bx, & du = b\cos bx\, dx \\ dv = e^{ax}dx, & v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\, dx; \\ I_2 &= \int e^{ax} \cos bx\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos bx, & du = -b\sin bx\, dx \\ dv = e^{ax}dx, & v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Полученные соотношения можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I_2; \\ I_2 &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_1 \end{aligned} \tag{3.99}$$

и рассматривать их как алгебраическую систему для неизвестных величин I_1 и I_2:

$$\begin{aligned} &I_1 + \frac{b}{a} I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx; \\ &\frac{b}{a} I_1 - I_2 = -\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Решение этой системы, например, методом Крамера с учетом того, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{b}{a} & -1 \end{vmatrix} = -\Big(1 + \frac{b^2}{a^2}\Big) = -\frac{a^2+b^2}{a^2};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} e^{ax} \sin bx & \dfrac{b}{a} \\ -\dfrac{1}{a} e^{ax} \cos bx & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2}(a \sin bx - b \cos x) e^{ax};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{a} e^{ax} \sin bx \\ \dfrac{b}{a} & -\dfrac{1}{a} e^{ax} \cos bx \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2}(a \cos bx + b \sin x) e^{ax},$$

дает значения интегралов

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

с точностью до произвольных постоянных C_1, C_2, и, стало быть,

$$\begin{aligned} &I_1 = \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) + C_1; \\ &I_2 = \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx) + C_2. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Эти формулы можно рассматривать как дополнение к приведенной выше таблице интегралов.

2-й способ. При необходимости вычислить один из интегралов (3.97) может показаться, что 1-й способ является весьма затратным из-за работы сразу с обоими интегралами, в то время как хотелось бы провести интегрирование по частям только для одного из интегралов. Но, как следует из формул (3.98), однократное использование этого приема, например, для первого интеграла цели не достигает, и требуется еще одно интегрирование по частям. Как и для (3.98), можно записать

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}\Big(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_1\Big) = \\ &= \frac{1}{a^2} e^{ax}(a \sin bs - b \cos bx) - \frac{b^2}{a^2} I_1, \end{aligned}$$

откуда

$$\Big(1 + \frac{b^2}{a^2}\Big) I_1 = \frac{1}{a^2} e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)$$

и, следовательно,

$$I_1 = \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a \sin bx - b \cos x) + C_1,$$

что совпадает с (3.101). Подстановкой первого уравнения (3.100) во второе вычисляется I_2.

3-й способ. В этом случае вычисление одного из интегралов (3.97) никак не связано с вычислением другого. Действительно, в силу особенностей подынтегральных функций $\{(e^{ax})' = ae^{ax}, (\sin bx)' = b\cos bx\}$ результат интегрирования можно искать в виде

$$I_2 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}(A\sin bx + B\cos bx) + C_2, \tag{3.102}$$

где A и B — неизвестные (неопределенные) коэффициенты, которые можно найти, воспользовавшись определением первообразной:

$$\left(\int e^{ax}\cos bx\,dx\right)' = [e^{ax}(A\sin bx + B\cos bx) + C_2]' \tag{3.103}$$

или

$$e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}[a(A\sin bx + B\cos bx) + b(A\cos bx - B\sin bx)].$$

Отсюда

$$(aA - bB)\sin bx + (aB + bA)\cos bx = \cos bx$$

и, следовательно,

$$aA - bB = 0, \quad aB + bA = 1.$$

Решения этой системы:

$$A = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad B = \frac{b}{a^2+b^2},$$

и их подстановка в (3.102) дает значение

$$I_2 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin x) + C_2,$$

совпадающее с (3.101). Аналогично находится и I_1.

Пример 3.22. Вычислить

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Решение. Результат интегрирования методом неопределенных коэффициентов A и B можно искать в виде

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = e^{2x}(A\sin 3x - B\cos 3x) + C. \tag{3.104}$$

Аналогично (3.103) найдем

$$\left(\int e^{ax}\sin bx\,dx\right)' = 2(A\sin 3x + B\cos 3x) + 3(A\cos 3x - B\sin 3x) = \sin 3x,$$

откуда

$$2A - 3B = 1, \quad 2B + 3A = 0,$$

и, следовательно,

$$A = \frac{2}{13}, \quad B = -\frac{3}{13}.$$

Подстановка этих значений в (3.104) дает

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

Важно отметить, что метод интегрирования по частям иногда позволяет получить рекуррентные соотношения, с помощью которых удается вычислить исходный интеграл. Проиллюстрируем эту возможность следующим примером.

Пример 3.23. Показать, что для интегралов

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1,\ a \neq 0,$$

справедлива рекуррентная формула

$$I_n = \pm\frac{1}{2a^2(n-1)}\Big[\frac{x}{(x^2 \pm a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x)\Big], \qquad (3.105)$$

и с ее помощью вычислить интеграл

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+9)^3}.$$

Решение. Исходный интеграл со знаком плюс в знаменателе с помощью тождественных преобразований можно записать как разность

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{\frac{1}{a^2}(a^2 + x^2 - x^2)}{(x^2+a^2)^n}dx = \\ &= \frac{1}{a^2}\Big[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\Big]. \end{aligned} \qquad (3.106)$$

Во втором интеграле (3.106) проведем однократное интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} = \\ &= \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}, & v = \displaystyle\int \frac{d(x^2+a^2)}{2(x^2+a^2)^n} = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{matrix} \right| = \\ &= -\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \\ &= -\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}, \end{aligned} \qquad (3.107)$$

и результат интегрирования подставим в (3.106). Тогда

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2}\Big[I_{n-1} + \frac{x}{2(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\Big] = \\ &= \frac{1}{2a^2(n-1)}\Big[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x)\Big], \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (3.105).

Аналогично доказывается формула (3.105) для интеграла I_n со знаком минус.

Теперь перейдем к вычислению интеграла I_3. Воспользовавшись формулой (3.105), получим

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+3^2)^3} = \frac{1}{2\cdot 9\cdot 2}\Big[\frac{x}{(x^2+9)^2} + (6-3)I_2\Big].$$

Аналогично

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+3^2)^2} = \frac{1}{2\cdot 9\cdot 1}\Big[\frac{x}{x^2+9} + (4-3)I_1\Big],$$

а поскольку

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C,$$

то

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+3^2)^2} = \frac{1}{18}\Big[\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C\Big];$$
$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+3^2)^3} = \frac{1}{36}\Big\{\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{6}\Big[\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C\Big]\Big\}.$$

Интегрирование по частям завершает перечень методов интегрирования. Следующим нашим шагом будет рассмотрение приложений этих методов к вычислению неопределенных интегралов с подынтегральными функциями различных классов. Начнем с одного обширного класса интегрируемых функций: рациональных дробей. Их рассмотрение мы предварим интегрированием некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен.

4. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь интегралов вида

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c} \tag{4.1}$$

и

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad I_4 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{4.2}$$

Именно интегралы вида (4.1) потребуются при рассмотрении интегрирования рациональных дробей. Интегралы вида (4.2) включены сюда по той простой причине, что по аналогии с интегралами вида (4.1) они сводятся к табличным.

В квадратном трехчлене, присутствующем во всех четырех интегралах, выделим полный квадрат:

$$ax^2+bx+c = a[x^2+px+q] = a\Big[\Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{p^2}{4} - q\Big)\Big], \quad b = ap,\ c = aq, \tag{4.3}$$

тогда интеграл I_1 с помощью замены

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt \tag{4.4}$$

запишется как

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2-(p^2/4-q)}. \tag{4.5}$$

Этот интеграл является табличным и в зависимости от величины $p^2/4-q$ имеет следующие первообразные:

1) при $\dfrac{p^2}{4}-q=0$

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{at}+C;$$

2) при $\dfrac{p^2}{4}-q=r^2>0$

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2-r^2} = -\frac{1}{2ar}\ln\left|\frac{t-r}{t+r}\right|+C;$$

3) при $\dfrac{p^2}{4}-q=-r^2<0$

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+r^2} = \frac{1}{ar}\operatorname{arctg}\frac{t}{r}+C.$$

Возвратившись к исходной переменной (4.4), все три случая можно объединить в одну формулу

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a(x+p/2)}+C & \text{при } \dfrac{p^2}{4}-q=0; \\ -\dfrac{1}{2a\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}}\ln\left|\dfrac{x+\dfrac{p}{2}-\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}}{x+\dfrac{p}{2}+\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}}\right|+C & \text{при } \dfrac{p^2}{4}-q>0; \\ \dfrac{1}{a\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\right)+C & \text{при } \dfrac{p^2}{4}-q<0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Интеграл I_2 с помощью (4.3) и (4.4) можно выразить через интеграл I_1 следующим образом:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{A(t-p/2)+B}{a[t^2-(p^2/4-q)]}dt = \\ &= \frac{A}{a}\int \frac{t\,dt}{t^2-(p^2/4-q)} + \Big(B-A\frac{p}{2}\Big)\int \frac{dt}{a[t^2-(p^2/4-q)]} = \\ &= \frac{A}{2a}\int \frac{d\Big[t^2-\Big(\dfrac{p^2}{4}-q\Big)\Big]}{t^2-\Big(\dfrac{p^2}{4}-q\Big)} + \Big(B-A\frac{p}{2}\Big)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \\ &= \frac{A}{2a}\ln\Big|t^2-\Big(\frac{p^2}{4}-q\Big)\Big| + \Big(B-A\frac{p}{2}\Big)I_1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Чтобы вычислить интеграл I_3, воспользуемся формулой (4.3) и заменой (4.4). Тогда

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{a\Big[t^2 - \Big(\dfrac{p^2}{4} - q\Big)\Big]}}.$$

Этот интеграл является табличным и при $a > 0$ дает

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \Big(\dfrac{p^2}{4} - q\Big)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\Big|t + \sqrt{t^2 - \Big(\frac{p^2}{4} - q\Big)}\Big| + C;$$

при $a < 0$ и условии $p^2/4 - q > 0$, соответственно,

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{\Big(\dfrac{p^2}{4} - q\Big) - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{t}{\sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}} + C.$$

Возвратившись к исходной переменной, обе формулы можно объединить в одну:

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\Big|x + \dfrac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\Big| + C, & a > 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \dfrac{x + p/2}{\sqrt{p^2/4 - q}} + C, & a < 0,\ \dfrac{p^2}{4} - q > 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Интеграл I_4 можно выразить через I_3 либо с помощью (4.3) и (4.4), как в (4.7), либо следующим образом:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{A}{2a} \frac{(2ax + b - b + B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \Big(B - \frac{Ab}{2a}\Big) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \Big(B - \frac{Ab}{2a}\Big) I_3 = \\ &= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \Big(B - \frac{Ab}{2a}\Big) I_3. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Пример 4.1. Вычислить

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x^2+8x+40}; \quad I_2 = \int \frac{2x+5}{24+6x-3x^2} dx.$$

Решение. Для интеграла I_1 выделим полный квадрат (4.3):

$$2x^2+8x+40 = 2(x^2+8x+20) = 2(x^2+4x+4-4+20) = 2[(x+2)^2+16]. \tag{4.10}$$

Замена (4.4):

$$x + 2 = t, \quad dx = dt, \tag{4.11}$$

с учетом (4.10) приводит интеграл I_1 к табличному виду:

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x^2+8x+40} = \int \frac{dt}{2(t^2+16)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+4^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.$$

Выделив, в свою очередь, полный квадрат в интеграле I_2, получим

$$24+6x-3x^2 = -3(x^2-2x-8) = -3(x^2-2x+1-1-8) = -3[(x-1)^2-9]. \quad (4.12)$$

Теперь замена

$$x-1=t, \quad dx=dt \quad (4.13)$$

с учетом (4.12) позволяет записать

$$I_2 = \int \frac{2x+5}{24-6x-3x^2}dx = \int \frac{2(t+1)+5}{-3(t^2-9)}dt = -\frac{2}{3}\int \frac{t\,dt}{t^2-9} - \frac{7}{3}\int \frac{dt}{t^2-3^2} =$$
$$= -\frac{2}{6}\int \frac{d(t^2-9)}{t^2-9} - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| = -\frac{1}{6}\left[2\ln|t^2-9| - \frac{7}{3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right] + C =$$
$$= -\frac{1}{6}\left[2\ln|x^2-2x-8| - \frac{7}{3}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|\right] + C.$$

Пример 4.2. Вычислить

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}}; \quad I_4 = \int \frac{x+5}{\sqrt{24+6x-3x^2}}dx.$$

Решение. Использование соотношений (4.10) и (4.11) из примера 4.1:

$$2x^2+8x+40 = 2[(x+2)^2+16], \quad x+2=t, \quad dx=dt,$$

позволяет записать интеграл I_3 в виде табличного:

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2[(x+2)^2+16]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|t+\sqrt{t^2+16}| + C.$$

Возвратившись к исходной переменной $x+2=t$, получим

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|t+\sqrt{t^2+16}| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+20}| + C.$$

Использование соотношений (4.12) и (4.13) из примера 4.1:

$$24+6x-3x^2 = -3[(x-1)^2-9], \quad x-1=t, \quad dx=dt$$

позволяет записать интеграл I_4 в виде

$$I_4 = \int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{24-6x-3x^2}} = \int -\frac{\frac{1}{6}(-6x+6-6)+5}{\sqrt{24-6x-3x^2}}dx =$$
$$= -\frac{1}{6}\int \frac{(-6x-6)dx}{\sqrt{24-6x-3x^2}} + 6\int \frac{dx}{\sqrt{24-6x-3x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{d(24-6x-3x^2)}{\sqrt{24-6x-3x^2}} + 6\int \frac{dt}{\sqrt{3(9-t^2)}} =$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{24-6x-3x^2} + \frac{6}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{3} + C.$$

Возвратившись к исходной переменной $x-1=t$, получим

$$I_4 = \int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{24-6x-3x^2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{24-6x-3x^2} + \frac{6}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{3} + C.$$

5. Интегрирование дробно-рациональных функций

5.1. Разложение целой рациональной функции на простейшие множители

♦ *Целой рациональной функцией*, или *полиномом* (*многочленом*) n-ой степени относительно переменной x, называется функция вида

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n = \sum_{k=0}^{n} p_kx^k, \quad n = \overline{0,\infty}, \tag{5.1}$$

где p_k – коэффициенты полинома. Коэффициенты и переменные могут принимать как действительные, так и комплексные значения. Ниже мы ограничимся рассмотрением только вещественных коэффициентов.

♦ Число $x = x_1$, при котором полином (5.1) обращается в нуль ($P_n(x_1) = 0$), называется *корнем полинома.*

♢ Корень x_1 может быть как вещественным ($x_1 \in \mathbb{R}$), так и комплексным ($x_1 \in \mathbb{C}$).

Приведем некоторые свойства многочленов. Поскольку корректные доказательства этих свойств возможно лишь в курсе комплексного анализа [1], то мы сформулируем их без доказательств.

Свойство 1. Любой полином (5.1) имеет по крайней мере один корень, т.е. его можно представить произведением

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x), \tag{5.2}$$

где x_1 – корень полинома $P_n(x)$, а $Q_{n-1}(x)$ – некоторый полином степени $(n-1)$.

Свойство 2 (разложение полинома на множители). Любой полином (5.1) можно представить произведением

$$P_n(x) = p_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = p_n\prod_{k=1}^{n}(x-x_k), \tag{5.3}$$

где x_k — корни полинома $P_n(x)$, а p_n — коэффициент полинома (5.1) при старшей степени.

Действительно, можно воспользоваться соотношением (5.1) и снова представить полином $Q_{n-1}(x)$ из (5.2) произведением

$$Q_{n-1}(x) = (x - x_2)R_{n-2}(x), \tag{5.4}$$

где x_2 – корень полинома $Q_{n-1}(x)$, а значит, и $P_n(x)$; соответственно $R_{n-2}(x)$ – некоторый полином степени $(n-2)$. Подстановка (5.4) в (5.2) дает

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)R_{n-2}(x). \tag{5.5}$$

Продолжив аналогичным образом, после n-кратного применения формулы (5.2) получим разложение

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})T_1(x) = \\ &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(p_nx-p_nx_n) = \\ &= p_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n), \end{aligned}$$

совпадающее с (5.3).

Из разложения (5.3) очевидным образом вытекает следующее свойство.

Свойство 3. Полином P_n (5.1) не может иметь более n корней.

Из свойства 3 следует, что если все корни полинома различны, то он имеет ровно n различных корней. Однако, если некоторые из них совпадают, то число различных корней уменьшается. В этом случае удобно ввести следующую характеристику корня.

♦ Корень x_k полинома (5.1) называется *простым*, или *однократным*, если в разложение (5.2) множитель $(x-x_k)$ входит один раз. Если же этот корень в разложение (5.2) входит r_k раз, то корень x_k называется *корнем кратности* r_k.

С учетом кратности корней разложение (5.3) полинома на множители можно записать в эквивалентной форме.

Пусть r_k — кратность k-го корня x_k полинома (для простого корня $r_k = 1$), тогда для полинома (5.1) справедливо разложение

$$P_n(x) = p_n(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_l)^{r_l} = p_n\prod_{k=1}^{l}(x-x_k)^{r_k}, \tag{5.6}$$

причем $r_1 + r_2 + ... + r_l = n$.

Кроме вещественных корней полином может иметь комплексные корни. В этом случае важным является следующее свойство.

Свойство 4. Если $x = x_1 = a_1 + ib_1$ (a_1, b_1 – вещественные числа, $b_1 \neq 0$) – комплексный корень полинома (5.1), то и комплексно сопряженное число $x_2 = x_1^* = a_1 - ib_1$ также является корнем этого полинома. Другими словами, комплексные корни полинома являются попарно сопряженными.

Наличие комплексных корней позволяет обобщить формулу (5.3) следующим образом.

Если $x_1 = a_1 + ib_1$ и $x_2 = x_1^* = a_1 - ib_1$ — пара комплексно сопряженных корней полинома (5.1), то его можно представить произведением

$$P_n(x) = (x^2 + p_1x + q_1)R_{n-2}(x), \tag{5.7}$$

где p_1 и q_1 — вещественные числа, равные $p_1 = -2a_1$, $q_1 = a_1^2 + b_1^2$ и $R_{n-2}(x)$ — некоторый полином $(n-2)$-го порядка.

Действительно, наличие двух корней позволяет воспользоваться формулой (5.5). Тогда подстановка $x_1 = a_1 + ib_1$ и $x_2 = x_1^* = a_1 - ib_1$ в (5.5) дает

$$P_n(x) = [x-(a_1+ib_1)][x-(a_1-ib_1)]R_{n-2}(x) = (x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2)R_{n-2}(x). \tag{5.8}$$

Обозначив здесь $p_1 = -2a_1$, $q_1 = a_1^2 + b_1^2$, придем к представлению (5.7).

Именно представление (5.7) мы будем использовать для пары комплексно сопряженных корней. Это объясняется тем, что полином $x^2 + p_1x + q_1$ с комплексными корнями сам не содержит комплексных чисел, поскольку p_1 и q_1 вещественны. Условием того, что квадратный трехчлен не имеет вещественных корней, является выполнение неравенства для его дискриминанта

$$D = p_1^2 - 4q_1 < 0. \tag{5.9}$$

Комплексные корни, как и действительные, могут быть кратными. В этом случае для комплексно сопряженной пары корней $x_1 = a_1 + ib_1$ и $x_2 = x_1^* = a_1 - ib_1$ кратности r_1 полином (5.1) можно записать произведением

$$P_n(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} T_{n-2r_1}(x) \tag{5.10}$$

с вещественными $p_1 = -2a_1$ и $q_1 = a_1^2 + b_1^2$.

Подводя итог, сформулируем следующее утверждение, позволяющее записать соотношение (5.6) в эквивалентной форме, без использования комплексных корней.

Свойство 5. При наличии у полинома $P_n(x)$ (5.1) l действительных корней x_k, $k = \overline{1, l}$, с кратностью r_k и m пар комплексно сопряженных корней x_j, $j = \overline{1, m}$, с кратностью s_j его можно представить произведением

$$\begin{gathered} P_n(x) = p_n(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2} \cdots (x - x_l)^{r_l}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \cdots \\ \cdots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m} = p_n \prod_{k=1}^{l}(x - x_k)^{r_k} \prod_{j=1}^{m}(x^2 + p_jx + q_j)^{s_j}, \end{gathered} \tag{5.11}$$

где $r_1 + r_2 + ... + r_l + 2s_1 + 2s_2 + ... + 2s_m = n$.

Таким образом, получение разложения (5.11) сводится к задаче о нахождении корней полинома $P_n(x)$, т.е. решение алгебраического уравнения n-й степени

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + ... + p_nx^n = 0. \tag{5.12}$$

Из общего курса алгебры известно, что найти решения (корни) алгебраических уравнений (5.12) с произвольными буквенными коэффициентами в явном виде (радикалов от коэффициентов этого полинома) можно лишь для уравнений не выше 4-го порядка. Для уравнений 5-го порядка и выше, как следует из теоремы Абеля, такой возможности не существует. Теорема Абеля, однако, не исключает того, что корни алгебраических уравнений высших порядков с конкретными числовыми коэффициентами могут найдены в явном виде. Действительно, если для полинома $P_n(x)$ удается подобрать хотя бы один, например действительный, корень x_1, то в силу свойства 1 по формуле (5.2) можно записать

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x)$$

или

$$p_0 + p_1x + ... + p_{n-1}x^{n-1} + p_nx^n = (x - x_1)(q_0 + q_1x + ... + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-1}x^{n-1}). \tag{5.13}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях (5.13), получим систему

$$x^n : p_n = q_{n-1};$$

$$x^{n-1}: p_{n-1} = q_{n-2} - x_1 q_{n-1} = q_{n-2} - x_1 p_n;\; q_{n-2} = p_{n-1} + x_1 p_n; \tag{5.14}$$
$$\ldots\ldots$$

Эта система имеет единственное решение и определяет коэффициенты q_k, $k = \overline{0, n-1}$, полинома $Q_{n-1}(x)$.

Если (5.13) записать в виде

$$q_0 + q_1 x + \ldots + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-1}x^{n-1} = \frac{p_0 + p_1 x + \ldots + p_{n-1}x^{n-1} + p_n x^n}{x - x_1}, \tag{5.15}$$

то нахождение решения системы (5.14) (т.е. q_k, $k = \overline{0, n-1}$) можно упростить, определив следующее правило деления полиномов «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \ldots + p_1 x + p_0}^{P_n(x)} & x - x_1 \\ \cline{2-2}
-\; p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1}x_1 & \underbrace{p_n x^{n-1} + (p_{n-1} + p_n x_1)x^{n-2} + \ldots}_{Q_{n-1}} \\ \cline{1-1}
0 + (p_{n-1} + p_n x_1)x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \ldots + p_1 x + p_0 & \\
-\; (p_{n-1} + p_n x_1)x^{n-1} + (p_{n-1} + p_n x_1)x^{n-2}x_1 + \ldots + p_1 x + p_0 & \\ \cline{1-1}
0 + \ldots\ldots & \\
-\; \ldots\ldots &
\end{array} \tag{5.16}$$

Тот факт, что x_1 является корнем полинома $P_n(x)$ обеспечивает деление в (5.16) без остатка.

Если известна пара комплексно сопряженных корней x_1 и x_1^*, то из (5.8) найдем

$$R_{n-2}(x) = \frac{P_n(x)}{x^2 + p_1 x + q}. \tag{5.17}$$

Подобным образом исходные полиномы иногда удается свести к полиномам низших порядков, для которых возможно использование формул Кардано, Феррари и др.

Пример 5.1. Разложить на множители полином

$$P_4 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4.$$

Решение. Можно убедиться, что $x = 1$ является корнем этого полинома, т.е. $P_4(1) = 0$. Это означает, что для полинома $P_4(x)$ справедливо представление

$$P_4(x) = (x - 1)Q_3(x), \tag{5.18}$$

где полином $Q_3(x)$ можно найти делением $P_4(x)$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}^{P_4(x)} & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\; x^4 - x^3 \phantom{{}- 3x^2 + 8x - 4} & \underbrace{x^3 - x^2 - 4x + 4}_{Q_3(x)} \\ \cline{1-1}
-\; 0 - x^3 - 3x^2 + 8x - 4 & \\
-x^3 + x^2 \phantom{{}+ 8x - 4} & \\ \cline{1-1}
-\; 0 - 4x^2 + 8x - 4 & \\
-4x + 4x \phantom{{}- 4} & \\ \cline{1-1}
-\; 0 + 4x - 4 & \\
4x - 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Поскольку $x = 1$ является также и корнем полинома $Q_3(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, т.е. $Q_3(1) = 0$, то возможно представление

$$Q_3(x) = (x - 1)T_2(x), \tag{5.19}$$

где $T_2(x)$ найдется как

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 4x + 4 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - x^2 \qquad\quad} & x^2 - 4 \\
-\;\; 0 - 4x + 4 & \\
\underline{-4x + 4} & \\
0 &
\end{array}$$

Отсюда $T_2(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ и

$$Q_3(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 2). \tag{5.20}$$

Последовательная подстановка (5.20) в (5.19), а (5.19) в (5.18) дает разложение исходного полинома на множители:

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = (x - 1)^2(x + 2)(x - 2). \tag{5.21}$$

Пример 5.2. Разложить на множители полином

$$P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4.$$

Решение. Можно убедиться, что $x = i$ является корнем полинома, т.е. $P_4(i) = i^4 - 4i^3 + 5i^2 - 4i + 4 = 1 + 4i - 5 - 4i + 4 = 0$. Тогда корнем является и $x^* = -i$. Таким образом, полином имеет пару комплексно сопряженных корней $x = i$ и $x^* = -i$, и, следовательно, имеет место представление

$$P_4(x) = (x - i)(x + i)R_2(x) = (x^2 + 1)R_2(x). \tag{5.22}$$

Полином $R_2(x)$ найдем делением $P_4(x)$ на $x^2 + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4 \qquad\quad + x^2 \qquad\qquad} & x^2 - 4x + 4 \\
-\;\; 0 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 4 & \\
\underline{-4x^3 \qquad\quad - 4x \qquad} & \\
-\;\; 0 + 4x^2 - 0 + 4 & \\
\underline{4x^2 \qquad + 4} & \\
0 &
\end{array}$$

Отсюда $T_2(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, и подстановка его в (5.22) дает нам искомое разложение полинома на множители:

$$P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x^2 + 1)(x - 2)^2. \tag{5.23}$$

В заключение вернемся к общему разложению (5.11):

$$P_n(x) = p_n \prod_{k=1}^{l}(x - x_k)^{r_k} \prod_{j=1}^{m}(x^2 + p_j x + q_j)^{s_j},$$

и выделим простейшие разложения двух типов:

$$P_{r_k} = (x - x_k)^{r_k}, \quad k = \overline{1, l}, \tag{5.24}$$

и

$$P_{2s_j} = (x^2 + p_j x + q_j)^{s_j}, \quad p_j^2 - 4q_j < 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{5.25}$$

Разложение (5.24) первого типа представляет собой полином, имеющий один вещественный корень кратности r_k. Кратность этого корня и определяет порядок полинома $P_{r_k}(x)$. Разложение (5.25) второго типа представляет собой полином, имеющий одну пару комплексно сопряженных корней кратности s_j. В этом случае кратность s_j определяет порядок $2s_j$ полинома $P_{2s_j}(x)$.

♦ Полиномы вида (5.24), (5.25) называют *простейшими* (или *простыми*, или *элементарными*).

Таким образом, любой полином, согласно (5.11), можно представить произведением простейших полиномов:

$$P_n(x) = p_n \prod_{k=1}^{l} P_{r_k}(x) \prod_{j=1}^{m} P_{2s_j}(x). \tag{5.26}$$

5.2. Рациональные дроби и разложение правильных рациональных дробей на простейшие

В предыдущем разделе мы рассмотрели простейшие свойства полиномов, или целых рациональных функций. Перейдем теперь к рассмотрению свойств рациональных дробей, или рациональных функций.

♦ *Рациональной функцией*, или *рациональной дробью* называется отношение двух полиномов:

$$f(x) = \frac{Q_k(x)}{P_n(x)} = \frac{q_0 + q_1x + q_2x^2 + ... + q_kx^k}{p_0 + p_1x + p_2x^2 + ... + p_nx^n} \tag{5.27}$$

степеней k и n, соответственно. При $k < n$ рациональная дробь (5.27) называется *правильной*, в противном случае — *неправильной*.

Как и ранее, коэффициенты полиномов, входящих в рациональную дробь (5.27), будем предполагать действительными числами.

В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать рациональную дробь несократимой. Это означает, что полиномы $Q(x)$ и $P9X)$ не имеют общих корней как действительных, так и мнимых.

Если рациональная дробь $\bar{Q}_{\bar{k}}(x)/P_n(x)$ является неправильной (степень $\bar{k} \geqslant n$), то по правилу (5.16) деления полиномов «уголком» из нее можно выделить целую часть — полином $S_m(x)$ и правильную рациональную дробь $Q_k(x)/P_n(x)$, $k < n$, так что

$$\frac{\bar{Q}_{\bar{k}}(x)}{P_n(x)} = S_m(x) + \frac{Q_k(x)}{P_n(x)}; \quad m + n = \bar{k}, \quad k < n. \tag{5.28}$$

Получение представления (5.28) иллюстрирует следующий пример.

Пример 5.3. Выделить целую часть неправильной рациональной дроби

$$f(x) = \frac{Q_6(x)}{P_4(x)} = \frac{x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 10x - 3}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}.$$

Решение. Следуя правилу (5.16) деления полиномов, найдем

$$\begin{array}{r|l}
x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 10x - 3 & x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 \\ \cline{2-2}
-\;x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 4x^2 \qquad\qquad\quad & \underbrace{x^2 + 1} \\ \cline{1-1}
0 \quad + 0 \quad + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x - 3 & \text{целая часть – полином } S_2(x) \\
-\quad x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 & \\ \cline{1-1}
0 \quad + 0 \quad + 0 \quad \underbrace{+\,2x \quad +1}_{\text{остаток – полином } Q_1(x)}, &
\end{array}$$

откуда

$$f(x) = \frac{x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 10x - 3}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} = S_2(x) + \frac{Q_1(x)}{P_4(x)} =$$

$$= x^2 + 1 + \frac{2x + 1}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}. \tag{5.29}$$

Пример 5.4. Выделить целую часть неправильной рациональной дроби

$$f(x) = \frac{Q_5(x)}{P_4(x)} = \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}.$$

Решение. Следуя правилу (5.16) деления полиномов, найдем

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 8 & x^3 - 4x \\
\cline{2-2}
-\;\; x^5 \qquad - 4x^3 \qquad\qquad\qquad & \underbrace{x^2 + x + 4}_{S_2(x)} \\
\cline{1-1}
0 + x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 0x - 8 & \\
-\;\; x^4 \qquad - 4x^2 \qquad\qquad & \\
\cline{1-1}
0 + 4x^3 + 4x^2 + 0x - 8 & \\
-\;\; 4x^3 \qquad - 16x \qquad & \\
\cline{1-1}
0 \underbrace{+ 4x^2 + 16x - 8}_{Q_2(x),} &
\end{array}$$

откуда

$$f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = S_2(x) + \frac{Q_2(x)}{P_3(x)} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}. \tag{5.30}$$

Поскольку неправильную рациональную дробь всегда можно представить суммой полинома и правильной рациональной дроби, то далее мы перейдем к рассмотрению основных свойств правильных рациональных дробей.

Начнем с того, что среди всех правильных дробей можно выделить класс *простейших* (*простых*, или *элементарных*) рациональных дробей двух видов.

Дроби первого вида представляют собой отношение полинома нулевой степени, т.е. постоянной, к простейшим полиномам вида (5.24):

$$J_i(x) = \frac{A}{(x - x_i)^{r_i}}, \tag{5.31}$$

а дроби второго — отношение полинома первой степени к простейшим полиномам вида (5.25):

$$I_j(x) = \frac{M_j x + N_j}{(x^2 + p_j x + q_j)^{s_j}}. \tag{5.32}$$

Оказывается, что точно так же, как из неправильной дроби можно выделить правильную, так и из правильной рациональной дроби можно выделить в качестве слагаемого простейшую рациональную дробь.

Лемма 5.1. *Если*

$$\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}, \quad k < n,$$

есть правильная рациональная дробь и $x = x_i$ — один из вещественных корней полинома $P_n(x)$ с кратностью r_i, т.е.

$$P_n(x) = (x - x_i)^{r_i} T_{n-r_i}(x), \quad T_{n-r_i}(x_i) \neq 0, \tag{5.33}$$

то существуют число A_i и полином $L_m(x)$ с действительными коэффициентами порядка $m < n - 1$, таких что

$$\frac{Q_k(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_k(x)}{(x - x_i)^{r_i} T_{n-r_i}(x)} = \frac{A_i}{(x - x_i)^{r_i}} + \frac{L_m(x)}{(x - x_i)^{r_i - 1} T_{n-r_i}(x)}, \tag{5.34}$$

где первое слагаемое является простейшей дробью, а второе — правильной $(m < n - 1)$ рациональной дробью.

Доказательство. Приведя слагаемые в правой части (5.34) к общему знаменателю, получим

$$\frac{Q_k(x)}{(x - x_i)^{r_i} T_{n-r_i}(x)} = \frac{A_i T_{n-r_i}(x) + (x - x_i) L_m(x)}{(x - x_i)^{r_i} T_{n-r_i}(x)},$$

откуда

$$Q_k(x) = A_i T_{n-r_i}(x) + (x - x_i) L_m(x). \tag{5.35}$$

Положив в (5.35) $x = x_i$, найдем

$$Q_k(x_i) = A_i T_{n-r_i}(x_i)$$

или

$$A_i = \frac{Q_k(x_i)}{T_{n-r_i}(x_i)}. \tag{5.36}$$

Так как в силу (5.33) $T_{n-r_i}(x_i) \neq 0$ и x_i не является корнем полинома $Q_k(x)$: $Q_k(x_i) \neq 0$, то формула (5.36) однозначно определяет не равное нулю число A_i.

Оценим теперь степень полинома L_m. Переписав (5.35) в виде

$$(x - x_i) L_m(x) = Q_k(x) - A_i T_{n-r_i}(x), \tag{5.37}$$

заключаем, что степень полинома в левой части (5.37) равна $m+1$ и это значение удовлетворяет неравенству $m + 1 \leqslant \max(k, n - r_i)$. Приняв во внимание, что $k < n$, а $n - r_i \leqslant n - 1 < n$, получим оценку $m + 1 < n$, а значит, $m < n - 1$.

Следствие 5.1.1. Правильную рациональную дробь $Q_k(x)/P_n(x)$, для которой $x = x_i$ — один из вещественных корней полинома кратности r_i, можно представить суммой простейших дробей вида

$$\frac{Q_k(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_k(x)}{(x - x_i)^{r_i} T_{n-r_i}(x)} = \frac{A_i^{(r_1)}}{(x - x_1)^{r_1}} + \frac{A_i^{(r_1 - 1)}}{(x - x_1)^{r_1 - 1}} + \ldots + \\ + \frac{A_i^{(1)}}{(x - x_1)} + \frac{L_m(x)}{T_{n-r_i}(x)}, \quad m < n - r_i. \tag{5.38}$$

Действительно, применив лемму 5.2 r_i раз, из (5.34) очевидным образом получим представление (5.38).

$\Diamond$ Если полином $T_{n-r_i}(x)$ в знаменателе правильной дроби формулы (5.38) имеет еще один вещественный корень $x = x_j$, то, воспользовавшись соотношением (5.38) для корня x_j, можно выделить все простейшие дроби, соответствующие этому корню. Эту операцию можно продолжать до тех пор, пока не исчерпаются все вещественные корни полинома $P_n(x)$.

Пример 5.5. Для правильной дроби

$$f(x) = \frac{Q_1(x)}{P_4(x)} = \frac{3x}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} \tag{5.39}$$

выделить все простейшие дроби, соответствующие всем вещественным корням полинома $P_n(x)$.

Решение. Полином $P_4(x)$ в знаменателе правильной дроби (5.39), согласно результатам примера 5.1, имеет три вещественных корня: $x_1 = 1$ кратности $r_1 = 2$ и два простых корня $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, и его разложение на множители дает формула (5.21):

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = (x-1)^2(x+2)(x-2).$$

С учетом этого правильную дробь (5.39) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{Q_1(x)}{P_4(x)} = \frac{3x}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} = \frac{3x}{(x-1)^2(x+2)(x-2)}. \tag{5.40}$$

В силу леммы 5.1 существуют такое число A_1 и полином $L_m(x)$, с помощью которых дробь (5.40) можно записать суммой

$$f(x) = \frac{3x}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{L_m(x)}{(x-1)(x^2-4)}. \tag{5.41}$$

Приведя правую часть (5.41) к общему знаменателю, получим равенство числителей двух дробей:

$$3x = (x^2 - 4)A_1 + (x-1)L_m(x). \tag{5.42}$$

Положив в (5.42) $x = 1$, найдем

$$3 = -3A_1,$$

откуда $A_1 = -1$. С учетом этого (5.42) запишется как

$$3x = -(x^2 - 4) + (x-1)L_m(x),$$

а тогда

$$L_m(x) = \frac{3x + (x^2 - 4)}{x - 1} = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}. \tag{5.43}$$

Выполнив в (5.43) деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^2 + 3x - 4 \\ \underline{x^2 - x \phantom{{}- 4}} \end{array} & \underline{x - 1} \\
\begin{array}{r} 4x - 4 \end{array} & x + 4 \\
-\begin{array}{r} \underline{4x - 4} \\ 0, \end{array} &
\end{array}$$

найдем $L_m(x) = L_1(x) = x + 4$.

Таким образом, разложение (5.40) примет вид

$$f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+4}{(x-1)(x^2-4)}. \tag{5.44}$$

Формула (5.44) дает разложение исходной дроби (5.40) на простейшую дробь и еще одну правильную, из которой также, согласно лемме 5.1, можно выделить еще одну простейшую дробь, соответствующую корню $x = 1$ кратности $r_1 = 2$.

Действительно, положив

$$\frac{x+4}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{A_2}{x-1} + \frac{R_\mu(x)}{x^2-4} \tag{5.45}$$

и следуя представленному выше алгоритму, найдем

$$x + 4 = A_2(x^2-4) + (x-1)R_\mu(x). \tag{5.46}$$

Положив здесь $x = 1$, имеем

$$5 = -3A_2,$$

откуда $A_2 = -5/3$. С учетом этого (5.46) запишется как

$$x + 4 = -\frac{5}{3}(x^2-4) + (x-1)R_\mu(x),$$

а тогда

$$R_\mu(x) = \frac{x + 4 + \frac{5}{3}(x^2-4)}{x-1} = \frac{\frac{5}{3}x^2 + x - \frac{8}{3}}{x-1}. \tag{5.47}$$

Выполнив в (5.47) деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l}
\frac{5}{3}x^2 \quad + x - \frac{8}{3} & x-1 \\ \cline{2-2}
-\ \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{3}x \phantom{- \frac{8}{3}} & \frac{5}{3}x + \frac{8}{3} \\ \cline{1-1}
\frac{8}{3}x - \frac{8}{3} & \\
-\ \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} & \\ \cline{1-1}
0, &
\end{array}$$

найдем $R_\mu(x) = \frac{1}{3}(5x+8)$.

Тогда разложение (5.45) примет вид

$$\frac{x+4}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{-5/3}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}(5x+8)}{x^2-4} = \frac{1}{3}\Big[-\frac{5}{x-1} + \frac{5x+8}{x^2-4}\Big], \tag{5.48}$$

и его подстановка в (5.44) дает

$$f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2(x^2-4)} = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5/3}{x-1} + \frac{\frac{5}{3}x + \frac{8}{3}}{(x-2)(x+2)}. \tag{5.49}$$

Таким образом, из исходной правильной дроби мы выделили обе простейшие дроби, соответствующие двукратному корню $x_1 = 1$. Поскольку остальные корни $x_2 = 2$ и $x_3 = -2$ простые, то теперь можно выделить простейшие дроби, соответствующие этим корням. Для этого, следуя лемме 5.1, для последней из (5.49) дроби запишем представление

$$\frac{\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}}{(x-2)(x+2)}=\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}. \tag{5.50}$$

Поскольку дроби в правой части (5.50) простейшие, то их числители B и C могут быть только константами. Далее, как и выше, приведя правую часть (5.50) к общему знаменателю, придем к равенству их числителей:

$$\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}=B(x+2)+C(x-2). \tag{5.51}$$

Положив в (5.51) $x=2$, найдем

$$\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=4B,$$

откуда

$$B=\frac{18}{3\cdot 4}=\frac{3}{2},$$

а положив в (5.51) $x=-2$, найдем

$$-\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=-4C,$$

откуда

$$C=\frac{2}{3\cdot 4}=\frac{1}{6}.$$

С учетом найденных $B=3/2$ и $C=1/6$ разложение (5.50) примет вид

$$\frac{\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}}{(x-2)(x+2)}=\frac{3/2}{x-2}+\frac{1/6}{x+2}. \tag{5.52}$$

Подставив (5.52) в (5.50), а затем подставив (5.50) в (5.49), окончательно запишем

$$f(x)=\frac{3x}{(x-1)^2(x^2-4)}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{5/3}{x-1}+\frac{3/2}{x-2}+\frac{1/6}{x+2}. \tag{5.53}$$

Это и есть разложение исходной дроби на простейшие, соответствующие трем вещественным корням: двукратному $x_1=1$ и простым $x_2=2$ и $x_3=-2$.

В заключение заметим, что подобный метод выделения простейших дробей громоздок и в силу этого недостаточно эффективен. Ниже мы сформулируем более простой способ, называемый *методом неопределенных коэффициентов*, а сейчас рассмотрим задачу выделения простейших дробей при наличии комплексных корней.

Лемма 5.2. *Если $Q_k(x)/P_n(x)$ — правильная рациональная дробь ($k<n$) и $x_j=a_j+ib_j$, $x_j^*=a_j-ib_j$ — одна из пар комплексно сопряженных корней полинома $P_n(x)$ кратности s_j, т.е.*

$$\begin{gathered}P_n(x)=(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}T_{n-2s_j}(x),\quad p_j=-2a_j,\ q_j=a_j^2+b_j^2,\ p_j^2-4q_j<0;\\ T_{n-2s_j}(x_j)\neq 0,\quad T_{n-2s_j}(x_j^*)\neq 0,\end{gathered} \tag{5.54}$$

то существуют числа M_j, N_j и полином $L_m(x)$, такие что

$$\frac{Q_k(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_k(x)}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}T_{n-2s_j}(x)} = \\ = \frac{M_jx+N_j}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}} + \frac{L_m(x)}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j-1}T_{n-2s_j}(x)}, \quad (5.55)$$

где первое слагаемое является простейшей дробью, а второе — правильной $(m < n-1)$ рациональной дробью.

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 5.1.

Следствие 5.2.1. Пусть для $Q_k(x)/P_n(x)$ выполняются условия леммы 5.2. Тогда справедливо равенство

$$\frac{Q_k(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_k(x)}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}T_{n-2s_j}(x)} = \frac{M_j^{(s_j)}x+N_j^{(s_j)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}} + \\ + \frac{M_j^{(s_j-1)}x+N_j^{(s_j-1)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j-1}} + \ldots + \frac{M_j^{(1)}x+N_j^{(1)}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{L_m(x)}{T_{n-2s_j}(x)}, \quad (m < n-2s_j). \quad (5.56)$$

Действительно, применив лемму 5.2 s_j раз, из (5.55) получим равенство (5.56).

Следствие 5.2.2. Если полином $T_{n-2s_j}(x)$ в знаменателе правильной дроби формулы (5.56) имеет еще одну пару комплексно сопряженных корней, то, согласно (5.55), можно выделить все простейшие дроби, соответствующие этой паре корней. Эту операцию можно продолжать до тех пор, пока не исчерпаются все комплексные корни полинома $P_n(x)$.

Леммы 5.1 и 5.2, формулы (5.38) и (5.56) позволяют обосновать следующее утверждение.

Теорема 5.1 (о разложении правильной рациональной дроби на простейшие). *Если $Q_k(x)/P_n(x)$ — правильная рациональная дробь $(k < n)$, а $P_n(x)$ представляется в виде (5.11), то ее можно представить суммой простейших дробей в виде*

$$\frac{Q_k(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_i^{(j)}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_j}\frac{M_i^{(j)}x+N_i^{(j)}}{(x^2+p_ix+q_i)^j} = \\ = \frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_1^{(r_1)}}{(x-x_1)^{r_1}} + \ldots + \frac{A_l^{(1)}}{(x-x_l)} + \frac{A_l^{(2)}}{(x-x_l)^2} + \ldots + \frac{A_l^{(r_l)}}{(x-x_l)^{r_l}} + \\ + \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ldots + \frac{M_1^{(s_1)}x+N_1^{(s_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots + \\ + \frac{M_m^{(1)}x+N_m^{(1)}}{(x^2+p_mx+q_m)} + \ldots + \frac{M_m^{(s_m)}x+N_m^{(s_m)}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}. \quad (5.57)$$

Доказательство. Если полином $P_n(x)$ представляется в виде (5.11):

$$P_n(x) = p_n \prod_{i=1}^{l} (x - x_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{m} (x^2 + p_j x + q_j)^{s_j},$$

то из исходной правильной дроби можно выделить все простейшие дроби, соответствующие его вещественным корням. В оставшейся правильной дроби, согласно следствию 5.2.2, можно выделить все простейшие дроби, соответствующие комплексным корням. Таким образом, первая сумма в (5.57) соответствует простейшим дробям для вещественных корней, а вторая — для комплексных, что и требовалось доказать.

Пример 5.6. Записать разложение (5.57) правильной дроби

$$\frac{Q_3(x)}{P_{12}(x)} = \frac{x^3 + x + 2}{(x-2)(x+5)^3(x^2+1)^2(x^2-4x+5)(x^2-3x+2)}$$

на простейшие.

Решение. Знаменатель дроби содержит в качестве сомножителей три квадратных трехчлена. Для того чтобы воспользоваться теоремой 5.1, необходимо установить характер их корней. Несложно убедиться, что два из них: $x^2 + 1$ и $x^2 - 4x + 5$, имеют комплексные корни $x_{1,2} = \pm i$ и $x_{1,2} = 2 \pm i$, а третий $x^2 - 3x + 2$ имеет два вещественных корня $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и может быть представлен произведением: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. С учетом этого исходную дробь можно записать в виде

$$\frac{Q_3(x)}{P_{12}(x)} = \frac{x^3 + x + 2}{(x-1)(x-2)^2(x+5)^3(x^2+1)^2(x^2-4x+5)}.$$

Таким образом, знаменатель дроби имеет три вещественных корня кратности 1, 2 и 3, соответственно, и две пары комплексных корней кратности 1 и 2. Такая правильная дробь удовлетворяет условиям теоремы 5.1, и, согласно (5.57), ее разложение на простейшие дроби будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{Q_3(x)}{P_{12}(x)} &= \frac{x^3 + x + 2}{(x-1)(x-2)^2(x+5)^3(x^2+1)^2(x^2-4x+5)} = \\
&= \frac{A_1^{(1)}}{x-1} + \frac{A_2^{(1)}}{x-2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-2)^2} + \frac{A_3^{(1)}}{x+5} + \frac{A_3^{(2)}}{(x+5)^2} + \frac{A_3^{(3)}}{(x+5)^3} + \\
&+ \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{x^2+1} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2+1)^2} + \frac{M_2^{(1)}x + N_2^{(1)}}{x^2-4x+5},
\end{aligned}$$

что и требовалось получить.

Заметим, что коэффициенты разложения (5.57) можно найти, опираясь на леммы 5.1 и 5.2, как это сделано в примере 5.5. Однако в силу громоздкости такого способа определения коэффициентов можно воспользоваться другим, который называется *методом неопределенных коэффициентов*. В этом случае вместо последовательного нахождения каждого коэффициента в отдельности можно воспользоваться разложением (5.57) с неизвестными коэффициентами $A_i^{(j)}$, $M_i^{(j)}$, $N_i^{(j)}$. Далее правую часть (5.57) приводят к общему знаменателю, который равен $P_n(x)$. В результате формула (5.57) примет вид

$$\frac{Q_k(x)}{P_n(x)} = \frac{T_{n-1}(x)}{P_n(x)}, \tag{5.58}$$

где $T_{n-1}(x)$ — числитель правой части (5.57) после приведения ее к общему знаменателю. Из (5.58) следует, что n неизвестных коэффициентов $A_i^{(j)}$, $M_i^{(j)}$, $N_i^{(j)}$ можно найти из равенства

$$Q_k(x) = T_{n-1}(x). \tag{5.59}$$

Действительно, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x полиномов $Q_k(x)$ и $T_{n-1}(x)$, получим линейную систему алгебраических уравнений n-го порядка, из которой и найдем коэффициенты $A_i^{(j)}$, $M_i^{(j)}$, $N_i^{(j)}$, поскольку эта система в силу теоремы 5.1 имеет единственное решение.

Кроме этого, систему для определения коэффициентов $A_i^{(j)}$, $M_i^{(j)}$, $N_i^{(j)}$ можно получить, положив в (5.59) последовательно $x = x_1$, ..., $x = x_n$:

$$\begin{aligned} &Q_k(x_1) = T_{n-1}(x_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &Q_k(x_n) = T_{n-1}(x_n). \end{aligned} \tag{5.60}$$

Здесь $x_1, ..., x_n,$ — вообще говоря, различные произвольные числа. Система (5.60) упрощается, если среди x_k присутствуют корни полинома $P_n(x)$. Иногда система (5.60) оказывается проще, чем система, полученная приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x, а иногда эти подходы можно комбинировать друг с другом.

Пример 5.7. Найти разложение правильной рациональной дроби

$$\frac{Q_2(x)}{P_3(x)} = \frac{2x^2 - 6x - 10}{x^3 + 3x^2 - 10x}$$

на простейшие.

Решение. Начнем с определения корней полинома $P_3(x)$. Поскольку

$$P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 10x = x(x^2 + 3x - 10) = x(x - 2)(x + 5),$$

то полином $P_3(x)$ имеет три простых корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$. С учетом этого

$$\frac{Q_2(x)}{P_3(x)} = \frac{2x^2 - 6x - 10}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \frac{2x^2 - 6x - 10}{x(x - 2)(x + 5)},$$

и в силу (5.57) разложение на простейшие дроби будет иметь вид

$$\frac{Q_2(x)}{P_3(x)} = \frac{2x^2 - 6x - 10}{x(x - 2)(x + 5)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{x + 5}. \tag{5.61}$$

Приведение правой части (5.57) к общему знаменателю дает

$$\frac{Q_2(x)}{P_3(x)} = \frac{2x^2 - 6x - 10}{x(x - 2)(x + 5)} = \frac{A_1(x - 2)(x + 5) + A_2x(x + 5) + A_3x(x - 2)}{x(x - 2)(x + 5)},$$

откуда

$$A_1(x - 2)(x + 5) + A_2x(x + 5) + A_3x(x - 2) = 2x^2 - 6x - 10. \tag{5.62}$$

Из этого равенства коэффициенты A_1, A_2, A_3 можно найти двумя указанными выше способами.

I способ. Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые с одинаковыми степенями x, получим

$$(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (3A_1 + 5A_2 - 2A_3)x - 10A_1 = 2x^2 - 6x - 10.$$

Теперь приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части равенства:

$$\begin{array}{ll} x^2: & A_1 + A_2 + A_3 = 2; \\ x^1: & 3A_1 + 5A_2 - 2A_3 = -6; \\ x^0: & -10A_1 = -10, \end{array}$$

получим линейную систему алгебраических уравнений 3-го порядка

$$\begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 = 2; \\ 3A_1 + 5A_2 - 2A_3 = -6; \\ A_1 = 1. \end{array} \tag{5.63}$$

Ее решение можно найти, например, методом Крамера [19]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -9 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -14,$$

откуда

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{-7} = -1; \quad A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2. \tag{5.64}$$

II способ. Положив последовательно в (5.62) x корнями полинома $P_3(x)$: $x = x_1 = 0$, $x = x_2 = 2$ и $x = x_3 = -5$, найдем

$$\begin{array}{lll} x = x_1 = 0, & A_1(-2)\cdot 5 = -10, & A_1 = 1; \\ x = x_2 = 2, & A_2 \cdot 2 \cdot 7 = -14, & A_2 = -1; \\ x = x_3 = -5, & A_3(-5)(-7) = 70; & A_3 = 2. \end{array} \tag{5.65}$$

Эти значения A_1, A_2, A_3 совпадают с найденными (5.64) методом Крамера, и подстановка их в (5.61) дает искомое разложение на простейшие дроби:

$$\frac{Q_2(x)}{P_3(x)} = \frac{2x^2 - 6x - 10}{x(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+5}. \tag{5.66}$$

Из этого примера следует простой вывод: если корни знаменателя дроби — простые, то удобнее пользоваться вторым способом, поскольку в левой части (5.62) всегда остается одно слагаемое. Ниже мы покажем, что если корни кратные, удобнее комбинировать оба метода.

Пример 5.8. Найти разложение правильной рациональной дроби

$$\frac{Q_1(x)}{P_4(x)} = \frac{3x}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}$$

на простейшие.

Решение. Разложение этой дроби на простейшие уже было получено в примере 5.5 с помощью формулы (5.34) леммы 5.1. Найдем это же разложение методом неопределенных коэффициентов. Поскольку, согласно формуле (5.40) из примера 5.5, исходную дробь можно представить как

$$\frac{Q_1(x)}{P_4(x)} = \frac{3x}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} = \frac{3x}{(x-1)^2(x+2)(x-2)},$$

то ее разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{Q_1(x)}{P_4(x)} = \frac{3x}{(x-1)^2(x+2)(x-2)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-2}. \tag{5.67}$$

Приведя правую часть (5.67) к общему знаменателю, запишем

$$\frac{Q_1(x)}{P_4(x)} = \frac{3x}{(x-1)^2(x+2)(x-2)} =$$
$$= \frac{A_1^{(1)}(x-1)(x+2)(x-2) + A_1^{(2)}(x+2)(x-2) + A_2(x-1)^2(x-2) + A_3(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)(x-2)},$$

откуда

$$A_1^{(1)}(x-1)(x+2)(x-2)+A_1^{(2)}(x+2)(x-2)+A_2(x-1)^2(x-2)+A_3(x-1)^2(x+2) = 3x. \tag{5.68}$$

Положив в (5.68) последовательно $x = 1$, $x = -2$ и $x = 2$, найдем

$$\begin{aligned} &x = 1, && A_1^{(2)}(3)(-1) = 3, && A_1^{(2)} = -1; \\ &x = -2, && A_2(-3)^2(-4) = -6, && A_2 = \frac{1}{6}; \\ &x = 2, && A_3 \cdot 1^2 \cdot 4 = 6, && A_3 = \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Ненайденным остался один коэффициент $A_1^{(1)}$. Чтобы его найти, в (5.68) приравняем коэффициенты при x^3 в левой и правой частях:

$$A_1^{(1)} + A_2 + A_3 = 0.$$

Отсюда с учетом (5.69)

$$A_1^{(1)} = -A_2 - A_3 = -\frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{3}.$$

Таким образом, все неизвестные коэффициенты найдены, и их подстановка в (5.67) дает искомое разложение

$$\frac{Q_1(x)}{P_4(x)} = \frac{3x}{(x-1)^2(x+2)(x-2)} = \frac{-5/3}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1/6}{x+2} + \frac{3/2}{x-2}.$$

Пример 5.9. Найти разложение правильной рациональной дроби

$$\frac{Q_3(x)}{P_4(x)} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x + 7}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}$$

на простейшие.

Решение. Полином $P_4(x)$ в знаменателе дроби рассматривался в примере 5.2, где было показано, что он имеет один вещественный корень $x = 2$ кратности 2 и простую пару комплексно сопряженных корней $x = \pm i$. С учетом этого полином разлагается на множители как (5.23):

$$P_4(x) = (x-2)^2(x^2+1),$$

соответственно, исходная дробь примет вид

$$\frac{Q_3(x)}{P_4(x)} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x + 7}{(x-2)^2(x^2+1)}$$

и ее разложение на простейшие дроби запишется как

$$\frac{Q_3(x)}{P_4(x)} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x + 7}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-2} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-2)^2} + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{x^2+1}. \tag{5.70}$$

Заметим, что в конкретных задачах с небольшим n удобно использовать безындексные коэффициенты для правильных дробей в правой части (5.57). В частности, в рассматриваемом примере положим

$$A_1^{(1)} = A; \quad A_1^{(2)} = B, \quad M_1^{(1)} = M, \quad N_1^{(1)} = N. \tag{5.71}$$

С учетом этого разложение (5.70) запишется в более удобной форме:

$$\frac{Q_3(x)}{P_4(x)} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x + 7}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}. \tag{5.72}$$

Приведем правую часть (5.72) к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}\frac{Q_3(x)}{P_4(x)} &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x + 7}{(x-2)^2(x^2+1)} = \\ &= \frac{A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Mx+N)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+1)},\end{aligned}$$

тогда

$$A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Mx+N)(x-2)^2 = 2x^3 - 2x^2 - 10x + 7. \tag{5.73}$$

Не раскрывая скобок, можно легко записать равенство коэффициентов при x^3 и x^0 из левой и правой частей:

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad A + M = 2, \\ x^0 &: \quad -2A + B + 4N = 7. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Недостающие два уравнения можно получить, положив в (5.73) $x = 1$ и $x = 2$:

$$\begin{aligned} x = 1 &: \quad -2A + 2B + M + N = -3, \\ x = 2 &: \quad 5B = -5. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Поскольку из последнего уравнения (5.75) следует, что $B = -1$, то остальные коэффициенты найдутся из системы, которая получится из (5.74), (5.75):

$$A + M = 2,$$

$$-2A + 4N = 8, \tag{5.76}$$
$$-2A + M + N = -1.$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20;$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 8 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -30,$$

откуда

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-10} = 2, \quad M = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad N = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-30}{-10} = 3.$$

Подставив найденные коэффициенты в (5.72), получим искомое разложение дроби на простейшие:

$$\frac{Q_3(x)}{P_4(x)} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x + 7}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{3}{x^2+1}.$$

Отметим, что разложение конкретных правильных дробей на простейшие можно получить без использования метода неопределенных коэффициентов. Следующий пример иллюстрирует эту возможность.

Пример 5.10. Найти разложение правильных дробей на простейшие:

$$1)\ \frac{1}{P_6(x)} = \frac{1}{x^4(1+x^2)}; \quad 2)\ \frac{1}{P_6(x)} = \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}; \quad 3)\ \frac{1}{P_6(x)} = \frac{1}{x^5(1+x)}.$$

Решение. 1) Согласно методу неопределенных коэффициентов, разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{1}{x^4(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Mx+N}{1+x^2}, \tag{5.77}$$

и в этом случае для нахождения шести неизвестных коэффициентов A, B, C, D, M, N необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений шестого порядка. Этого можно избежать, если воспользоваться тождественными преобразованиями, а именно:

$$\frac{1}{P_6(x)} = \frac{1}{x^4(1+x^2)} = \frac{1-x^4+x^4}{x^4(1+x^2)} = \frac{1-x^4}{x^4(1+x^2)} + \frac{x^4}{x^4(1+x^2)} =$$
$$= \frac{1-x^2}{x^4} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}. \tag{5.78}$$

Полученное разложение на простейшие дроби соответствует разложению (5.77), в котором $A = C = M = 0$, $N = D = -B = 1$.

2) В этом случае разложение на простейшие дроби, согласно методу неопределенных коэффициентов, имеет вид

$$\frac{1}{P_6(x)} = \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx+N}{1+x^2} + \frac{Sx+T}{(1+x^2)^2}, \tag{5.79}$$

и для нахождения шести неизвестных коэффициентов A, B, M, N, S, T необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений шестого порядка. Этого также можно избежать с помощью тождественных преобразований:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_6(x)} &= \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}. \quad (5.80)\end{aligned}$$

Полученное разложение на простейшие дроби соответствует разложению (5.79), в котором $A = M = S = 0$, $B = -N = -T = 1$.

3) В этом случае разложение на простейшие дроби, согласно методу неопределенных коэффициентов, имеет вид

$$\frac{1}{P_6(x)} = \frac{1}{x^5(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{1+x}. \quad (5.81)$$

Как и в предыдущих случаях, разложение можно получить с помощью тождественных преобразований:

$$\frac{1}{P_6(x)} = \frac{1}{x^5(1+x)} = \frac{1+x-x}{x^5(1+x)} = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^4(1+x)}.$$

Продолжив процедуру подобным образом, после пяти итераций получим

$$\frac{1}{P_6(x)} = \frac{1}{x^5(1+x)} = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}. \quad (5.82)$$

Кроме того, если заметить, что по правилу суммирования геометрической прогрессии

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{1+x^5}{1+x},$$

то с учетом

$$\frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4}{x^5} = \frac{1+x^5}{x^5(1+x)} = \frac{1}{x^5(1+x)} + \frac{1}{1+x}$$

получим

$$\frac{1}{x^5(1+x)} = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x},$$

что совпадает с (5.82).

Поскольку знаменатель $P_6(x) = x^5(1+x)$ дроби обладает корнем $x = 0$ высокой кратности, а именно пяти, то можно воспользоваться еще одним методом нахождения неизвестных коэффициентов A, B, C, D, E, F вне рамок решения алгебраических уравнений, заменив их вычислением производных.

Итак, возвратившись к разложению (5.81), умножим его на x^5, тогда

$$\frac{1}{1+x} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E + x^5\frac{F}{1+x}. \quad (5.83)$$

Теперь, положив в правой и левой частях (5.83) $x = 0$, сразу найдем

$$1 = E.$$

Далее, продифференцировав (5.83), получим еще одно равенство

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D + \left(x^5\frac{F}{1+x}\right)', \tag{5.84}$$

положив в котором снова $x = 0$ и учитывая, что все слагаемые за исключением одного обращаются в нуль, сразу найдем

$$-1 = D.$$

Продифференцировав теперь уже (5.84):

$$\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{2}{(1+x)^3} = 4\cdot 3Ax^2 + 3\cdot 2Bx + 2C + \left(x^5\frac{F}{1+x}\right)'', \tag{5.85}$$

и положив $x = 0$, сразу найдем

$$2 = 2C, \quad C = 1.$$

Далее, продифференцировав (5.85):

$$\left(\frac{2}{(1+x)^3}\right)' = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4} = 4\cdot 3\cdot 2Ax + 3\cdot 2B + \left(x^5\frac{F}{1+x}\right)''', \tag{5.86}$$

и положив $x = 0$, сразу найдем

$$-2\cdot 3 = 3\cdot 2B, \quad B = -1.$$

Наконец, продифференцировав (5.86):

$$\left(-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}\right)' = -\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5} = 4\cdot 3\cdot 2A + \left(x^5\frac{F}{1+x}\right)^{(\mathrm{IV})},$$

и положив $x = 0$, сразу найдем

$$2\cdot 3\cdot 4 = 4\cdot 3\cdot 2A, \quad A = 1.$$

Таким образом, все коэффициенты A, B, C, D, E найдены. Чтобы найти коэффициент F, уравнение (5.81) умножим на $(1+x)$, тогда

$$\frac{1}{x^5} = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5}\right)(1+x) + F. \tag{5.87}$$

Положив здесь $x = -1$, сразу получим

$$-1 = F.$$

Подставив полученные коэффициенты в (5.81), получим разложение, совпадающее с (5.82) и найденное с помощью тождественных преобразований.

Очевидно, что данный метод нахождения коэффициентов будет эффективным только при условии наличия слагаемых, имеющих простые и короткие производные.

6. Интегрирование рациональных функций

Продолжим рассмотрение классов интегрируемых функций и перейдем к интегрированию рациональных функций, т.е. к вычислению интегралов вида

$$\int \frac{\bar{Q}_{\bar{k}}(x)}{P_n(x)}dx.$$

Если рациональная дробь $\bar{Q}_{\bar{k}}(x)/P_n(x)$ — неправильная, то, как было показано выше, из нее можно выделить целую часть и тогда, согласно (5.28), исходный интеграл можно представить суммой интегралов

$$\int \frac{\bar{Q}_{\bar{k}}(x)}{P_n(x)}dx = \int\Big(S_m(x) + \frac{Q_k(x)}{P_n(x)}\Big)dx = \int S_m(x)dx + \int \frac{Q_k(x)}{P_n(x)}dx. \tag{6.1}$$

Первое слагаемое в (6.1) представляет собой интеграл от целой рациональной функции, т.е. интеграл от полинома, который легко вычисляется:

$$\begin{aligned}\int S_m(x)dx = \int(s_0 + s_1x + ... + s_mx^m)dx =\\ = s_0x + s_1\frac{x^2}{2} + ... + s_m\frac{x^{m+1}}{m+1} + C.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Второе слагаемое в (6.1) представляет собой интеграл от правильной ($k < n$) рациональной дроби $Q_k(x)/P_n(x)$, и для ее интегрирования можно воспользоваться ее разложением на простейшие дроби в виде (5.57). Тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{Q_k(x)}{P_n(x)}dx = \int\Big\{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_i^{(j)}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_j}\frac{M_i^{(j)}x + N_i^{(j)}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\Big\}dx =\\ = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r_i}A_i^{(j)}\int\frac{dx}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_j}\int\frac{(M_i^{(j)}x + N_i^{(j)})dx}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

♦ Правильные рациональные дроби вида

$$\text{I.}\ \frac{M}{x-\alpha};\quad \text{II.}\ \frac{M}{(x-\alpha)^k};\quad \text{III.}\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad \text{IV.}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

где $k \geqslant 2$ — целое положительное число; $M = \text{const}$, $N = \text{const}$, называются *простейшими*, или *элементарными, дробями* I, II, III и IV *типов*, соответственно. Здесь $q - p^2/4 = -a^2 < 0$.

◊ Таким образом, задача о нахождении интеграла от рациональных дробей сводится к задаче интегрирования элементарных дробей.

Интегралы от простейших рациональных дробей I и II типов легко вычисляются, например, подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^j} = \int \frac{d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^j}.$$

Получим

$$\text{I. при } j = 1 \quad \int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C; \tag{6.4}$$

$$\text{II. при } j \neq 1 \qquad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^j} = \frac{1}{(1-j)(x-\alpha)^{j-1}} + C. \tag{6.5}$$

Интегралы от простейших дробей III и IV типов заменой $x = t - p/2$ с учетом комплексности ($a^2 = q - p^2/4 > 0$) корней квадратного трехчлена можно записать в виде суммы

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^j}dx = \int \frac{M(t-p/2)+N}{(t^2+a^2)^j}dt = \frac{M}{2}J_j(x) + \Big[N - \frac{Mp}{2}\Big]I_j(x), \tag{6.6}$$

где

$$J_j(x) = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^j} \tag{6.7}$$

и

$$I_j(x) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^j}. \tag{6.8}$$

При $j = 1$ интегралы (6.7) и (6.8) являются табличными и равны

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \ln(t^2+a^2) + C = \ln(x^2+px+q) + C, \\ I_1(x) &= \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Таким образом,

$$\text{III.} \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-Mp/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$$

При $j > 1$ интеграл (6.7) также является табличным и равен

$$J_j(x) = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^j} = \frac{1}{(1-j)(t^2+a^2)^{j-1}} + C = \frac{1}{(1-j)(x^2+px+q)^{j-1}} + C, \tag{6.10}$$

а интеграл (6.8) можно свести к интегралу I_1 (6.9) с помощью рекуррентной формулы (3.105):

$$I_j(x) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^j} = \frac{1}{2(1-j)a}\Big[\frac{t}{(t^2+a_i^2)^{j-1}} + (2j-3)I_{j-1}(x)\Big]. \tag{6.11}$$

Таким образом, интеграл (6.1) от любой рациональной функции, как следует из (6.2)–(6.11), выражается в конечном виде — с помощью рациональной же функции, логарифма или арктангенса.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров интегрирования рациональных дробей. Во избежание повторов разумно будет воспользоваться результатами примеров 5.1–5.10 по выделению целой части из неправильных дробей и разложению правильных дробей на простейшие.

Пример 6.1. Найти

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Решение. 1. Разложим знаменатель на действительные линейные множители: $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$, тогда

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}dx.$$

2. Разложим дробь на простейшие дроби I-го типа:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a},$$

приведем правую часть в общему знаменателю:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A(x+a) + B(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

и, приравняв числители, получим тождество

$$1 \equiv Ax + Bx + Aa - Ba.$$

Приравняв теперь коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ 1 = Aa - Ba, \end{cases} \tag{6.12}$$

решив которую, найдем $A = 1/2a$, $B = -1/2a$. Тогда

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} =$$
$$= \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

что, естественно, совпадает с табличным интегралом.

Пример 6.2. Вычислить

$$\int \frac{x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 10x - 3}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}dx.$$

Решение. Подынтегальная рациональная дробь является неправильной, и из нее, согласно формуле (5.29) из примера 5.3, можно выделить целую часть:

$$\int \left\{x^2 + 1 + \frac{2x+1}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}\right\}dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{2x+1}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}dx. \tag{6.13}$$

В свою очередь, полученную в (6.13) правильную дробь с помощью формулы (5.21) из примера 5.1 можно записать как

$$\frac{2x+1}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4} = \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)(x-2)},$$

а тогда в силу теоремы 5.1 ее можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}. \tag{6.14}$$

Приведение правой части (6.14) к общему знаменателю дает

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)(x-2)} = \\ = \frac{A(x-1)(x^2-4)+B(x^2-4)+C(x-1)^2(x-2)+D(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)(x-2)},$$

откуда

$$2x+1 = A(x-1)(x^2-4)+B(x^2-4)+C(x-1)^2(x-2)+D(x-1)^2(x+2). \quad (6.15)$$

Положив (6.15) последовательно $x=1$, $x=-2$, $x=2$, найдем

$$\begin{aligned} &x=1, && 3=B(-3), && B=-1;\\ &x=-2, && -3=C\cdot 9(-4), && C=\frac{1}{12};\\ &x=2, && 5=D\cdot 4, && D=\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ненайденным остался один коэффициент A. Чтобы найти его, не раскрывая в (6.15) скобок, можно легко записать равенство коэффициентов при x^3 в левой и правой частях:

$$x^3: \quad 0 = A+C+D,$$

откуда

$$A = -(C+D) = -\Big(\frac{1}{12}+\frac{5}{4}\Big) = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}.$$

Подстановка найденных коэффициентов в (6.14) дает

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)(x-2)} = \frac{-4/3}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1/12}{x+2} + \frac{5/4}{x-2},$$

и с учетом этого из (6.13) найдем

$$\int\Big\{x^2+1+\frac{2x+1}{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}\Big\}dx = \\ = \frac{x^3}{3}+x+\int\Big\{-\frac{4}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{12}\frac{1}{x+2}+\frac{5}{4}\frac{1}{x-2}\Big\}dx = \\ = \frac{x^3}{3}+x-\frac{4}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{1}{12}\int\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{5}{4}\int\frac{d(x-2)}{x-2} = \\ = \frac{x^3}{3}+x-\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{12}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C.$$

Пример 6.3. Вычислить

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$$

Решение. Подынтегальная рациональная дробь является неправильной, и из нее, согласно формуле (5.30) из примера 5.4, можно выделить целую часть:

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int\Big\{x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\Big\}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx. \quad (6.16)$$

В свою очередь, полученную в (6.16) правильную дробь в силу теоремы 5.1 можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} =$$
$$= \frac{A(x^2 - 4) + Bx(x-2) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}. \quad (6.17)$$

Из равенства числителей в левой и правой частях имеем

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x^2 - 4) + Bx(x-2) + Cx(x+2).$$

Положив здесь последовательно $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$, найдем

$$\begin{array}{lll} x = 0, & -8 = A(-4), & A = 2; \\ x = -2, & -24 = B(-2)(-4), & B = -3; \\ x = 2, & 40 = C \cdot 2 \cdot 4, & C = 5. \end{array}$$

Подстановка найденных коэффициентов в (6.17) дает

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2},$$

и с учетом этого из (6.16) найдем

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \Big[\frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}\Big] dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| - 3\ln|x+2| + 5\ln|x-2| + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3} + C.$$

Поскольку интегрирование целой части неправильной дроби затруднений не вызывает, далее основное внимание уделим рассмотрению наиболее эффективных способов интегрирования правильных рациональных дробей.

Пример 6.4. Вычислить

$$\int \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x + 7}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} dx.$$

Решение. Разложение правильной подынтегральной дроби получено в примере 5.9. С учетом этого исходный интеграл разбивается на сумму интегралов от простейших дробей:

$$\int \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x + 7}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} dx = \int \Big[\frac{2}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{3}{1+x^2}\Big] dx =$$
$$= 2\int \frac{d(x-2)}{x-2} - \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} + 3\int \frac{dx}{1+x^2} = 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + 3\operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 6.5. Вычислить

$$1)\ \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)};\quad 2)\ \int \frac{dx}{x^5(1+x)};\quad 3)\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^2};\quad 4)\ \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$$

Решение. 1) Согласно (5.78) из примера 5.10, интеграл можно представить суммой интегралов от простейших дробей как

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \int \Big(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\Big) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \operatorname{arctg} x + C.$$

2) Согласно (5.82), имеем

$$\int \frac{dx}{x^5(1+x)} = \int \Big(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\Big) dx =$$
$$= -\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x| - \ln|1+x| + C = -\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} + \ln\Big|\frac{x}{1+x}\Big| + C.$$

3) Третий интеграл вычислим по рекуррентной формуле (6.11):

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\Big[\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{1+x^2}\Big] = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\Big) + C. \tag{6.18}$$

Последнее выражение совпадает с результатом примера 3.15.

Заметим, что кроме рекуррентной формулы (6.11) интеграл (6.18) можно вычислить с помощью. замены переменной. Так, положив

$$x = \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad t = \operatorname{arctg} x, \tag{6.19}$$

получим

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^4 t}} = \int \cos^2 t\, dt =$$
$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\Big(t + \frac{\sin 2t}{2}\Big) + C.$$

Возвратившись к исходной переменной (6.19), получим (6.18). Действительно,

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\Big(t + \sin t \cos t \frac{\cos t}{\cos t}\Big) + C = \frac{1}{2}(t + \operatorname{tg} t \cos^2 t) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(t + \operatorname{tg} t \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}\Big) + C = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\Big) + C.$$

4) Согласно (5.80) из примера 5.10, интеграл можно представить суммой интегралов от простейших дробей:

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Первые два интеграла являются табличными, а третий вычислен в этом же примере:

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}. \tag{6.20}$$

Подстановка (6.18) в (6.20) дает

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\Big) + C =$$
$$= -\frac{1}{x} - \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 6.6. Вычислить интегралы

$$1) \int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}dx; \quad 2) \int \frac{x^6+3x^4+5x^2+4x+1}{x(x^2+1)^3}dx.$$

Решение. 1. Знаменатель подынтегральной дроби имеет один вещественный корень $x_1 = -1$ кратности $r_1 = 9$. Согласно теореме 5.1, ее разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2-x}{(x+1)^9} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + ... + \frac{A_9}{(x+1)^9}, \tag{6.21}$$

откуда

$$x^2 - x = A_1(x+1)^8 + A_2(x+1)^7 + ... + A_8(x+1) + A_9. \tag{6.22}$$

Существуют несколько способов определения коэффициентов в (6.22) (см. примеры 5.7–5.10).

I способ. Положим в (6.22) $x = -1$:

$$(x^2-x)\big|_{x=-1} = \big[A_1(x+1)^8 + A_2(x+1)^7 + ... + A_8(x+1) + A_9\big]_{x=-1},$$

откуда

$$2 = A_9.$$

Продифференцировав (6.22), получим равенство

$$2x - 1 = 8A_1(x+1)^7 + 7A_2(x+1)^6 + ... + 2A_7(x+1) + A_8, \tag{6.23}$$

из которого после подстановки $x = -1$ следует

$$-3 = A.$$

Продифференцировав теперь (6.23), запишем

$$2 = 8\cdot 7A_1(x+1)^6 + 7\cdot 6A_2(x+1)^5 + ... + 2A_7, \tag{6.24}$$

откуда при $x = -1$ получим

$$2 = 2A_7 \quad \text{или } A_7 = 1.$$

Дальнейшее дифференцирование (6.24) дает в левой части нуль, а это означает, что $A_6 = A_5 = A_4 = A_3 = A_2 = A_1 = 0$.

Таким образом, из (6.21) найдем

$$\frac{x^2-x}{(x+1)^9}=\frac{1}{(x+1)^7}-\frac{3}{(x+1)^8}+\frac{2}{(x+1)^9},$$

а, следовательно,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-x}{(x+1)^9}dx&=\int\Big[\frac{1}{(x+1)^7}-\frac{3}{(x+1)^8}+\frac{2}{(x+1)^9}\Big]dx=\\&=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^7}-3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^8}+2\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^9}=\\&=-\frac{1}{6(x+1)^6}+\frac{3}{7(x+1)^7}-\frac{1}{4(x+1)^8}+C.\end{aligned}\qquad(6.25)$$

II способ. Числитель дроби x^2-x разложим по формуле Тейлора в окрестности точки $x_1=-1$. Поскольку $(x^2-x)\big|_{x=-1}=2$, $(x^2-x)'\big|_{x=-1}=(2x-1)\big|_{x=-1}=-3$, $(x^2-x)''\big|_{x=-1}=2$, то

$$x^2-x=2-3(x+1)+2\frac{(x+1)^2}{2}\qquad(6.26)$$

и, следовательно,

$$\int\frac{x^2-x}{(x+1)^9}dx=\int\frac{(x+1)^2-3(x+1)+2}{(x+1)^9}dx=\int\Big[\frac{1}{(x+1)^7}-\frac{3}{(x+1)^8}+\frac{2}{(x+1)^9}\Big]dx,$$

откуда следует полученная выше первообразная (6.25).

III способ. С помощью простейших тождественных преобразований:

$$\begin{aligned}x^2-x&=x^2+2x+1-2x-1-x=(x+1)^2-3x-1=\\&=(x+1)^2-3x(x+1-1)-1=(x+1)^2-3(x+1)+2,\end{aligned}$$

получим представление числителя дроби, совпадающее с (6.26), откуда и следует (6.25).

2. В этом случае для правильной подынтегральной дроби, согласно теореме 5.1, справедливо разложение на простейшие дроби

$$\frac{x^6+3x^4+5x^2+4x+1}{x(x^2+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+1)^3}.$$

Отсюда с помощью стандартной процедуры приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x можно составить систему алгебраических уравнений 7-го порядка для вычисления $A, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$.

Следует, однако, заметить, что здесь вместо теоремы 5.1 удобнее воспользоваться леммой 5.1, согласно которой существуют число A и полином $L_m(x)$ такие, что

$$\frac{x^6+3x^4+5x^2+4x+1}{x(x^2+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{L_m(x)}{(x^2+1)^3}.\qquad(6.27)$$

Умножив левую и правую части этого равенства на x, получим

$$\frac{x^6+3x^4+5x^2+4x+1}{(x^2+1)^3}=A+\frac{xL_m(x)}{(x^2+1)^3}.$$

Положив здесь $x = 0$, найдем
$$1 = A.$$
С учетом этого равенство (6.27) примет вид
$$\frac{x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 4x + 1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} + \frac{L_m(x)}{(x^2+1)^3},$$
откуда
$$L_m(x) = \frac{1}{x}[x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 4x + 1 - (x^2+1)^3] = 2(x+2).$$
Определив $A = 1$ и $L_m(x) = 2(x+2)$, из (6.27) имеем
$$\frac{x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 4x + 1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} + \frac{2(x+2)}{(x^2+1)^3},$$
и, следовательно, исходный интеграл представляет собой сумму интегралов
$$\int \frac{x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 4x + 1}{x(x^2+1)^3}dx = \int \Big[\frac{1}{x} + \frac{2x+4}{(x^2+1)^3}\Big]dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^3} + 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^3} + 4I_3(x), \quad (6.28)$$
где интеграл
$$I_3(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$
можно вычислить по рекуррентной формуле (6.11):
$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2\cdot 2}\Big[\frac{x}{(x^2+1)^2} + (6-3)I_2(x)\Big] =$$
$$= \frac{1}{4}\Big\{\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{2\cdot 1}\Big[\frac{x}{x^2+1} - (4-3)I_1(x)\Big]\Big\} =$$
$$= \frac{1}{4}\Big\{\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{2}\Big[\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\Big]\Big\} =$$
$$= \frac{1}{4}\Big\{\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C\Big\}. \quad (6.29)$$
Подстановка (6.29) в (6.28) окончательно дает
$$\int \frac{x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 4x + 1}{x(x^2+1)^3}dx =$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2(x^2+1)^2} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3x}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Интегрирование некоторых классов рациональных дробей с полиномами высоких порядков можно свести с помощью замены переменных к интегрированию дробей с полиномами более низких порядков.

Пример 6.7. Вычислить интегралы
$$1)\ \int \frac{dx}{x(1+x^6)^2}; \quad 2)\ \int \frac{x^5+x^2}{x^9+x^3-2}dx.$$

Решение. 1. Знаменателем правильной подынтегральной дроби является полином 13-й степени. Формальное использование метода неопределенных коэффициентов предполагает решение алгебраической системы уравнений 13-го порядка. Попытаемся понизить порядок полинома с помощью замены

$$x = t^{1/6}. \tag{6.30}$$

Знаменатель дроби становится иррациональной функцией, поскольку

$$x(1 + x^6)^2 = t^{1/6}(1 + t)^2.$$

Однако с учетом выражения для дифференциала

$$dx = \frac{1}{6}t^{-5/6}dt$$

подынтегральная функция остается рациональной дробью, поскольку

$$\int \frac{dx}{x(1 + x^6)^2} = \int \frac{\frac{1}{6}t^{-5/6}dt}{t^{1/6}(1 + t)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t(1 + t)^2}. \tag{6.31}$$

Разложение правильной дроби в (6.31) можно получить с помощью простейших тождественных преобразований, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов. Действительно,

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{1+t-t}{t(1+t)^2} = \frac{1+t}{t(1+t)^2} - \frac{t}{t(1+t)^2} = \frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{(1+t)^2} =$$
$$= \frac{1+t-t}{t(1+t)} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}.$$

С учетом этого интеграл (6.31) запишется как

$$\int \frac{dx}{x(1+x^6)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t(1+t)^2} = \frac{1}{6}\int \Big\{\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\Big\}dt =$$
$$= \frac{1}{6}\Big\{\int \frac{dt}{t} - \int \frac{d(1+t)}{1+t} - \int \frac{d(1+t)}{(1+t)^2}\Big\} =$$
$$= \frac{1}{6}\Big\{\ln|t| - \ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\Big\} + C = \frac{1}{6}\ln\Big|\frac{t}{1+t}\Big| + \frac{1}{6(1+t)} + C.$$

Возвратившись к исходной переменной $t = x^6$, получим

$$\int \frac{dx}{x(1+x^6)^2} = \frac{1}{6}\Big[\ln\frac{x^6}{1+x^6} + \frac{1}{1+x^6}\Big] + C.$$

2. В этом случае знаменателем правильной подынтегральной дроби является полином 9-й степени. Формальное использование метода неопределенных коэффициентов предполагает решение алгебраической системы уравнений 9-го порядка. Понизим порядок полинома заменой

$$x = t^{1/3}.$$

В результате числитель дроби становится иррациональной функцией, поскольку

$$\frac{x^5 + x^2}{x^9 + x^3 - 2} = \frac{t^{5/3} + t^{2/3}}{t^3 + t - 2}.$$

Однако с учетом выражения для дифференциала

$$dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}dt$$

подынтегральная функция остается рациональной дробью:

$$\int \frac{x^5 + x^2}{x^9 + x^3 - 2}dx = \int \frac{t^{5/3} + t^{2/3}}{t^3 + t - 2}\frac{1}{3}t^{-2/3}dt = \frac{1}{3}\int \frac{t + 1}{t^3 + t - 2}dt. \tag{6.32}$$

Легко заметить, что знаменатель $P_3(t) = t^3 + t - 2$ дроби (6.32) имеет вещественный корень $t_1 = 1$, поскольку $P_3(1) = 1 + 1 - 2 = 0$. Это означает, что $P_3(t)$ можно представить в виде $P_3(t) = (t - 1)P_2(t)$. Полином $P_2(t) = P_3(t)/(t - 1)$ легко найти с помощью деления «уголком»:

$$\begin{array}{rl|l}
- & t^3 \quad + t - 2 & t - 1 \\ \cline{3-3}
 & t^3 - t^2 & t^2 + t + 2 \\ \cline{2-2}
- & 0 \ + t^2 + t - 2 & \\
 & t^2 - t & \\ \cline{2-2}
- & 0 + 2t - 2 & \\
 & 2t - 2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Тогда $P_3(t) = (t - 1)(t^2 + t + 2)$, и, следовательно, (6.32) примет вид

$$\int \frac{x^5 + x^2}{x^9 + x^3 - 2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{t + 1}{t^3 + t - 2}dt = \frac{1}{3}\int \frac{t + 1}{(t - 1)(t^2 + t + 2)}dt. \tag{6.33}$$

Разложение правильной дроби в (6.33) можно получить с помощью простейших тождественных преобразований, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов. Действительно,

$$\frac{t + 1}{(t - 1)(t^2 + t + 2)} = \frac{1}{2}\frac{2t + 2}{(t - 1)(t^2 + t + 2)} = \frac{1}{2}\frac{t + t + 2 + t^2 - t^2}{(t - 1)(t^2 + t + 2)} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{t^2 + t + 2}{(t - 1)(t^2 + t + 2)} + \frac{t - t^2}{(t - 1)(t^2 + t + 2)}\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{t - 1} - \frac{t}{t^2 + t + 2}\Big].$$

С учетом этого интеграл в (6.33) запишется как

$$\int \frac{x^5 + x^2}{x^9 + x^3 - 2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{t - 1} - \frac{t}{t^2 + t + 2}\Big]dt = \frac{1}{6}\Big\{\int \frac{dt}{t - 1} - \int \frac{t\,dt}{t^2 + t + 2}\Big\} =$$
$$= \frac{1}{6}\Big\{\int \frac{d(t - 1)}{t - 1} - \frac{1}{2}\int \frac{(2t + 1 - 1)dt}{t^2 + t + 2}\Big\} =$$
$$= \frac{1}{6}\Big\{\ln|t - 1| - \frac{1}{2}\int \frac{(2t + 1)dt}{t^2 + t + 2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + t + 2}\Big\} =$$
$$= \frac{1}{6}\Big\{\ln|t - 1| - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2 + t + 2)}{t^2 + t + 2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t + 1/2)}{(t + 1/2)^2 + 7/4}\Big\} =$$
$$= \frac{1}{6}\Big\{\ln|t - 1| - \frac{1}{2}\ln|t^2 + t + 2| - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{7}/2}\operatorname{arctg}\frac{t + 1/2}{\sqrt{7}/2}\Big\} + C =$$

$$= \frac{1}{6}\Big\{\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t^2+t+2| - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\Big\} + C.$$

Возвратившись к исходной переменной $t = x^3$, получим

$$\int \frac{x^5+x^2}{x^9+x^3-2}dx = \frac{1}{6}\Big\{\ln|x^3-1| - \frac{1}{2}\ln|x^6+x^3+2| - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^3+1}{\sqrt{7}}\Big\} + C.$$

7. Интегрирование простейших иррациональностей

7.1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\Big[x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, \ldots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_l}\Big]dx, \tag{7.1}$$

где R – рациональная функция; $r_1, \ldots, r_l$ — рациональные числа. Будем предполагать, что

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть m — общий знаменатель чисел $r_1, \ldots, r_l$, то есть все r_j, $j = \overline{1, l}$, можно представить в виде $r_j = p_j/m$, где p_j – целое число, $j = \overline{1, l}$. Тогда замена

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{7.2}$$

сводит вычисление интеграла (7.1) к интегрированию дробно-рациональных функций.

Действительно, из (7.2) найдём

$$x = \frac{t^m d - b}{a - ct^m} = \rho(t), \tag{7.3}$$

где $\rho(t)$ – рациональная функция,

$$dx = \rho'(t)dt, \quad \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_j} = t^{mr_j} = t^{p_j}.$$

Следовательно,

$$\int R\Big[x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, \ldots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_l}\Big]dx = \int R\Big[\frac{t^m d - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_l}\Big]\rho'(t)dt. \tag{7.4}$$

Пример 7.1. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, общий знаменатель степеней которых $n = 6$. Положим $x = t^6$, тогда $dx = 6t^5dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt = 6\Big[\int (t^2-t+1)dt - \int \frac{dt}{t+1}\Big] =$$

$$= 6\Big[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\Big] + C = 6\Big[\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + t - \ln|\sqrt[6]{x}+1|\Big] + C.$$

Пример 7.2. Вычислить

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx; \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+3)^3} - \sqrt{x+3}}; \quad I_3 = \int \frac{\sqrt{1-x}dx}{\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[4]{1-x}}.$$

Решение. 1. Подынтегральная функция является рациональной функцией от $x, x^{1/2}, x^{2/3}$, общий знаменатель степеней которых $n = 6$. Согласно (7.2), используем замену

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5dt,$$

тогда

$$I_1 = \int \frac{x^{1/2}}{x - x^{2/3}}dx = \int \frac{t^3}{t^6 - t^4}6t^5dt = 6\int \frac{t^8dt}{t^4(t^2-1)} = 6\int \frac{t^4dt}{t^2-1} =$$
$$= 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1}dt = 6\left[\int (t^2+1)dx + \int \frac{dt}{t^2-1}\right] = 6\left[\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\right] + C =$$
$$= 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{1-\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}\right| + C.$$

2. Подынтегральная функция является рациональной функцией переменных $(x+3)^{1/4}, (x+3)^{1/2}$, общий знаменатель степеней которых $n = 4$. Согласно (7.2), используем замену

$$x + 3 = t^4, \quad dx = 4t^3dt,$$

тогда

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+3)^{3/4} - (x+3)^{1/2}} = \int \frac{4t^3dt}{t^3 - t^2} = 4\int \frac{t^3dt}{t^2(t-1)} = 4\int \frac{t\,dt}{t-1} =$$
$$= 4\int \frac{t-1+1}{t-1}dt = 4\left[\int dt + \int \frac{dt}{t-1}\right] = 4(t + \ln|t-1|) + C =$$
$$= 4(\sqrt[4]{x+3} + \ln|\sqrt[4]{x+3} - 1|) + C.$$

3. Подынтегральная функция является рациональной функцией переменных $(1-x)^{1/2}$, $(1-x)^{1/3}$, $(1-x)^{1/4}$, общий знаменатель степеней которых $n = 12$. Согласно (7.2), используем замену

$$1 - x = t^{12}, \quad dx = -12t^{11}dt,$$

тогда

$$I_3 = \int \frac{(1-x)^{1/2}dx}{(1-x)^{1/3} + (1-x)^{1/4}} = \int \frac{t^6(-12)t^{11}dt}{t^4 + t^3} = -12\int \frac{t^{17}dt}{t^3(t+1)} = -12\int \frac{t^{14}dt}{t+1}.$$

Теперь подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Выделить из нее целую часть можно с помощью деления «уголком» либо тождественных преобразований:

$$\frac{t^{14}}{t+1} = \frac{t^{14} + t^{13} - t^{13}}{t+1} = \frac{t^{13}(t+1)}{t+1} - \frac{t^{13}}{t+1} = t^{13} - \frac{t^{13}}{t+1} =$$
$$= t^{13} - \frac{t^{13} + t^{12} - t^{12}}{t+1} = t^{13} - t^{12} + \frac{t^{12}}{t+1}.$$

Продолжив подобным образом, найдем

$$\frac{t^{14}}{t+1} = t^{13} - t^{12} + ... + t - \frac{1}{t+1} = \sum_{j=1}^{13} (-1)^{j+1} t^j - \frac{1}{t+1}.$$

Тогда

$$I_3 = -12 \int \frac{t^{14} dt}{t+1} = -12 \left[\sum_{j=1}^{13} (-1)^{j+1} \int t^j dt - \int \frac{dt}{t+1} \right] =$$
$$= -12 \left[\sum_{j=1}^{13} (-1)^{j+1} \frac{t^{j+1}}{j+1} - \ln|t+1| \right] + C =$$
$$= -12 \left[\sum_{j=1}^{13} (-1)^{j+1} \frac{(1-x)^{(j+1)/12}}{j+1} - \ln|(1-x)^{1/12} + 1| \right] + C.$$

Пример 7.3. Вычислить

$$I_1 = \int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}} dx; \quad I_2 = \int \frac{1}{x-2} \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} dx; \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4 (1+x)^5}}.$$

Решение. 1. Согласно (7.2), используем замену

$$\frac{5-3x}{4+7x} = t^2. \tag{7.5}$$

Отсюда, выразив x, найдем

$$x = \frac{5-4t^2}{7t^2+3}, \quad dx = -\frac{94t}{(7t^2+3)^2} dt,$$

тогда

$$I_1 = \int t \frac{(-94) t \, dt}{(7t^2+3)^2} = -94 \int \frac{t^2 dt}{(7t^2+3)^2}.$$

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. В данном случае вместо разложения ее на простейшие дроби удобнее воспользоваться методом интегрирования по частям:

$$I_1 = \left| \begin{matrix} u = t, & du = dt \\ dv = \dfrac{t}{(7t^2+3)^2} dt, & v = \displaystyle\int \frac{t \, dt}{(7t^2+3)^2} = \frac{1}{14} \int \frac{d(7t^2+3)}{(7t^2+3)^2} = -\frac{1}{14} \frac{1}{7t^2+3} \end{matrix} \right| =$$
$$= -94 \left[-\frac{t}{14(7t^2+3)} + \frac{1}{14} \int \frac{dt}{7t^2+3} \right] = \frac{47}{7} \frac{t}{7t^2+3} - \frac{47\sqrt{21}}{147} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{7}{3}} t + C.$$

Возвратившись к исходной переменной (7.5):

$$t = \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}},$$

получим

$$I_1 = \frac{47}{7}\sqrt{(5-3x)(4+7x)} - \frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}\Big(\frac{5-3x}{4+7x}\Big)} + C.$$

2. Согласно (7.2), используем замену

$$\frac{x-2}{x+2} = t^3. \tag{7.6}$$

Отсюда найдем x и dx, соответственно:

$$x = 2\frac{1+t^3}{1-t^3}, \quad dx = \frac{12t^2}{(1-t^3)^2}dt,$$

тогда

$$I_2 = \int \frac{1}{x-2}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}dx = \int \frac{1}{2(1+t^3)/(1-t^3)-2}t\frac{12t^2}{(1-t^3)^2}dt =$$
$$= 6\int \frac{t^3dt}{2t^3(1-t^3)} = 3\int \frac{dt}{1-t^3}.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{1-t^3} = \frac{1}{(1-t)(1+t+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{1+t+t^2} = \frac{A(1+t+t^2)+(Bt+C)(1-t)}{(1-t)(1+t+t^2)}.$$

Коэффициенты A, B, C найдем, положив в равенстве

$$1 = A(1+t+t^2) + (Bt+C)(1-t)$$

$t = 1$, тогда

$$1 = 3A, \quad A = 1/3;$$

$t = 0$, тогда

$$1 = A + C, \quad C = 1 - A = 2/3;$$

$t = -1$, тогда

$$1 = A + (C-B)2, \quad B = C - \frac{1-A}{2} = \frac{1}{3}.$$

С учетом этого

$$I_2 = 3\int \frac{dt}{1-t^3} = 3\Big[\int \frac{1/3}{1-t}dt + \int \frac{\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}}{1+t+t^2}dt\Big] =$$
$$= -\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{3}{2}}{1+t+t^2}dt =$$
$$= -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)dt}{1+t+t^2} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t+1/2)^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|1+t+t^2| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \ln\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{|t-1|} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C.$$

Возвратившись к исходной переменной (7.6):

$$t = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}},$$

получим

$$I_2 = \int \frac{1}{x-2}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}dx =$$
$$= \ln \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+3}}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2}}}{\left|\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}-1\right|} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} + C.$$

3. В этом случае интеграл I_3 целесообразно записать в виде

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4(1+x)^5}} = \int \sqrt[3]{\frac{1+x}{2-x}}\frac{1}{(1+x)^2(2-x)}dx,$$

для которого согласно (7.2), используем замену

$$\frac{1+x}{2-x} = t^3. \tag{7.7}$$

Отсюда найдем x и dx, соответственно:

$$x = \frac{2t^3-1}{t^3+1} = 2 - \frac{3}{t^3+1}, \quad dx = \frac{9t^2dt}{(t^3+1)^2},$$

тогда

$$I_3 = \int \sqrt[3]{\frac{1+x}{2-x}}\frac{1}{(1+x)^2(2-x)}dx =$$
$$= \int t\frac{1}{\left(1+2-\dfrac{3}{t^3+1}\right)^2\left(2-2-\dfrac{3}{t^3+1}\right)}\frac{9t^2dt}{(t^3+1)^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{t^3dt}{\left(1-\dfrac{1}{t^3+1}\right)^2\left(\dfrac{3}{t^3+1}\right)(t^3+1)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{t^3(t^3+1)dt}{t^6} =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\int dt + \int \frac{dt}{t^3}\right] = \frac{1}{3}\left[t - \frac{1}{2t^2}\right] + C.$$

Возвратившись к исходной переменной (7.7): $t = [(1+x)/(2-x)]^{1/3}$, получим

$$I_3 = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{1+x}{2-x}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{1+x}\right)^2}\right] + C.$$

7.2. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера

Запишем интеграл вида

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)dx, \tag{7.8}$$

где R – рациональная функция.

Выделив в подкоренном выражении в (7.8) полный квадрат

$$ax^2+bx+c = a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

и сделав замену переменных $\sqrt{|a|}\Big(x+\dfrac{b}{2a}\Big) = t$, получим интеграл одного из следующих типов:

$$\int \widetilde{R}\big(t, \sqrt{\mu^2-t^2}\big)dt, \quad \int \widetilde{R}\big(t, \sqrt{\mu^2+t^2}\big)dt, \quad \int \widetilde{R}\big(t, \sqrt{t^2-\mu^2}\big)dt. \tag{7.9}$$

Эти интегралы сводятся к интегралам от тригонометрических и гиперболических функций с помощью подстановок

$$t = \mu\sin u, \quad t = \mu\operatorname{tg} u, \quad t = \frac{\mu}{\cos u},$$
$$t = \mu\operatorname{ch} u, \quad t = \mu\operatorname{sh} u.$$

Методы вычисления таких интегралов мы рассмотрим чуть ниже. Интегралы вида (7.8) можно вычислить не только с помощью указанных замен, но и с помощью подстановок Эйлера.

Теорема 7.1. *Интегралы* (7.8) *сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановок*

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t, \quad$ если $\quad a > 0;$ (7.10)
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}, \quad$ если $\quad c > 0;$ (7.11)
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_k), \quad k = 1, 2, \quad$ если $b^2-4ac > 0,$ (7.12)

где x_1, x_2 — вещественные корни полинома ax^2+bx+c, а знаки можно выбирать в любой комбинации.

Подстановки (7.10)–(7.12) называются *подстановками Эйлера.*

Доказательство. 1. Пусть $a > 0$. Тогда производится замена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t, \tag{7.13}$$

Возведем (7.13) в квадрат:

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2.$$

Следовательно,

$$x = \frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}} = \psi(t), \tag{7.14}$$

где $\psi(t)$ – рациональная функция, и

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(\psi(t), \pm\psi(t)\sqrt{a} \pm t)\psi'(t)dt.$$

Доказательство для случаев 2 и 3 аналогично.

Пример 7.4. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}}; \quad I_2 = \int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{24+6x-3x^2}},$$

используя подстановки Эйлера.

Решение. Эти интегралы уже рассматривались в примере 4.2, где они были вычислены путем выделения полного квадрата в квадратном полиноме. Вычислим эти интегралы с помощью подстановок Эйлера.

1.1. *Первая подстановка Эйлера*

Так как для $2x^2+8x+40$ коэффициент $a = 2 > 0$, то с учетом $\sqrt{2x^2+8x+40} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+4x+20}$ используем первую подстановку Эйлера (7.10):

$$\sqrt{x^2+4x+20} = x - t, \tag{7.15}$$

откуда

$$x^2+4x+20 = (x-t)^2,$$

и, следовательно,

$$x = \frac{t^2+20}{2(t+2)}. \tag{7.16}$$

Приняв во внимание, что

$$dx = \frac{1}{2}\frac{2t(t+2)-(t^2+20)}{(t+2)^2}dt = \frac{t^2+4t-20}{2(t+2)^2}dt,$$

а также, что подстановка (7.16) в (7.15) дает

$$\sqrt{x^2+4x+20} = x - t = \frac{t^2+20}{2(t+2)} - t = \frac{20-4t-t^2}{2(t+2)},$$

для интеграла I_1 получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{t^2+4t-20}{2(t+2)^2}dt}{\frac{20-4t-t^2}{2(t+2)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|t+2| + \widetilde{C}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Так как из (7.15) следует, что

$$t = x - \sqrt{x^2+4x+20},$$

то возвращение к исходной переменной дает

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x+2-\sqrt{x^2+4x+20}| + \widetilde{C}. \tag{7.18}$$

Этот результат можно привести к виду, полученному в примере 4.2. Действительно, С помощью тождественных преобразований найдем

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x+2-\sqrt{x^2+4x+40}| + \widetilde{C} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1}{|x+2-\sqrt{x^2+4x+20}|} + \widetilde{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{|x+2+\sqrt{x^2+4x+20}|}{|(x+2)^2-(x^2+4x+20)|} + \widetilde{C} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{|x+2+\sqrt{x^2+4x+20}|}{|x^2+4x+4-x^2-4x-20|} + \widetilde{C} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+20}| - \ln 16 \big) + \widetilde{C} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+20}| + \Big(\widetilde{C} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 16 \Big).$$

Переобозначив произвольную постоянную $\widetilde{C} = C + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 16$, получим первообразную, вычисленную в примере 4.2.

1.2. *Вторая подстановка Эйлера*

Так как для $2x^2+8x+40$ коэффициент $c = 20 > 0$, то с учетом $\sqrt{2x^2+8x+40} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+4x+20}$ используем вторую подстановку Эйлера (7.11):

$$\sqrt{x^2+4x+20} = tx + \sqrt{20}, \tag{7.19}$$

откуда

$$x^2+4x+20 = (tx+\sqrt{20})^2,$$

и, следовательно,

$$x = \frac{4-2\sqrt{20}\,t}{t^2-1}. \tag{7.20}$$

Приняв во внимание, что

$$dx = 2\frac{\sqrt{20}-4t+\sqrt{20}t^2}{(t^2-1)^2}dt,$$

а также, что подстановка (7.20) в (7.19) дает

$$\sqrt{x^2+4x+20} = tx+\sqrt{20} = t\frac{4-2\sqrt{20}t}{t^2-1} + \sqrt{20} = -\frac{\sqrt{20}-4t+\sqrt{20}t^2}{t^2-1},$$

для интеграла I_1 получим

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2\frac{\sqrt{20}-4t+\sqrt{20}t^2}{(t^2-1)^2}dt}{-\frac{\sqrt{20}-4t+\sqrt{20}t^2}{t^2-1}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \bar{C}. \tag{7.21}$$

Так как из (7.19) следует, что

$$t = \frac{\sqrt{x^2+4x+20}-\sqrt{20}}{x},$$

то возвращение к исходной переменной в (7.21) дает

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+20}-\sqrt{20}-x}{\sqrt{x^2+4x+20}-\sqrt{20}+x}\right| + \bar{C}. \tag{7.22}$$

Этот результат можно привести к виду, полученному в примере 4.2 и выше с помощью первой подстановки Эйлера. Действительно, с помощью тождественных преобразований имеем

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+40}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+20}-\sqrt{20}-x}{\sqrt{x^2+4x+20}-\sqrt{20}+x}\right| + \bar{C} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+4x+20}-\sqrt{20}+x)(\sqrt{x^2+4x+20}+\sqrt{20}+x)}{(\sqrt{x^2+4x+20}-\sqrt{20}-x)(\sqrt{x^2+4x+20}+\sqrt{20}+x)}\right| + \bar{C} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{2x(x+2+\sqrt{x^2+4x+20})}{2x(2-\sqrt{20})}\right| + \bar{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x+20}}{2-\sqrt{20}}\right| + \bar{C} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+20}| - \ln(\sqrt{20}-2)\big] + \bar{C} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+20}| + \Big[\bar{C} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{20}-2)\Big].$$

Переобозначив произвольную постоянную $\widetilde{C} = C + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{20}-2)$, получим первообразную, вычисленную в примере 4.2 и с помощью первой подстановки Эйлера (7.10).

1.3. *Третья подстановка Эйлера*

Поскольку для $2x^2+8x+40$ дискриминант уравнения $x^2+4x+20=0$ $D = 16-80 = -64 < 0$, то оно не имеет вещественных корней. Это означает, что 3-ья подстановка Эйлера в данном случае не применима.

Перейдем к вычислению интеграла I_2.

2.1. Первая подстановка Эйлера для полинома $-3x^3+6x+24$ не применима, поскольку коэффициент $a=-3<0$.

2.2. Вторая подстановка Эйлера

Так как для $-3x^2+6x+24 = 3(-x^3+2x+8)$ коэффициент $c=8>0$, то, согласно (7.11), вторая подстановка Эйлера имеет вид

$$\sqrt{-x^2+2x+8} = xt + \sqrt{8}, \tag{7.23}$$

откуда

$$-x^2+2x+8 = (xt+\sqrt{8})^2,$$

и, следовательно,

$$x = 2\frac{1-\sqrt{8}t}{t^2+1}. \tag{7.24}$$

Приняв во внимание, что

$$dx = 2\frac{\sqrt{8}t^2-2t-\sqrt{8}}{(t^2+1)^2}dt$$

а также что подстановка (7.24) в (7.23) дает

$$\sqrt{-x^2+2x+8} = 2\frac{1-\sqrt{8}t}{t^2+1}t + \sqrt{8} = -\frac{\sqrt{8}t^2-2t-\sqrt{8}}{t^2+1},$$

для интеграла I_2 получим

$$I_2 = \int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{-3x^2+6x+24}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{-x^2+2x+8}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\left(2\frac{1-\sqrt{8}t}{t^2+1} + 5\right) 2\frac{\sqrt{8}t^2 - 2t - \sqrt{8}}{(t^2+1)^2}}{-\frac{\sqrt{8}t^2 - 2t - \sqrt{8}}{t^2+1}} dt =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \int \Big(\frac{2(1-\sqrt{8}t)}{t^2+1} + 5 \Big) \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \left[2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} - 2\sqrt{8} \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} + 5 \int \frac{dt}{t^2+1} \right]. \qquad (7.25)$$

Эти интегралы вычисляются достаточно просто. Последний интеграл вообще является табличным:

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C.$$

Второй интеграл вычисляется подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2(t^2+1)} + C,$$

а первый вычислен в примере 6.5 (формула (6.18))

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right] = \frac{1}{2}\Big[\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t \Big] + C.$$

С учетом этого найдем интеграл I_2 (7.25):

$$I_2 = \int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{-3x^2+6x+24}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Big[\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t + \frac{\sqrt{8}}{t^2+1} + 5 \operatorname{arctg} t \Big] + C =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \Big[\frac{t+\sqrt{8}}{t^2+1} + 6 \operatorname{arctg} t \Big] + C. \qquad (7.26)$$

Так как из (7.23) следует, что

$$t = \frac{\sqrt{-x^2+2x+8} - \sqrt{8}}{x},$$

то, возвратившись к исходной переменной x в (7.26), получим

$$I_2 = \int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{-3x^2+6x+24}} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\frac{\frac{\sqrt{-x^2+2x+8} - \sqrt{8}}{x} + \sqrt{8}}{\frac{(\sqrt{-x^2+2x+8} - \sqrt{8})^2}{x^2} + 1} + 6 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-x^2+2x+8} - \sqrt{8}}{x} \right] + C. \qquad (7.27)$$

2.3. Третья подстановка Эйлера

Так как дискриминант уравнения $-3x^3 + 6x + 24 = 0$ положителен: $D = 36 + 288 = 324 > 0$, то оно имеет два вещественных корня: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. В силу этого для вычисления интеграла I_2 можно воспользоваться 3-ю подстановкой Эйлера:

$$\sqrt{-x^2+2x+8} = t(x - x_1) = t(x+2), \qquad (7.28)$$

откуда

$$-x^2+2x+8=t^2(x+2)^2,$$

а с учетом того, что $-x^2+2x+8=-(x-4)(x+2)$, получим

$$-(x-4)(x+2)=t^2(x+2)^2.$$

Таким образом,

$$-(x-4)=t^2(x+2),$$

и, следовательно,

$$x=\frac{2(2-t^2)}{t^2+1}=\frac{6}{t^2+1}-2. \tag{7.29}$$

Приняв во внимание, что

$$dx=-\frac{12t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

а также, что подстановка (7.29) в (7.28) дает

$$\sqrt{-x^2+2x+8}=t\frac{6}{t^2+1},$$

для интеграла I_2 получим

$$\begin{aligned}
I_2&=\int\frac{(x+5)dx}{\sqrt{-3x^2+6x+24}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{(x+5)dx}{\sqrt{-x^2+2x+8}}=\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\dfrac{[6/(t^2+1)+3](-12)t}{(t^2+1)^2}}{\dfrac{6t}{t^2+1}}dt=-\frac{6}{\sqrt{3}}\int\Big[\frac{1}{t^2+1}+\frac{2}{(t^2+1)^2}\Big]dt=\\
&=-\frac{6}{\sqrt{3}}\Big[\int\frac{dt}{t^2+1}+2\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}\Big].
\end{aligned}$$

Здесь первый интеграл — табличный, а второй вычислен в примере 6.5 (формула (6.18)) Таким образом,

$$\begin{aligned}
I_2&=\int\frac{(x+5)dx}{\sqrt{-3x^2+6x+24}}=-\frac{6}{\sqrt{3}}\Big(\operatorname{arctg}t+\frac{t}{t^2+1}+\operatorname{arctg}t\Big)+C=\\
&=-\frac{6}{\sqrt{3}}\Big(\frac{t}{t^2+1}+2\operatorname{arctg}t\Big)+C.
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Так как из (7.28) следует, что

$$t=\frac{\sqrt{-x^2+2x+8}}{x+2},$$

то, возвратившись к исходной переменной x в (7.30), получим

$$\begin{aligned}
I_2&=\int\frac{(x+5)dx}{\sqrt{-3x^2+6x+24}}=\\
&=-\frac{6}{\sqrt{3}}\left[\frac{\dfrac{\sqrt{-x^2+2x+8}}{x+2}}{\dfrac{-x^2+2x+8}{(x+2)^2}+1}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+2x+8}-\sqrt{8}}{x+2}\right]+C.
\end{aligned}$$

Этот результат можно привести к виду, совпадающему с результатом примера 4.2. Действительно, с помощью тождественных преобразований имеем

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{-3x^3+6x+24}} = \\
&= -\frac{6}{\sqrt{3}}\Big[(x+2)\frac{\sqrt{-x^2+2x+8}}{-x^2+2x+8+x^2+4x+4} + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{9-(x-1)^2}}{3+(x-1)}\Big] + C = \\
&= -\frac{6}{\sqrt{3}}\Big[(x+2)\frac{\sqrt{-x^2+2x+8}}{6(x+2)} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-(x-1)}{3+(x-1)}}\Big] + \widetilde{C} = \\
&= -\frac{6}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\sqrt{-x^2+2x+8}}{6} - \arcsin\frac{x-1}{3}\Big) + C, \quad |x-1| < 3.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным тригонометрическим соотношением

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = -\arcsin\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \tag{7.31}$$

и переобозначили произвольную постоянную $\widetilde{C}$ как

$$C = -\frac{3\pi}{\sqrt{3}} + \widetilde{C}.$$

Пример 7.5. Вычислить

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}.$$

Решение. Интеграл I_1 является табличным:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C. \tag{7.32}$$

В примере 3.11 использованы две наиболее эффективные подстановки, приводящие к (7.32). Вычислим этот интеграл еще и с помощью подстановок Эйлера. Этим мы еще раз продемонстрируем возможности эйлеровых подстановок для интегрирования квадратичных иррациональностей и покажем, как эти постановки позволяют найти I_2.

1.1. Первая подстановка Эйлера для полинома $4-x^2$ не применима, поскольку коэффициент $a = -1$.

1.2. Вторая подстановка Эйлера

Согласно (7.11),

$$\sqrt{4-x^2} = xt - 2, \tag{7.33}$$

откуда

$$4 - x^2 = (xt-2)^2 = x^2t^2 - 4xt + 4,$$

и, следовательно,

$$x = \frac{4t}{1+t^2}. \tag{7.34}$$

Приняв во внимание, что

$$dx = 4\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt,$$

а также что подстановка (7.34) в (7.33) дает

$$\sqrt{4-x^2} = \frac{4t^2}{1+t^2} - 2 = -2\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

для интеграла I_1 получим

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt}{-2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\operatorname{arctg} t + \widetilde{C}. \tag{7.35}$$

Так как из (7.33) следует, что

$$t = \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x},$$

то, возвратившись в (7.35) к исходной переменной, получим

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = -2\operatorname{arctg}\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} + C. \tag{7.36}$$

Выражение (7.35) можно привести к виду (7.32), воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением ($a > 0$)

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} - \pi & \text{для } 0 < x < a; \\ \arcsin\dfrac{x}{a} + \pi & \text{для } -a < x < 0. \end{cases} \tag{7.37}$$

Первообразная (7.37) имеет разрыв в точке $x = 0$, поскольку

$$\lim_{x\to\pm 0}\Big(-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\Big) = \pm\pi.$$

Однако, выбрав в (7.35) на промежутках $]-a,0[$ и $]0,a[$ различные значения произвольных постоянных $\widetilde{C}_-$ и $\widetilde{C}_+$ так, что $\widetilde{C}_+ = \widetilde{C}_- + 2\pi$, этот разрыв можно устранить. С учетом этого результат (7.35) можно записать в виде

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = -2\operatorname{arctg}\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} + C = \arcsin\frac{x}{a} + \widetilde{C},$$

совпадающем с табличным (7.32).

1.3. Третья подстановка Эйлера

Так как уравнение $4 - x^2 = 0$ имеет два вещественных корня $x_{1,2} = \pm 2$, то можно воспользоваться 3-ей подстановкой Эйлера в виде

$$\sqrt{4-x^2} = t(2-x). \tag{7.38}$$

Приняв во внимание, что

$$x = 2\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{8t\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{4-x^2} = \frac{4t}{t^2+1}, \tag{7.39}$$

для интеграла I_1 имеем

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{t^2+1}{4t} \frac{8t\,dt}{(t^2+1)^2} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C. \tag{7.40}$$

Так как из (7.38) следует, что

$$t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2-x} = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}},$$

то, возвратившись в (7.40) к исходной переменной, получим

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + C. \tag{7.41}$$

Этот результат можно привести к виду (7.32), используя известное тригонометрическое соотношение (7.31) из предыдущего примера. Тогда

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + C = \arcsin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \widetilde{C},$$

и, переобозначив произвольную постоянную $\pi/2 + \widetilde{C} = C$, придем к формуле (7.32).

Нетрудно заметить, что обе подстановки Эйлера приводят к более громоздким выкладкам, чем тригонометрические подстановки из примера 3.11, и, следовательно, являются менее эффективными. Ситуация меняется при вычислении интеграла I_2. Действительно, применив, например, третью подстановку Эйлера (7.37):

$$\sqrt{4-x^2} = t(2-x),$$

получим

$$I_2 = \int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt. \tag{7.42}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (7.39):

$$x = 2\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{8t\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{4-x^2} = \frac{4t}{t^2+1}, \quad x^2+4 = \frac{8(t^4+1)}{(t^2+1)^2}.$$

Подынтегральная функция (7.40), полученная в результате подстановки, представляет собой правильную рациональную дробь. Чтобы ее разложить на простейшие, воспользуемся следующим разложением ее знаменателя:

$$t^4+1 = t^4+2t^2-2t^2+1 = (t^4+2t^2+1)-2t^2 = (t^2+1)^2-2t^2 = (t^2+1-\sqrt{2}t)(t^2+1+\sqrt{2}t).$$

Теперь, следуя правилу разложения правильной дроби на простейшие, найдем

$$\frac{t^2+1}{t^4+1} = \frac{t^2+1}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\Big].$$

С учетом этого

$$I_2 = \int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt =$$
$$= \frac{1}{8}\int \Big[\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\Big]dt. \quad (7.43)$$

Поскольку

$$t^2 \pm \sqrt{2}t + 1 = t^2 \pm \frac{2}{\sqrt{2}}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \Big(t \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{1}{2},$$

то (7.43) примет вид

$$I_2 = \int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{8}\Big[\int \frac{d(t-1/\sqrt{2})}{(t-1/\sqrt{2})^2+1/2} + \int \frac{d(t+1/\sqrt{2})}{(t+1/\sqrt{2})^2+1/2}\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1/2}}\Big[\operatorname{arctg}\frac{t-\sqrt{1/2}}{\sqrt{1/2}} + \operatorname{arctg}\frac{t+\sqrt{1/2}}{\sqrt{1/2}}\Big] + C =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\big[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1)\big] + C.$$

Если воспользоваться формулой для суммы арктангенсов:

$$\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} + \left\{\begin{array}{ll} 0, & \alpha\beta < 1 \\ \pi, & \alpha > 0,\ \alpha\beta > 1 \\ -\pi, & \alpha < 0,\ \alpha\beta > 1 \end{array}\right\},$$

то интеграл I_2 можно записать в более удобной форме:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} + \widetilde{C},$$

а поскольку

$$t = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}},$$

то, возвратившись к исходной переменной, получим

$$I_2 = \int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}x} + \widetilde{C}.$$

Наконец, воспользовавшись тождеством

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} = -\operatorname{arctg}\alpha \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \gtrless 0,$$

можно избежать разрыва аргумента в точке $x = 0$:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{4-x^2}} + \widetilde{\widetilde{C}}.$$

Хотя подстановки Эйлера всегда позволяют в интегралах вида (7.8):

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)dx,$$

избавиться от квадратичной иррациональности и свести их к интегралам от рациональных дробей, но зачастую и даже в простейших случаях они приводят к достаточно громоздким выкладкам, что и подтверждают примеры 7.4, 7.5. Рассмотрим некоторые приемы, позволяющие упростить эти выкладки, выяснив предварительно геометрический смысл подстановок Эйлера.

Пример 7.6. Выяснить геометрический смысл подстановок Эйлера (7.10)–(7.12).

Решение. Начнем с третьей подстановки Эйлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_1). \tag{7.44}$$

Графически это равенство можно рассматривать как определение точки пересечения кривой 2-го порядка

$$y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c}$$

с прямой

$$y = t(x-x_1),$$

проходящей через точку $M(x_1, 0)$ и имеющей угловой коэффициент t. Такая интерпретация (7.44) позволяет сформулировать следующую геометрическую задачу.

Пусть

$$y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c}, \quad \text{или} \quad y^2 = ax^2+bx+c \tag{7.45}$$

— некоторая кривая 2-го порядка. Выберем на этой кривой произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем через нее секущую с угловым коэффициентом t:

$$y - y_0 = t(x-x_0), \quad \text{или} \quad y = y_0 + t(x-x_0). \tag{7.46}$$

Из курса аналитической геометрии (см., например, [20]) известно, что секущая (7.46) пересечет кривую 2-го порядка (7.45) еще только в одной точке $M(x, y)$. Абсциссу x этой точки можно найти, исключив ординату y из уравнений (7.45) и (7.46), т.е.

$$ax^2+bx+c = [y_0 + t(x-x_0)]^2$$

или

$$ax^2+bx+c = y_0^2 + 2y_0t(x-x_0) + t^2(x-x_0)^2.$$

Примем во внимание, что точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит также кривой (7.45), т.е.

$$y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + x$$

и, следовательно,

$$ax^2+bx+c = ax_0^2 + bx_0 + c + 2y_0t(x-x_0) + t^2(x-x_0)^2,$$

откуда

$$a(x^2-x_0^2) + b(x-x_0) = 2y_0t(x-x_0) + t^2(x-x_0).$$

Учтем, что $x^2 - x_0^2 = (x-x_0)(x+x_0)$, и сократим на $(x-x_0)$. Окончательно получим

$$a(x+x_0) + b = 2y_0t + t^2(x-x_0).$$

Это означает, что абсцисса x, а с нею и ордината y, в силу (7.46) выражаются рациональными функциями от переменного углового коэффициента t. При этом изменением углового коэффициента t можно заставить точку $M(x, y)$ описать всю кривую второго порядка.

Таким образом, становится ясным, что именно зависимость

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - y_0 = t(x-x_0) \tag{7.47}$$

и определяет ту подстановку, которая заведомо рационализирует выражение (7.8). В зависимости от коэффициентов a, b, c, входящих в подкоренное выражение $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, существуют три способа выбора точки $M_0(x_0, y_0)$.

А. Пусть дискриминант квадратного трехчлена положителен, т.е. $D = b^2 - 4ac > 0$.

В этом случае уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 (при $D = 0$ корни кратные, т.е. $x_1 = x_2$ и подкоренное выражение представляет собой полный квадрат) и, следовательно, кривая $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Ox в двух точках: $M_1(x_1, 0)$ и $M_2(x_2, 0)$. Взяв любую из них в качестве точки M_0, т.е. положив в (7.47) $x_0 = x_1$ и $y_0 = 0$ или, если удобнее, $x_0 = x_2$ и $y_0 = 0$, получим возможные подстановки

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$$

или

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2).$$

Если учесть, что выбор знака у коэффициента t не имеет принципиального значения, то эти подстановки можно записать в виде

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1)$$

или

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_2).$$

В таком виде они представляют собой введенную выше 3-ью подстановку Эйлера (7.11).

В. Пусть $c > 0$.

В этом случае кривая $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Oy в двух точках: $M_1(0, \sqrt{c})$ и $M_1(0, -\sqrt{c})$. Выбрав любую из них в качестве точки M_0, т.е. положив в (7.47) $x_0 = 0$ и $y_0 = \sqrt{c}$ или, если удобнее, $x_0 = 0$ и $y_0 = -\sqrt{c}$, получим возможные подстановки

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}.$$

Если учесть, что выбор знака у коэффициента t не имеет принципиального значения, то эту подстановку можно записать в виде

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm tx \pm \sqrt{c}.$$

В таком виде они представляют собой введенную выше 2-ую подстановку Эйлера (7.11).

Перед рассмотрением третьего случая заметим, что при $a = 0$ кривая второго порядка представляет собой параболу $y = \pm\sqrt{bx + c}$, а это означает вырождение иррациональности вида $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ в простейшую иррациональность $\sqrt{bx + c}$, рассмотренную выше. При $a < 0$ кривая представляет собой эллипс, а при $a > 0$ — гиперболу. Известно (см., например, [20]), что гипербола, в отличие от эллипса, имеет асимптотические направления: $\operatorname{tg}\alpha = y/x = \pm\sqrt{a}$. Именно это свойство гиперболы и порождает еще один вид подстановок Эйлера.

С. Пусть $a > 0$.

Как уже отмечалось, кривая $y = ax^2 + bx + c$ является гиперболой с асимптотическими направлениями $\operatorname{tg}\alpha = y/x = \pm\sqrt{a}$. В этом случае в качестве точки M_0 можно выбрать бесконечно удаленную точку, через которую проходят прямые

$$y = \pm t \pm \sqrt{a}x,$$

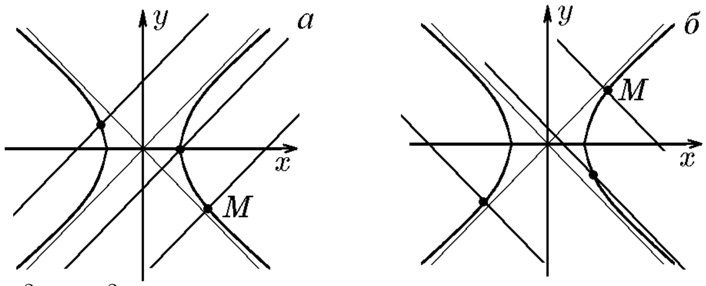


Рис. 1. $y^2 = ax^2 + bx + c$, $a > 0$: $y = \pm t + \sqrt{a}x$ (*а*); $y = \pm t - \sqrt{a}x$ (*б*)

параллельные асимптотам $y = \pm\sqrt{a}x$ и, как нам известно, пересекающие гиперболу только еще в одной точке $M(x, y)$ (рис. 1). Этим и объясняется первая подстановка Эйлера (7.10):

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x.$$

7.3. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Другие способы, подстановка Абеля

Как уже было отмечено выше и проиллюстрировано примерами, использование подстановок Эйлера, которые принципиально и во всех случаях решают вопрос о вычислении интегралов

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\big)dx, \tag{7.48}$$

в конечном виде, приводит зачастую к сложным выкладкам. Рассмотрим дополнительные приемы вычисления этих интегралов. Для этого напомним, что под полиномом $P(x, y)$ переменных x и y подразумевается полином по переменной y с коэффициентами, являющимися полиномами относительно переменной x. Например, выражение

$$P(x, y) = x^2y + (1 + x^3)y^2 + (3 + x - x^4)y^3 \tag{7.49}$$

представляет собой полином 3-ей степени по y, коэффициенты которого являются полиномами по переменной x. Ниже нас будут интересовать такие полиномы, у которых величина y представляет собой квадратичную иррациональность, т.е.

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \tag{7.50}$$

и, следовательно, $P(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$.

Наряду с полиномами $P(x, y)$ будем рассматривать рациональные функции $R(x, y)$ переменных x и y, которые определяются отношением двух полиномов:

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{7.51}$$

и, в частности, рациональные функции с переменной $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, т.е. $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$.

Полиномы $P(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ в силу особенностей второй переменной:

$$y^n = (\sqrt{ax^2 + bx + c})^n = \begin{cases} (ax^2 + bx + c)^k & \text{если } n = 2k,\ k = \overline{0, \infty}; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c}(ax^2 + bx + c)^k & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases}$$

всегда можно представить в виде

$$P(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = P_1(x) + \sqrt{ax^2+bx+c}P_2(x), \tag{7.52}$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$ — некоторые полиномы только относительно x. С учетом этого любую рациональную функцию $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ всегда можно представить в виде

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R_1(x) + \sqrt{ax^2+bx+c}R_2(x), \tag{7.53}$$

где $R_1(x)$, $R_2(x)$ — некоторые полиномы только относительно x.

Действительно, согласно определению рациональной функции (7.51) имеем

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \frac{P(x, \sqrt{ax^2+bx+c})}{Q(x, \sqrt{ax^2+bx+c})},$$

откуда в силу (7.53) получим

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \frac{P_1(x) + \sqrt{ax^2+bx+c}P_2(x)}{Q_1(x) + \sqrt{ax^2+bx+c}Q_2(x)}.$$

Умножив на величину $Q_1(x)-\sqrt{ax^2+bx+c}Q_2(x)$ числитель и знаменатель этой дроби:

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \frac{[P_1(x) + \sqrt{ax^2+bx+c}P_2(x)][Q_1(x) - \sqrt{ax^2+bx+c}Q_2(x)]}{[Q_1(x) + \sqrt{ax^2+bx+c}Q_2(x)][Q_1(x) - \sqrt{ax^2+bx+c}Q_2(x)]}$$

и введя обозначения

$$\begin{aligned} &\overline{P}_1(x) = P_1(x)Q_1(x) - P_2(x)Q_2(x)(ax^2+bx+c); \\ &\overline{P}_2(x) = P_2(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_2(x); \\ &\overline{Q}(x) = Q_1^2(x) - Q_2^2(x)(ax^2+bx+c), \end{aligned} \tag{7.54}$$

придем к формуле (7.53):

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R_1(x) + \sqrt{ax^2+bx+c}R_2(x), \tag{7.55}$$

где рациональные функции $R_1(x)$ и $R_2(x)$ выражаются через полиномы (7.54) как

$$R_1(x) = \frac{\overline{P}_1(x)}{\overline{Q}(x)}, \quad R_2(x) = \frac{\overline{P}_2(x)}{\overline{Q}(x)}.$$

Выражение (7.55) для вычисления интегралов

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)dx$$

можно привести к более удобной форме:

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R_1(x) + \frac{\overline{R}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{7.56}$$

где

$$\overline{R}(x) = R_2(x)(ax^2+bx+c).$$

С учетом (7.56) можно записать

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R_1(x)dx + \int \frac{\overline{R}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx. \tag{7.57}$$

Таким образом, интеграл (7.48) сводится к сумме двух интегралов. Первый из них есть интеграл от рациональной функции, и методы его вычисления рассмотрены в предыдущем разделе. Во втором интеграле (7.57), выделив из рациональной дроби $\overline{R}(x)$ целую часть $P_n(x)$, а правильную ее часть представив в виде разложения (5.31), (5.32) на простые дроби, сведем его к линейной комбинации интегралов трех следующих типов:

$$J_1 = \int P_n(x)\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{7.58}$$

$$J_2 = \int \frac{A}{(x-x_0)^n}\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7.59}$$

$$J_3 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p^2-4q<0. \tag{7.60}$$

Остановимся на каждом из этих типов отдельно, рассмотрев предварительно вспомогательный пример.

Пример 7.7. Доказать справедливость рекуррентной формулы

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + P_0\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7.61}$$

где $P_{n-1}(x)$ — некоторый полином степени $(n-1)$, а P_0 — полином нулевой степени, т.е. некоторая постоянная.

Решение. Исходный интеграл представим суммой двух других:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{1}{2a}(2ax^n + bx^{n-1} - bx^{n-1})dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$
$$= \frac{1}{2a}\int \frac{x^{n-1}(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{b}{2a}\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{7.62}$$

и первый из них вычислим по частям:

$$\int \frac{x^{n-1}(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left| \begin{matrix} u = x^{n-1} & du = (n-1)x^{n-2}dx \\ dv = \dfrac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} & v = 2\sqrt{ax^2+bx+c} \end{matrix} \right| =$$
$$= 2x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - 2(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+bx+c}dx =$$
$$= 2x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - 2(n-1)\int \frac{(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2})dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{7.63}$$

Тогда подстановка (7.63) в (7.62) дает

$$n\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} -$$

$$-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{b}{a}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}-(n-1)\frac{c}{a}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (7.64)$$

Положив в (7.64) $n=1$, получим

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (7.65)$$

Положив в (7.64) $n=2$, получим

$$2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{x\sqrt{ax^2+bx+c}}{a}-$$
$$-\frac{b}{2a}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}-\frac{c}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (7.66)$$

Подставим сюда выражение (7.65) для второго интеграла:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{2x-3b}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{1}{8a^2}(3b^2-4ac)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (7.67)$$

Применив подобные преобразования для $n>2$, с помощью метода математической индукции придем к формуле (7.61).

Перейдем к рассмотрению интегралов (7.58)–(7.60).

I. Вычисление интегралов (7.58):

$$J_1=\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Воспользовавшись для каждого слагаемого $p_k^n x^k$ полинома $P_n(x)$ формулой (7.61), получим линейную комбинацию этих интегралов, т.е.

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\sqrt{ax^2+bx+c}\,P_{n-1}(x)+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (7.68)$$

Чтобы найти полином $P_{n-1}(x)$ и постоянную λ, воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Для этого продифференцируем тождество (7.68) и затем умножим его на $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Тогда

$$P_n(x)=(ax^2+bx+c)P'_{n-1}(x)+\frac{1}{2}(2ax+b)P_{n-1}(x)+\lambda. \quad (7.69)$$

Если сюда подставить полином $P_{n-1}(x)$ с неизвестными коэффициентами p_i^{n-1}, $i=\overline{0,n-1}$, то, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в (7.69), получим систему из $(n+1)$-го уравнения, из которой и найдем коэффициенты p_i и число λ.

Пример 7.8. Вычислить

$$J_1=\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

Решение. Воспользуемся формулой (7.69), где $P_2(x) = 1 + x^2$, $P_1(x) = p_0 + p_1 x$, $P_1' = p_1$; тогда

$$1 + x^2 = p_1(x^2 + x + 1) + \frac{1}{2}(2x + 1)(p_0 + p_1 x) + \lambda$$

или

$$1 + x^2 = p_1 + \frac{1}{2}p_0 + \lambda + \Big(p_0 + \frac{3}{2}p_1\Big)x + 2p_1 x^2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$1 = p_1 + \frac{1}{2}p_0 + \lambda, \quad 0 = p_0 + \frac{3}{2}p_1, \quad 1 = 2p_1,$$

из которой следует, что

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_0 = -\frac{3}{4}, \quad \lambda = \frac{7}{8}.$$

Из формулы (7.68) с помощью найденных коэффициентов получим

$$J_1 = \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx = \Big(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\Big)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{7}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}. \tag{7.70}$$

Приняв во внимание, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{d(x + 1/2)}{\sqrt{(x + 1/2)^2 + 3/4}} = \ln\Big(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\Big) + C,$$

из (7.70) окончательно получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx = \\ &= \Big(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\Big)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{7}{8}\ln\Big(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\Big) + \frac{7}{8}C. \end{aligned} \tag{7.71}$$

II. Интегралы (7.59):

$$J_2 = \int \frac{A\,dx}{(x - x_0)^n\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

заменой

$$t = \frac{1}{x - x_0} \tag{7.72}$$

сводятся к интегралам вида (7.58), рассмотренным выше.

Пример 7.9. Вычислить

$$\int \frac{dx}{(3 - x)\sqrt{x^2 - 5x + 7}} + \int \frac{dx}{(3 - x)^3\sqrt{x^2 - 5x + 7}}.$$

Решение. Замена

$$x-3=\frac{1}{t},\quad dx=-\frac{dt}{t^2},\quad x=\frac{1+3t}{t},\quad x^2=\frac{(1+3t)^2}{t^2}$$

с учетом того, что

$$\int\frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2-5x+7}}+\int\frac{dx}{(3-x)^3\sqrt{x^2-5x+7}}=\int\frac{x^2-6x+10}{(3-x)^3\sqrt{x^2-5x+7}}dx,$$

дает

$$\int\frac{x^2-6x+10}{(3-x)^3\sqrt{x^2-5x+7}}dx=$$
$$=\int\frac{\dfrac{(1+3t)^2}{t^2}-\dfrac{6(1+3t)}{t}+10}{-\dfrac{1}{t^3}\sqrt{\dfrac{(1+3t)^2}{t^2}-5\dfrac{6+3t}{t}+7}}\Big(-\frac{dt}{t^2}\Big)=\int\frac{1+t^2}{\sqrt{t^2+t+1}}dt.$$

С учетом результатов предыдущего примера и соотношения (7.71) запишем

$$\int\frac{x^2-6x+10}{(3-x)^3\sqrt{x^2-5x+7}}dx=\int\frac{1+t^2}{\sqrt{t^2+t+1}}dt=$$
$$=\Big(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\Big)\sqrt{t^2+t+1}+\frac{7}{8}\ln\Big(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\Big)+\frac{7}{8}C.$$

Возвратившись к исходной переменной соотношением $t=1/(x-3)$, найдем

$$\int\frac{x^2-6x+10}{(3-x)^3\sqrt{x^2-5x+7}}dx=\Big(\frac{1}{2(x-3)}-\frac{3}{4}\Big)\sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}+1}+$$
$$+\frac{7}{8}\ln\Big|\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}+1}\Big|+\bar{C},$$

где произвольная постоянная $\bar{C}=7C/8$.

III. Вычисление интегралов (7.60)

$$J_3=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

В зависимости от коэффициентов квадратичных полиномов p,q и a,b,c различают три способа вычисления этих интегралов.

1. Пусть $p=b/a$, $q=c/a$, $a\neq 0$

В этом случае трехчлен ax^2+bx+c лишь множителем отличается от трехчлена x^2+px+q, что позволяет представить интеграл J_3 в виде

$$J_3=\int\frac{Mx+n}{\big(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\big)^n}\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=a^n\int\frac{(Mx+n)dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}.\qquad(7.73)$$

Стандартным приемом он разлагается на два интеграла:

$$J_3 = a^n \int \frac{(Mx+N)}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = a^n \left\{ \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} + \right.$$
$$\left. + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} \right\}, \quad (7.74)$$

первый из которых легко вычислить подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} =$$
$$= \frac{1}{1-2n}(ax^2+bx+c)^{-n+1/2} + C. \quad (7.75)$$

Чтобы вычислить второй интеграл (7.74), используется подстановка

$$t = (\sqrt{ax^2+bx+c})' = \frac{ax+b/2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (7.76)$$

называемая *подстановкой Абеля*. Этой подстановкой второй интеграл (7.74) сводится к интегралу от полинома по переменной t:

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{4^n}{(4ac-b^2)^n} \int (a-t^2)^{n-1} dt. \quad (7.77)$$

Действительно, записав подстановку Абеля в виде

$$4t^2(ax^2+bx+c) = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4(ax^2+bx+c) + b^2 - 4ac,$$

получим равенство

$$4(a-t^2)(ax^2+bx+c) = 4ac - b^2,$$

из которого следуют два полезных соотношения:

$$\frac{ac-(b/2)^2}{ax^2+bx+c} = a - t^2; \quad (7.78)$$
$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{4^n(a-t^2)^n}{(4ac-b^2)^n}. \quad (7.79)$$

Далее, дифференцирование подстановки Абеля (7.76) дает

$$dt = \left[a - \frac{ax-(b/2)^2}{ax^2+bx+c}\right] \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{ac-(b/2)^2}{ax^2+bx+c} \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

или с учетом (7.78)

$$dt = (a-t^2) \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{dt}{a-t^2}. \quad (7.80)$$

Теперь произведение равенств (7.79) и (7.80) приводит к еще одному равенству

$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{4^n}{(4ac-b^2)^n}(a-t^2)^n dt,$$

интегрирование которого и дает формулу (7.77).

Пример 7.10. Вычислить

$$V = \int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+x+1)^{7/2}}.$$

Решение. Стандартным приемом данный интеграл разлагается на два:

$$V = V_1 + V_2 = \int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^{7/2}} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{7/2}}. \tag{7.81}$$

Первый из них легко вычисляется методом подведения под знак дифференциала:

$$V_1 = \int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^{7/2}} = \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^{7/2}} = -\frac{2}{5(x^2+x+1)^{5/2}} + C, \tag{7.82}$$

а второй с помощью подстановки Абеля

$$t = \frac{x+1/2}{\sqrt{x^2+x+1}} \tag{7.83}$$

преобразуется к виду

$$V_2 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{7/2}} = \frac{64}{27}\int (1-t^2)^2 dt. \tag{7.84}$$

Этот результат можно получить, повторив для замены (7.83) общие выкладки (7.78)–(7.80), или воспользоваться готовой формулой (7.75).

Вычисление интеграла (7.84) труда не составляет:

$$V_2 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{7/2}} = \frac{64}{27}\int (1-t^2)^2 dt = \frac{64}{27}\Big(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\Big) + C.$$

Возвратившись к исходной переменной согласно (7.83), этот результат можно переписать как

$$\begin{aligned} V_2 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{7/2}} &= \\ &= \frac{64}{27}\frac{x+1/2}{\sqrt{x^2+x+1}}\Big(1 - \frac{2}{3}\frac{(x+1/2)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{5}\frac{(x+1/2)^4}{(x^2+x+1)^2}\Big) + C. \end{aligned} \tag{7.85}$$

Подставив (7.82) и (7.85) в (7.81), окончательно получим

$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 = -\frac{2}{5(x^2+x+1)^{5/2}} &+ \\ + \frac{64}{27}\frac{x+1/2}{\sqrt{x^2+x+1}}\Big(1 - \frac{2}{3}\frac{(x+1/2)^2}{x^2+x+1} &+ \frac{1}{5}\frac{(x+1/2)^4}{(x^2+x+1)^2}\Big) + C. \end{aligned}$$

2. Пусть $p = b/a$, $q \neq c/a$, $a \neq 0$, $p^2 - 4q < 0$.

В этом случае интеграл J_3 можно записать как

$$J_3 = \int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+\frac{b}{a}x+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{7.86}$$

Каждый из квадратных трехчленов, входящих в интеграл (7.86), линейной заменой

$$t = x + \beta, \quad \beta = \frac{b}{2a} \tag{7.87}$$

можно свести к двучленам

$$\begin{aligned} &x^2 + \frac{b}{a}x + q = t^2 + \mu^2, \quad \mu^2 = q - \beta^2 > 0 \quad \Big(q - \frac{p^2}{4} > 0\Big); \\ &ax^2 + bx + c = at^2 + \nu, \quad \nu = c - a\beta^2, \end{aligned} \tag{7.88}$$

с помощью которых интеграл (7.86) запишется как

$$\begin{aligned} J_3 &= \int \frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + px + q)^n\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\ &= \int \frac{[M(t - \beta) + N]dt}{(t^2 + \mu^2)^n\sqrt{at^2 + \nu}} = MV_1 + (N - \beta M)V_2, \end{aligned} \tag{7.89}$$

где

$$V_1 = \int \frac{t\,dt}{(t^2 + \mu^2)^n\sqrt{at^2 + \nu}}; \tag{7.90}$$

$$V_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + \mu^2)^n\sqrt{at^2 + \nu}}. \tag{7.91}$$

Интеграл V_1 подстановкой

$$v^2 = at^2 + \nu \tag{7.92}$$

с учетом того, что

$$t\,dt = \frac{v\,dv}{a}, \quad t^2 + \mu^2 = \frac{v^2 - \nu}{a} + \mu^2 = \frac{v^2 - aq - c}{a},$$

сводится к более простому интегралу

$$V_1 = \int \frac{t\,dt}{(t^2 + \mu^2)^n\sqrt{at^2 + \nu}} = \int \frac{\dfrac{v\,dv}{a}}{\dfrac{(v^2 + aq - c)^n}{a^n}v} = a^{n-1}\int \frac{dv}{(v^2 + aq - c)^n}, \tag{7.93}$$

который вычислен в примере 6.5 (формула (6.18))

$$\int \frac{dv}{(v^2 + \omega)^n} = \frac{1}{2\omega(n - 1)}\left[\frac{v}{(v^2 + \omega)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{dv}{(v^2 + \omega)^{n-1}}\right], \quad n = \overline{2, \infty}. \tag{7.94}$$

Интеграл V_2 подстановкой Абеля (7.76):

$$u = \frac{at}{\sqrt{at^2 + \nu}}, \quad t^2 = \frac{u^2\nu}{a(a - u^2)}, \tag{7.95}$$

сводится к интегралу от правильной рациональной дроби по переменной u.

Действительно, в силу (7.80) имеем

$$\frac{dt}{\sqrt{at^2 + \nu}} = \frac{du}{a - u^2};$$

кроме того, легко вычислить

$$t^2 + \mu^2 = \frac{(\nu - a\mu^2)u^2 + a^2\mu^2}{a(a-u^2)} = \frac{(c-aq)u^2 + a^2\mu^2}{a(a-u^2)},$$

поэтому

$$V_2 = \int \frac{1}{(t^2+\mu^2)^n}\frac{dt}{\sqrt{at^2+\nu}} = \int \frac{a^n(a-u^2)^n}{[(c-aq)u^2+a^2\mu^2]^n}\frac{du}{a-u^2} = \\ = a^n \int \frac{(a-u^2)^{n-1}}{[(c-aq)u^2+a^2\mu^2]^n}. \tag{7.96}$$

Таким образом, вычисление интеграла J_3 (7.86) или (7.89) сводится в итоге к вычислению интегралов от правильных рациональных дробей (7.93) и (7.96).

Пример 7.11. Вычислить

$$V = \int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+3)^2\sqrt{x^2+2x+2}}. \tag{7.97}$$

Решение. Интеграл (7.97) принадлежит классу интегралов вида (7.86), следовательно, первым шагом является замена

$$x+1 = t, \quad dx = dt, \quad x = t-1,$$

которая дает

$$V = \int \frac{x\,dx}{[(x+1)^2+2]^2\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{(t-1)dt}{(t^2+2)^2\sqrt{t^2+1}} = V_1 + V_2, \tag{7.98}$$

где

$$V_1 = \int \frac{t\,dt}{(t^2+2)^2\sqrt{t^2+1}}; \tag{7.99}$$

$$V_2 = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2\sqrt{t^2+1}}. \tag{7.100}$$

Интеграл V_1 (7.99), согласно (7.92), подстановкой

$$v^2 = t^2+1, \quad v\,dv = t\,dt, \quad t^2+2 = v^2+1 \tag{7.101}$$

упрощается к интегралу

$$V_1 = \int \frac{t\,dt}{(t^2+2)^2\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{v\,dv}{(v^2+1)v} = \int \frac{dv}{(v^2+1)^2},$$

который вычисляется по рекуррентной формуле (7.96):

$$V_1 = \int \frac{dv}{(v^2+1)^2} = \frac{1}{2}\Big[\frac{v}{v^2+1} + \int\frac{dv}{v^2+1}\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{v}{v^2+1} + \operatorname{arctg} v\Big] + C_1 = \\ = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+2} + \operatorname{arctg}\sqrt{t^2+1}\Big] + C_1. \tag{7.102}$$

Интеграл V_2 (7.100) подстановкой Абеля (7.76)

$$u = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad t^2 = \frac{u^2}{1-u^2}, \tag{7.103}$$

с учетом (7.79)

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{du}{1-u^2}$$

и

$$t^2 + 2 = \frac{2-u^2}{1-u^2}$$

сводится к интегралу от рациональной дроби:

$$V_2 = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{(1-u^2)^2}{(2-u^2)^2}\frac{du}{1-u^2} = \int \frac{(1-u^2)du}{(u^2-2)^2}. \tag{7.104}$$

Ее разложение на простые дроби имеет вид

$$\frac{1-u^2}{(u^2-2)^2} = \frac{1-u^2}{(u-\sqrt{2})^2(u+\sqrt{2})^2} =$$
$$= \frac{A}{u-\sqrt{2}} + \frac{B}{(u-\sqrt{2})^2} + \frac{C}{u+\sqrt{2}} + \frac{D}{(u+\sqrt{2})^2}. \tag{7.105}$$

Неопределенные коэффициенты стандартным образом находятся из равенства

$$1-u^2 = [A(u-\sqrt{2})+B](u+\sqrt{2})^2 + [C(u+\sqrt{2})+D](u-\sqrt{2})^2. \tag{7.106}$$

Положив в (7.106) $u = \sqrt{2}$, найдем $B = -1/8$; положив $u = -\sqrt{2}$, найдем $D = -1/8$; наконец, положив $u = 0$, получим уравнение

$$\frac{3\sqrt{2}}{8} = -A + C. \tag{7.107}$$

Теперь, приравняв в (7.106) коэффициенты при u^3, найдем еще одно уравнение

$$0 = A + C. \tag{7.108}$$

Решение системы уравнений (7.107), (7.108) дает значения коэффициентов $C = -A = 3\sqrt{2}/16$.

С учетом найденных значений коэффициентов разложение (7.105) примет вид

$$\frac{1-u^2}{(u^2-2)^2} = -\frac{3\sqrt{2}}{16(u-\sqrt{2})} - \frac{1}{8(u-\sqrt{2})^2} + \frac{3\sqrt{2}}{16(u+\sqrt{2})} - \frac{1}{8(u+\sqrt{2})^2},$$

в силу чего интеграл V_2 (7.104) сводится к сумме табличных интегралов:

$$V_2 = \int \frac{(1-u^2)du}{(2-u^2)^2} = -\frac{3\sqrt{2}}{16}\int \frac{du}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{8}\int \frac{du}{(u-\sqrt{2})^2} + \frac{3\sqrt{2}}{16}\int \frac{du}{u+\sqrt{2}} -$$
$$-\frac{1}{8}\int \frac{du}{(u+\sqrt{2})^2} = -\frac{3\sqrt{2}}{16}\ln|u-\sqrt{2}| + \frac{1}{8(u-\sqrt{2})} + \frac{3\sqrt{2}}{16}\ln|u+\sqrt{2}| +$$

$$+\frac{1}{8(u+\sqrt{2})}+C=\frac{3\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\right|+\frac{u}{4(u^2-2)}+C_2. \tag{7.109}$$

Возвратившись к переменной t по формуле (7.103), получим

$$V_2=\int\frac{(1-u^2)du}{(2-u^2)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2(t^2+1)}}{t-\sqrt{2(t^2+1)}}\right|-\frac{t\sqrt{t^2+1}}{4(t^2+2)}+C_2. \tag{7.110}$$

Подставив найденные выражения для V_1 (7.102) и V_2 (7.110) в (7.98), для исходного интеграла (7.97) получим

$$V=\int\frac{x\,dx}{(x^2+2x+3)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+2}+\operatorname{arctg}\sqrt{t^2+1}\Big]+\frac{3\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2(t^2+1)}}{t-\sqrt{2(t^2+1)}}\right|-\frac{t\sqrt{t^2+1}}{4(t^2+2)}+C,$$

где $t=x+1$, а произвольная постоянная $C=C_1+C_2$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая.

3. Пусть $p\neq b/a$, $q=c/a$, $p^2-4q<0$.

В этом случае для интеграла

$$J_3=\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{7.111}$$

используется замена

$$x=\frac{\gamma t+\delta}{t+1}, \tag{7.112}$$

где числа γ и δ подбираются такими, чтобы коэффициенты при t в новых квадратных трехчленах по переменной t одновременно обращались в нуль. При этом сам интеграл (7.111) примет вид

$$J_3=\int\frac{P(t)dt}{(t^2+\mu^2)^n\sqrt{at^2+\nu}}, \tag{7.113}$$

где $P(t)$ — полином степени не выше $(2n-1)$. Чтобы вычислить интеграл (7.113), разложим правильную дробь на простейшие:

$$\frac{P(t)}{(t^2+\mu^2)^n}=\frac{M_1t+N_1}{t^2+\mu^2}+...+\frac{M_nt+N_n}{(t^2+\mu^2)^n},$$

тогда интеграл (7.113) сведется к линейной комбинации интегралов

$$V_1=\int\frac{t\,dt}{(t^2+\mu^2)^n\sqrt{at^2+\nu}}; \tag{7.114}$$

$$V_2=\int\frac{dt}{(t^2+\mu^2)^n\sqrt{at^2+\nu}}, \tag{7.115}$$

но эти интегралы совпадают с интегралами (7.90) и (7.91), вычисление которых с помощью подстановок (7.92) и (7.95) было рассмотрено выше.

Пример 7.12. Вычислить

$$V = \int \frac{x\,dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}. \tag{7.116}$$

Решение. Подстановка (7.112)

$$x = \frac{\gamma t + \delta}{t + 1}$$

дает

$$x^2 + x + 1 = \frac{(\gamma^2 + \gamma + 1)t^2 + [2\gamma\delta + (\gamma + \delta) + 2]t + (\delta^2 + \delta + 1)}{(t+1)^2};$$
$$x^2 - x + 1 = \frac{(\gamma^2 - \gamma + 1)t^2 + [2\gamma\delta - (\gamma + \delta) + 2]t + (\delta^2 - \delta + 1)}{(t+1)^2}.$$

Числа γ и δ подберем так, чтобы коэффициенты при t обращались в нуль, т.е.

$$2\gamma\delta + (\gamma + \delta) + 2 = 0;$$
$$2\gamma\delta - (\gamma + \delta) + 2 = 0.$$

Эта система имеет решение, например $\gamma = 1$, $\delta = -1$. Тогда

$$x = \frac{t-1}{t+1}, \quad dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}, \quad t = \frac{1+x}{1-x}, \tag{7.117}$$

причем

$$x^2 + x + 1 = \frac{3t^2 + 1}{(t+1)^2}, \quad x^2 - x + 1 = \frac{t^2 + 3}{(t+1)^2}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{\dfrac{t-1}{t+1}\,\dfrac{2dt}{(t+1)^2}}{\dfrac{t^2+3}{(t+1)^2}\,\dfrac{\sqrt{3t^2+1}}{t+1}} = 2(V_1 - V_2), \tag{7.118}$$

где

$$V_1 = \int \frac{t\,dt}{(t^2 + 3)\sqrt{3t^2 + 1}};$$
$$V_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + 3)\sqrt{3t^2 + 1}}.$$

Интеграл V_1 вычисляется подстановкой (7.92):

$$v^2 = 3t^2 + 1.$$

С учетом того, что

$$t\,dt = \frac{1}{3}v\,dv, \quad t^2 + 3 = \frac{v^2 + 8}{3},$$

имеем

$$V_1 = \int \frac{(v/3)\,dv}{[(v^2+8)/3]v} = \int \frac{dv}{v^2+8} = \frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{8}} + C_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}} + C_1.$$

Интеграл V_2 вычисляется с помощью подстановки Абеля (7.76)

$$u = \frac{3t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad t^2 = \frac{u^2}{3(3-u^2)}.$$

Поскольку

$$\frac{dt}{\sqrt{3t^2+1}} = \frac{du}{3-u^2}$$

и

$$t^2+3 = \frac{27-8u^2}{3(3-u^2)},$$

то

$$V_2 = \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} = \int \frac{3(3-u^2)}{27-8u^2}\frac{du}{3-u^2} = 3\int \frac{du}{27-8u^2} = \frac{3}{8}\int \frac{du}{\dfrac{27}{8}-u^2} =$$

$$= \frac{3}{8}\frac{1}{2\sqrt{27/8}}\ln\left|\frac{\sqrt{27/8}+u}{\sqrt{27/8}-u}\right| + C_2 = \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}\right| + C_2 =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6(3t^2+1)}+4t}{\sqrt{6(3t^2+1)}-4t}\right| + C_2.$$

Подставив найденные выражения для V_1 и V_2 в (7.118), для исходного интеграла (7.116) получим

$$V = \int \frac{x\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}} + \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6(3t^2+1)}+4t}{\sqrt{6(3t^2+1)}-4t}\right| + C,$$

где $t = (1+x)/(1-x)$, а произвольная постоянная $C = C_1 + C_2$.

Пример 7.13. Вычислить

$$V = \int x^4\sqrt{4-x^2}dx.$$

Решение. Проведем тождественные преобразования в интеграле V:

$$V = \int x^4\sqrt{4-x^2}dx = \int \frac{x^4(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{P_6(x)}{\sqrt{4-x^2}}dx,$$

где $P_6(x) = -x^6 + 4x^4$. Следуя (7.68), можем записать

$$\int \frac{P_6(x)}{\sqrt{4-x^2}}dx = \sqrt{4-x^2}P_5(x) + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \tag{7.119}$$

где коэффициенты полинома $P_5(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5$ и число λ подлежат определению. Найти их можно дифференцированием равенства (7.119). Действительно, имеем

$$\frac{-x^6 + 4x^4}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}P_5(x) + \sqrt{4-x^2}P_5'(x) + \lambda\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

или

$$\begin{gathered} -x^6 + 4x^2 = -x(p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5) + \\ + (4-x^2)(p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2 + 4p_4x^3 + 5p_5x^4) + \lambda \end{gathered} \tag{7.120}$$

в развернутой записи. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях (7.120), получим систему

$$\begin{array}{ll} x^6\colon 1 = -6p_5; & x^2\colon 0 = 12p_3 - 2p_1; \\ x^5\colon 0 = -5p_4; & x\colon 0 = 8p_2 - p_0; \\ x^4\colon 4 = 20p_5 - 4p_3; & x^0\colon 0 = 4p_1 + \lambda, \\ x^3\colon 0 = 16p_4 - 3p_2; & \end{array}$$

имеющую единственное решение

$$p_0 = 0, \quad p_1 = -1, \quad p_3 = -\frac{1}{6}, \quad p_4 = 0, \quad p_5 = \frac{1}{6}, \quad \lambda = 2.$$

С учетом найденных коэффициентов полинома $P_5(x)$ выражение (7.119) запишется как

$$\int \frac{4x^4 - x^6}{\sqrt{4-x^2}}dx = \sqrt{4-x^2}\Big(-x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^5\Big) + 2\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}},$$

откуда

$$V = \int x^4\sqrt{4-x^2}dx = \int\frac{4x^4-x^6}{\sqrt{4-x^2}}dx = -x\sqrt{4-x^2}\Big(1+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x^4\Big)+2\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

7.4. Интегрирование дифференциального бинома

♦ Выражение

$$x^\mu(a + bx^\nu)^p dx,$$

где μ, ν, p — рациональные числа, называется *дифференциальным биномом*, или *биномиальным дифференциалом.*

Теорема 7.2. *Интеграл от дифференциального бинома*

$$I = \int x^\mu(a + bx^\nu)^p dx \tag{7.121}$$

можно свести к интегралу от рациональной функции следующими подстановками:

1) *если p — целое (положительное, нуль или отрицательное), то $x = t^s$;*
2) *если $\dfrac{\mu+1}{\nu}$ — целое, то $a + bx^\nu = t^r$;*
3) *если $\dfrac{\mu+1}{\nu} + p$ — целое, то $a + bx^\nu = x^\nu t^r$.*

Здесь s — общий знаменатель рациональных чисел μ, ν, а r — знаменатель рациональной дроби p.

Подстановки 1–3 называются *подстановками Чебышева.*

Доказательство. 1) При целом p интеграл (7.121) сводится к интегралу от рациональной функции двух переменных:

$$I = \int x^\mu (a + bx^\nu)^p dx = \int R(x^\mu, x^\nu) dx.$$

Если μ и ν — дробные, имеем простейшую иррациональность, интегрирование которой, как показано выше, выполняется подстановкой $x = t^s$, где s — общий знаменатель рациональных дробей μ, ν.

2) Исходный интеграл (7.121) преобразуем подстановкой $y = x^\nu$, $x = y^{1/\nu}$, $dx = \frac{1}{\nu} y^{(1/\nu)-1} dy$:

$$I = \int x^\mu (a + bx^\nu)^p dx = \frac{1}{\nu} \int y^{(\mu+1)/\nu - 1} (a + by)^p dy. \tag{7.122}$$

Если предположить, что $(\mu + 1)/\nu$ целое, то подынтегральная функция будет рациональной функцией двух аргументов $R(y, (a + by)^p)$, которая при дробном p вырождается в простейшую иррациональность $R(y, \sqrt[r]{a + by})$, где r — знаменатель дроби p. Интегрирование такой иррациональности, как показано выше, осуществляется подстановкой

$$a + by = a + bx^\nu = t^r,$$

что соответствует второй подстановке Чебышева.

3) В этом случае проведем дополнительное преобразование интеграла (7.122) к виду

$$I = \int x^\mu (a + bx^\nu)^p dx = \frac{1}{\nu} \int y^{(\mu+1)/\nu - 1} (a + by)^p dy = \frac{1}{\nu} \int y^{(\mu+1)/\nu + p - 1} \Big(\frac{a + by}{y}\Big)^p dy.$$

Если теперь предположить, что $(\mu+1)/\nu+p$ целое, то подынтегральная функция будет рациональной функцией двух аргументов $R(y, [(a + by)/y]^p)$, которая при дробном p вырождается в простейшую иррациональность $R\big(y, \sqrt[r]{(a + by)/y}\big)$, где r — знаменатель дроби p. Интегрирование такой иррациональности, как показано выше, осуществляется подстановкой

$$\frac{a + by}{y} = \frac{a + x^\nu}{x^\nu} = t^r,$$

что соответствует третьей подстановке Чебышева.

Таким образом, теорема доказана.

$\Diamond$ В часто встречающемся случае $\nu = 1$ указанные условия эквивалентны следующим: 1) p — целое; 2) μ — целое; 3) $\mu + p$ — целое.

$\Diamond$ Отметим, что теорема 7.2 всего лишь перечисляет случаи, в которых интеграл от дифференциального бинома можно свести к интегралам от рациональных функций. Указанные подстановки, вообще говоря, были известны еще со времен Ньютона. Название подстановок Чебышева они получили гораздо позднее, после того как в середине 19-го века русским математиком П.Л. Чебышевым было доказано, что, кроме перечисленных, других случаев интегрируемости дифференциальных биномов в элементарных функциях не существует.

Пример 7.14. Вычислить

$$I_1 = \int (\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x^7})^2 dx; \quad I_2 = \int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$$

Решение. 1. После простейших преобразований имеем интеграл от дифференциального бинома

$$I_1 = \int (x^{1/4} + x^{7/12})^2 dx = \int x^{1/2}(1 + x^{1/3})^2 dx$$

со степенями $\mu = 1/2$, $\nu = 1/3$, $p = 2$ — целое, соответствующими первому случаю интегрируемости. Поскольку общий знаменатель дробей $\mu = 1/2$ и $\nu = 1/3$ равен $s = 6$, то

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt, \quad t = x^{1/6},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^{1/2}(1 + x^{1/3})^2 dx = \int t^3(1 + t^2)^2 6t^5 dt = \\ &= 6\int t^8(1 + t^2)^2 dt = 6\int (t^8 + 2t^{10} + t^{12}) dt = \\ &= 6\Big(\frac{1}{9}t^9 + \frac{2}{11}t^{11} + \frac{1}{13}t^{13}\Big) + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{12}{11}x^{11/6} + \frac{6}{13}x^{13/6} + C. \end{aligned}$$

2. После простейших преобразований имеем интеграл от дифференциального бинома

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} = \int \frac{x^{1/3} dx}{x(x^{1/2} + x^{1/3})} = \\ &= \int \frac{x^{1/3} dx}{x x^{1/3}(1 + x^{1/6})} = \int x^{-1}(1 + x^{1/6})^{-1} dx \end{aligned}$$

со степенями $\mu = -1$, $\nu = 1/6$, $p = -1$ — целое, соответствующими первому случаю интегрируемости. Поскольку общий знаменатель s дробей μ и ν равен $s = 6$, то

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt, \quad t = x^{1/6},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int x^{-1}(1 + x^{1/6})^{-1} dx = \int \frac{6t^5 dt}{t^6(1 + t)} = 6\int \frac{dt}{t(1 + t)} = 6\int \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 + t}\Big) dt = \\ &= 6\big(\ln|t| - \ln|1 + t|\big) + C = 6\ln\Big|\frac{t}{1 + t}\Big| + C = 6\ln\frac{x^{1/6}}{1 + x^{1/6}} + C. \end{aligned}$$

Пример 7.15. Вычислить

$$I_1 = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx.$$

Решение. 1. Представив интеграл I_1 в виде

$$I_1 = \int x^{-1/2}(1 + x^{1/4})^{1/3} dx,$$

получим интеграл от дифференциального бинома со степенями $\mu = -1/2$, $\nu = 1/4$, $p = 1/3$, соответствующими второму случаю интегрируемости: $(\mu + 1)/\nu =$

$(-1/2+1)/(1/4) = 2$ — целое. Поскольку знаменатель r числа $p = 1/3$ равен 3, то, следуя теореме 7.2, используем подстановку

$$1 + x^{1/4} = t^3, \quad x = (t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt, \quad t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},$$

и тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (t^3-1)^{-2} t \cdot 12t^2(t^3-1)^3 dt = 12\int t^3(t^3-1)dt = 12\int (t^6-t^3)dt = \\ &= 12\Big(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{4}t^4\Big) + C = 12\Big[\frac{1}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3} - \frac{1}{4}(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}\Big] + C = \\ &= \frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}(3+4\sqrt[4]{x}) + C. \end{aligned}$$

2. Представив интеграл I_2 в виде

$$I_2 = \int x^3(1-x^2)^{-3/2} dx,$$

получим интеграл от дифференциального бинома со степенями $\mu = 3$, $\nu = 2$, $p = -3/2$, соответствующими второму случаю интегрируемости: $(\mu+1)/\nu = (3+1)/2 = 2$ — целое. Поскольку знаменатель r числа p равен 2, то, следуя теореме 7.2, воспользуемся подстановкой

$$1 - x^2 = t^2, \quad x = (1-t^2)^{1/2}, \quad dx = -\frac{t}{(1-t^2)^{1/2}} dt, \quad t = \sqrt{1-x^2},$$

и тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int (1-t^2)^{1/2} t^{-3} \frac{t}{(1-t^2)^{1/2}} dt = -\int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int dt - \int \frac{dt}{t^2} = \\ &= t + \frac{1}{t} + C = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C. \end{aligned}$$

Пример 7.16. Вычислить

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}} dx; \quad I_2 = \int \frac{\sqrt[3]{(1-4x^3)^2}}{x^6} dx.$$

Решение. 1. Представив интеграл I_1 в виде

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}} dx = \int x^{-2}(1+x^3)^{-5/3} dx,$$

получим интеграл от дифференциального бинома со степенями $\mu = -2$, $\nu = 3$, $p = -5/3$, соответствующими третьему случаю интегрируемости: $(\mu+1)/\nu + p = (-2+1)/3 - 5/3 = -2$ — целое. Поскольку знаменатель r числа p равен 3, то, следуя теореме 7.2, используем подстановку

$$1 + x^3 = x^3t^3, \quad x = (t^3-1)^{-1/3}, \quad dx = -(t^3-1)^{-4/3} t^2 dt, \quad t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x},$$

и тогда

$$I_1 = \int x^{-2}(1+x^3)^{-5/3}dx = -\int (t^3-1)^{2/3}\Big(1+\frac{1}{t^3-1}\Big)^{-5/3}(t^3-1)^{-4/3}t^2dt =$$

$$= -\int \frac{t^3-1}{t^3}dt = \int \frac{dt}{t^3} - \int dt = -\frac{1}{2t^2} - t + C = -\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}} + C.$$

2. Представив интеграл I_2 в виде

$$I_2 = \int \frac{\sqrt[3]{(1-4x^3)^2}}{x^6}dx = \int x^{-6}(1-4x^3)^{2/3}dx,$$

получим интеграл от дифференциального бинома со степенями $\mu = -6$, $\nu = 3$, $p = 2/3$, соответствующими третьему случаю интегрируемости: $\frac{\mu+1}{\nu} + p = \frac{-6+1}{3} + \frac{2}{3} = -1$ — целое. Поскольку знаменатель r числа p равен 3, то, следуя теореме 7.2, воспользуемся подстановкой

$$1-4x^3 = x^3t^3, \quad x = (4+t^3)^{-1/3}, \quad dx = -t^2(4+t^3)^{-4/3}dt, \quad t = \frac{\sqrt[3]{1-4x^3}}{x},$$

тогда

$$I_2 = \int x^{-6}(1-4x^3)^{2/3}dx = -\int (4+t^3)^2\Big(1-\frac{4}{4+t^3}\Big)t^2(4+t^3)^{-4/3}dt =$$

$$= -\int t^4dt = -\frac{t^5}{5} + C = C - \frac{\sqrt[3]{(1-4x^3)^5}}{5x^5}.$$

Как было показано выше, любой интеграл от дифференциального бинома заменой $y = x^\nu$ можно записать в виде (7.122), т.е.

$$I_{p,q} = \int (a+by)^p y^q dy. \qquad (7.123)$$

В связи с этим полезен следующий пример.

Пример 7.17. Показать, что для интеграла от дифференциального бинома вида (7.123) справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$I_{p,q} = \frac{1}{a(p+1)}[(p+q+2)I_{p+1,q} - (a+by)^{p+1}y^{q+1}], \quad p \neq -1; \qquad (7.124)$$

$$I_{p,q} = \frac{1}{b(q+1)}[(a+by)^{p+1}y^{q+1} - (p+q+2)I_{p,q+1}], \quad q \neq -1; \qquad (7.125)$$

$$I_{p,q} = \frac{1}{p+q+1}[apI_{p-1,q} - (a+by)^p y^{q+1}], \quad p+q \neq -1; \qquad (7.126)$$

$$I_{p,q} = \frac{1}{b(p+q+1)}[(a+by)^{p+1}y^q - aqI_{p,q-1}], \quad p+q \neq -1. \qquad (7.127)$$

Решение. Исходя из определения (7.123) и свойств неопределенного интеграла, имеем два очевидных соотношения:

$$I_{p+1,q} = \int (a+by)^{p+1}y^q dy = \int (a+by)^p y^q (a+by)dy =$$

$$= a\int (a+by)^p y^q dy + b\int (a+by)^{p+1} y^{q+1} dy = aI_{p,q} + bI_{p,q+1}$$

и

$$(a+by)^{p+1}y^{q+1} = \int d[(a+by)^{p+1}y^{q+1}] =$$
$$= \int [(p+1)b(a+by)^p y^{q+1} + (a+by)^{p+1}(q+1)y^q]dy =$$
$$= b(p+1)\int (a+by)^p y^{q+1} dy + (q+1)\int (a+by)^{p+1} y^q dy =$$
$$= b(p+1)I_{p,q+1} + (q+1)I_{p+1,q},$$

составляющих систему рекуррентных формул

$$\begin{gathered} I_{p+1,q} = aI_{p,q} + bI_{p,q+1}, \\ (a+by)^{p+1}y^{q+1} = b(p+1)I_{p,q+1} + (q+1)I_{p+1,q}. \end{gathered} \tag{7.128}$$

исключив из (7.128) величину $I_{p,q+1}$, получим формулу (7.124); исключив из нее же величину $I_{p+1,q}$, получим формулу (7.125). Разрешив теперь систему уравнений (7.124) и (7.125) относительно величин $I_{p+1,q}$ и $I_{p,q+1}$ и заменив p и q на $p-1$ и $q-1$, придем к формулам (7.126) и (7.127).

Пример 7.18. Показать, что для интеграла

$$V_{\nu,\mu} = \int \frac{x^\mu dx}{(a+bx^2)^\nu} \tag{7.129}$$

справедливы рекуррентные соотношения

$$V_{\nu,\mu} = \frac{1}{2a(\nu-1)}\Big[\frac{x^{\mu+1}}{(a+bx^2)^{\nu-1}} + (2\nu-\mu-3)V_{\nu-1,\mu}\Big]; \tag{7.130}$$

$$V_{\nu,\mu} = \frac{1}{b(\mu-2\nu+1)}\Big[\frac{x^{\mu-1}}{(a+bx^2)^{\nu-1}} - a(\mu-1)V_{\nu,\mu-2}\Big]. \tag{7.131}$$

Решение. Интеграл (7.130) заменой

$$x^2 = y, \quad x = y^{1/2}, \quad dx = \frac{1}{2}y^{-1/2}dy$$

приводится к виду (7.123):

$$V_{\nu,\mu} = \int \frac{x^\mu dx}{(a+bx^2)^\nu} = \frac{1}{2}\int (a+by)^{-\nu} y^{(\mu-1)/2} dy = \frac{1}{2}I_{-\nu,(\mu-1)/2}, \tag{7.132}$$

для которого справедливы рекуррентные соотношения (7.124)–(7.127). Применив к правой части (7.132) рекуррентную формулу (7.124), получим

$$V_{\nu,\mu} = \frac{1}{2}I_{-\nu,(\mu-1)/2} =$$
$$= \frac{1}{2a(1-\nu)}\Big[\Big(-\nu + \frac{\mu-1}{2} + 2\Big)I_{-\nu+1,(\mu-1)/2} - (a+by)^{-\nu+1}y^{(\mu+1)/2+1}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2a(1-\nu)}\left[\frac{\mu-2\nu+3}{2}\int(a+by)^{-\nu+1}y^{(\mu-1)/2}dy-(a+by)^{-\nu+1}y^{(\mu+1)/2}\right]. \tag{7.133}$$

Равенство (7.133) после возвращения к переменной $x^2 = y$ в терминах $V_{\alpha,\beta}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
V_{\nu,\mu} &= \frac{1}{2a(1-\nu)}\left[\frac{\mu-2\nu+3}{2}2\int(a+bx^2)^{-\nu+1}x^\mu dx-(a+bx^2)^{-\nu+1}x^{\mu+1}\right]= \\
&= \frac{1}{2a(1-\nu)}\Big[(\mu-2\nu+3)V_{\nu-1,\mu}-\frac{x^{\mu+1}}{(a+bx^2)^{\nu-1}}\Big]= \\
&= \frac{1}{2a(\nu-1)}\Big[\frac{x^{\mu+1}}{(a+bx^2)^{\nu-1}}+(2\nu-\mu-3)V_{\nu-1,\mu}\Big],
\end{aligned}$$

совпадающем с формулой (7.130). Попутно заметим, что формулу (7.130) можно рассматривать как обобщение формулы (3.105), полученной ранее. Действительно, положив в (7.130) $\gamma n = 0$ и $b = 1$, получим рекуррентную формулу

$$V_{\nu,0} = \int\frac{dx}{(a+x^2)^\nu} = \frac{1}{2a(\nu-1)}\left[\frac{x}{(a+bx^2)^{\nu-1}}+(2\nu-3)\int\frac{dx}{(a+x^2)^{\nu-1}}\right],$$

совпадающую с формулой (3.105).

Чтобы получить формулу (7.131), к правой части (7.132) применим рекуррентную формулу (7.127):

$$\begin{aligned}
V_{\nu,\mu} &= \frac{1}{2}I_{-\nu,(\mu-1)/2} = \\
&= \frac{1}{2b[-\nu+(\mu-1)/2+1]}\Big[(a+by)^{-\nu+1}y^{(\mu-1)/2}-a\frac{\mu-1}{2}I_{-\nu,(\mu-3)/2}\Big]= \\
&= \frac{1}{b(\mu-2\nu+1)}\left[(a+by)^{-\nu+1}y^{(\mu-1)/2}-a\frac{\mu-1}{2}\int(a+by)^{-\nu}y^{(\mu-3)/2}dy\right].
\end{aligned}$$

Возвратившись к переменной $x^2 = y$, в терминах $V_{\alpha,\beta}$ это равенство можно записать в виде

$$\begin{aligned}
V_{\nu,\mu} &= \frac{1}{b(\mu-2\nu+1)}\left[\frac{x^{\mu-1}}{(a+bx^2)^{\nu-1}}-a\frac{\mu-1}{2}2\int(a+bx^2)^{-\nu}x^{\mu-2}dx\right]= \\
&= \frac{1}{b(\mu-2\nu+1)}\Big[\frac{x^{\mu-1}}{(a+bx^2)^{\nu-1}}-a(\mu-1)V_{\nu,\mu-2}\Big],
\end{aligned}$$

совпадающем с формулой (7.131).

Рекуррентные формулы (7.124)–(7.127), (7.130) и (7.131) позволяют упростить интегрирование дифференциальных биномов. Рассмотрим несколько примеров, когда использование рекуррентных соотношений более эффективно, чем непосредственное применение подстановок Чебышева.

Пример 7.19. Вычислить

$$1)\ \int\frac{x^5dx}{(a+bx^2)^4};\quad 2)\ \int\frac{x^3dx}{(a+bx^2)^5};\quad 3)\ \int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad 4)\ \int\frac{x^4dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. 1) Имеем дифференциальный бином с $p = -4 \in \mathbb{Z}$, который можно свести к интегралу от рациональных функций 1-й подстановкой Чебышева. Согласно обозначениям (7.129), можно записать

$$\int \frac{x^5 dx}{(a+bx^2)^4} = V_{4,5}$$

и воспользоваться (7.130) или (7.131). В конфигурации $V_{4,5}$, когда $\nu = 4$, $\mu = 5$, очевидно, что удобнее воспользоваться формулой (7.130), поскольку в этом случае множитель $(2\nu - \mu - 3)$ перед первым интегралом $V_{\nu-1,\mu}$ обращается в нуль: $2\nu - \mu - 3 = 8 - 5 - 3 = 0$. В силу этого в правой части (7.130) останется только первое слагаемое, определяющее результат интегрирования:

$$\int \frac{x^5 dx}{(a+bx^2)^4} = V_{4,5} = \frac{x^6}{6a(a+bx^2)^3} + C.$$

2) Имеем дифференциальный бином с $p = -5 \in \mathbb{Z}$. Согласно обозначениям (7.129), можно записать

$$\int \frac{x^3 dx}{(a+bx^2)^5} = V_{5,3}$$

В данном случае удобнее воспользоваться формулой (7.131), которая дает возможность уменьшить степень числителя до единицы, что позволяет для интеграла $V_{5,1}$ воспользоваться методом подведения под знак дифференциала. Действительно, в силу (7.131)

$$\int \frac{x^3 dx}{(a+bx^2)^5} = V_{5,3} = -\frac{1}{6b}\Big[\frac{x^2}{(a+bx^2)^4} - 2aV_{5,1}\Big], \tag{7.134}$$

а поскольку

$$V_{5,1} = \int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^5} = \frac{1}{2b}\int \frac{d(a+bx^2)}{(a+bx^2)^5} = -\frac{1}{8b(a+bx^2)^4} - C,$$

то из (7.134) найдем

$$\int \frac{x^3 dx}{(a+bx^2)^5} = -\frac{1}{6b}\Big[\frac{x^2}{(a+bx^2)^4} + \frac{a}{4b(a+bx^2)^4} - C\Big] = -\frac{a+4bx^2}{24b^2(a+bx^2)^4} + \frac{C}{6b}.$$

3) Согласно обозначениям (7.129), имеем дифференциальный бином

$$\int \frac{x^3 dx}{(1-x^2)^{1/2}} = V_{1/2,3}.$$

Так как $(3+1)/2 = 2$ – целое, то интеграл можно свести к интегралу от рациональных функций 2-й подстановкой Чебышева. По той же причине, что и в предыдущем случае, воспользуемся рекуррентной формулой (7.131):

$$\int \frac{x^3 dx}{(1-x^2)^{1/2}} = V_{1/2,3} = -\frac{1}{3}\Big[\frac{x^2}{(1-x^2)^{1/2-1}} - 2V_{1/2,1}\Big], \tag{7.135}$$

а поскольку

$$V_{1/2,1} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

то из (7.135) найдем

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}\big[x^2\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{1-x^2} - 2C\big] = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}C.$$

4) Согласно обозначениям (7.129), имеем дифференциальный бином

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1+x^2}} = V_{1/2,4}.$$

Так как $\frac{4+1}{2} - \frac{1}{2} = 2$ – целое, то интеграл можно свести к интегралу от рациональных функций 3-й подстановкой Чебышева. По той же причине, что и в предыдущем случае, воспользуемся рекуррентной формулой (7.131), притом дважды:

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1+x^2}} = V_{1/2,4} = \frac{1}{4}\big[x^3\sqrt{1+x^2} - 3V_{1/2,2}\big] = \\ = \frac{1}{4}\Big\{x^3\sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2}\big[x\sqrt{1+x^2} - V_{1/2,0}\big]\Big\}, \qquad (7.136)$$

а поскольку

$$V_{1/2,0} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C,$$

то из (7.136) найдем

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{4}\Big\{x^3\sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2}\big[x\sqrt{1+x^2} - \ln|x+\sqrt{1+x^2}| - C\big]\Big\}.$$

8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические и гиперболические функции

8.1. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

Начнем с простейших классов.

I. Интегралы вида

$$I_1 = \int f(\sin x)\cos x\,dx, \quad I_2 = \int f(\cos x)\sin x\,dx, \qquad (8.1)$$

где $f(t)$ — алгебраическая функция, методом подведения под знак дифференциала легко сводятся к интегралам от алгебраических функций:

$$I_1 = \int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(\sin x)d(\sin x) = \int f(t)dt;$$
$$I_2 = \int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(\cos x)d(\cos x) = -\int f(t)dt,$$

методы вычисление которых мы рассмотрели выше.

Пример 8.1. Вычислить

$$1)\ \int \frac{\sin^5 x}{(2+\sin^2 x)^4}\cos x\,dx; \quad 2)\ \int \frac{\cos^3 x\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx.$$

Решение. 1) Подведением под знак дифференциала исходный интеграл преобразуется к интегралу

$$\int \frac{\sin^5 x}{(2+\sin^2 x)^4}\cos x\,dx = \int \frac{\sin^5 x}{(2+\sin^2 x)^4}d(\sin x) = \left|\sin x = t\right| = \int \frac{t^5dt}{(2+t^2)^4}$$

от рациональной дроби. Так как знаменатель дроби имеет пару комплексно сопряженных корней кратности $r=4$, то разложение дроби на простейшие потребует громоздких выкладок. Однако если это выражение рассматривать как дифференциальный бином и воспользоваться для него рекуррентным соотношением (7.130), как это сделано в примере 7.19(1), то ответ находится достаточно просто:

$$\int \frac{\sin^5 x\cos x}{(2+\sin^2 x)^4}dx = \int \frac{t^5dt}{(2+t^2)^4} = \frac{t^6}{12(2+t^2)^3} + C = \frac{\sin^6 x}{12(2+\sin^2 x)^3} + C.$$

2) Подведением под знак дифференциала исходный интеграл приводится к интегралу от дифференциального бинома. Действительно,

$$\int \frac{\cos^3 x\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = -2\int \frac{\cos^4 x\,d(\cos x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \left|\cos x = t\right| = -2\int \frac{t^4dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Такой интеграл был рассмотрен в примере 7.19(4). Воспользовавшись полученным там результатом, найдем

$$\int \frac{\cos^3 x\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = -2\int \frac{t^4dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\Big\{t^3\sqrt{1+t^2} - \frac{3}{2}\big[t\sqrt{1+t^2} - \ln|t+\sqrt{1+t^2}| - C\big]\Big\} =$$
$$= -\frac{1}{2}\Big\{\cos^3 x\sqrt{1+\cos^2 x} - \frac{3}{2}\big[\cos x\sqrt{1+\cos^2 x} - \ln|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}| - C\big]\Big\}.$$

II. Интеграл вида

$$I_3 = \int f(\sin x, \cos x)dx, \tag{8.2}$$

где $f(u,v)$ — алгебраическая функция двух переменных, подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad |x|<\pi, \tag{8.3}$$

называемой *универсальной тригонометрической подстановкой*, сводится к виду

$$\int f(\sin x,\cos x)dx = \int f\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2dt}{1+t^2}. \tag{8.4}$$

При выводе этой формулы использовались простейшие тригонометрические соотношения

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}, \quad 1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2},$$

с учетом которых

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2\sin x/2\cos x/2}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};\\ \cos x &= \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Если функция $f(u,v)$ в (8.2) представляет собой рациональную функцию, то универсальная тригонометрическая подстановка приводит исходные интегралы к интегралам (8.4) от рациональных функций, которые с помощью изложенных выше методов всегда выражаются через элементарные функции. Если же интеграл (8.4) содержат иррациональность, то они могут быть выражены через элементарные функции в случаях, рассмотренных выше.

Пример 8.2. Вычислить

$$1)\ \int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx;\quad 2)\ \int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5};$$
$$3)\ \int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{\sin x}}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x(1+\cos x)}};\quad 4)\ \int\frac{dx}{1/2-\sin x}.$$

Решение. Использование универсальной тригонометрической подстановки (8.3) с учетом (8.5) дает:

для первого интеграла

$$\int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx=\int\frac{\Big(1+\dfrac{2t}{1+t^2}\Big)\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\Big(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t^2+2t)dt}{t}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\Big(t+2+\frac{1}{t}\Big)dt=\frac{1}{2}\Big(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\Big)+C=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\ln\Big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|\Big)+C;$$

для второго интеграла

$$\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{4\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3\dfrac{2t}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{(t+3)^2}=$$
$$=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{\operatorname{tg}(x/2)+3}+C.$$

Для третьего интеграла

$$\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{\sin x}}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x(1+\cos x)}}=$$
$$=\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{\frac{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}}}\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\sqrt{\dfrac{2t}{1+t^2}\Big(1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\Big)}}=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{t}}}{\sqrt{t}}dt$$

получаем интеграл от дифференциального бинома 2-го типа. Такой интеграл был вычислен в примере 7.15. Используя полученный там результат, можем записать

$$\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{\sin x}}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x(1+\cos x)}}=\int t^{-1/2}(1+t^{1/4})^{1/3}dt=$$

$$= \frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{t})^{4/3}(4\sqrt[4]{t}-3)+C = \frac{3}{7}\Big(1+\sqrt[4]{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\Big)^{4/3}\Big(4\sqrt[4]{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-3\Big)+C.$$

Для четвертого интеграла универсальная тригонометрическая подстановка дает

$$\int \frac{dx}{1/2-\sin x} = \int \frac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{dt}{t^2-4t+1} = 4\int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2-3} = \tag{8.6}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{3}}\ln\Big|\frac{\sqrt{3}-(t-2)}{\sqrt{3}+(t-2)}\Big| + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\Big|\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}(x/2)}\Big| + C. \tag{8.7}$$

Эту первообразную можно привести к виду из примера 3.6. Действительно, с помощью тождественных преобразований найдем

$$\ln\Big|\frac{\sqrt{3}-(t-2)}{\sqrt{3}+(t-2)}\Big| = \ln\Big|\frac{[\sqrt{3}-(t-2)][\sqrt{3}+(t-2)]}{[\sqrt{3}+(t-2)][\sqrt{3}+(t-2)]}\Big| = \ln\Big|\frac{3-(t-2)^2}{(\sqrt{3}+t-2)^2}\Big| =$$

$$= \ln\Big|\frac{3-t^2+4t-4}{(\sqrt{3}+t-2)^2}\Big| = \ln\left|\frac{4t-(t^2+1)}{(2-\sqrt{3})\left[\sqrt{2-\sqrt{3}}-\dfrac{t}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right]^2}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{(t^2+1)-4t}{(2-\sqrt{3})\left[2-\sqrt{3}-2t+\dfrac{t^2}{2-\sqrt{3}}\dfrac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]}\right| =$$

$$= \ln\Big|\frac{(t^2+1)-4t}{2-\sqrt{3}-2t+(2+\sqrt{3})t^2}\Big| - \ln(2-\sqrt{3}) =$$

$$= \ln\Big|\frac{(t^2+1)-4t}{2(t^2+1)-\sqrt{3}(1-t^2)-2t}\Big| - \ln(2-\sqrt{3}).$$

Поскольку $t = \operatorname{tg}(x/2)$ и, следовательно,

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin x, \quad \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos x,$$

числитель и знаменатель первого логарифма поделим на $2(t^2+1)$. Тогда

$$\ln\Big|\frac{\sqrt{3}-(t-2)}{\sqrt{3}+(t-2)}\Big| = \ln\left|\frac{\dfrac{(t^2+1)-4t}{2(t^2+1)}}{\dfrac{2(t^2+1)-\sqrt{3}(1-t^2)-2t}{2(t^2+1)}}\right| - \ln(2-\sqrt{3}) =$$

$$= \ln\left|\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{2t}{t^2+1}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{2t}{1+t^2}}\right| - \ln(2-\sqrt{3}) =$$

$$= \ln\left|\frac{\dfrac{1}{2}-\sin x}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x}\right| - \ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left|\frac{\dfrac{1}{2}-\sin x}{1-\cos x(x-\pi/6)}\right| - \ln(2-\sqrt{3}).$$

Подстановка этого выражения в (8.6) дает

$$\int \frac{dx}{1/2-\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big\{ \ln\Big|\frac{1/2-\sin x}{1-\cos x(x-\pi/6)}\Big| - \ln(2-\sqrt{3})\Big\} + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\Big|\frac{1/2-\sin x}{1-\cos x(x-\pi/6)}\Big| + \widetilde{C},$$

где $\widetilde{C} = C - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\ln(2-\sqrt{3})$, что совпадает с результатом примера 3.6.

Использование универсальной тригонометрической подстановки, как следует из примеров, связано с громоздкими преобразованиями. Их можно избежать в следующих случаях.

III. Интегралы вида

$$I_4 = \int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{8.8}$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция двух переменных. Если она удовлетворяет условию
а) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то удобно использовать замену $\cos x = t$;
б) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то удобно использовать замену $\sin x = t$;
в) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то удобно использовать замену $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.

Пример 8.3. Вычислить

$$1)\ \int \frac{dx}{\sin x \sin 2x};\quad 2)\ \int \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx;\quad 3)\ \int \frac{dx}{4-\sin^2 x}.$$

Решение. 1) После преобразования подынтегральной функции к виду

$$\frac{1}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2\sin^2 x \cos x}$$

убеждаемся в выполнении условия б):

$$\frac{1}{2\sin^2 x(-\cos x)} = -\frac{1}{2\sin^2 x \cos x},$$

которое рекомендует подстановку

$$\sin x = t, \quad x = \arcsin t, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{8.9}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{(1-t^2+t^2)dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\Big)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{t} + \ln\Big|\frac{1+t}{1-t}\Big|\Big) + C = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{\sin x} + \ln\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big|\Big) + C.$$

2) Так как для подынтегральной функции выполняется условие в):

$$\frac{\left(\dfrac{-\sin x}{-\cos x}\right)+2}{(-\sin x)^2+(-\cos x)^2}=\frac{(\sin x/\cos x)+2}{\sin^2 x+\cos^2 x},$$

то рекомендуется подстановка

$$\begin{gathered}\operatorname{tg} x=t, \quad x=\operatorname{arctg} t, \quad dx=\frac{1}{1+t^2},\\ \cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}.\end{gathered} \tag{8.10}$$

С учетом этого

$$\int \frac{\operatorname{tg} x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx=\int \frac{t+2}{\dfrac{t^2}{1+t^2}+\dfrac{2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{t+2}{t^2+2}dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2}+2\int \frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{2}\ln(2+t^2)+2\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(2+\operatorname{tg}^2 x)+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C.$$

3) Для подынтегральной функции выполняется условие в), так как изменение знака тригонометрических функций не меняет данный интеграл. Сделаем подстановку $x=\operatorname{tg} t$, тогда с учетом (8.10) запишем

$$\int \frac{dx}{4-\sin^2 x}=\int \frac{dt}{1+t^2}\frac{1}{4-t^2/(1+t^2)}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{(2/\sqrt{3})^2+t^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{t}{2/\sqrt{3}}+C=\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} x\right)+C.$$

IV. Интегралы вида

$$I_5=\int \sin^\alpha x\cos^\beta x\,dx \tag{8.11}$$

можно разделить на следующие классы.

а) Степени α и β таковы, что выражение $\sin^\alpha x\cos^\beta x$ рационально относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. принадлежит к уже рассмотренному выше типу выражений. Однако и в этом случае перечень рекомендованных способов интегрирования можно дополнить следующими:

а$'$) один из показателей α или β является нечетным $(2n+1)$, тогда интеграл (8.11) сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $\cos x=t$:

$$\int \sin^{2n+1} x\cos^\beta x\,dx=\int \sin^{2n} x\cos^\beta x\sin x\,dx=$$
$$=\int (1-\cos^2 x)^n\cos^\beta x d(\cos x)=-\int (1-t^2)^n t^\beta dt,$$

и, соответственно, $\sin x=t$:

$$\int \sin^\alpha x\cos^{2n+1} x\,dx=\int \sin^\alpha x\cos^{2n} x\cos x\,dx=$$

$$= \int \sin^\alpha x(1-\sin^2)^n d(\sin x) = \int t^\alpha (1-t^2)^n dt;$$

а$''$) оба показателя α и β одновременно четные или одновременно нечетные, в этом случае интеграл (8.11) сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg} x = t$;

а$'''$) оба показателя α и β одновременно четные положительные числа, тогда эффективен прием, основанный на применении формул

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x. \qquad (8.12)$$

В результате приходим к интегралу типа (8.11), у которого сумма показателей уменьшится вдвое, после чего этот прием можно повторить.

Пример 8.4. Вычислить

$$1)\ \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx; \quad 2)\ \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx; \quad 3)\ \int \sin^2 x\cos^4 x\,dx.$$

Решение. 1) Степень $\cos x$ нечетна, следовательно,

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\cos x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^6 x}d(\sin x) =$$
$$= \int [\sin^{-6} x - \sin^{-4} x]d(\sin x) = -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C.$$

2) Степени $\sin x$ и $\cos x$ одновременно четные, следовательно,

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\operatorname{tg} x)^4 d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

3) Степени $\sin x$ и $\cos x$ одновременно четные положительные, следовательно,

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (\sin^2 2x + \sin^2 2x\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\Big[\int \sin^2 2x\,dx + \int \sin^2 2x\cos 2x\,dx\Big] =$$
$$= \frac{1}{8}\Big[\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,d(\sin 2x)\Big] =$$
$$= \frac{1}{16}\Big[\int dx - \int \cos 4x\,dx + \frac{1}{3}\sin^3 2x\Big] = \frac{1}{16}\Big[x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\Big] + C.$$

Пример 8.5. Показать, что интеграл (8.11) можно представить интегралом от дифференциального бинома:

$$I_5 = \int \sin^\alpha x\cos^\beta x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-y)^{(\beta-1)/2}y^{(\alpha-1)/2}dy \qquad (8.13)$$

и что он выражается через элементарные функции, если
а) α или β есть целое нечетное число;
б) сумма $\alpha+\beta$ есть целое четное число.

Решение. После преобразования

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \int (\sin^{\alpha-1} x)(\cos^{\beta-1} x) \sin x \cos x \, dx$$

и замены переменной

$$\sin^2 x = y, \quad 2 \sin x \cos x \, dx = dy$$

получим формулу (8.13):

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin^{\alpha-1} x \cos^{\beta-1} x (2 \sin x \cos x) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int (\sin^2 x)^{(\alpha-1)/2} (1 - \sin^2 x)^{(\beta-1)/2} d(\sin^2 x) = \frac{1}{2} \int (1-y)^{(\beta-1)/2} y^{(\alpha-1)/2} dy.$$

Теперь, исходя из теоремы 7.2, заключаем, что интересующий нас интеграл (8.13) выражается через элементарные функции в следующих случаях ($\mu = (\alpha-1)/2$, $\nu = 1$, $p = (\beta-1)/2$):

a$'$) $p = \dfrac{\beta-1}{2}$ целое, т.е. β есть целое нечетное число;

a$''$) $\dfrac{\mu+1}{\nu} = \dfrac{\alpha-1}{2} + 1 = \dfrac{\alpha+1}{2}$ целое, т.е. α есть целое нечетное число;

б) $\dfrac{\mu+1}{\nu} + p = \dfrac{\alpha-1}{2} + \dfrac{\beta-1}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ целое, т.е. $\alpha+\beta$ есть целое четное число, что и требовалось доказать.

Пример 8.6. Показать, что для интегралов (8.13) справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{\beta+1}\left[(\alpha+\beta+2) \int \sin^\alpha x \cos^{\beta+2} x \, dx - \sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x\right],$$
$$\beta \neq -1; \qquad (8.14)$$

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{\alpha+1}\left[(\alpha+\beta+2) \int \sin^{\alpha+2} x \cos^\beta x \, dx + \sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x\right],$$
$$\alpha \neq -1; \qquad (8.15)$$

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[(\beta-1) \int \sin^\alpha x \cos^{\beta-2} x \, dx + \sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta-1} x\right],$$
$$\alpha+\beta \neq 0; \qquad (8.16)$$

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[(\alpha-1) \int \sin^{\alpha-2} x \cos^\beta x \, dx - \sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x\right],$$
$$\alpha+\beta \neq 0, \qquad (8.17)$$

позволяющие при указанных условиях увеличивать или уменьшать показатели α и β на 2.

Решение. Исходя из обозначений (7.123), равенство (8.13) можно записать как

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{2} \int (1-y)^{(\beta-1)/2} y^{(\alpha-1)/2} dy = \frac{1}{2} I_{(\beta-1)/2,(\alpha-1)/2}.$$

Применив к правой части этого равенства рекуррентную формулу (7.124), получим

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx = \frac{1}{2} I_{(\beta-1)/2,(\alpha-1)/2} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\dfrac{\beta-1}{2}+1\right)}\Big[\Big(\frac{\beta-1}{2}+\frac{\alpha-1}{2}+2\Big) I_{(\beta-1)/2+1,(\alpha-1)/2} - (1-y)^{(\beta-1)/2+1} y^{(\alpha-1)/2+1}\Big] =$$
$$= \frac{1}{\beta+1}\Big[(\beta+\alpha+2)\frac{1}{2} I_{(\beta+1)/2,(\alpha-1)/2} - (1-y)^{(\beta+1)/2} y^{(\alpha+1)/2}\Big].$$

Обратный переход в правой части от переменной y к переменной x дает формулу (8.14):

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx = \frac{1}{\beta+1}\Big[(\alpha+\beta+2)\int \sin^\alpha x \cos^{\beta+2} x\, dx - \sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x\Big].$$

Аналогично получаются остальные формулы (8.15)–(8.17).

Пример 8.7. Вычислить

$$1)\ \int \frac{dx}{\cos^5 x};\quad 2)\ \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx;\quad 3)\ \int \sin^2 x \cos^4 x\, dx;$$
$$4)\ \int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx;\quad 5)\ \int \sin^{1/3} x \cos^{-5/3} x\, dx.$$

Решение. 1) Поскольку степень $\cos x$ является нечетной ($\beta = -5$), то в силу рекомендации IVa$'$) пригодна подстановка $\sin x = t$:

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^3} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^3},$$

приводящая к интегралу от рациональной дроби с полиномом 6-го порядка в знаменателе. Разложение на простейшие дроби в этом случае предполагает решение алгебраической системы шестого порядка, поэтому проще дважды воспользоваться рекуррентной формулой (8.14).

Действительно, положив в (8.14) $\alpha = 0$, $\beta = -5$, получим

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{3}{4}\Big[\frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \int \frac{dx}{\cos^3 x}\Big].$$

Положив теперь $\alpha = 0$ и $\beta = -3$, найдем

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos x}\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|\Big] + \frac{4}{3}C,$$

что совпадает с результатами примера 3.19.

Подставив найденное значение интеграла в предыдущее равенство, окончательно получим

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{3}{4}\Big\{\frac{1}{2}\Big[\ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big| + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\Big] + \frac{4}{3}C + \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^4 x}\Big\} =$$

$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

2) Поскольку степени $\sin x$ и $\cos x$ четные, можно воспользоваться подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ (8.10), как в примере 8.4. Но этот интеграл очень просто вычисляется по рекуррентной формуле (8.14). Действительно, положив в (8.14) $\alpha = 4$, $\beta = -6$, получим

$$\int \sin^4 x \cos^{-6} x\,dx = \frac{1}{1-6}\left[(4-6+2)\int \sin^4 x\cos^{-4} x\,dx - \sin^5 x\cos^{-5} x\right] + C =$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^5 + C = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

Этот результат совпадает с полученным ранее в примере 8.4.

3) Поскольку степени $\sin x$ и $\cos x$ — четные положительные числа, то пригодны формулы понижения степени, которая и была использована при вычислении этого интеграла в примере 8.4. Однако и в этом случае его также можно вычислить с помощью рекуррентных формул (8.14)–(8.17). Действительно, положив в (8.17) $\alpha = 2$, $\beta = 4$, получим

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{6}\left[\int \cos^4 x\,dx - \sin x\cos^5 x\right]. \tag{8.18}$$

Положив теперь в (8.16) $\alpha = 0$, $\beta = 4$, найдем

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\left[3\int \cos^2 x\,dx + \sin x\cos^3 x\right];$$

соответственно, положив $\alpha = 0$, $\beta = 2$, имеем

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int dx + \sin x\cos x\right] = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Подставив этот результат в предыдущие соотношения, запишем

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\sin 2x + 3C + \sin x\cos^3 x\right] =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{4}C + \frac{1}{8}\sin 2x\cos^2 x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x(3 + 2\cos^2 x) + \frac{3}{4}C =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x(3 + \cos 2x) + \frac{3}{4}C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{3}{4}C.$$

В свою очередь, подстановка этого выражения в (8.18) приводит к

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{3}{4}C - \sin x\cos^5 x\right].$$

Этот результат отличается от полученного в примере 8.4, однако его можно привести к тому же виду с помощью тождественных преобразований. Действительно,

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{3}{4}C - \sin x\cos^5 x\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{3}{4}C - \frac{1}{8}\sin 2x(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\Big] =$$
$$= \frac{1}{6}\Big[\frac{3x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{8}\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin^3 2x + \frac{3}{4}C\Big] =$$
$$= \frac{1}{6}\Big[\frac{3x}{8} - \frac{3}{32}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin^3 2x + \frac{3}{4}C\Big] = \frac{1}{16}\Big[x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\Big] + \frac{1}{8}C.$$

Этот результат совпадает с полученным ранее в примере 8.4.

4) Степени функций $\sin x$ и $\cos x$ — дробные числа: $\alpha = 1/3$, $\beta = -5/3$, а их сумма $\alpha + \beta = 1/3 - 13/3 = -4$ — четное число. В этом случае, согласно условию б) примера 8.5, интеграл вычисляется в элементарных функциях с помощью замены (8.10):

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

т.е.

$$\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx = \int \Big(\frac{t^2}{1+t^2}\Big)^{1/6} \frac{1}{(1+t^2)^{-13/6}} \frac{dt}{1+t^2} = \int t^{1/3}(1+t^2)dt =$$
$$= \frac{3}{4}t^{4/3} + \frac{3}{10}t^{10/3} + C = \frac{3}{4}\operatorname{tg}^{4/3} x + \frac{3}{10}\operatorname{tg}^{10/3} x + C.$$

5) Степени функций $\sin x$ и $\cos x$ — дробные числа: $\alpha = 1/3$, $\beta = -13/3$, а их сумма $\alpha + \beta = 1/3 - 5/3 = -4/3$ не является целым четным числом. В этом случае, согласно условию б) примера 8.5, интеграл

$$\int \sin^{1/3} x \cos^{-5/3} x\, dx$$

в элементарных функциях не вычисляется.

V. Интегралы вида

$$\int \sin \mu x \sin \nu x\, dx,$$
$$\int \sin \mu x \cos \nu x\, dx,$$
$$\int \cos \mu x \cos \nu x\, dx$$

вычисляются с помощью известных тригонометрических соотношений

$$\begin{aligned} \sin\varphi \sin\psi &= \frac{1}{2}[\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)]; \\ \sin\varphi \cos\psi &= \frac{1}{2}[\sin(\varphi - \psi) + \sin(\varphi + \psi)]; \\ \cos\varphi \cos\psi &= \frac{1}{2}[\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)]. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Пример 8.8. Вычислить

1) $\displaystyle\int \sin(\omega x + \varphi_1)\sin(\omega x + \varphi_2)dx$; 2) $\displaystyle\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$; 3) $\displaystyle\int \sin^3 2x \cos^2 3x\, dx$.

Решение. 1) Используя (8.19), можно записать

$$\int \sin(\omega x+\varphi_1)\sin(\omega x+\varphi_2)dx = \frac{1}{2}\int[\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\cos(2\omega x+\varphi_1+\varphi_2)]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\cos(\varphi_1-\varphi_2)\int dx - \int\cos(2\omega x+\varphi_1+\varphi_2)dx\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[x\cos(\varphi_1-\varphi_2) - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega x+\varphi_1+\varphi_2)\Big]+C.$$

2) Как и в предыдущем случае,

$$\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\int\Big(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\Big)\sin\frac{x}{3}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\Big(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{3}\Big)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int\Big[-\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{5x}{6}+\sin\frac{7x}{6}-\sin\frac{11x}{6}\Big]dx =$$
$$= \frac{1}{4}\Big[6\cos\frac{x}{6}-\frac{6}{5}\cos\frac{5x}{6}-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{6}+\frac{6}{11}\cos\frac{11x}{6}\Big]+C.$$

3) Используя формулы (8.12) понижения степени тригонометрических функций и соотношения (8.19), можно записать

$$\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx = \frac{1}{8}\int(3\sin 2x-\sin 6x)(1+\cos 6x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int\Big(3\sin 2x-\frac{3}{2}\sin 4x+\frac{3}{2}\sin 8x-\sin 6x-\frac{1}{2}\sin 12x\Big)dx =$$
$$= -\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{1}{192}\cos 12x+C.$$

8.2. Интегрирование некоторых выражений, содержащих гиперболические функции

Интегрирование выражений, содержащих гиперболические функции

$$\int f(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)dx$$

в большинстве случаев производится аналогично интегрированию выражений, содержащих тригонометрические функции, с заменой тригонометрических соотношений гиперболическими:

$$\begin{gathered}\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta,\quad \operatorname{ch}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta;\\ \operatorname{sh}2\alpha=2\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha;\quad \operatorname{ch}2\alpha=\operatorname{sh}^2\alpha+\operatorname{ch}^2\alpha;\quad \operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{sh}^2\alpha=1;\\ \operatorname{ch}^2\alpha=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\alpha+1);\quad \operatorname{sh}^2\alpha=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\alpha-1);\quad 1-\operatorname{th}^2\alpha=\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}.\end{gathered}\tag{8.20}$$

Так же как и при интегрировании выражений, содержащих тригонометрические функции, интеграл от рациональной функции $R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)$ может быть вычислен с помощью подстановки

$$\begin{gathered}\operatorname{th}\frac{x}{2}=t,\quad dx=\frac{2dt}{1-t^2},\quad \operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\\ \int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)dx=\int R\Big(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2}\Big)\frac{2dt}{1-t^2}.\end{gathered}\tag{8.21}$$

Для некоторых частных случаев $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, как и для тригонометрических функций, более эффективными могут оказаться подстановки $\operatorname{th} x = t$, $\operatorname{sh} x = t$ и $\operatorname{ch} x = t$.

Существенным отличием интегрирования гиперболических функций является возможность использования замены $e^x = t$:

$$e^x = t, \quad x = \ln t, \quad dx = \frac{dt}{t}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\Big(t - \frac{1}{t}\Big), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{t}\Big), \quad \operatorname{th} x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}. \tag{8.22}$$

Поскольку использование указанных выше подстановки имеет свои достоинства и недостатки, то в каждом конкретном случае выбор подходящей подстановки позволяет избежать громоздких вычислений.

Пример 8.9. Вычислить интегралы

$$1) \int \operatorname{ch}^2 x\, dx; \quad 2) \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx; \quad 3) \int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^5 x\, dx;$$
$$4) \int \operatorname{th}^4 x\, dx; \quad 5) \int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}; \quad 6) \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} 3x\, dx.$$

Решение. Чтобы проиллюстрировать характерные особенности указанных подстановок, данные интегралы вычислим двумя способами.

1) Для исходного интеграла воспользуемся

а) соотношениями (8.20):

$$\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2x\, d(2x) + \int dx\Big] = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2}x + C.$$

б) соотношениями (8.22):

$$\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \int \Big[\frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{t}\Big)\Big]^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\int \Big(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\Big)dt = \frac{1}{4}\Big(\frac{t^2}{2} + 2\ln t - \frac{1}{2t^2}\Big) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{8}\Big(t^2 - \frac{1}{t^2}\Big) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}(e^{2x} - e^{-2x}) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + C$$

или

$$\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \int \Big[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\Big]^2 dx = \frac{1}{4}\int (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx =$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big] + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + C.$$

Сравнение приведенных способов интегрирования показывает, что в данном случае применение соотношений (8.20) несколько эффективнее в силу меньшей громоздкости.

2) Для исходного интеграла воспользуемся

а) соотношениями (8.20):

$$\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4x - 1)dx = \frac{1}{8}\Big(\int \operatorname{ch} 4x\, dx - \int dx\Big) =$$
$$= \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4x - x\Big) + C = \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x - \frac{x}{8} + C.$$

б) соотношениями (8.22):

$$\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx = \int \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}dx = \frac{1}{16}\int [(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}]^2 dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int (e^{2x} - e^{-2x})^2 dx = \frac{1}{16}\int (e^{4x} - 2 + e^{-4x})dx =$$
$$= \frac{1}{16}\Big(\int e^{4x}dx - 2\int dx + \int e^{-4x}dx\Big) = \frac{1}{16}\Big[\frac{1}{4}e^{4x} - 2x - \frac{1}{4}e^{-4x}\Big] + C =$$
$$= \frac{1}{32}\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} - \frac{x}{8} + C = \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x - \frac{x}{8} + C$$

или

$$\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx = \int \Big[\frac{1}{2}\Big(t - \frac{1}{t}\Big)\frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{t}\Big)\Big]^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{16}\int \Big(t^2 - \frac{1}{t^2}\Big)^2 \frac{dt}{t} =$$
$$= \frac{1}{16}\int \Big(t^3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^5}\Big)dt = \frac{1}{16}\Big(\frac{1}{4}t^4 - 2\ln t - \frac{1}{4t^4}\Big) + C =$$
$$= \frac{1}{32}\frac{1}{2}\Big(t^4 - \frac{1}{t^4}\Big) - \frac{1}{8}\ln t + C = \frac{1}{32}\frac{1}{2}(e^{4x} - e^{-4x}) - \frac{1}{8}x + C = \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x - \frac{1}{8}x + C.$$

3) Для исходного интеграла воспользуемся
а) соотношениями (8.20):

$$\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^5 x\, dx = \int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^4 x \operatorname{ch} x\, dx = \int \operatorname{sh}^4 x(1 + \operatorname{sh}^2 x)^2 d(\operatorname{sh} x) =$$
$$= \int (\operatorname{sh}^4 x + 2\operatorname{sh}^6 x + \operatorname{sh}^8 x)d(\operatorname{sh} x) = \frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + \frac{2}{7}\operatorname{sh}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{sh}^9 x + C;$$

б) соотношениями (8.22):

$$\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^5 x\, dx = \int \Big[\frac{1}{2}\Big(t - \frac{1}{t}\Big)\Big]^4 \Big[\frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{t}\Big)\Big]^5 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2^9}\int \Big(t - \frac{1}{t}\Big)^4 \Big(t + \frac{1}{t}\Big)^5 \frac{dt}{t}.$$

Понятно, что раскрытие скобок в этом интеграле приведет к очень громоздкому выражению. Выходом может быть неявное использование соотношений (8.20) в виде

$$\Big(t + \frac{1}{t}\Big)^2 = t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} = 4 + t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} = 4 + \Big(t - \frac{1}{t}\Big)^2,$$

тогда

$$\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^5 x\, dx = \frac{1}{2^9}\int \Big(t - \frac{1}{t}\Big)^4 \Big(t + \frac{1}{t}\Big)^4 \Big(t + \frac{1}{t^2}\Big)dt =$$
$$= \frac{1}{2^9}\int \Big(t - \frac{1}{t}\Big)^4 \Big[4 + \Big(t - \frac{1}{t}\Big)^2\Big]^2 d\Big(t - \frac{1}{t}\Big).$$

Положив $t - 1/t = z$, можем записать

$$\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^5 x\, dx = \frac{2^4}{2^9}\int z^4\Big(1 + \frac{z^2}{4}\Big)^2 dz = \frac{1}{2^5}\int \Big(z^4 + \frac{1}{2}z^6 + \frac{z^8}{16}\Big)dz =$$
$$= \frac{1}{2^5}\Big(\frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{2}\frac{z^7}{7} + \frac{1}{2^4}\frac{z^9}{9}\Big) + C = \frac{1}{5}\Big(\frac{z}{2}\Big)^5 + \frac{2}{7}\Big(\frac{z}{2}\Big)^7 + \frac{1}{9}\Big(\frac{z}{2}\Big)^9 + C =$$

$$= \left|\frac{z}{2} = \operatorname{sh} x\right| = \frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + \frac{2}{7}\operatorname{sh}^7 x + \operatorname{sh}^9 x + C.$$

очевидно, что в данном случае использование соотношений (8.20) значительно эффективней.

4) Для данного интеграла самой эффективной является замена

$$t = \operatorname{th} x, \quad dt = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = (1 - \operatorname{th}^2 x)dx = (1 - t^2)dx, \quad dx = \frac{dt}{1 - t^2},$$

следовательно,

$$\int \operatorname{th}^4 x\,dx = \int t^4 \frac{dt}{1 - t^2} = \int \frac{(t^4 - 1 + 1)dt}{1 - t^2} = \int \Big[-(1 + t^2) - \frac{1}{t^2 - 1}\Big]dt =$$
$$= -\Big(t + \frac{t^3}{3}\Big) - \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{t - 1}{t + 1}\Big| + C = -\Big(\operatorname{th} x + \frac{\operatorname{th}^3 x}{3}\Big) + \ln|\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x| + C =$$
$$= -\Big(\operatorname{th} x + \frac{\operatorname{th}^3 x}{3}\Big) + x + C.$$

5) Для данного интеграла воспользуемся

а) заменой $e^x = t$ (8.22):

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x} = \int \frac{\dfrac{dt}{t}}{\dfrac{2}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) + \dfrac{3}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)} = 2\int \frac{dt}{2(t^2 - 1) + 3(t^2 + 1)} =$$
$$= 2\int \frac{dt}{5t^2 + 1} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2 + (1/\sqrt{5})^2} = \frac{2}{5}\sqrt{5}\operatorname{arctg}\sqrt{5}t + C = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\sqrt{5}e^x + C;$$

б) подстановкой $\operatorname{th}(x/2) = t$ (8.21):

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1 - t^2}}{2\dfrac{2t}{1 - t^2} + 3\dfrac{1 + t^2}{1 - t^2}} = 2\int \frac{dt}{3t^2 + 4t + 3} =$$
$$= 2\int \frac{dt}{3(t + 2/3)^2 + 5/3} = \frac{2}{3}\int \frac{d(t + 2/3)}{(t + 2/3)^2 + (\sqrt{5}/2)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3(t + 2/3)}{\sqrt{5}} + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t + 2}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{th}(x/2) + 2}{\sqrt{5}} + C.$$

Очевидно, что в данном случае, в отличие от предыдущих, подстановка $e^x = t$ более эффективна как из-за краткой формы первообразной, так и простоты ее получения.

6) Для исходного интеграла воспользуемся

а) заменой $e^x = t$ (8.22):

$$\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} 3x\,dx = \int \frac{1}{2}\Big(t - \frac{1}{t}\Big)\frac{1}{2}\Big(t^3 + \frac{1}{t^3}\Big)\frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\int \Big(t - \frac{1}{t}\Big)\Big(t^2 + \frac{1}{t^4}\Big)dt =$$
$$= \frac{1}{4}\int \Big(t^3 - t + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^5}\Big)dt = \frac{1}{4}\Big(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4t^4}\Big) + C =$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{4}\Big(t^4 + \frac{1}{t^4}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t^2 + \frac{1}{t^2}\Big)\Big] + C =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}\operatorname{ch}4x - \operatorname{ch}2x\Big] + C = \frac{1}{3}\operatorname{ch}4x - \frac{1}{4}\operatorname{ch}2x + C;$$

б) соотношениями (8.20), а именно $\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(\alpha+\beta) + \operatorname{sh}(\alpha-\beta)]$:

$$\int \operatorname{sh}x\operatorname{ch}3x\,dx = \int \frac{1}{2}[\operatorname{sh}4x + \operatorname{sh}(-2x)]dx = \frac{1}{2}\Big[\int \operatorname{sh}4x\,dx - \int \operatorname{sh}2x\,dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{4}\operatorname{ch}4x - \frac{1}{2}\operatorname{ch}2x\Big] + C = \frac{1}{8}\operatorname{ch}4x - \frac{1}{4}\operatorname{ch}2x + C.$$

В данном случае оба способа примерно равноценны.

8.3. Интегралы специальных видов

При рассмотрении метода интегрирования по частям были получены рекуррентные формулы (3.77)–(3.79) для вычисления интегралов

$$\int P_n(x)e^{ax}dx, \quad \int P_n(x)\cos bx\,dx, \quad \int P_n(x)\sin bx\,dx. \tag{8.23}$$

Интегралы

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx, \quad \int \frac{\cos bx}{x^n}dx, \quad \int \frac{\sin bx}{x^n}dx \tag{8.24}$$

теми же методами интегрирования по частям и замены переменных можно свести к трем основным:

$$\int \frac{e^x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \tag{8.25}$$

которые, как уже отмечалось, не вычисляются в элементарных функциях и порождают класс функций, называемых «специальными функциями»: интегральный логарифм, интегральный косинус и интегральный синус. Таким образом, интегралы (8.24) также не вычисляются через элементарные функции, пополняя тем самым класс специальных функций.

Наряду с интегралами (8.23) для интегралов

$$V_0(x) = \int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad W_0(x) = \int e^{ax}\sin bx\,dx \tag{8.26}$$

получены формулы (3.101).

Объединение интегралов вида (8.23) и (8.26) приводит к интегралам вида

$$V_n(x) = \int x^n e^{ax}\cos bx\,dx, \quad W_n(x) = \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx, \quad x \in \mathbb{N}. \tag{8.27}$$

Для этих интегралов однократное интегрирование по частям дает рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \frac{1}{a^2+b^2}\{x^n e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) - n[bW_{n-1}(x) + aV_{n-1}(x)]\},\\ W_n(x) &= \frac{1}{a^2+b^2}\{x^n e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) - n[aW_{n-1}(x) - bV_{n-1}(x)]\}, \end{aligned} \tag{8.28}$$

с помощью которых интегралы (8.27) сводятся к интегралам (8.26).

Пример 8.10. Вычислить
$$\int xe^{3x}\cos 4x\,dx.$$

Решение. Так как
$$\int xe^{3x}\cos 4x\,dx = V_1(x),$$
то с помощью первого рекуррентного соотношения (8.28) найдем
$$V_1(x) = \int xe^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{25}\{xe^{3x}(4\sin 4x + 3\cos 4x) - (3W_0 + 3V_0)\},$$
а поскольку в силу (3.101)
$$V_0(x) = \int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{25}e^{3x}(3\sin 4x - 4\cos 4x) + C_1,$$
$$W_0(x) = \int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{25}e^{3x}(3\cos 4x + 4\sin 4x) + C_2,$$
окончательно получим
$$\begin{aligned}V_1(x) = \int xe^{3x}\cos 4x\,dx &= \frac{1}{25}\Big\{xe^{3x}(4\sin 4x + 3\cos 4x) -\\ &- \frac{4e^{3x}}{25}(3\cos 4x + 4\sin 4x) - 4C_2 - \frac{3e^{3x}}{25}(3\sin 4x - 4\cos 4x) - 3C_1\} =\\ &= \frac{3e^{3x}}{25}\{x(4\sin 4x + 3\cos 4x) - \sin 4x\} + C,\end{aligned}$$
где $C = (3C_1 + 4C_2)/25$.

В самом общем случае, когда $P(y, y_i, \bar{y}_j, \tilde{y}_k)$ есть целый полином переменных
$$y = x, \quad y_i = e^{a_i x}, \quad \bar{y}_j = \cos\bar{b}_j x, \quad \tilde{y}_k = \sin\tilde{b}_k x,$$
то интеграл от него сведется к линейной комбинации интегралов от функций
$$x^n \cdots e^{a_i x} \cdots \cos\bar{b}_j x \cdots \sin\tilde{b}_k x,$$
которые, в свою очередь, с помощью тригонометрических преобразований можно свести к линейным комбинациям от функций
$$x^n e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^n e^{\alpha x}\sin\beta x.$$
А интегралы от этих функций уже можно вычислить по формулам (8.28).

При рассмотрении интегрирования простейших иррациональностей особое внимание было уделено интегралам (7.8)
$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\big)dx = \int R(x, \sqrt{P_2(x)})dx.$$
Обобщением этих интегралов являются интегралы вида
$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)})dx, \tag{8.29}$$

где $P_n(x)$ — полином степени $n \geqslant 3$. Интегралы такого вида, как правило, уже не выражаются через элементарные функции. При $n = 3$ и $n = 4$ интегралы (8.29) называются *эллиптическими*. Впрочем это название в точном смысле относится лишь к тем из них, которые не выражаются через элементарные функции. Те же из них, которые все же удается выразить через элементарные функции, называются *псевдоэллиптическими*. Такими являются, например, интегралы

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{1+2x^3}}dx = x\sqrt{2x^3+1}+C;$$
$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}+C.$$

Исследование интегралов вида

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+ex+f}\big)dx \tag{8.30}$$

при произвольных коэффициентах a, b, c, e, f является достаточно сложной задачей. Поэтому все интегралы (8.30) сводятся к таким, которые содержат наименьшее число произвольных коэффициентов (параметров). С помощью элементарных (или вспомогательных) преобразований все эллиптические интегралы сводятся к следующим каноническим формам:

$$\begin{gathered}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\\ \int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\end{gathered} \tag{8.31}$$

называемым, согласно терминологии Лежандра, *эллиптическими интегралами* 1-го, 2-го и 3-го родов, соответственно. Эллиптические интегралы (8.31) не выражаются через элементарные функции, т.е. не берутся в конечном виде, что и было доказано Лиувиллем.

На начальном уровне изучения интегрального исчисления, которым мы вынуждены пока ограничиться, основную роль играет задача об «интегрировании в конечном виде, т.е. в элементарных функциях». Однако ошибочно думать, что этим задачи интегрального исчисления ограничиваются вообще. Ниже мы увидим, что техника работы с интегралами усовершенствовалась так, что исследование и применение функций, заданных в виде интеграла, немногим сложнее, чем заданных непосредственно, без знаков интеграла. Более того, зачастую, даже если интеграл берется в элементарных функциях, но имеет слишком громоздкое выражение, предпочитают этот интеграл не вычислять в явном виде (не брать) и использовать его «целиком», невзятым.

Мы уже отмечали, что первообразные непрерывных функций являются функциями гладкими, прерывных — кусочно-гладкими. Множество гладких первообразных при необходимости объединяются в класс так называемых точных первообразных. Так, например, таблица интегралов представляет собой перечень точных первообразных.

Возвращаясь к интегралам, вычисляемым в конечном виде, проиллюстрируем применение рассмотренных выше методов интегрирования для нестандартно заданных функций и функций, непрерывность которых нарушается на некотором счетном множестве точек области их определения. Интегрирование функций с одной такой точкой рассмотрено в примерах 3.3, 3.12, где первообразные функции $f(x)$ находились на каждом интервале ее непрерывности отдельно, а затем они «сшивались» в одну непрерывную первообразную соответствующим выбором произвольных постоянных. Ниже мы рассмотрим обобщение этой процедуры.

Пример 8.11. Вычислить интегралы

$$1)\ \int [x]|\sin\pi x|dx; \quad 2)\ \int [x]dx,$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Решение. 1) Подынтегральная функция является нечетной (рис. 2,*a*). Воспользовавшись определением целой части для x: $n \leqslant x < n+1$ и свойствами тригонометрических функций, запишем

$$[x]|\sin\pi x| = n(-1)^n \sin\pi x, \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Поэтому

$$\int [x]|\sin\pi x|dx = (-1)^n n \int \sin\pi x\, dx = (-1)^n \frac{n}{\pi}(-\cos\pi x) + C_n =$$
$$= C_n - (-1)^n \frac{n}{\pi}\cos\pi x, \quad n \leqslant x < n+1.$$

Из требования непрерывности первообразной в точках $x = n+1$ получим равенство

$$\Big[C_n - (-1)^n \frac{n}{\pi}\cos\pi x\Big]\Big|_{x=n+1} = \Big[C_{n+1} - (-1)^{n+1}\frac{n+1}{\pi}\cos\pi x\Big]\Big|_{x=n+1},$$

из которого следует

$$C_{n+1} = C_n + \frac{2n+1}{\pi}. \tag{8.32}$$

Положив в (8.32) последовательно $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ и т.д., получим

$$C_1 = C_0 + \frac{1}{\pi};$$
$$C_2 = C_1 + \frac{3}{\pi} = C_0 + \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} = C_0 + \frac{4}{\pi} = C_0 + \frac{2^2}{\pi};$$
$$C_3 = C_2 + \frac{5}{\pi} = C_0 + \frac{4}{\pi} + \frac{5}{\pi} = C_0 + \frac{9}{\pi} = C_0 + \frac{3^2}{\pi};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$C_n = C_0 + \frac{n^2}{\pi}.$$

С учетом этого

$$\int [x]|\sin\pi x|dx = C_0 + \frac{n^2}{\pi} - (-1)^n \frac{n}{\pi}\cos\pi x = \frac{n}{\pi}\big[n - (-1)^n\cos\pi x\big] + C_0,$$

а поскольку x меняется в пределах $n \leqslant x < n+1$, то всегда $n = [x]$.

Таким образом, окончательно имеем

$$\int [x]|\sin\pi x|dx = \frac{[x]}{\pi}\big\{[x] - (-1)^{[x]}\cos\pi x\big\} + C_0.$$

Правая часть этого равенства представляет собой точную первообразную $F(x)$ функции $f(x) = [x]|\sin x|$. График функции $F(x)$ при $C_0 = 0$ приведен на рис. 2,*б*.

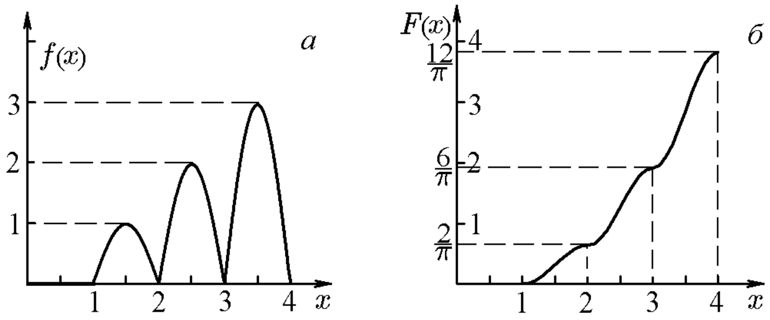


Рис. 2. *а*) $f(x)=[x]|\sin\pi x|$; *б*) $F(x)=[x]\big\{[x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\big\}/\pi$

При построении графиков на рис. 2 мы использовали следующие вспомогательные соотношения для подынтегральной функции $f(x)=[x]|\sin\pi x|$ и ее точной первообразной $F(x)=\dfrac{[x]}{\pi}\{[x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\}$ при $C_0=0$:

$$\begin{array}{lll}
x\in[0,1[: & f(x)=0, & F(x)=0;\\
x\in[1,2[: & f(x)=-\sin\pi x, & F(x)=\dfrac{1}{\pi}\{1+\cos\pi x\};\\
x\in[2,3[: & f(x)=2\sin\pi x, & F(x)=\dfrac{2}{\pi}\{2-\cos\pi x\};\\
x\in[3,4[: & f(x)=-3\sin\pi x, & F(x)=\dfrac{3}{\pi}\{3+\cos\pi x\}.
\end{array}$$

2) Подынтегральная функция $f(x)=[x]$ также нечетная и по определению целой части мы можем записать ее как

для $x\in[n-1,n[$

$$f_{n-1}(x)=[x]=n-1;\qquad \int f_{n-1}(x)dx=\int(n-1)dx=(n-1)x+C_{n-1};$$

для $x\in[n,n+1[$

$$f_n(x)=[x]=n;\qquad \int f_n(x)dx=\int n\,dx=nx+C_n.$$

Из условий непрерывности первообразной в точках $x=n$ имеем

$$\{(n-1)x+C_{n-1}\}\Big|_{x=n}=(nx+C_n)\Big|_{x=n}$$

или

$$C_n=C_{n-1}-n.$$

Положив $n=1,2,3,...,$ найдем

$$\begin{aligned}
&C_1=C_0-1,\\
&C_2=C_1-2=C_0-3,\\
&C_3=C_2-3=C_0-6,\\
&C_4=C_3-4=C_0-10,
\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C_n = C_{n-1} - n = C_0 - \frac{n(n+1)}{2},$$

откуда

$$\int f_n(x)dx = nx + C_n = nx - \frac{n(n+1)}{2} + C_0.$$

Так как x меняется в пределах $n < x < n+1$, то всегда $n = [x]$.

Таким образом,

$$\int [x]\,dx = [x]x - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C_0. \tag{8.33}$$

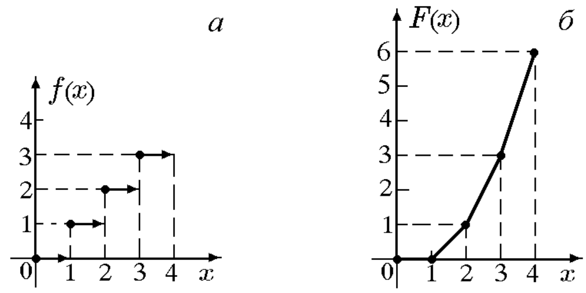


Рис. 3. *а*) $f(x) = [x]$; *б*) $F(x) = [x]x - [x]([x]+1)/2$

Поскольку подынтегральная функция $f(x) = [x]$ не является непрерывной, а имеет счетное множество точек разрыва первого рода (рис. 3,*а*), то найденная первообразная (8.33) не является точной первообразной и представляет собой кусочно гладкую функцию (рис. 3,*б*).

При построении графиков на рис. 3 мы использовали следующие вспомогательные соотношения:

$$\begin{array}{lll}
x \in [0,1[: & f(x) = 0, & F(x) = 0; \\
x \in [1,2[: & f(x) = 1, & F(x) = 1 - x; \\
x \in [2,3[: & f(x) = 2, & F(x) = 2x - 3; \\
x \in [3,4[: & f(x) = 3, & F(x) = 3x - 6.
\end{array}$$

Пример 8.12. Вычислить интегралы

$$1)\ \int \operatorname{sign}(\sin x)dx, \quad 2)\ \int (-1)^{[x]}dx.$$

Решение. 1. Подынтегральную функцию представим в виде

$$\operatorname{sign}(\sin x) = \begin{cases} 0, & x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}; \\ \dfrac{\sin x}{|\sin x|} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}, & k \neq k\pi, \end{cases}$$

тогда функция

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \arccos(\cos x) + C$$

является непрерывной периодической с периодом 2π первообразной разрывной функции $\operatorname{sign}(\sin x)$ (рис. 4).

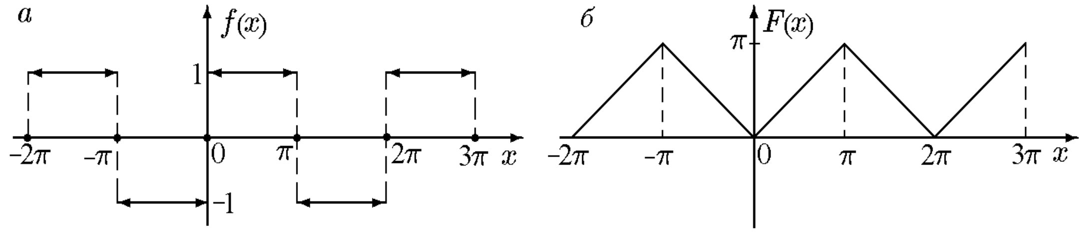


Рис. 4. *а)* $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$; *б)* $F(x) = \arccos(\cos x)$, $C = 0$

2. Так как
$$(-1)^{[x]} = \operatorname{sign}(\sin \pi x), \quad x \in \mathbb{R},$$
то, согласно результату предыдущего примера,
$$\int (-1)^{[x]} dx = \int \operatorname{sign}(\sin \pi x) dx = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) + C.$$

8.4. Физические и геометрические интерпретации неопределенного интеграла

Как уже отмечалось, понятие первообразной возникает в широком круге задач, когда необходимо восстановить функцию по известной производной. Наиболее наглядным, простым и часто используемым примером является задача об определении пройденного телом пути $S(t)$ по известному закону изменения его скорости $v(t)$:
$$S(t) = \int v(t) dt + C.$$
Произвольная постоянная C этого закона может быть конкретизирована дополнительным условием $S(t_0) = S_0$, задающим значение пути, пройденного до момента времени t_0. Аналогично определяется скорость $v(t)$ по ускорению $a(t)$, величина заряда $q(t)$ по току $i(t)$ и т.д.

Обобщением всех этих физических примеров является абстрагированная от физического смысла геометрическая интерпретация неопределенного интеграла. В такой интерпретации исходят из того, что для функции $y = \int f(x) dx = F(x) + C$ ее производная
$$y' = F'(x) = f(x) = \operatorname{tg} \alpha(x) = k(x) \tag{8.34}$$
задает угловой коэффициент наклона касательной к соответствующему графику функции (рис. 5). Поэтому задачу отыскания первообразной $F(x)$ для заданной функции $f(x)$ можно истолковать так: требуется найти кривую $y = F(x)$, для которой бы имел место заданный закон изменения углового коэффициента касательной
$$k(x) = \operatorname{tg} \alpha(x) = f(x) = F'(x).$$
Если $y(x) = F(x)$ есть одна из таких кривых, то остальные $y(x) = F(x) + C$ могут быть получены из нее простым сдвигом на произвольную постоянную C вдоль оси Oy (рис. 5). Индивидуализировать кривую из этого множества можно условием прохождения ее через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда $y_0 = F_(x_0)+C$, а, следовательно, $C = y_0 - F(x_0)$, и, стало быть, $y(x) = y_0 + [F(x) - F(x_0)]$.

Другой очень важной геометрической интерпретацией первообразной, а следовательно и неопределенного интеграла, является задача об определении площади криволинейной фигуры, а именно: пусть в промежутке $[a, b]$ оси Ox задана непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая неотрицательные значения.

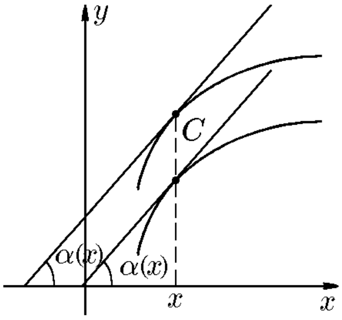


Рис. 5

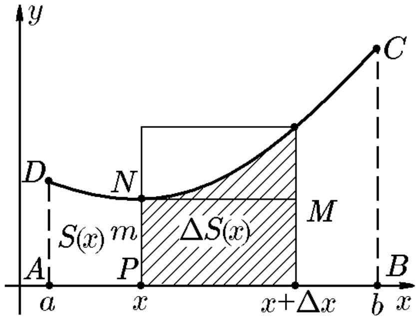


Рис. 6

Рассмотрим фигуру $ABCD$, ограниченную кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 6), которую далее будем называть криволинейной трапецией $ABCD$. Поставим задачу найти площадь такой криволинейной трапеции. Для этого на отрезке $[a, b]$ выделим точку x и построим вспомогательную криволинейную трапецию $APND$, обозначив ее площадь $S(x)$ (рис. 6). Понятно, что при изменении положения точки x значение площади $S(x)$ будет меняться. Изучим поведение этого изменения. С этой целью значению x придадим некоторое, например положительное, приращение Δx. Тогда площадь $S(x)$ получит некоторое приращение $\Delta S(x)$. Обозначив через m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x, x+\Delta x]$, сравним изменение площади $\Delta S(x)$ с площадями прямоугольников, построенных на основании Δx и имеющих высоты m и M. Очевидно, что

$$m\Delta x < \Delta S(x) < M\Delta x$$

или

$$m < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < M.$$

Вследствие непрерывности функции $f(x)$ значения m и M при $\Delta x \to 0$ будут стремиться друг к другу, т.е. к значению $f(x)$, а потому

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

или

$$S'(x) = f(x). \tag{8.35}$$

Таким образом, переменная площадь $S(x)$ представляет собой первообразную для данной функции $f(x)$. Эта первообразная характеризуется тем, что она обращается в нуль при $x = a$, т.е. $S(a) = 0$. Поэтому если

$$S(x) = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

то произвольную постоянную можно определить, положив $x = a$. Тогда

$$0 = F(a) + C,$$

и, следовательно,

$$C = -F(a).$$

С учетом этого

$$S(x) = F(x) - F(a). \tag{8.36}$$

Поскольку для вычисления площади криволинейной трапеции $ABCD$ нужно в (8.36) положить $x = b$, то

$$S_{ABCD} = S(b) = F(b) - F(a). \tag{8.37}$$

$\Diamond$ Забегая вперед, отметим, что формула (8.37) имеет название формулы Ньютона–Лейбница, и к ней мы еще вернемся при переходе от понятия неопределенного интеграла к понятию определенного интеграла.

В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример.

Пример 8.13. Для заданной функции $f(x) = 3x^2$ найти:

1) уравнение кривой, проходящей через начало координат, у которой угловой коэффициент k наклона касательной меняется по закону $k = f(x)$;
2) площадь криволинейной трапеции S_{ABCD}, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

Решение. 1) Согласно условию задачи, для кривой $y = y(x)$

$$y' = k(x) = 3x^2.$$

Отсюда с помощью неопределенного интеграла найдем

$$y(x) = \int k(x)dx = \int 3x^2dx = x^3 + C.$$

Произвольную постоянную определим из условия прохождения кривой через начало координат, т.е. условия $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 = (x^3 + C)\Big|_{x=0} = C, \quad C = 0,$$

и, стало быть,

$$y(x) = x^3.$$

2) Воспользуемся полученным ранее для площади криволинейной трапеции соотношением (8.35):

$$S'(x) = f(x) = 3x^2.$$

Отсюда с помощью неопределенного интеграла найдем

$$S(x) = \int f(x)dx = \int 3x^2dx = x^3 + C.$$

Зная любую первообразную, можно по формуле Ньютона–Лейбница (8.37) найти площадь криволинейной трапеции

$$S_{ABCD} = (x^3 + C)\Big|_{x=3} - (x^3 + C)\Big|_{x=1} = 27 - 1 = 26.$$

$\Diamond$ Рассмотренные выше геометрические задачи имеют различные смысловые интерпретации, тем не менее, в техническом плане они сводятся к решению одной задачи: найти функцию $F(x)$, если

$$F'(x) = f(x) \tag{8.38}$$

а функция $f(x)$ задана, например $f(x) = 3x^2$, как к предыдущем примере.

При более глубоком рассмотрении соотношение (8.38) является не только определением первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, но и, как мы увидим далее, так называемым дифференциальным уравнением [18]. Решение таких простейших дифференциальных уравнений и сводится к нахождению неопределенных интегралов

$$F(x) = \int f(x)dx. \tag{8.39}$$

Возвращаясь к задаче о вычислении площади криволинейной трапеции, можно сказать, что ее решение, по сути, сводится к решению дифференциального уравнения (8.38) в форме неопределенного интеграла (8.39). Именно по этой причине запись (8.39) зачастую называют *квадратурой* (от латинского *quadratura* – придание квадратной формы, т.е. вычисление площади в квадратных единицах: см^2, м^2 и др.).

В следующем разделе мы рассмотрим совершенно другой подход к вычислению площади криволинейной трапеции, основанный на суммировании бесконечно малых, который и приводит к понятию определенного интеграла и использованию формулы Ньютона–Лейбница для его вычисления.

ГЛАВА 2

Определённый интеграл

9. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла

Начнем с названия этого раздела. Буквальное понимание его как перехода к рассмотрению новых задач, приводящих к новому понятию — определенный интеграл, — может ввести в заблуждение. На самом деле мы будем рассматривать те же задачи, которые уже привели к понятию неопределенного интеграла. Новое понятие — определенный интеграл — возникает вследствие нового подхода к решению старых задач. Действительно, задача о вычислении площади криволинейной трапеции была решена с помощью неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

в виде

$$S(x) = [F(x) + C] - [F(a) + C] = F(x) - F(a),$$

где $S(x)$ — площадь вспомогательной криволинейной трапеции с основанием $[a, x] \subset [a, b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$. Тогда площадь S_{ABCD} конкретной криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ найдется как частное значение функции $S(x)$ по формуле Ньютона–Лейбница

$$S_{ABCD} = S(x)\big|_{x=b} = S(b) = F(b) - F(a).$$

Аналогично были решены физические задачи о вычислении пути $S(t)$, пройденного телом, движущимся с переменной скоростью $v(t)$; вычислении работы $A(x)$ переменной силы $F(x)$ и др. К этим задачам мы еще вернемся, рассмотрев предварительно другой подход к решению задачи о вычислении площади криволинейной трапеции.

9.1. Площадь криволинейной трапеции

Напомним, что криволинейной трапецией мы условились называть плоскую фигуру $ABCD$, ограниченную в декартовой системе координат xOy прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком функции $y = f(x) \geqslant 0$. Как следует из рис. 7, точки A, B, C, D имеют координаты $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (b, f(b))$, $D = (a, F(a))$.

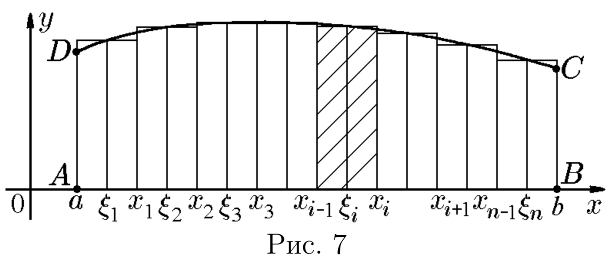


Рис. 7

Чтобы найти численное значение площади S_{ABCD} (далее индекс $ABCD$ будем опускать) отрезок $[a, b]$ оси Ox разобьем на n частей точками $x_0 = a$, x_1, x_2, $\ldots$, x_i, $\ldots$, $x_n = b$ так, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Через эти точки проведем вертикальные прямые. Таким образом, исходная криволинейная трапеция будет разбита на n криволинейных трапеций с основаниями $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Выбрав на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$ произвольную точку ξ_i, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, построим прямоугольники с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и высотой $f(\xi_i)$. Площадь каждого из них ΔS_i равна

$$\Delta S_i = f(\xi_i)\Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{9.1}$$

Рассмотрим ступенчатую фигуру, составленную из этих прямоугольников (рис. 7). Ее площадь S_n равна сумме площадей ΔS_i всех этих прямоугольников:

$$S_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n = \sum_{n=1}^{n} \Delta S_i$$

или с учетом (9.1)

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{n=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{9.2}$$

Понятно, что чем «мельче» разбиение отрезка $[a, b]$, тем меньше площадь ступенчатой фигуры S_n отличается от площади исходной криволинейной трапеции S. Исходя из этого, будем увеличивать число точек разбиения, устремив $n \to \infty$ так, чтобы наибольшая (т.е. все) из длин отрезков Δx_i стремилась к нулю: $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$, $d \to 0$. Если при этом сумма S_n будет иметь предел S, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точки ξ_i, то естественно считать значение этого предела площадью исходной криволинейной трапеции, т.е.

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{9.3}$$

Соотношение (9.3) можно записать в более компактном виде, если ввести обозначение

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx, \tag{9.4}$$

называемое *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Сама сумма (9.2) в (9.4) называется *интегральной суммой*, а знак $\displaystyle\int$ есть стилизованная буква S — начальная буква латинского слова *summa* — сумма.

Таким образом, новый подход в вычислении площади криволинейной трапеции состоит в составлении интегральной суммы и вычислении ее предела — определенного интеграла (9.4). Аналогичный алгоритм решения используется и в физических задачах.

9.2. Движение с переменной скоростью

Пусть материальная точка движется прямолинейно с переменной скоростью $v(t)$, причем функция $v(t)$ непрерывна по времени t. Найдем путь S, пройденный точкой за отрезок времени от момента $t = a$ до момента $t = b$. Для этого временной интервал $[a, b]$ числовой оси Ot, как и в задаче о площади криволинейной трапеции, разобьем точками t_i на отрезки длиной Δt_i и в каждом из них выберем точку ξ_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt_i примерно равен $\Delta S_i = v(\xi_i)\Delta t_i$, а весь путь, пройденный за промежуток времени $[a, b]$, равен

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt, \tag{9.5}$$

т.е. определенному интегралу от функции $v(t)$ на промежутке времени $[a, b]$.

9.3. Работа переменной силы

Пусть материальная точка движется вдоль числовой прямой Ox под действием переменной силы $F(x)$, направленной в положительном направлении оси Ox. Найдем работу A силы $F(x)$ при перемещении точки от $x = a$ до $x = b$. Отрезок $[a, b]$, как и раньше, разобьем точками x_i на отрезки длиной Δx_i и выберем в каждом из них точку ξ_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда работа силы на отрезке Δx_i приближенно равна $\Delta A_i = F(\xi_i)\Delta x_i$. На всем отрезке $[a, b]$ ее можно приближенно считать равной $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta A_i$. Предел этой суммы при тех же условиях, что и раньше, естественно считать работой A переменной силы $F(x)$ при перемещении точки из точки $x = a$ в точку $x = b$:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx, \tag{9.6}$$

т.е. и в этом случае решение задачи сводится к вычислению определенного интеграла (9.6).

Как видим, во всех случаях задача сводится к вычислению определенного интеграла как предела интегральной суммы. Важно здесь не только само существование предела, но и его независимость от разбиения отрезка $[a, b]$ на промежутки $[x_{i-1}, x_i]$ и выбора в каждом из них точки ξ_i.

Пример 9.1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и отрезками прямых $y = 0$ и $x = l > 0$ (рис. 8).

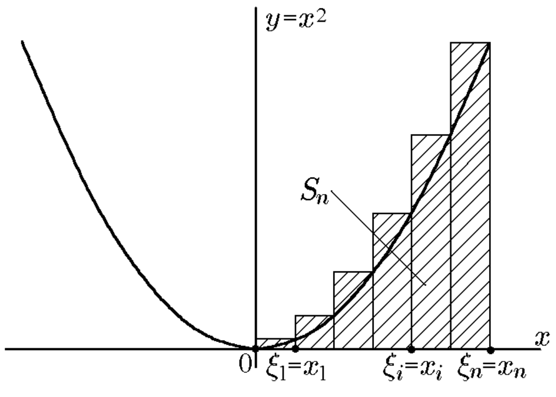


Рис. 8

Решение. В декартовой системе координат xOy (рис. 8) построим график функции $y = x^2$ и отрезок $[0, l]$ оси Ox точками $x_i = li/n$ ($x_0 = 0$, $x_n = l$) разобьем на n равных отрезков длиной $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i] = \dfrac{li}{n} - \dfrac{l(i-1)}{n} = \dfrac{l}{n}$, а в качестве точки ξ_i, $i = \overline{1,n}$, возьмем правый конец отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $\xi_i = x_i = li/n$. С учетом этого интегральная сумма S_n может быть записана в виде

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{li}{n}\right)^2 \frac{l}{n} = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2, \tag{9.7}$$

и тогда искомая площадь S найдется как предел интегральной суммы, т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{l}{n}\Big)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2. \tag{9.8}$$

Чтобы вычислить этот предел, воспользуемся тождеством

$$(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1,$$

в силу которого

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n}(3i^2+3i+1) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1,$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\Big\{\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3 - i^3] - \sum_{i=1}^{n} 1 - 3\sum_{i=1}^{n} i\Big\}.$$

Все суммы в правой части этого равенства легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n;\\
&\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};\\
&\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3 - i^3] = \underbrace{(2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3)} + (4^3 - 3^3) + \underbrace{\ldots + [(n+1)^3 - n^3]} =\\
&\qquad\qquad = (n+1)^3 - 1,
\end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\Big\{(n+1)^3 - 1 - n - \frac{3}{2}n(n+1)\Big\} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подстановка этой суммы в (9.8) дает

$$S = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{l}{n}\Big)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{l^3}{6}\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(2+\frac{1}{n}\Big) = \frac{l^3}{6}\cdot 2 = \frac{l^3}{3}. \tag{9.9}$$

$\Diamond$ Таким образом, при данном разбиении отрезка $[0, l]$ и выборе значений ξ_i предел суммы (9.8) существует и равен, согласно (9.9), $l^3/3$. Это, однако, не гарантирует его существования при других разбиениях. Ниже будет показано, что для функции $y = x^2$ предел интегральной суммы на $[0, l]$ существует, не зависит от способа разбиения, выбора ξ_i и равен $l^3/3$, т.е решение задачи можно представить в виде определенного интеграла

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \int_0^l x^2 dx = \frac{l^3}{3}. \tag{9.10}$$

Пример 9.2. Найти работу переменной силы $f(x) = \sin x$ при перемещении из точки a в точку b: $[a, b] \subset [0, \pi]$.

Решение. На отрезке $[a, b] \subset [0, \pi]$ функция $f(x)$ непрерывна и $f(x) = \sin x \geqslant 0$. Весь отрезок $[a, b]$ оси Ox разобьем точками $x_i = a + li/n$, $i = \overline{0, n}$, где $l = b - a$ и $x_0 = a$, $x_n = b$, на n равных отрезков $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = l/n$, а в качестве точек ξ_i, $i = \overline{1.n}$, возьмем правый конец отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $\xi_i = x_i = a + li/n$. С учетом этого работа на отрезке Δx_i будет примерно равна $\Delta A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$. На всем отрезке $[a, b]$ ее можно приближенно считать равной $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta A_i$. Предел этой суммы при $n \to \infty$ естественно считать работой силы $f(x) = \sin x$ при перемещении из точки a в точку b:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin\Big(a + \frac{li}{n}\Big)\frac{l}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{l}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\Big(a + \frac{li}{n}\Big). \quad (9.11)$$

Сумму из этого равенства рассмотрим отдельно, умножив и разделив выражение под ее знаком на $\sin(l/2n)$ и приняв во внимание тригонометрическое равенство

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\Big(a + \frac{li}{n}\Big) = \frac{1}{\sin(l/2n)} \sum_{i=1}^{n} \sin\Big(a + \frac{li}{n}\Big) \sin\frac{l}{2n} =$$
$$= \frac{1}{2\sin(l/2n)} \sum_{i=1}^{n} \Big\{\cos\Big[a + \frac{l}{n}\Big(i - \frac{1}{2}\Big)\Big] - \cos\Big[a + \frac{l}{n}\Big(i + \frac{1}{2}\Big)\Big]\Big\} =$$
$$= \frac{1}{2\sin(l/2n)} \Big\{\Big[\cos\Big(a + \frac{l}{2n}\Big) - \cos\Big(a + \frac{3l}{2n}\Big)\Big] + \Big[\cos\Big(a + \frac{3l}{2n}\Big) - \cos\Big(a + \frac{5l}{2n}\Big)\Big] +$$
$$+ \ldots + \Big[\cos\Big(a + \frac{2n-1}{2n}l\Big) - \cos\Big(a + \frac{2n+1}{2n}l\Big)\Big]\Big\} =$$
$$= \frac{1}{2\sin(l/2n)} \Big[\cos\Big(a + \frac{l}{2n}\Big) - \cos\Big(a + \frac{2n+1}{2n}l\Big)\Big].$$

Подставив найденное значение суммы в (9.11), получим

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{l}{2n\sin(l/2n)} \Big[\cos\Big(a + \frac{l}{2n}\Big) - \cos\Big(a + \frac{2n+1}{2n}l\Big)\Big].$$

Приняв во внимание непрерывность функции $\cos x$ и воспользовавшись первым замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l/2n}{\sin(l/2n)} = 1,$$

окончательно запишем

$$A = \lim_{n\to\infty} \Big[\cos\Big(a + \frac{l}{2n}\Big) - \cos\Big(a + l + \frac{l}{2n}\Big)\Big] = \cos a - \cos b.$$

Таким образом, при данном разбиении отрезка $[a, b]$ и выборе ξ_i предел (9.11) существует и равен $\cos a - \cos b$. Это, однако, не гарантирует его существования при других разбиениях. Ниже, *как и для предыдущего примера*, будет показано, что для непрерывной функции $y = \sin x$ предел интегральной суммы (9.11) существует независимо от способа разбиения и выбора ξ и равен $\cos a - \cos b$. Это позволяет записать решение задачи в виде определенного интеграла.

Чтобы выяснить условия существования определенного интеграла для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, перейдем к более детальному изучению свойств интегральных сумм и условий существования их пределов.

10. Определённый интеграл

10.1. Интегральные суммы и определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке $[a, b]$ оси Ox. Введем следующие определения.

♦ *Разбиением* τ_n *отрезка* $[a, b]$ будем называть конечное множество его точек $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, и обозначать $\tau_n = \{x_i\}_{i=0}^n$. Сами отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ будем называть *отрезками разбиения* τ_n. Наибольшую из длин Δx_i, $i = \overline{1, n}$, будем называть *диаметром разбиения* τ_n (или его *мелкостью*) и обозначать $d(\tau_n) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$. Множество всех разбиений отрезка $[a, b]$ обозначим через $\mathcal{N}([a, b])$.

◊ Если из контекста ясно, о каком разбиении τ_n идет речь, то зависимость диаметра от τ_n может быть опущена.

♦ Разбиение $\tau_{n_1}^1$ называется *измельчением* (*продолжением*) разбиения τ_n и обозначается $\tau_{n_1}^1 \succ \tau_n$, если каждая точка разбиения τ_n является также точкой разбиения $\tau_{n_1}^1$.

◊ Другими словами, разбиение $\tau_{n_1}^1$ либо совпадает с разбиением τ_n, либо получено из τ_n добавлением хотя бы одной точки. Это означает, что множество $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ является подмножеством множества $\{x_0^1, x_1^1, ..., x_{n_1}^1\}$, поэтому используется обозначение $\tau_n \prec \tau_{n_1}^1$.

♦ Последовательность разбиений $\{\tau_{n_i}^i\}_{i=1}^\infty$ будем называть *основной*, если $\tau_{n_i}^i \succ \tau_{n_{i-1}}^{i-1}$ и соответствующая последовательность их диаметров $\{d_i\}_{i=1}^\infty$, $d_i = d(\tau_{n_i}^i)$, является бесконечно малой, т.е.

$$\lim_{i \to \infty} d_i = 0. \tag{10.1}$$

♦ Множество точек $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, будем называть *выборкой разбиения* τ_n ($\tau_n \in \mathcal{N}([a, b])$) и обозначать $\xi(\tau_n)$ или просто ξ, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Здесь $[x_{i-1}, x_i]$ — отрезок разбиения τ_n. Множество всех выборок разбиения τ_n обозначим $\mathcal{P}(\tau_n)$.

♦ Сумму

$$S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) = S(f, \tau_n, \xi) = S(\tau, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \tag{10.2}$$

назовем *интегральной суммой* для функции $f(x)$ при заданном разбиении τ_n и фиксированной выборке ξ.

Именно предел интегральной суммы (10.2) рассматривался выше как определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поскольку существуют два эквивалентных определения предела функции, то удобно сформулировать два определения определенного интеграла: по Коши и по Гейне.

♦ Число $I = I(f)$ называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается как

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} S(f, \tau_n, \xi), \tag{10.3}$$

если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при любом разбиении τ_n, $\tau_n \in \mathcal{N}([a, b])$, с диаметром $d = d(\tau_n)$, $d < \delta$, и любой выборке $\xi(\tau_n)$, $\xi \in \mathcal{P}(\tau_n)$, выполняется неравенство

$$|I - S(f, \tau_n, \xi)| = \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon, \tag{10.4}$$

или в символьной форме:

$$\left\{ I = \int_a^b f(x)dx \right\} \iff \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall\tau_n, \tau_n \in \mathcal{N}([a, b]) :$$

$$d(\tau_n) < \delta(\varepsilon) \forall\xi, \xi \in \mathcal{P}(\tau_n) \Rightarrow |I - S(f, \tau_n, \xi(\tau_n))| < \varepsilon\}. \tag{10.5}$$

Равенство (10.3) в формулировке Гейне понимается в следующем смысле.

♦ Последовательность $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$, $S_i = S(f, \tau_{n_i}^i, \xi(\tau_{n_i}^i))$ $(\tau_{n_i}^i \in \mathcal{N}([a, b]))$, значений интегральных сумм, отвечающая любой основной последовательности разбиений $\{\tau_{n_i}^i\}_{i=1}^{\infty}$ отрезка $[a, b]$, при любой выборке $\xi(\tau_{n_i}^i)$, $\xi \in \mathcal{P}(\tau_{n_i})$, имеет предел $\lim\limits_{i\to\infty} S_i = I(f)$.

♦ Функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$, если для нее существует предел I, определяемый условиями (10.5) и обозначаемый как

$$I = \int_a^b f(x)dx;$$

числа a и b, отличающие обозначение неопределенного интеграла от обозначения определенного, называются *нижним и верхним пределами интегрирования*.

♢ В дальнейшем, если не возникают недоразумения, для предела последовательности интегральных сумм будем использовать обозначение

$$\lim_{d\to 0} S(f, \tau_n, \xi) = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} S(f, \tau_n, \xi). \tag{10.6}$$

10.2. Интегральные суммы Дарбу

Интегральная сумма $S(f, \tau_n, \xi(\tau_n))$ (10.2), или коротко $S(\tau_n, \xi)$, является фундаментом, на котором строится понятие определенного интеграла. Чтобы выяснить условия существования ее предела, мы наряду с суммой $S(\tau_n, \xi)$ рассмотрим вспомогательные суммы $\overline{S}(f, \tau_n)$ и $\underline{S}(f, \tau_n)$. Для непрерывных функций эти суммы получены из $S(\tau_n, \xi)$ при специальном подборе выборки $\xi(\tau_n)$ разбиений τ_n. Более простая структура этих сумм упрощает их изучение, что позволяет сформулировать свойства интегральных сумм $S(\tau_n, \xi)$ и оценки для них.

Для дальнейшего изложения напомним следующие определения (см. [16]).

♦ Множество вещественных чисел X называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует такое число M (m), что для всех элементов $x \in X$ справедливо $x \leqslant M$ ($x \geqslant m$). Число M (m) называется *верхней* (*нижней*) *гранью множества* X.

♦ Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) граней ограниченного сверху (снизу) множества X называется *точной верхней* (*нижней*) *гранью множества* X и обозначается $\sup X$ ($\inf X$).

Итак, для функции $y = f(x)$, определенной и ограниченной на отрезке $[a, b]$ оси Ox, наряду с суммой $S(f, \tau_n, \xi)$ рассмотрим суммы

$$\overline{S}(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \tag{10.7}$$

где величины M_i и m_i выбираются по правилам

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x). \tag{10.8}$$

♦ Суммы $\overline{S}(f, \tau_n)$ и $\underline{S}(f, \tau_n)$ (10.7) называются *верхней* и *нижней суммами Дарбу* для функции $f(x)$ при заданном разбиении τ_n на отрезке $[a, b]$.

Роль сумм Дарбу для функции $y = f(x)$ при заданном разбиении наглядно иллюстрируется рис. 9. На рис. 9,*а* нижняя сумма Дарбу $\underline{S}(f, \tau_n)$ равна площади ступенчатой фигуры, вписанной в криволинейную трапецию. На рис. 9,*в* верхняя сумма Дарбу $\overline{S}(f, \tau_n)$ есть площадь ступенчатой фигуры, описанной вокруг криволинейной трапеции. Интуитивно понятно, что интегральная сумма $S(f, \tau_n, \xi)$ с некоторой выборкой ξ будет равна площади ступенчатой фигуры, занимающей промежуточное значение между нижней и верхней суммами Дарбу (рис. 9,*б*).

Сформулируем некоторые полезные свойства сумм Дарбу и начнем с очевидного.

Свойство 1. Для сумм Дарбу справедлива оценка

$$\underline{S}(f, \tau_n) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n). \tag{10.9}$$

Действительно, для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, в силу (10.8) справедливо неравенство

$$m_i \leqslant M_i,$$

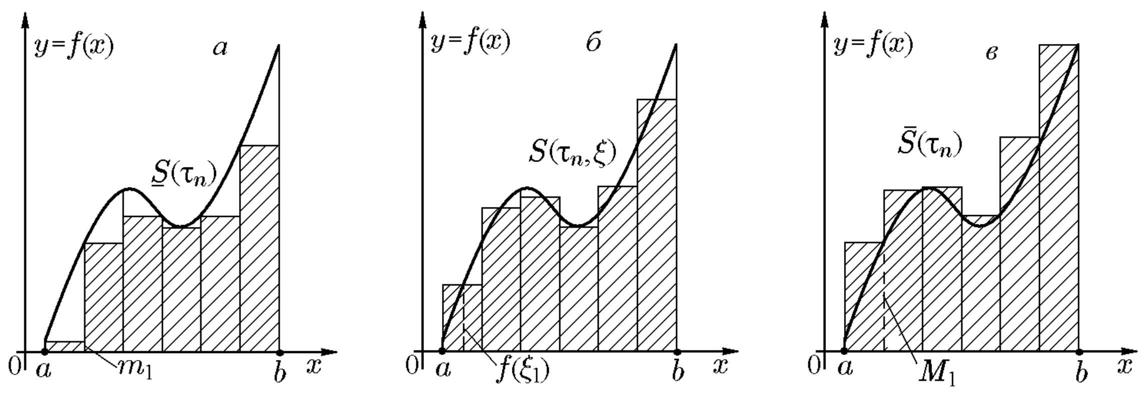


Рис. 9

а поскольку все $\Delta x_i > 0$, то и

$$m_i \Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сложив эти неравенства, получим оценку

$$\underline{S}(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \overline{S}(f, \tau_n),$$

совпадающую с (10.9). Эту оценку наглядно иллюстрируют рис. 9,*а* и 9,*в*.

Это свойство позволяет получить ряд важных соотношений для интегральных сумм $S(f, \tau_n, \xi)$ и сумм Дарбу.

Следствие 1.1. Для любого разбиения τ_n и выборки $\xi(\tau_n)$ справедливы оценки

$$\underline{S}(f, \tau_n) \leqslant S(f, \tau_n, \xi) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n), \tag{10.10}$$

причем на множестве всех выборок ξ ($\xi \in \mathcal{P}(\tau_n)$) разбиения τ_n ($\tau_n \in \mathcal{N}([a, b])$)

$$\sup_{\xi \in \mathcal{P}(\tau_n)} S(f, \tau_n, \xi) = \overline{S}(f, \tau_n), \tag{10.11}$$

$$\inf_{\xi \in \mathcal{P}(\tau_n)} S(f, \tau_n, \xi) = \underline{S}(f, \tau_n). \tag{10.12}$$

Действительно, неравенства (10.10) очевидным образом вытекают из оценок

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i,$$

в силу которых

$$\underline{S}(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = S(f, \tau_n, \xi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \overline{S}(f, \tau_n).$$

Для доказательства равенства (10.11), согласно определению точной верхней грани, следует убедиться в выполнении двух условий: во-первых, для любой выборки $\xi = \xi(\tau_n)$ разбиения τ_n справедливо неравенство

$$\overline{S}(f, \tau_n) - S(f, \tau_n, \xi) \geqslant 0, \tag{10.13}$$

а, во-вторых, для заданного $\varepsilon > 0$ из всех выборок ξ разбиения τ_n существует такая выборка $\xi' = \xi'(\tau_n)$, для которой

$$\overline{S}(f, \tau_n) - S(f, \tau_n, \xi') < \varepsilon. \tag{10.14}$$

Условие (10.13) выполняется в силу (10.10). Для проверки (10.11) будем исходить из (10.8):

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

и определения точной верхней грани на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\xi_i'(\varepsilon) \in [x_{i-1}, x_i]$, такое что при всех i справедливо

$$0 \leqslant M_i - f(\xi_i'(\varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{b - a},$$

или в символьной форме:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\xi_i'(\varepsilon) \in [x_{i-1}, x_i] : \, 0 \leqslant M_i - f(\xi_i'(\varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Умножив i-ое неравенство на Δx_i и просуммировав по i от 1 до n, получим

$$0 \leqslant \sum_{1=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{1=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i < \sum_{1=1}^{n} \frac{\varepsilon \Delta x_i}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{1=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon.$$

Поскольку $\xi' = \{\xi_1', \xi_2', ..., \xi_n'\}$ является выборкой разбиения τ_n, то эти неравенства можно записать в виде

$$0 \leqslant \overline{S}(\tau_n) - S(\tau_n, \xi') < \varepsilon,$$

совпадающим с (10.14). Таким образом, равенство (10.11) справедливо. Аналогично убеждаемся в справедливости (10.12).

Далее перейдем к другим свойствам сумм Дарбу.

Свойство 2. Измельчение $\tau_{n_1}^1$ разбиения τ_n ($\tau_{n_1}^1 \succ \tau_n$, $n_1 > n$) не уменьшает нижнюю сумму Дарбу и не увеличивает верхнюю, т.е. справедливы оценки

$$\underline{S}(f, \tau_n) \leqslant \underline{S}(f, \tau_{n_1}^1) \leqslant \overline{S}(f, \tau_{n_1}^1) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n), \tag{10.15}$$

причем

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \overline{S}(f, \tau_n) - \overline{S}(f, \tau_{n_1}^1) \leqslant (M-m)pd; \\ 0 &\leqslant \underline{S}(f, \tau_n) - \underline{S}(f, \tau_{n_1}^1) \leqslant (M-m)pd, \end{aligned} \tag{10.16}$$

где $p = n_1 - n$.

Для доказательства (10.15) достаточно рассмотреть случай измельчения $\tau_{n_1}^1$, получаемого из τ_n добавлением единственной точки x' в промежутке $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$ — отрезки, на которые точка x' разбивает отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, а $\Delta x_i' > 0$ и $\Delta x_i'' > 0$ — длины этих отрезков, т.е.

$$\Delta x_i = \Delta x_i' + \Delta x_i''. \tag{10.17}$$

Обозначим $m_i' = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x']} f(x)$ и $m_i'' = \inf\limits_{x\in[x',x_i]} f(x)$. Очевидно, что (рис. 10,a)

$$m_i' \geqslant m_i, \quad m_i'' \geqslant m_i. \tag{10.18}$$

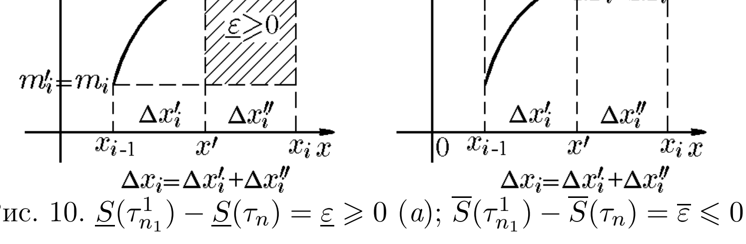


Рис. 10. $\underline{S}(\tau_{n_1}^1) - \underline{S}(\tau_n) = \underline{\varepsilon} \geqslant 0$ (a); $\overline{S}(\tau_{n_1}^1) - \overline{S}(\tau_n) = \overline{\varepsilon} \leqslant 0$ ($б$)

Далее примем во внимание, что в суммах $\underline{S}(\tau_n)$ и $\underline{S}(\tau_{n_1}^1)$ равны все соответствующие слагаемые, за исключением тех, которые относятся к отрезку $[x_{i-1}, x_i]$. Поэтому для разности

$$\underline{S}(f, \tau_{n_1}^1) - \underline{S}(f, \tau_n) = m_i'\Delta x_i' + m_i''\Delta x_i'' - m_i\Delta x_i$$

с учетом (10.17) найдем

$$\underline{S}(f, \tau_{n_1}^1) - \underline{S}(f, \tau_n) = m_i'\Delta x_i' + m_i''\Delta x_i'' - m_i(\Delta x_i' + \Delta x_i'') = (m_i' - m_i)\Delta x_i' + (m_i'' - m_i)\Delta x_i''.$$

Отсюда с учетом (10.18) получим оценку

$$\underline{S}(f, \tau_{n_1}^1) - \underline{S}(f, \tau_n) \geqslant 0, \tag{10.19}$$

или

$$\underline{S}(f, \tau_{n_1}^1) \geqslant \underline{S}(f, \tau_n). \tag{10.20}$$

Поскольку $m_i' - m_i < M - m$, $m_i'' - m_i < M - m$, $\Delta x_i < d$ и $\Delta x_i' + \Delta x_i'' = \Delta x_i$, то неравенство (10.19) можно уточнить:

$$0 \leqslant \underline{S}(f, \tau_{n_1}^1) - \underline{S}(f, \tau_n) \leqslant (M - m)d. \tag{10.21}$$

Аналогично (рис. 10,*б*) доказывается, что

$$\overline{S}(f, \tau_{n_1}^1) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n) \tag{10.22}$$

и

$$0 \leqslant \overline{S}(f, \tau_{n_1}^1) - \overline{S}(f, \tau_n) \leqslant (M - m)d. \tag{10.23}$$

Неравенства (10.20) и (10.22) с учетом (10.9) приводят к оценкам

$$\underline{S}(f, \tau_n) \leqslant \underline{S}(f, \tau_{n_1}^1) \leqslant \overline{S}(f, \tau_{n_1}^1) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n),$$

совпадающим с (10.15).

Неравенства (10.21) и (10.23) совпадают с соответствующими неравенствами (10.16) при $p = 1$. Обобщение на случай произвольного p проводится аналогично.

Свойство 3. Для любых разбиений $\tau'_{n'}$ и $\tau''_{n''}$ справедлива оценка

$$\underline{S}(f, \tau'_{n'}) \leqslant \overline{S}(f, \tau''_{n''}), \tag{10.24}$$

т.е. при любых разбиениях нижние суммы Дарбу не могут превышать верхних.

Действительно, рассмотрим разбиение τ_n, которое является измельчением как разбиения $\tau'_{n'}$, так и разбиения $\tau''_{n''}$. Это можно сделать, выбрав в качестве τ_n, например, $\tau'_{n'}$ и добавив к нему те точки разбиения $\tau''_{n''}$, которые отсутствуют в $\tau'_{n'}$. Из оценок (10.15) при $\tau_n = \tau'_{n'}$ и $\tau_{n_1}^1 = \tau_n$ имеем

$$\underline{S}(f, \tau'_{n'}) \leqslant \underline{S}(f, \tau_n) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n), \tag{10.25}$$

а при $\tau_n = \tau''_{n''}$ и $\tau_{n_1}^1 = \tau_n$, соответственно,

$$\overline{S}(f, \tau_n) \leqslant \overline{S}(f, \tau''_{n''}). \tag{10.26}$$

Объединив неравенства (10.25) и (10.26), получим оценки

$$\underline{S}(f, \tau'_{n'}) \leqslant \underline{S}(f, \tau_n) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n) \leqslant \overline{S}(f, \tau''_{n''}), \tag{10.27}$$

из которых следует (10.24).

И, наконец, очень важно следующее свойство.

Свойство 4 (теорема Дарбу). Для любых разбиений $\tau'_{n'}$ и $\tau''_{n''}$ отрезка $[a,b]$ существуют числа

$$\underline{I} = \underline{I}(f) = \sup_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b])} \underline{S}(f,\tau_n), \qquad \overline{I} = \overline{I}(f) = \inf_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b])} \overline{S}(f,\tau_n), \tag{10.28}$$

удовлетворяющие условиям

$$\underline{S}(f,\tau'_{n'}) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}(f,\tau''_{n''}). \tag{10.29}$$

Сами числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ определяются соотношениями (10.29) и называются *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Действительно, из неравенства (10.24) следует, что любая верхняя сумма $\overline{S}(f,\tau_n)$ является верхней гранью для множества всех нижних сумм Дарбу $\underline{S}(f,\tau_n)$. Точная верхняя грань этого множества, т.е. $\sup\limits_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b])} \underline{S}(f,\tau_n)$, есть наименьшая из всех верхних граней множества $\underline{S}(f,\tau_n)$, и, следовательно, для любой $\overline{S}(f,\tau_n)$ выполняется неравенство

$$\sup_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b]} \underline{S}(f,\tau_n) \leqslant \overline{S}(f,\tau_n). \tag{10.30}$$

Из этого неравенства следует, что $\sup\limits_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b])} \underline{S}(f,\tau_n)$ есть нижняя грань множества верхних сумм Дарбу $\overline{S}(f,\tau_n)$. Точная нижняя грань этого множества, т.е. $\inf\limits_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b])} \overline{S}(f,\tau_n)$, есть наибольшая из всех нижних граней, а значит,

$$\sup_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b]} \underline{S}(f,\tau_n) \leqslant \inf_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b])} \overline{S}(f,\tau_n).$$

Отсюда с учетом (10.27) приходим к (10.29).

Таким образом, цепочка оценок из свойств 1–4, начиная с простейшей оценки элементов множеств нижних и верхних сумм Дарбу $\underline{S}(f,\tau_n) \leqslant \overline{S}(f,\tau_n)$, приводит к очень важной оценке их точных граней, т.е. нижнего и верхнего интегралов Дарбу $\underline{I} \leqslant \overline{I}$. В эту цепочку оценок можно легко встроить оценки интегральных сумм:

$$\underline{S}(f,\tau^1_{n_1}) \leqslant S(f,\tau_n,\xi(\tau_n)) \leqslant \overline{S}(f,\tau^2_{n_2}), \tag{10.31}$$

очевидным образом вытекающие из неравенств (10.10) и (10.15). Здесь разбиение τ_n является измельчением разбиений $\tau^1_{n_1}$ $(\tau^1_{n_1} \succ \tau_n)$ и $\tau^2_{n_2}$ $(\tau^2_{n_2} \succ \tau_n)$.

Свойство 5 (лемма Дарбу). Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливы равенства

$$\overline{I}(f) = \lim_{d(\tau_n)\to 0} \overline{S}(f,\tau_n), \quad \underline{I}(f) = \lim_{d(\tau_n)\to 0} \underline{S}(f,\tau_n). \tag{10.32}$$

Действительно, при $m = M$, т.е. $f(x) = \mathrm{const}$, справедливость утверждения очевидна. Пусть $M > m$. Выберем $\varepsilon > 0$, и тогда, поскольку $\overline{I} = \inf\limits_{\tau_n\in\mathcal{N}([a,b])} \overline{S}(f,\tau_n)$, согласно свойствам точной нижней грани, существует разбиение $\tau_p(\varepsilon)$ отрезка $[a,b]$, такое что

$$\overline{S}(f,\tau_p(\varepsilon)) < \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.33}$$

Выберем произвольное разбиение τ_n отрезка $[a,b]$ с диаметром

$$d(\tau_n) < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}, \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Пусть $\tau'_{n'}$ — объединение разбиений τ_n и $\tau_p(\varepsilon)$. Тогда в силу свойства 2 и неравенства (10.29)

$$\overline{I}(f) \leqslant \overline{S}(f,\tau'_{n'}) \leqslant \overline{S}(f,\tau_p(\varepsilon)); \quad \overline{I}(f) \leqslant \overline{S}(f,\tau'_{n'}) \leqslant \overline{S}(f,\tau_n). \tag{10.34}$$

Рассмотрим разность $\overline{S}(f,\tau_n) - \overline{S}(f,\tau'_{n'})$. Эта разность содержит только слагаемые, связанные с разбиением $\tau_p(\varepsilon)$. Таких слагаемых не более чем p, поэтому в силу (10.16) справедливо

$$\overline{S}(f,\tau_n) - \overline{S}(f,\tau'_{n'}) \leqslant (M-m)p\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

или

$$\overline{S}(f,\tau_n) \leqslant \overline{S}(f,\tau'_{n'}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\overline{I}(f) \leqslant \overline{S}(f,\tau'_{n'}) \leqslant \overline{S}(f,\tau_n)) \leqslant \overline{S}(f,\tau'_{n'}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \overline{S}(f,\tau_p(\varepsilon)) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

Здесь мы воспользовались неравенствами (10.33) и (10.34). Таким образом, для любого ε существует $\delta = \varepsilon/[2(M-m)p] > 0$, такое что при любом разбиении отрезка $[a,b]$ с $d(\tau_n) < \delta$ справедливы неравенства

$$\overline{I}(f) - \varepsilon < I(f) \leqslant \overline{S}(f,\tau_n) \leqslant \overline{I}(f) + \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{d\to 0} \overline{S}(f,\tau_n) = \overline{I}(f).$$

Второе соотношение в (10.32) доказывается аналогично.

10.3. Условия существования определённого интеграла

Напомним, что, согласно (10.3), под определенным интегралом понимается предел интегральной суммы

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0} S(f,\tau_n,\xi(\tau_n)),$$

если он существует. Выяснением условий его существования мы и займемся. Прежде всего заметим, что сформулированное определение в действительности можно применять лишь к ограниченной функции. Если бы функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ была неограниченной, например на отрезке $[x_{i-1},x_i]$, то за счет выбора точки ξ_i можно было бы сделать $f(\xi_i)$, а следовательно, и интегральную сумму сколь угодно большой, что заведомо противоречит условию существования предела (10.3). В связи с этим справедлива следующая теорема.

Теорема 10.1 (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, т.е. существует определенный интеграл*

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0} S(f,\tau_n,\xi(\tau_n)), \tag{10.35}$$

то функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является ограниченной.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, тогда существует число I, удовлетворяющее условию (10.4):

$$|S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) - I| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Положив здесь, например, $\varepsilon = 1$, получим неравенство

$$I - 1 < S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) < I + 1, \tag{10.36}$$

которое выполняется при любом разбиении τ_n, таком что $d(\tau_n) < \delta(1)$, и для любой выборки $\xi(\tau_n)$. Выберем разбиение τ_n, удовлетворяющее условию $d(\tau_n) < \delta(1)$, и предположим, что функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Достаточно рассмотреть случай, когда она не ограничена на одном из отрезков разбиения, например на отрезке $[x_{n-1}, b]$.

Обозначив через F сумму

$$F = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которая ограничена, можем записать

$$S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_n)\Delta x_n = F + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Отсюда в силу (10.36) получим оценку

$$I - 1 < F + f(\xi_n)\Delta x_n < I + 1, \tag{10.37}$$

которая должна выполняться для любого $\xi_n \in [x_{n-1}, b]$. Так как $\Delta x_n > 0$, то неравенство (10.37) равносильно неравенству

$$\frac{1}{\Delta x_n}(I - 1 - F) < f(\xi_n) < \frac{1}{\Delta x_n}(I + 1 - F),$$

из которого следует, что функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[x_{n-1}, b]$, что противоречит сделанному предположению о неограниченности ее на этом отрезке. Это противоречие и доказывает справедливость теоремы.

Ограниченность функции на $[a, b]$ является условием необходимым, но не достаточным для интегрируемости функции на этом отрезке. Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 10.1. Показать, что функция Дирихле

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

не интегрируема на отрезке $[0, 1]$, хотя и ограничена на этом отрезке.

Решение. Для разбиения τ_n отрезка $[0, 1]$ на n частей $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, таких что

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1, \quad \bigcup_{i=1}^{n} [x_{x-1}, x_i] = [0, 1],$$

воспользуемся выборкой $\xi^{\mathbb{Q}}(\tau_n)$, при которой точки ξ_i являются рациональными точками ($\xi_i \in \mathbb{Q}$) промежутков $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $D(\xi_i) = 1$. Тогда

$$S(D,\tau,\xi^{\mathbb{Q}}(\tau_n)) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

С другой стороны, для того же разбиения τ_n можно воспользоваться выборкой $\xi^{\mathbb{J}}(\tau_n)$, при которой точки ξ_i являются иррациональными числами ($\xi_i \in \mathbb{J}$), лежащими в промежутках $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $D(\xi_i) = 0$. Тогда

$$S(D,\tau_n,\xi^{\mathbb{J}}(\tau_n)) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0.$$

Таким образом, для для выборки $\xi^{\mathbb{Q}}(\tau_n)$

$$S(D,\tau_n,\xi^{\mathbb{Q}}(\tau_n)) = 1,$$

а для для выборки $\xi^{\mathbb{J}}(\tau_n)$

$$S(D,\tau_n,\xi^{\mathbb{J}}(\tau_n)) = 0.$$

Это означает, что предел последовательности интегральных сумм $S(D,\tau_n,\xi(\tau_n))$ при $d(\tau_n)\to 0$ не существует, т.е. функция Дирихле $D(x)$ на отрезке $[0,1]$ не интегрируема.

Сформулируем утверждение, которое определяет *необходимое и достаточное условия интегрируемости функции на отрезке* $[a,b]$.

Теорема 10.2 (критерий Дарбу). *Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на интервале $[a,b]$. Пусть $\overline{I}(f)$, $\underline{I}(f)$ — верхний и нижний интегралы Дарбу функции $f(x)$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a,b]$;*
2) *справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} [\overline{S}(f,\tau_n) - \underline{S}(f,\tau_n)] = 0; \tag{10.38}$$

3) *справедливо равенство*

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f); \tag{10.39}$$

4) *существует предел*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ d(\tau_n)\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \omega_k\Delta x_k = 0, \quad \omega_k = M_k - m_k; \tag{10.40}$$

Величина $\omega_i = M_i - m_i$ называется *колебанием функции* $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, а величины M_i и m_i выбираются по правилу (10.8).

5) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех разбиений $\tau_n = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ таких, что $d(\tau_n) < \delta(\varepsilon)$, справедливо неравенство*

$$|\overline{S}(f,\tau_n) - \underline{S}(f,\tau_n)| < \varepsilon; \tag{10.41}$$

6) *для любой основной последовательности разбиений $\{\tau_{n_j}^j\}_{j=1}^{\infty}$, $\tau_{n_j}^j \in \mathcal{N}([a,b])$, справедливо*

$$\lim_{j\to\infty} [\overline{S}(f,\tau_{n_j}^j) - \underline{S}(f,\tau_{n_j}^j)] = 0. \tag{10.42}$$

◊ Отметим, что условия 1 и 2 часто называют *необходимым и достаточным условием существования определенного интеграла.*

Доказательство. Заметим, что условия 4–6 являются различными формами записи соотношения (10.38). Действительно, условие 5 представляет собой определение предела (10.38) в формулировке Коши на «языке ε-δ» (т.е. в символьной записи):

$$\big(\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) : \forall\tau_n : d(\tau_n) < \delta(\varepsilon)\big) \Rightarrow \big(\overline{S}(f,\tau_n) - \underline{S}(f,\tau_n) < \varepsilon\big), \tag{10.43}$$

а условие 6 — в формулировке Гейне. Аналогично условие (10.38) с учетом (10.7) можно записать в виде

$$0 = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \big(\overline{S}(f,\tau_n) - \underline{S}(f,\tau_n)\big) = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} (M_i\Delta x_i - m_i\Delta x_i) =$$
$$= \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\Delta x_i.$$

Таким образом, получили соотношение (10.40).

Поскольку условия 4–6 являются переформулировками условия 2 и не требуют отдельного доказательства, доказательство теоремы проведем по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

I. $1 \to 2$. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, тогда в силу теоремы 10.1 она ограничена на этом отрезке, т.е. ее нижняя ($\underline{S}(f,\tau_n)$) и верхняя ($\overline{S}(f,\tau_n)$) суммы Дарбу существуют. Существование определенного интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ означает, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что при всех разбиениях $\tau_n = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, где $d(\tau_n) < \delta(\varepsilon)$, справедливо неравенство

$$|S(f,\tau_n,\xi(\tau_n)) - I| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{10.44}$$

т.е. в символьной записи: интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ существует, если

$$\big(\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall\tau_n \in \mathcal{N}([a,b]) : d(\tau) < \delta(\varepsilon)\big) \Rightarrow \big|S(f,\tau_n,\xi(\tau_n)) - I\big| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10.45}$$

Это означает, что при любом разбиении τ_n отрезка $[a,b]$, мелкость которого удовлетворяет условию $d(\tau_n) < \delta(\varepsilon)$, неравенство

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < S(f,\tau_n,\xi(\tau_n)) < I + \frac{\varepsilon}{4} \tag{10.46}$$

выполняется при любой выборке $\xi(\tau_n)$, $\xi \in \mathcal{P}(\tau_n)$. Поэтому из левого неравенства (10.46) и оценки (10.12) следует

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < I - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \inf_{\xi\in\mathcal{P}(\tau_n)} S(f,\tau_n,\xi(\tau_n)) = \underline{S}(f,\tau_n). \tag{10.47}$$

Аналогично из правого неравенства (10.46) и оценки (10.11) следует

$$\overline{S}(f,\tau_n) = \sup_{\xi\in\mathcal{P}(\tau_n)} S(f,\tau_n,\xi(\tau_n)) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.48}$$

Из неравенств (10.47), (10.48) с учетом (10.29) получим совокупность оценок

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, \tau_n) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

из которой и следует

$$0 \leqslant \overline{S}(f, \tau_n) - \underline{S}(f, \tau_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, интегрируемая на отрезке функция $f(x)$ удовлетворяет условию (10.43), а значит, и (10.38), т.е. из справедливости условия 1 следует справедливость условия 2.

II. 2 $\to$ 3. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и справедливо условие (10.38). Тогда из теоремы Дарбу (свойствщ 4 сумм Дарбу (10.28)) и условия (10.38) для любого разбиения τ_n, такого что $d(\tau_n) < \delta(\varepsilon)$, имеем

$$0 \leqslant \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n) - \underline{S}(f, \tau_n) < \varepsilon \tag{10.49}$$

Так как числа $\overline{I}$ и $\underline{I}$ не зависят от выборки τ_n, то

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f).$$

Таким образом, из справедливости условия 2 следует справедливость условия 3.

III. 3 $\to$ 1. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет место равенство $\overline{I} = \underline{I}$. Тогда в силу леммы Дарбу (свойство 5) справедливы предельные соотношения (10.32). Поэтому из неравенства (10.10) в силу теоремы о сжатой последовательности [16] найдем

$$\lim_{d\to 0} S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f).$$

Таким образом, из справедливости условия 3 следует справедливость условия 1, и теорема доказана.

$\Diamond$ Условия 4–6 теоремы 10.2 хотя и являются другими формами записи условия 2, но оказываются полезными при исследовании функции на интегрируемость.

Пример 10.2. Является ли функция $f(x) = x^2$ интегрируемой на отрезке $[0, l]$?

Решение. Функция $f(x) = x^2$ является ограниченной на любом конечном отрезке, и, следовательно, требование ограниченности функции из теоремы 10.2 выполняется. Второе требование теоремы можно проверить непосредственно в форме (10.38) или (10.41) для сумм Дарбу либо в форме (10.39) для интегралов Дарбу, либо в форме (10.40) для колебаний функции.

Заметим, что в силу леммы Дарбу выполнение этих условий достаточно проверить хотя бы для одной основной последовательности разбиений τ_n.

Мы рассмотрим все три случая, проведя предварительно необходимые в каждом из них разбиения τ_n.

Итак, отрезок $[0, l]$, на котором функция x^2 монотонно возрастает, точками $x_j = lj/n$, $j = \overline{0, n}$, $x_0 = 0$, $x_n = l$ разобьем на n равных отрезков $]x_{i-1}, x_i[$, $i = \overline{1, n}$, длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = li/n - l(i-1)/n = l/n$. Чтобы построить верхние суммы Дарбу, выберем точки $\xi_i = \overline{\xi}_i$, $i = \overline{1, n}$, которые являются правыми концами отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $\overline{\xi}_i = x_i = li/n$; а чтобы построить нижние суммы

Дарбу, выберем точки $\xi_i = \underline{\xi}_i$, $i = \overline{1,n}$, которые являются левыми концами отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $\underline{\xi}_i = x_{i-1} = l(i-1)/n$. Тогда

$$f(\overline{\xi}_i) = (\overline{\xi}_i)^2 = \left(\frac{li}{n}\right)^2 = \left(\frac{l}{n}\right)^2 i^2; \tag{10.50}$$

$$f(\underline{\xi}_i) = (\underline{\xi}_i)^2 = \left[\frac{l(i-1)}{n}\right]^2 = \left(\frac{l}{n}\right)^2 (i-1)^2. \tag{10.51}$$

Легко видеть, что значения (10.50) функции являются наибольшими на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, а значения (10.51) — наименьшими, т.е.

$$M_i = \left(\frac{l}{n}\right)^2 i^2, \quad m_i = \left(\frac{l}{n}\right)^2 (i-1)^2,$$

следовательно, колебания функции ω_i будут равны

$$\omega_i = M_i - m_i = \left(\frac{l}{n}\right)^2 [i^2 - (i-1)^2] = \left(\frac{l}{n}\right)^2 (2i-1). \tag{10.52}$$

С помощью (10.50)–(10.52) построим суммы Дарбу и их разность:

$$\overline{S}(\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\xi}_i)^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{l}{n}\right)^2 i^2 \left(\frac{l}{n}\right) = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2;$$

$$\underline{S}(\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} (\underline{\xi}_i)^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{l}{n}\right)^2 (i-1)^2 \left(\frac{l}{n}\right) = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2;$$

$$\overline{S}(\tau_n) - \underline{S}(\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{l}{n}\right)^2 (2i-1) \left(\frac{l}{n}\right) = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} (2i-1).$$

Сами суммы легко вычисляются с помощью формул, приведенных в примере 9.1:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n; \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Действительно,

$$\overline{S}(\tau_n) = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \tag{10.53}$$

$$\underline{S}(\tau_n) = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \left[0 + \sum_{i=2}^{n-1} (i-1)^2\right] = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$
$$= \left(\frac{l}{n}\right)^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}; \tag{10.54}$$

$$\overline{S}(\tau_n) - \underline{S}(\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \left(\frac{l}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} (2i-1) =$$
$$= \left(\frac{l}{n}\right)^3 [n(n+1) - n] = \frac{l^3}{n}. \tag{10.55}$$

Эти формулы позволяют проверить выполнение условия интегрируемости функции из теоремы 10.2 всеми тремя способами.

1 способ. Воспользуемся формулой (10.38). Тогда с учетом (10.53) и (10.54) получим

$$\lim_{d(\tau_n)\to 0}[\overline{S}(\tau_n) - \underline{S}(\tau_n)] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{l}{n}\right)^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{l}{n}\right)^3\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] =$$
$$= \frac{l^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3}[(n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1)] = \frac{l^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n^2} = l^3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Это означает, что условие (10.38) теоремы 10.2 выполняется для данного разбиения и, следовательно, функция $f(x) = x^2$ интегрируема на отрезке $[0, l]$, т.е. существует определенный интеграл

$$I = \int_0^l x^2 dx.$$

Как видим, использование формулы (10.38) позволяет установить интегрируемость функции x^2, но не дает значение самого интеграла I.

2 способ. Воспользуемся формулой (10.39). Для этого, согласно (10.32), вычислим пределы (10.53) и (10.54):

$$\lim_{d(\tau_n)\to 0}\overline{S}(\tau_n) = \lim_{d(\tau_n)\to 0}\left(\frac{l}{n}\right)^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{l^3}{3} = \overline{I};$$
$$\lim_{d(\tau_n)\to 0}\underline{S}(\tau_n) = \lim_{d(\tau_n)\to 0}\left(\frac{l}{n}\right)^3\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{l^3}{3} = \underline{I}.$$

Равенство этих пределов говорит о том, что функция x^2 интегрируема на отрезке $[0, l]$, причём определенный интеграл, или интеграл Римана, от функции x^2 равен значению её интегралов Дарбу:

$$\int_0^l x^2 dx = I = \overline{I} = \underline{I} = \frac{l^3}{3}. \tag{10.56}$$

3 способ. Воспользуемся формулой (10.40). Для этого найдем предел от суммы (10.55):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{l^3}{n} = l^3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Нулевое значение предела говорит о том, что функция $f(x) = x^2$ интегрируема на отрезке $[0, l]$, т.е. существует определенный интеграл

$$I = \int_0^l x^2 dx.$$

Как видим, использование формулы (10.40), как и формулы (10.38), позволяет установить интегрируемость функции, но не дает значение самого определенного интеграла. Установить интегрируемость и одновременно найти значение определенного интеграла можно, как мы видели, с помощью формулы (10.39), т.е. интегралов Дарбу.

Результаты этого примера позволяют вернуться к примеру 9.1 о нахождении площади криволинейной трапеции с основанием $[0, l]$ на оси Ox, ограниченной сверху параболой x^2. Теперь нетрудно увидеть, что для нахождения площади

S этой фигуры там был вычислен верхний интеграл Дарбу $\overline{I} = l^3/3$. Но только что в примере 10.2 мы установили для функции x^2 равенства $\overline{I} = \underline{I} = I$, и, следовательно, действительно,

$$S = \overline{I} = \underline{I} = I = \int\limits_0^l x^2 dx = \frac{l^3}{3}.$$

Чуть позже этот же результат мы получим гораздо проще с помощью формулы Ньютона–Лейбница.

Пример 10.3. Показать, что функция Дирихле $f(x) = D(x)$ не интегрируема на любом конечном промежутке $[a, b]$.

Решение. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

уже рассматривалась в примере 10.1. Здесь мы воспользуемся формулой (10.40), поскольку в данном случае легко определяется величина колебаний $\omega_i = 1 - 0 = 1$ функции $D(x)$ при разбиении $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, длиной $\Delta x_i = (b - a)/n$. С учетом этого

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{b-a}{n} = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = b-a \neq 0.$$

Ненулевое значение предела при таком разбиении означает неинтегрируемость функции Дирихле на промежутке $[a, b]$.

10.4. Классы интегрируемых функций

Теорема 10.3. *Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и τ_n — некоторое разбиение этого отрезка на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ длиной Δx_i, $i = \overline{1, n}$, так, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$. В силу непрерывности функция $f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ достигает своих наибольшего M_i и наименьшего m_i значений, определяющих ее колебания $\omega_i = M_i - m_i$, $i = \overline{1, n}$. Наряду с этим, если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем [16]. Это означает, что по произвольно заданному $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что как только все $\Delta x_i < \delta(\varepsilon)$, то все $\omega_i < \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \Delta x_i = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b - a).$$

Так как величина $b - a$ есть постоянное число, а ε произвольно мало, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

что соответствует выполнению условия (10.40) интегрируемости функции, что и требовалось доказать.

Рассуждая аналогично, можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 10.4. *Если функция ограничена на отрезке и имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.*

Еще один класс интегрируемых функций определяет

Теорема 10.5. *Если функция ограничена на отрезке и монотонна, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x)$ является монотонно возрастающей на отрезке $[a,b]$ и τ_n — произвольное разбиение этого отрезка на отрезки $[x_{i-1},x_i]$ длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. В силу возрастания функции ее колебания найдутся как $\omega_i = M_i - m_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) > 0$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, выбрав $\delta = \varepsilon/[f(b)-f(a)]$, тогда как только $\Delta x_i < \delta$, $i=\overline{1,n}$, сразу будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\delta =$$
$$= \delta\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})] = \delta[f(b)-f(a)] = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)] = \varepsilon,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

Это означает, что выполняется условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ в виде (10.40):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что класс функций, исследуемый в теореме 10.5, не совпадает с классом функций, используемых теоремой 10.4, поскольку монотонная функция может иметь бесконечное число точек разрыва, как, например, функция

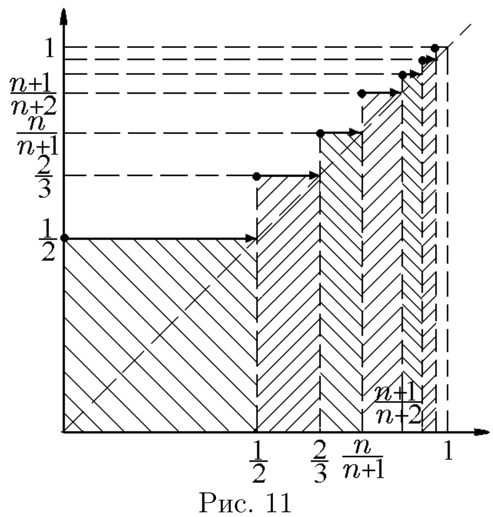


Рис. 11

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{2}{3}, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{2}{3}; \\ \dots, & \dots\dots\dots; \\ \dfrac{n+1}{n+2}, & \dfrac{n}{n+1} \leqslant x < \dfrac{n+1}{n+2}; \\ \dots, & \dots\dots\dots; \\ 1, & x = 1, \end{cases} \qquad (10.57)$$

имеющая счетное множество точек разрыва 1-го рода, интегрируема на отрезке $[0,1]$. Рис. 11 наглядно иллюстрирует интегрируемость этой функции на отрезке $[0,1]$:

$$S = \int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}\Big(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2} < \infty.$$

Пример 10.4. Вычислить

$$\int\limits_a^b x^\alpha dx, \quad \alpha \neq -1, \quad 0 < a < b. \tag{10.58}$$

Решение. При $\alpha = 2$ этот интеграл уже вычислялся в примерах 9.1 и 10.1. Данный интеграл можно рассматривать как его обобщение. Так как функция x^α является непрерывной на любом конечном отрезке, то определенный интеграл (10.58) существует. Для его вычисления выберем не равномерное разбиение отрезка $[a, b]$, как в примере 9.1, а такое разбиение τ_n, при котором длины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ образовывали бы геометрическую прогрессию. В выбранном разбиении τ_n в силу существования интеграла (10.58) достаточно найти любой из интегралов Дарбу. Найдем, например, нижний интеграл $\underline{I}$. В этом случае точки ξ_i следует выбрать совпадающими с левыми концами отрезков, т.е. $\xi_i = x_i$. Тогда

$$x_i = aq^i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \quad \xi_i = a\sqrt[n]{\Big(\frac{b}{a}\Big)^i},$$

$$\Delta x_i = a\sqrt[n]{\Big(\frac{b}{a}\Big)^i}\bigg(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\bigg) \tag{10.59}$$

и

$$\underline{S}(\tau_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} a^\alpha \sqrt[n]{\Big(\frac{b}{a}\Big)^{i\alpha}} a\sqrt[n]{\Big(\frac{b}{a}\Big)^i}\bigg(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\bigg) =$$

$$= a^{\alpha+1}\bigg(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\bigg)\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt[n]{\Big(\frac{b}{a}\Big)^{i(\alpha+1)}} =$$

$$= a^{\alpha+1}\bigg(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\bigg)\frac{(b/a)^{\alpha+1} - 1}{\sqrt[n]{(b/a)^{\alpha+1}} - 1} = \bigg(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\bigg)\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\sqrt[n]{(b/a)^{\alpha+1}} - 1}.$$

Так как при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} d(\tau_n) = \lim_{n\to\infty}\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{\Big(\frac{b}{a}\Big)^i}\bigg(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\bigg) = 0,$$

то

$$\int\limits_a^b x^\alpha dx = \underline{I} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d(\tau_n)\to 0}} \underline{S}(f, \tau_n) = \lim_{n\to\infty}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})\frac{\sqrt[n]{b/a} - 1}{\sqrt[n]{(b/a)^{\alpha+1}} - 1} =$$

$$= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{b/a} - 1}{\sqrt[n]{(b/a)^{\alpha+1}} - 1}. \tag{10.60}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1,$$

то предел (10.60) можно вычислить по правилу Лопиталя, предварительно сделав замену $q = \sqrt[n]{b/a}$:

$$\int\limits_a^b x^\alpha dx = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{b/a} - 1}{\sqrt[n]{(b/a)^{\alpha+1}} - 1} = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})\lim_{q\to 1}\frac{q - 1}{q^{\alpha+1} - 1} =$$

$$= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \lim_{q\to 1} \frac{1}{(\alpha+1)q^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

Пример 10.5. Исходя из определения, вычислить определенный интеграл Римана

$$\int\limits_0^1 e^{ax} dx. \tag{10.61}$$

Решение. Функция e^{ax} непрерывна на отрезке $[0,1]$ и, следовательно, интегрируема на нем. Сам отрезок $[0,1]$ разобьем на n равных частей точками $x_i = i/n$, $i = \overline{0,n}$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$. Длина каждого отрезка $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = 1/n$. При таком разбиении τ_n используем выборку $\xi(\tau_n)$ такую, что $\xi_i = x_i$. Такая выборка соответствует нижней сумме $\underline{S}(\tau_n)$ и, следовательно, нижнему интегралу Дарбу $\underline{I}$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} d(\tau_n) = \lim_{n\to\infty} \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то

$$\underline{I} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d(\tau_n)\to 0}} \underline{S}(\tau_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{ai/n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (e^{a/n})^i.$$

Приняв во внимание, что сумма здесь представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым членом $e_0 = 1$ и знаменателем $q = e^{1/n}$, получим

$$\underline{I} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1} = (e^a - 1)\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{e^{a/n} - 1} = (e^a - 1)\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{a/n} = \frac{e^a - 1}{a}.$$

В силу интегрируемости функции e^x нижний интеграл Дарбу $\underline{I}$ определяет значение интеграла Римана

$$\underline{I} = I = \int\limits_0^1 e^{ax} dx = \frac{e^a - 1}{a}.$$

10.5. Еще один способ вычисления площади криволинейной трапеции

Теоремы 10.3–10.5 определяют классы интегрируемых функций, т.е. функций, для которых определенные интегралы Римана существуют.

Рассмотрим еще один класс функций, на примере которых можно наглядно продемонстрировать еще один подход к вычислению площадей криволинейных трапеций.

Начнем с функций, называемых быстро колеблющимися. Примерный график одной из таких функций показан на рис. 12,*а*. В силу непрерывности и,

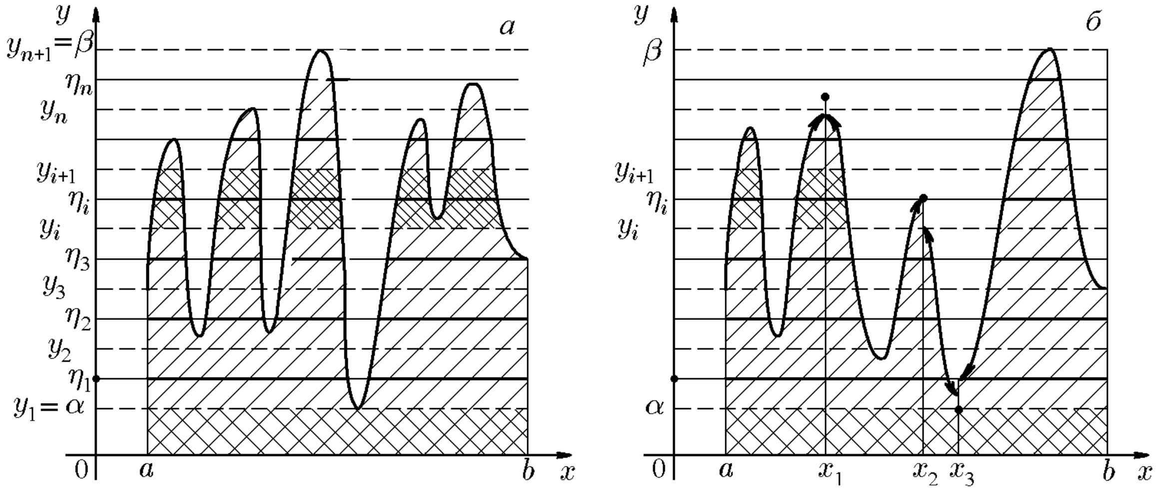


Рис. 12

следовательно, интегрируемости функции, график которой ограничивает криволинейную трапецию сверху, ее площадь можно найти с помощью интеграла Римана

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(\tau_n)\to 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{10.62}$$

Однако при построении суммы (10.62) в силу частых колебаний функции возникают затруднения в составлении последовательности $f(\xi_i)$ при заданном диаметре $d(\tau_n)$ разбиения τ_n, а особенно при его изменении. Другими словами, возникают чисто технические трудности нахождения наибольшего M_i и наименьшего m_i значений на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ с учетом изменения его длины Δx_i. Желание избежать этих трудностей подталкивает к использованию другого способа вычисления площади S, а именно к разбиению криволинейной трапеции на полоски, параллельные не оси Oy, как в сумме Римана (10.62), а оси Ox, как на рис. 12,*а*. Для этого на оси Oy фиксируем наименьшую α и наибольшую β ординаты графика функции и полученный промежуток делим на n частей (рис. 12,*а*) точками

$$\alpha = y_1 < y_2 < \dots < y_i < \dots < y_n < y_{n+1} = \beta. \tag{10.63}$$

Проведя через точки деления прямые $y = y_i$, $i = \overline{1, n+1}$, параллельные оси Ox, разобьем всю площадь криволинейной трапеции на полоски, состоящие из отдельных частей. За приближенное значение площади i-ой полоски можно принять произведение ее ширины $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ на сумму длин отрезков $l(\eta_i)$ любой прямой:

$$y = \eta_i, \quad y_i \leqslant \eta_i \leqslant y_{i+1},$$

заключенной внутри рассматриваемой площади (на рис. 12,*а* сумма всех длин отрезков, выделенных жирно на прямой $y = \eta_i$). С учетом этого приближенное значение S_n площади криволинейной трапеции S можно записать как

$$S \approx S_n = y_1(b-a) + (y_2 - y_1)l(\eta_1) + (y_3 - y_2)l(\eta_2) + \dots + (y_{n+1} - y_n)l(\eta_n). \tag{10.64}$$

Если обозначить $y_0 = 0$ и $b - a = l(\eta_0)$, то (10.55) примет вид

$$S \approx S_n = (y_1 - y_0)l(\eta_0) + (y_2 - y_1)l(\eta_1) + (y_3 - y_2)l(\eta_2) + \dots + (y_{n+1} - y_n)l(\eta_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (y_{i+1} - y_i) l(\eta_i). \tag{10.65}$$

Строгое равенство в (10.5.) можно получить предельным переходом, когда число точек деления неограниченно возрастает:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (y_{i+1} - y_i) l(\eta_i). \tag{10.66}$$

Определение интеграла по Риману (10.62) оказывается удобным, когда функции $f(x)$ на интервале интегрирования являются непрерывными. В этом случае сумму (10.66) можно рассматривать всего лишь как полезную альтернативу риманову интегралу. Однако разрывные функции в рамках определения Римана зачастую не интегрируемы (как, например, функция Дирихле из примеров 10.1, 10.3). Кроме этого, и предел последовательности интегрируемых функций может оказаться неинтегрируемым. Это и некоторые другие недостатки классического определения Римана потребовали обобщения самого понятия интеграла. Одним из таких обобщений является обобщение, сделанное французским математиком А. Лебегом. В формулировке Лебега определение интеграла основывается на идее, заложенной в построении суммы (10.66), реализация которой, в свою очередь, потребовала обобщения понятия длины множества отрезков $l(\eta_i)$ до понятия меры множества — меры Лебега.

Дальнейшие исследования, основанные на понятии меры, привели к созданию такого раздела математики, как метрическая теория функций. К рассмотрению некоторых положений этой теории мы еще вернемся, а сейчас мы продолжим рассмотрение определенного интеграла Римана.

10.6. Свойства определённого интеграла

Для удобства изложения еще раз вернемся к определению определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(\tau_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{10.67}$$

В этом определении основными являются две характеристики: интегрируемая функция $f(x)$ и отрезок интегрирования $[a, b]$. Поэтому все свойства определенного интеграла можно разделить на две части. Первая из них — это совокупность свойств, связанных с операциями над функциями, а вторая — совокупность свойств, связанных с операциями над интервалами интегрирования. Коротко свойства из первой совокупности называют *однородными*, а из второй *аддитивными*.

Кроме этого, еще раз обратим внимание на упоминавшееся уже, хоть и косвенно, замечание относительно переменной интегрирования. Для определенного интеграла (10.67), являющегося по своей сути числом, не имеет никакого значения, какой буквой обозначить переменную интегрирования в левой части равенства (10.67), т.е.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

10.6.1. Однородные свойства определённого интеграла

Свойство 1 (свойство линейности). Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то для любых вещественных чисел C_1 и C_2 функция $f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ также интегрируема на этом отрезке, причём

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)] dx = C_1 \int_a^b f_1(x) dx + C_2 \int_a^b f_2(x) dx. \tag{10.68}$$

Действительно, пусть $S(f, \tau_n, \xi(\tau_n))$, $S(f_1, \tau_n, \xi(\tau_n))$, $S(f_2, \tau_n, \xi(\tau_n))$ — интегральные суммы разбиения τ_n с выборкой $\xi(\tau_n)$ для функций $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда имеет место равенство

$$S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) = C_1 S(f_1, \tau_n, \xi(\tau_n)) + C_2 S(f_2, \tau_n, \xi(\tau_n)).$$

Если диаметр разбиения $d(\tau_n)$ стремится к нулю, т.е. $d(\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то правая часть этого равенства в силу интегрируемости функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет предел, а, стало быть, имеет предел и левая часть равенства, откуда и вытекает равенство (10.68).

Формула (10.68) распространяется на любое конечное число слагаемых и построена на двух простых и полезных практических правилах: постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и интеграл от суммы равен сумме интегралов. Значения функции $f(x) = C_1 f_1(x) - C_2 f_2(x)$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Геометрическую интерпретацию определенного интеграла такой функции мы рассмотрим в разделе о приложениях определенного интеграла.

С использованием теоремы 10.2 нетрудно доказать следующие свойства.

Свойство 2. Произведение $f_1(x) f_2(x)$ двух функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$, будет функцией, также интегрируемой на этом отрезке.

Очевидно, что это свойство остается справедливым для любого конечного числа интегрируемых сомножителей.

Свойство 3. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и ее абсолютное значение $|f(x)|$ также есть функция, интегрируемая на $[a, b]$.

Свойство 4. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и точные нижняя m и верхняя M грани функции $f(x)$ имеют одинаковые знаки, то и $1/f(x)$ также есть функция, интегрируемая на $[a, b]$.

В заключение мы рассмотрим свойство, которое по своему содержанию перекликается с теоремами 10.4 и 10.5 об интегрируемости функций.

Свойство 5 (о видоизменении функции). Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то после произвольного изменения ее значений в конечном числе точек из этого отрезка она остается интегрируемой на нем без изменения величины интеграла.

Другими словами, если $f(x)$ — функция, интегрируемая на отрезке $[a, b]$, а $f^*(x)$ — функция, полученная из $f(x)$ изменением ее значений в конечном числе точек из этого отрезка, то интегралы от этих функций равны, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^*(x) dx. \tag{10.69}$$

Для доказательства (10.69) достаточно ограничиться рассмотрением того случая, когда значение функции $f(x)$ изменяется в одной точке. Без ограничения общности доказательства и для простоты изложения этой точкой удобно выбрать точку $x = a$. Тогда наряду с исходной интегрируемой функцией $f(x)$ мы будем иметь новую функцию $f^*(x)$, которая будет совпадать с $f(x)$ везде, кроме точки $x = a$, в которой $f(a) \neq f^*(a)$. Доказательство свойства разобьем на две части. Сначала докажем интегрируемость $f^*(x)$ на отрезке $[a, b]$. Для этого отрезок $[a, b]$, следуя известной схеме, произвольным образом τ разобьем на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, длиной Δx_i и диаметром $d(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$. На каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ найдем колебания $\omega_i = M_i - m_i$, $\omega^* = M_i^* - m_i^*$ функций $f(x)$ и $f^*(x)$, соответственно. Колебания ω_i и ω_i^* будут равны на всех отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ за исключением $[x_0, x_1]$, которому принадлежит точка $x = a$. На этом отрезке колебания функций могут быть равными:

$$\omega_1 = \omega_1^*, \tag{10.70}$$

либо различаться:

$$\omega_1 \neq \omega_1^*. \tag{10.71}$$

Равенство (10.70) будет выполняться при условии $m_1 \leqslant f^*(a) \leqslant M_1$, а равенство (10.71) — в противном случае.

Для интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0. \tag{10.72}$$

Запишем аналогичную сумму для функции $f^*(x)$:

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^* \Delta x_i = \Omega^*. \tag{10.73}$$

Чтобы найти Ω^*, из (10.73) вычтем (10.72), тогда

$$\Omega^* = \lim_{d\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^* \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x_1\to 0}(\omega_1^* - \omega_1)\Delta x_1 + \lim_{d(\tau_n)\to 0}\sum_{i=2}^{n}(\omega_i^* - \omega_i)\Delta x_i = (\omega_1^* - \omega_1)\lim_{\Delta x_1\to 0}\Delta x_1 + 0 = 0.$$

Здесь мы учли ограниченность разности $(\omega_1^* - \omega_1)$ и равенство $\omega_i^* = \omega_i$ для $i \geqslant 2$.

Так как $\Omega^* = 0$, то из (10.73) найдем

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^* \Delta x_i = 0,$$

но это означает, что функция $f^*(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Из интегрируемости $f^*(x)$ следует, что предел ее интегральной суммы

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d(\tau_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f^*(\xi_i)\Delta x_i \tag{10.74}$$

не зависит от выбора ξ_i, и в силу этого можно считать $\xi_1 \neq a$. Но в этом случае $f^*(\xi_i) = f(\xi_i)$ для всех i, и, следовательно, интегральные суммы для $f^*(x)$ и $f(x)$ совпадают. Из этого совпадения и вытекает равенство (10.69).

Из доказанного свойства следует, что интегрируемость функции $f(x)$ не зависит от того, какие значения она принимает на конечной системе точек отрезка $[a, b]$. Но раз так, то можно и не предполагать, что $f(x)$ задана в этих точках. В этом смысле свойство 5 расширяет утверждение теорем 10.4 и 10.5 и позволяет говорить об интегрируемости ограниченной на $[a, b]$ функции, заданной на самом деле на множестве E, полученном отбрасыванием из $[a, b]$ конечной совокупности точек G этого отрезка, т.е. на множестве $E = [a, b] \setminus G$. Например, функции $f(x) = \sin(1/x)$ и $f(x) = \sin x/x$ в этом случае считаются интегрируемыми на отрезке $[0, 1]$ в силу своей непрерывности и ограниченности на этом промежутке, хотя они и не определены в точке $x = 0$.

Переход от функции $f(x)$, интегрируемой на $[a, b]$, к функции $f^*(x)$, видоизмененной на конечной совокупности точек G, для которой справедливо равенство (10.69), можно представить суммой

$$f^*(x) = f(x) + r(x), \tag{10.75}$$

где

$$r(x) = \begin{cases} h(x) = f^*(x) - f(x), & x \in G; \\ 0, & x \in [a, b] \setminus G, \end{cases} \tag{10.76}$$

причем

$$\int\limits_a^b r(x)dx = 0. \tag{10.77}$$

Пример 10.6. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^\pi \Big(\frac{\pi^2}{4}\sin x + x^2\Big)dx.$$

Решение. Приняв во внимание, что, согласно результатам примеров 9.2 и 10.4, функции $f_1(x) = \sin x$ и $f_2(x) = x^2$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, причем

$$\begin{gathered} \int\limits_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b; \\ \int\limits_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3), \end{gathered} \tag{10.78}$$

для вычисления исходного интеграла I можем воспользоваться свойством 1. Тогда

$$I = \int\limits_0^\pi \Big(\frac{\pi^2}{4}\sin x + x^2\Big)dx = \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^\pi \sin x\,dx + \int\limits_0^\pi x^2 dx.$$

Отсюда с учетом (10.78) найдем

$$I = \int\limits_0^\pi \Big(\frac{\pi^2}{4}\sin x + x^2\Big)dx = \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^\pi \sin x\,dx + \int\limits_0^\pi x^2 dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}(\cos 0 - \cos\pi) + \frac{1}{3}(\pi^3 - 0) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} = \pi^2\Big(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\Big). \qquad (10.79)$$

Пример 10.7. Вычислить интеграл

$$I^* = \int\limits_0^\pi f^*(x)dx,$$

где

$$f^*(x) = \begin{cases} \pi^2, & x = \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{\pi^2}{4}\sin x + x^2, & x \in [0,\pi] \setminus \Big\{\dfrac{\pi}{2}\Big\}. \end{cases} \qquad (10.80)$$

Решение. Наряду с заданной функцией $f^*(x)$ рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = \frac{\pi^2}{4}\sin x + x^2$. Эта функция на отрезке $[0,\pi]$ является непрерывной и в точке $x = \pi/2$ имеет значение

$$f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2} + \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Очевидно, что функции $f^*(x)$ и $f(x)$ на отрезке $[0,\pi]$ совпадают везде, кроме точки $x = \pi/2$, в которой $f^*(\pi/2) = \pi^2$, а $f(\pi/2) = \pi^2/2$, и, следовательно, $h = f^*(\pi/2) - f(\pi/2) = \pi^2/2$. Но это означает, что функция $f^*(x)$ является видоизмененной функцией функции $f(x)$, у которой значение $\pi^2/2$ в точке $x = \pi/2$ заменено значением π^2, т.е.

$$f^*(x) = f(x) + r(x), \qquad (10.81)$$

где

$$r(x) = \begin{cases} h = \dfrac{\pi^2}{2}, & x = \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x \in [0,\pi] \setminus \Big\{\dfrac{\pi}{2}\Big\}. \end{cases} \qquad (10.82)$$

Но в таком случае в силу свойства 5 имеем

$$I^* = \int\limits_0^\pi f^*(x)dx = \int\limits_0^\pi f(x)dx = I \qquad (10.83)$$

Поскольку интеграл I уже вычислен в предыдущем примере, то

$$I^* = \int\limits_0^\pi f^*(x)dx = \int\limits_0^\pi f^*(x)dx = I = \pi^2\Big(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\Big).$$

На будущее заметим, что из развернутой записи (10.83)

$$\int\limits_0^\pi [f(x) + r(x)]dx = \int\limits_0^\pi f(x)dx + \int\limits_0^\pi r(x)dx = \int\limits_0^\pi f(x)dx$$

следует, что

$$\int_0^\pi r(x)dx = 0.$$

Для сравнения этот же результат получим из оценки колебаний ω_i функции $r(x)$ с разбиением τ_n:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ d(\tau_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

означающей интегрируемость функции на отрезке $[0, \pi]$. Вычислим, например, нижний интеграл Дарбу функции $r(x)$:

$$\underline{I} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d(\tau_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0 = \int_0^\pi r(x)dx,$$

но $\underline{I} = I$.

Пример 10.8. Пусть интегрируемая на $[0, 1]$ функция $f(x)$ видоизменена с помощью функции $r(x)$ к функции $f^*(x) = f(x) + r(x)$. Исследовать интегрируемость функции $f^*(x)$, если:

а) функция $r(x)$ есть функция Римана

$$r(x) = R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x \in \mathcal{E}; \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathcal{E}, \end{cases}$$

где $\mathcal{E}$ — множество точек, представляющих правильные несократимые дроби m/n, $n \geqslant 1$;

б) функция $r(x)$ есть функция Дирихле

$$r(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{J}, \end{cases}$$

где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных и $\mathbb{J}$ — иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$.

Решение. Вопрос об интегрируемости видоизмененной функции $f^*(x)$ возникает по той причине, что обе функции $R(x)$ и $D(x)$ имеют бесконечное число точек разрыва. Поскольку сама функция $f^*(x)$ на отрезке $[0, 1]$ интегрируема, то вопрос об интегрируемости функций $f^*(x) = f(x) + r(x)$ сводится к исследованию интегрируемости функции $r(x)$. Начнем со случая $r(x) = R(x)$.

а) Отрезок $[0, 1]$, следуя общепринятой схеме, произвольным образом разобьем на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, длиной Δx_i и диаметром $d(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Вслед за этим зададимся произвольным натуральным числом N и все отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ разобьем на два множества. К первому отнесем отрезки, содержащие числа m/n со знаменателями $n \leqslant N$; так как таких чисел существует лишь конечное число $k = k(N)$, то и отрезков, отнесенных к первому множеству, будет не больше $2k$, а сумма их длин не превзойдет $2kl$. Ко второму множеству отнесем отрезки, не содержащие указанных чисел. В этих промежутках колебания ω_i, очевидно, меньше $1/N$.

Если соответственно этому сумму $\sum \omega_i \Delta x_i$ разложить на две и оценить каждую отдельно, то в результате получим

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < 2k(N)l + \frac{1}{N}.$$

Положив сначала $N > 2/\varepsilon$, а с учетом этого $d < \delta = \varepsilon/4k(N)$, будем иметь $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, что и доказывает интегрируемость функции $R(x)$ на отрезке $[0,1]$.

Установив интегрируемость $R(x)$, несложно вычислить и интеграл $\int\limits_0^1 R(x)dx$. Действительно, поскольку при любом разбиении τ_n каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ содержит иррациональные точки ξ_i, в которых $R(\xi_i) = 0$, то

$$\int\limits_0^1 R(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(\tau_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

б) $r(x) = D(x)$. В этом случае можно воспользоваться результатами примера 10.3, в котором показана неинтегрируемость функции Дирихле $D(x)$ на любом конечном промежутке $[a,b]$, а следовательно, и на отрезке $[0,1]$. Неинтегрируемость функции $D(x)$ приводит к неинтегрируемости функции $f^*(x) = f(x) + D(x)$.

Рассмотренный пример показателен тем, что он иллюстрирует неоднозначность исхода видоизменения функции на бесконечном множестве точек, в которых нарушается ее непрерывность. В результате такого видоизменения, несмотря на появление бесконечного числа точек разрыва первого рода, функция может остаться интегрируемой, но по этой же причине она может оказаться неинтегрируемой. В рамках нашего курса результат изменения можно установить только с помощью непосредственной проверки критериев интегрируемости видоизмененной функции, тогда как в рамках метрической теории функций его можно предсказать, исходя из метрической оценки множества точек разрыва.

Возвратившись к функциям $R(x)$ и $D(x)$, отметим, что функция $R(x)$ разрывна только в рациональных точках и непрерывна в иррациональных точках отрезка $[0,1]$, а функция $D(x)$ разрывна в каждой точке отрезка $[0,1]$. Забегая вперед, отметим — такое различие означает, что мера множества точек в первом случае равна нулю, а во втором отлична от нуля (равна длине отрезка $[0,1]$, т.е. единице). Таким образом, если непрерывная на $[a,b]$ функция имеет точки разрыва на множестве меры 0, то она интегрируема на этом отрезке. В противном случае — при ненулевой мере — функция на этом отрезке будет неинтегрируемой в рамках определения Римана.

10.6.2. Аддитивные свойства определённого интеграла

Чтобы сформулировать аддитивные свойства, нам потребуется расширение понятия интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ на случай, когда нижний и верхний пределы равны $(a = b)$, а также когда нижний предел больше верхнего $(a > b)$.

В первом случае, при $a = b$ можно считать, что длины всех отрезков разбиения равны нулю, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = 0. \tag{10.84}$$

Во втором случае, при $a > b$ символу $\int_a^b f(x)dx$ можно поставить в соответствие интегральные суммы, которые отличаются лишь знаком от соответствующих интегральных сумм интеграла $\int_b^a f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{10.85}$$

Формулы (10.84) и (10.85) позволяют продолжить рассмотрение свойств определенного интеграла. Для удобства ссылок продолжим начатую нумерацию свойств.

Свойство 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке, то она интегрируема на любом промежутке из этого отрезка.

Доказательство. Пусть заданы отрезки $[a, b]$ и $[a_1, b_1]$. Если $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b$, то $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. Для отрезка $[a_1, b_1]$ выберем разбиение τ_m^1 с диаметром $d(\tau_m^1)$, а для отрезка $[a, b]$ разбиение τ_n, которое на отрезке $[a_1, b_1]$ имеет те же точки разбиения, что и τ_m^1,и, кроме того, диаметр разбиения $d(\tau_n)$ удовлетворяет условию

$$d(\tau_n) \leqslant d(\tau_m^1). \tag{10.86}$$

Если ω_1 — колебания функции $f(x)$ в этих разбиениях, то

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i, \tag{10.87}$$

поскольку слагаемые в правой и левой частях (10.87) неотрицательны, а сумма в правой части соответствует разбиению τ_n отрезка $[a, b]$ и содержит, в частности, все слагаемые, входящие в левую сумму, составленную для разбиения τ_m^1 отрезка $[a_1, b_1]$.

Пусть $d(\tau_m^1) \to 0$, тогда, согласно (10.86), $d(\tau_n) \to 0$, и в силу интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ правая часть (10.87) при $d(\tau_n) \to 0$ стремится к нулю. Но тогда и левая часть (10.87) стремится к нулю, что и соответствует интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке разбиения τ_m^1, т.е. отрезке $[a, b]$, что и требовалось доказать.

Свойство 7 (аддитивности). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то она также интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{10.88}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную основную последовательность разбиений $\{\tau_{n_k}^k\}_{k=1}^{\infty}$ отрезка $[a, b]$. Не уменьшая общности, будем считать, что точка c принадлежит каждому разбиению $\tau_{n_k}^k$. Поскольку последовательность разбиений — основная, то последовательность диаметров $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$, $d_k = d(\tau_{n_k}^k)$, — бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = 0$. Последовательность разбиений $\{\tau_{n_k}^k\}_{k=1}^{\infty}$ индуцирует на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ последовательности разбиений $\{\tau_{n_k}^k([a, c])\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tau_{n_k}^k([c, b])\}_{k=1}^{\infty}$. Разбиение $\tau_{n_k}^k([a, c])$ получается из $\tau_{n_k}^k$ удалением элементов, принадлежащих отрезку $[c, b]$. Аналогично $\tau_{n_k}^k([c, b])$ получается из $\tau_{n_k}^k$ удалением элементов, принадлежащих $[a, c]$. По построению последовательности диаметров $d_k([a, c])$ и $d_k([c, b])$ стремятся к нулю при $k \to \infty$. В силу очевидного равенства

$$S(f, \tau_{n_k}^k, \xi(\tau_{n_k}^k)) = S(f, \tau_{n_k}^k([a, c]), \xi(\tau_{n_k}^k([a, c]))) + S(f, \tau_{n_k}^k([c, b]), \xi(\tau_{n_k}^k([c, b])))$$

после перехода к пределу при $k \to \infty$ получим соотношение (10.88).

Аналогично доказывается следующее свойство.

Свойство 8. Если $a < c < b$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и справедливо равенство (10.88).

Свойство 9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c_1, c_2, c_3 — любые точки этого отрезка, то

$$\int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)dx = \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int\limits_{c_2}^{c_3} f(x)dx. \tag{10.89}$$

Действительно, если $c_1 = c_2 = c_3$, то равенство выполняется в силу (10.84). Если $a \leqslant c_1 < c_2 < c_3 \leqslant b$, то равенство выполняется в силу свойств 6 и 7. Если $a \leqslant c_1 < c_3 < c_2 \leqslant b$, то в силу свойства 7

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx = \int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)dx + \int\limits_{c_3}^{c_2} f(x)dx.$$

Поскольку, согласно (10.85),

$$\int\limits_{c_3}^{c_2} f(x)dx = -\int\limits_{c_2}^{c_3} f(x)dx,$$

то

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx = \int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)dx - \int\limits_{c_2}^{c_3} f(x)dx,$$

откуда

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx = \int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)dx + \int\limits_{c_3}^{c_2} f(x)dx,$$

что совпадает с (10.89). Случаи других расположений c_1, c_2, c_3 рассматриваются аналогично.

Пример 10.9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$ для

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{4}\sin x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}; \\ \pi^2, & x = \dfrac{\pi}{2}; \\ x^2, & \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ в точке $x = \pi/2$ имеет разрыв первого рода, поскольку

$$\lim_{x\to\pi/2-0} f(x) = \lim_{x\to\pi/2+0} f(x) = \frac{\pi^2}{4} \neq f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \pi^2.$$

Однако в силу свойства 5 такой скачок функции не влияет на значение ее интеграла; более того, в силу свойства 7 можем записать

$$\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4}\sin x\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} x^2dx = \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} x^2dx.$$

Эти интегралы уже вычислялись в примере 10.6. Воспользовавшись, например, формулами (10.78), получим

$$\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi^2}{4}\Big(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{3}\Big(\pi^3 - \frac{\pi^3}{8}\Big) = \pi^2\Big(\frac{1}{4} + \frac{7}{3}\pi\Big).$$

10.6.3. Оценки определённых интегралов

До сих пор мы рассматривали свойства интегралов, которые можно записать через некие равенства. Перейдем теперь к свойствам, утверждения которых эквивалентны неравенствам. Продолжим начатую нумерацию свойств.

Свойство 10. Если $f(x)$ — интегрируемая неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция ($f(x) \geqslant 0$ для $x \in [a, b]$), то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0. \tag{10.90}$$

Действительно, так как для любого разбиения τ_n отрезка $[a, b]$ и любой выборке $\xi(\tau_n)$ выполняется неравенство

$$S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0,$$

то, перейдя в этом неравенстве к пределу $d \to 0$, получим оценку (10.90), что и требовалось доказать.

Гораздо труднее доказать более строгую оценку.

Свойство 11. Если $f(x)$ — интегрируемая неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция, такая что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ ее непрерывности $f(x_0) > 0$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0, \quad f(x) \geqslant 0, \quad f(x_0) > 0. \tag{10.91}$$

Доказательство. В силу свойства сохранения знака для непрерывной в точке x_0 функции $f(x)$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)/2$, что в символьной форме запишется как

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b] \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}.$$

Если учесть также оценки (10.90):

$$\int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)dx \geqslant 0, \quad \int\limits_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geqslant 0,$$

то мы получим совокупную оценку

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int\limits_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geqslant 0 + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}dx + 0 =$$

$$= \frac{f(x_0)}{2}(x_0 + \delta - x_0 + \delta) = f(x_0)\delta > 0.$$

Случаи, когда $x_0 = a$ и $x_0 = b$, рассматриваются аналогично.

Подчеркнем, что условие непрерывности $f(x)$ в точке x_0, где $f(x) > 0$, является существенным. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 10.10. Найти оценку интеграла от функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Точка x_0, в которой $f(x) = 1 > 0$, является точкой разрыва первого рода функции. По этой причине использование формулы (10.91) оказывается невозможным, что подтверждает непосредственное вычисление интеграла. Поскольку точка разрыва единственна, воспользуемся свойством 5, тогда

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 0 \cdot dx = 0.$$

Таким образом, интеграл от функции $f(x)$ равен нулю, хотя сама функция неотрицательна.

Свойство 12. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и во всех точках этого отрезка выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant g(x), \tag{10.92}$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{10.93}$$

Оценка (10.93) очевидным образом вытекает из свойства 10 применительно к разности $g(x) - f(x)$.

$\Diamond$ Свойство 12 остается справедливым при замене нестрогого неравенства строгим.

Свойство 13. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и во всех точках этого отрезка выполняется неравенство

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \tag{10.94}$$

то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a). \tag{10.95}$$

Неравенство (10.95) очевидным образом вытекает из (10.94) в силу свойства 12.

Неравенство (10.95) имеет простой геометрический смысл. Из рис. 13 видно, что площадь криволинейной трапеции

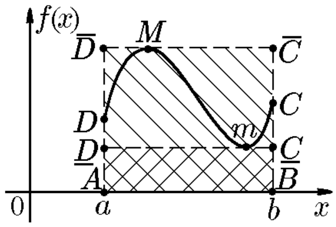


Рис. 13

$$S_{ABCD} = \int\limits_a^b f(x)dx$$

больше площади меньшего прямоугольника

$$S_{AB\underline{CD}} = m(b-a),$$

но меньше площади большего прямоугольника

$$S_{AB\overline{CD}} = M(b-a).$$

Свойство 14. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\, dx. \tag{10.96}$$

Действительно, существование интеграла в правой части (10.96) вытекает из свойства 3, а само неравенство следует из свойства 12 с учетом неравенств

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

Впрочем, неравенство (10.96) легко получить и непосредственно, исходя из оценки интегральной суммы

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

с последующим переходом к пределу.

Неравенство (10.96) допускает простое обобщение:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|\, dx\right|, \tag{10.97}$$

справедливое не только на отрезке $[a, b]$, но и на отрезке $[b, a]$.

Следует, однако, заметить, что из интегрируемости функции $|f(x)|$ на отрезке $[a, b]$ не следует интегрируемость самой функции $f(x)$ на этом отрезке. Примером здесь служит функция, содержащая функцию Дирихле $D(x)$:

$$f(x) = D(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} 1/2, & x \in \mathbb{Q} \subset [a, b]; \\ -1/2, & x \in \mathbb{J} \subset [a, b], \end{cases}$$

не интегрируемая на отрезке $[a, b]$, хотя ее модуль

$$|f(x)| = \frac{1}{2}, \quad x \in [a, b]$$

на отрезке $[a, b]$ является интегрируемой функцией, причем

$$\int\limits_a^b |f(x)| dx = \int\limits_a^b \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}(b - a).$$

Пример 10.11. Оценить интегралы

$$1) \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 + 4\cos^2 x}}{\pi} dx; \quad 2) \int\limits_{11}^{16} \frac{\sin^2 x}{1 + x^6} dx; \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Решение. 1) На отрезке $[\pi/3, \pi/2]$ функция $\cos x$ монотонно убывает и меняется от $\sqrt{3}/2$ до нуля. Поэтому для функции $f(x) = \sqrt{1 + 4\cos^2 x}/\pi$ наименьшее значение $m = f(\pi/2) = 1/\pi$ и наибольшее $M = f(\pi/3) = \sqrt{1 + 3}/\pi = 2/\pi$. Поскольку $b - a = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$, то в силу свойства 13 по формуле (10.95) получим оценку

$$\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{6} \leqslant \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 + 4\cos^2 x}}{\pi} dx \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{6}$$

или

$$\frac{1}{6} \leqslant \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 + 4\cos^2 x}}{\pi} dx \leqslant \frac{1}{3}.$$

2) Так как $\sin^2 x \leqslant 1$, то для $a = 11$ при $x > 10$ выполняется неравенство

$$\frac{\sin^2 x}{1 + x^6} < 10^{-6},$$

поэтому

$$\int\limits_{11}^{16} \frac{\sin^2 x}{1 + x^6} dx < (16 - 11)10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

3) Так как на отрезке $[0, 1]$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leqslant 1,$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \leqslant 1.$$

10.6.4. Интегральные теоремы о среднем

Теорема 10.6 (первая теорема о среднем). *Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и в каждой точке этого отрезка для функции $f(x)$ выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, а функция $g(x)$ на всем отрезке не меняет свой знак, то существует число μ ($\mu \in [m, M]$), такое что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{10.98}$$

Доказательство. Так как функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то в силу свойства 2 функция $f(x)g(x)$ также интегрируема на этом отрезке. Из неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и свойства 12 имеем оценку

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx. \tag{10.99}$$

Если здесь $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и равенство (10.98) выполняется при любом μ. Если же $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, а, например, $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то из (10.99) найдем

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leqslant M. \tag{10.100}$$

Это означает, что существует такое число μ ($m \leqslant \mu \leqslant M$), что

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx},$$

откуда и следует равенство (10.98). Для случая $g(x) \geqslant 0$ теорема доказана, но она остается справедливой и в случае $g(x) \leqslant 0$, поскольку при замене $g(x)$ на $-g(x)$ равенство (10.98) сохраняется.

Следствие 10.6.1. Если в условиях теоремы 10.6 функцию $f(x)$ положить непрерывной на отрезке $[a,b]$, то, согласно свойствам непрерывных функций, она принимает все значения между m и M, в частности, существует число $c \in [a,b]$, такое что $f(c) = \mu$ и, следовательно, (10.99) примет вид

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx. \tag{10.101}$$

Если вместе с этим положить $g(x) = 1$, то существует число $c \in [a, b]$, такое что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b - a). \tag{10.102}$$

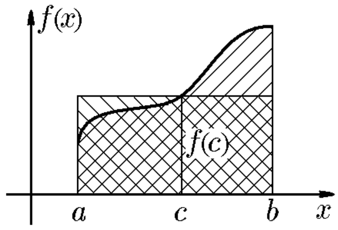


Рис. 14

Именно в силу соотношений (10.101), (10.102) теорема 10.6 названа «интегральной теоремой о среднем». С одной стороны, это название связано с тем, что в формуле (10.101) речь идет о существовании некоторой «средней» точки c отрезка $[a, b]$, такой что выполняется равенство (10.101). С другой стороны, для $f(x) > 0$ равенство (10.102) означает, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ равна площади прямоугольника с тем же основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$, равной значению $f(x)$ в точке $c \in [a, b]$ (рис. 14). Значение функции $f(x)$ в этой точке называется *средним значением* функции на отрезке $[a, b]$ и вычисляется как

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{10.103}$$

Пример 10.12. Оценить интегралы

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1 + x}}dx; \quad 2)\ \int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx; \quad 3)\ \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x^2 dx}{50 + \sqrt{3}\sin^3 x \cos x}.$$

Решение. 1) Воспользуемся теоремой о среднем 10.6, положив $f(x) = 1/\sqrt{1 + x}$ и $g(x) = x^9$. Поскольку на отрезке $[0, 1]$ имеем оценку

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 + x}} \leqslant 1,$$

то

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}x^9 dx \leqslant \int\limits_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1 + x}} \leqslant \int\limits_0^1 1 \cdot x^9 dx.$$

Воспользовавшись результатом примера 10.4:

$$\int\limits_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}(1 - 0) = 0{,}1,$$

получим оценку интеграла

$$0{,}07 \leqslant \int\limits_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1 + x}} \leqslant 0{,}1.$$

2) Воспользовавшись известным неравенством

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x,$$

следующим из формулы Тейлора для $\sin x$, можем записать

$$\int\limits_0^2 \Big(1-\frac{x^2}{6}\Big)dx = \int\limits_0^2 \frac{x-x^3/6}{x}dx \leqslant \int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx \leqslant \int\limits_0^2 \frac{x}{x}dx = \int\limits_0^2 dx.$$

Еще раз воспользовавшись результатом примера 10.4 для интегралов:

$$\int\limits_0^2 dx = 2, \quad \int\limits_0^2 \Big(1-\frac{x^2}{6}\Big)dx = \int\limits_0^2 dx - \frac{1}{6}\int\limits_0^2 x^2dx = 2 - \frac{1}{6}\frac{1}{3}(8-0) = \frac{14}{9}.$$

Поскольку $1{,}55 < 14/9 < 1{,}56$, получим оценку интеграла

$$1{,}55 \leqslant \int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx \leqslant 2.$$

3) Положив $f(x) = 1/(50+\sqrt{3}\sin^3 x\cos x)$ и $g(x) = x^2$, снова воспользуемся теоремой о среднем 10.6. Найдем оценку функции $f(x)$ на отрезке $[0,\pi/2]$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = \sin^3 x\cos x$, для которой $\varphi'(x) = \sin x\sin 3x$. Уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет единственный корень $x = x_0 = \pi/3$ на интервале $]0,\pi/2[$, причем $\varphi'(x) > 0$ при $x \in]0,\pi/3[$ и причем $\varphi'(x) < 0$ при $x \in]\pi/3,\pi/2[$. Следовательно, $x_0 = \pi/3$ есть точка максимума функции $\varphi(x)$ и $\varphi(x_0) = \varphi(\pi/3) = 3\sqrt{3}/16$. Поскольку на отрезке $[0,\pi/2]$ функции $\sin x \geqslant 0$ и $\cos x \geqslant 0$, то для функции $\varphi(x)$ получим оценку

$$0 \leqslant \sin^3 x\cos x \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{16},$$

тогда

$$0 \leqslant \sqrt{3}\sin^3 x\cos x \leqslant \frac{9}{16}$$

и, следовательно,

$$\frac{16}{809} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{50}.$$

С учетом этого из формулы (10.99) найдем

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{16}{809}x^2dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x^2dx}{50+\sqrt{3}\sin^3 x\cos x} \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x^2dx}{50}.$$

Поскольку из примера 10.4 известно

$$\int\limits_0^{\pi/2} x^2dx = \frac{1}{3}\Big[\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - 0\Big] = \frac{\pi^3}{24},$$

то получим оценку

$$\frac{\pi^3}{2427} \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x^2dx}{50+\sqrt{3}\sin^3 x\cos x} \leqslant \frac{\pi^3}{1200}.$$

Пример 10.13. Найти среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна v_0.

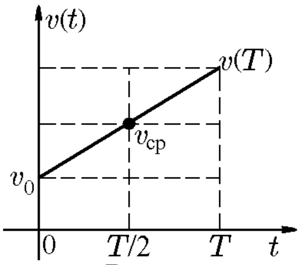


Рис. 15

Решение. Скорость свободно падающего тела в момент времени t выражается формулой

$$v(t) = v_0 + gt,$$

где g — ускорение свободного падения. Согласно определению и формуле (10.103),

$$v_{\text{ср}} = \frac{S(T)}{T} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T v(t)dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T (v_0 + gt)dt = \\ = \frac{1}{T}\Big(v_0T + g\frac{T^2}{2}\Big) = v_0 + \frac{gT}{2},$$

где T — время падения. Поскольку $gT = v(T) - v_0$, то

$$v_{\text{ср}} = v_0 + \frac{1}{2}[v(T) - v_0] = \frac{1}{2}[v(T) + v_0].$$

Эта формула имеет простую геометрическую интерпретацию (рис. 15).

Пример 10.14. Для интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ доказать справедливость неравенства Коши–Буняковского

$$\Big[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\Big]^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)dx \int\limits_a^b g^2(x)dx. \tag{10.104}$$

Решение. Из интегрируемости $f(x)$ и $g(x)$ следует (свойства 2, 3) интегрируемость функций

$$f(x)g(x), \quad |f(x)g(x)|, \quad f^2(x), \quad g^2(x).$$

Обозначим

$$\alpha = \int\limits_a^b f^2(x)dx, \quad \beta = \int\limits_a^b g^2(x)dx, \quad \gamma = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx. \tag{10.105}$$

В этих обозначениях неравенство Коши–Буняковского имеет вид

$$\gamma^2 \leqslant \alpha\beta.$$

Для его доказательства достаточно рассмотреть два случая: $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

В первом случае, когда $\alpha = \beta = 0$, будем исходить из неравенства

$$[|f(x)| - |g(x)|]^2 \geqslant 0,$$

откуда

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)].$$

Интегрирование этого неравенства дает

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leqslant \frac{1}{2}\Big[\int\limits_a^b f^2(x)dx + \int\limits_a^b g^2(x)dx\Big],$$

что в переменных (10.105) запишется как

$$|\gamma| \leqslant \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Если $\alpha = \beta = 0$, то из этого следует $\gamma = 0$, и доказываемое неравенство выполняется.

Во втором случае, когда, например, $\beta > 0$, будем исходить из неравенства

$$[f(x) + \theta g(x)]^2 \geqslant 0, \tag{10.106}$$

которое выполняется при любом вещественном θ. Интегрирование (10.106) дает

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx + 2\theta\int\limits_a^b f(x)g(x)dx + \theta^2\int\limits_a^b g^2(x)dx \geqslant 0.$$

В переменных (10.105) это неравенство можно записать как

$$\beta\theta^2 + 2\theta\gamma + \alpha \geqslant 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

но это означает, что дискриминант квадратного трехчлена

$$P_2(\theta) = \beta\theta^2 + 2\theta\gamma + \alpha$$

неположителен, т.е. $D = 4\gamma^2 - 4\beta\gamma \leqslant 0$. Таким образом, $\gamma^2 \leqslant \alpha\beta$, т.е. неравенство (10.104) выполняется и во втором случае.

Пример 10.15. Оценить интегралы

$$1)\ \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx; \quad 2)\ \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2+x^3+x^5}dx; \quad 3)\ \int\limits_0^\pi x^2\sqrt{\sin x}dx.$$

Решение. 1) Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского (10.104), положив $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ и $g(x) = 1$. Тогда

$$\left(\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx\right)^2 \leqslant \int\limits_0^1 (1+x^4)dx \int\limits_0^1 1\cdot dx.$$

Далее воспользовавшись результатами примера 10.4:

$$\int\limits_0^1 (1+x^4)dx = \int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^1 x^4 dx = 1 + \frac{1}{5} = 1{,}2;$$
$$\int\limits_0^1 dx = 1,$$

получим оценку

$$0 < \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \leqslant \sqrt{1{,}2}.$$

2) В этом случае предварительно преобразуем подкоренное выражение:

$$1 + x^2 + x^3 + x^5 = (1 + x^2) + x^3(1 + x^2) = (1 + x^2)(1 + x^3).$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2 + x^3 + x^5}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{(1 + x^2)}\sqrt{(1 + x^3)}dx.$$

Как и выше, воспользуемся неравенством Коши–Буняковского, положив $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ и $g(x) = \sqrt{1 + x^3}$. Тогда

$$\left(\int\limits_0^1 \sqrt{(1 + x^2)}\sqrt{(1 + x^3)}dx\right)^2 \leqslant \int\limits_0^1 (1 + x^2)dx \int\limits_0^1 (1 + x^3)dx. \qquad (10.107)$$

Поскольку (пример 10.4)

$$\int\limits_0^1 (1 + x^2)dx = \int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^1 x^2dx = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3};$$

$$\int\limits_0^1 (1 + x^3)dx = \int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^1 x^3dx = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

то из (10.107) получим оценку

$$0 < \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2 + x^3 + x^5}dx \leqslant \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

3) Воспользуемся неравенством (10.104), положив $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{\sin x}$. Тогда

$$\left(\int\limits_0^\pi x^2\sqrt{\sin x}dx\right)^2 \leqslant \int\limits_0^\pi x^4dx \int\limits_0^\pi \sin x\, dx. \qquad (10.108)$$

Поскольку (примеры 9.2 и 10.4)

$$\int\limits_0^\pi x^4dx = \frac{1}{5}\pi^5;$$

$$\int\limits_0^\pi \sin x\, dx = \cos 0 - \cos\pi = 2,$$

то из (10.108) получим оценку

$$0 < \int\limits_0^\pi x^2\sqrt{\sin x}dx \leqslant \sqrt{\frac{2}{5}\pi^5}.$$

Теорема 10.7. *Для интегрируемой на отрезке* $[a, b]$ *функции равенство*

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0 \tag{10.109}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ *во всех точках непрерывности функции* $f(x)$*, принадлежащих отрезку* $[a, b]$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть условие (10.109) выполнено. Вопреки утверждению теоремы предположим, что в точке непрерывности x_0 функции $f(x_0) \neq 0$. Тогда в силу свойства сохранения знака для непрерывной функции в точке x_0 функции $f^2(x)$ существует δ-окрестность $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ точки x_0, в которой $f^2(x) > 0$. Используя свойства 7 и 11, имеем

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx = \int\limits_a^{x_0-\delta} f^2(x)dx + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx + \int\limits_{x_0+\delta}^{b} f^2(x)dx \geqslant$$

$$\geqslant 0 + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx + 0 = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx > 0.$$

Полученное неравенство противоречит условию (10.109), и, следовательно, предположение $f(x_0) \neq 0$ является неверным и означает, что функция $f(x)$ во всех точках отрезка равна нулю, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть теперь $f(x) = 0$ в каждой точке непрерывности отрезка $[a, b]$. Из интегрируемости $f(x)$ в силу свойства 2 следует интегрируемость $f^2(x)$. Это означает, что при любом разбиении τ_n отрезка $[a, b]$ каждый отрезок разбиения $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, содержит точки непрерывности. В противном случае, если бы на каком-либо отрезке отсутствовали точки непрерывности, то множество точек разрыва заполняло бы этот отрезок целиком и мера такого множества была бы отлична от нуля. Но это, как уже отмечалось, противоречит условию интегрируемости функции $f^2(x)$ на $[a, b]$. Теперь, исходя из интегрируемости $f^2(x)$ на $[a, b]$, значение интеграла $\int\limits_a^b f^2(x)dx$ можно найти как предел любой интегральной суммы $S(f^2, \tau_n, \xi)$. Для этого выборку $\xi(\tau_n)$ на разбиении τ_n проведём таким образом, чтобы точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ на разбиении τ_n были точками непрерывности, в которых $f^2(\xi_i) = 0$, но тогда

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d(\tau_n)\to 0}} \underline{S}(f^2, \tau_n, \xi(\tau_n)) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d(\tau_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = 0,$$

что и доказывает достаточность требования $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$.

Теорема 10.8 (вторая теорема о среднем). *Если функция* $g(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$*, а функция* $f(x)$ *на этом отрезке:*

1) *не отрицательна и не возрастает, то существует точка* $c \in [a, b]$, *такая что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx; \tag{10.110}$$

2) *не отрицательна и не убывает, то существует точка* $c \in [a, b]$, *такая что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_c^b g(x)dx; \tag{10.111}$$

3) *монотонна, то существует точка* $c \in [a, b]$, *такая что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx. \tag{10.112}$$

Доказательство этой теоремы мы приведем чуть позже, после рассмотрения метода интегрирования по частям для определенных интегралов.

Пример 10.16. Оценить интегралы

$$I_1 = \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{10+x}dx; \qquad I_2 = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Решение. Для интеграла I_1 положим $f(x) = 1/(10+x)$ и $g(x) = e^{-x}$. Поскольку обе функции на отрезке $[0, 10]$ убывают, то их произведение $f(x)g(x)$ является убывающей функцией с оценкой

$$\frac{e^{-10}}{20} < \frac{e^{-x}}{10+x} < \frac{1}{10}$$

или

$$2{,}25 \cdot 10^{-6} < \frac{e^{-x}}{10+x} < 10^{-1}. \tag{10.113}$$

Так как отрезок интегрирования $[0, 10]$ имеет длину $10 - 0 = 10$, то по формуле (10.103) имеем оценку интеграла

$$2{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 10 < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{10+x}dx < 10^{-1} \cdot 10$$

или

$$2{,}25 \cdot 10^{-5} < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{10+x}dx < 1. \tag{10.114}$$

Эту оценку можно уточнить по первой теореме о среднем, следуя формуле (10.107). Для этого вместо оценки (10.113) воспользуемся оценкой для функции $f(x) = 1/(10 + x)$ на отрезке $[0, 10]$:

$$0{,}05 < \frac{1}{10+x} < 0{,}1.$$

Тогда по формуле (10.107) получим оценку интеграла

$$0{,}05\int\limits_0^{10} e^{-x}dx < \int\limits_0^{10} \frac{e^{-x}}{10+x}dx < 0{,}1\int\limits_0^{10} e^{-x}dx.$$

Воспользовавшись результатом примера 10.5:

$$\int\limits_0^{10} e^{-x}dx = 1 - e^{-10} = 1 - 4{,}5\cdot 10^{-5} = 0{,}9995, \qquad (10.115)$$

эту оценку можно записать как

$$0{,}05\cdot 0{,}99995 < \int\limits_0^{10} \frac{e^{-x}}{10+x}dx < 0{,}1\cdot 0{,}99995$$

или

$$0{,}049997 = 1 - e^{-10} < \int\limits_0^{10} \frac{e^{-x}}{10+x}dx < 0{,}099995. \qquad (10.116)$$

Сравнение оценок (10.114) и (10.116) говорит о том, что оценка (10.116) более строгая. Так, верхняя граница значений в 10 раз меньше, а нижняя граница почти в 2000 раз больше, чем в (10.114).

Для сравнения найдем оценку, исходя из второй теоремы о среднем. Как уже отмечалось, функция $f(x) = 1/(10+x)$ на отрезке $[0, 10]$ является монотонной (убывающей), а функция $g(x) = e^{-x}$ — непрерывной. Поэтому к интегралу I_1 можно применить формулу (10.112):

$$I_1 = \int\limits_0^{10} \frac{1}{10+x}e^{-x}dx = \frac{1}{10}\int\limits_0^{c} e^{-x}dx + \frac{1}{20}\int\limits_c^{10} e^{-x}dx = \frac{1}{10}\int\limits_0^{c} e^{-x}dx - \frac{1}{20}\int\limits_c^{10} e^{-x}dx, \qquad (10.117)$$

где c — некоторое число $c \in [0, 10]$. Значение первого интеграла дает формула (10.115), а для второго можем записать

$$\int\limits_c^{10} e^{-x}dx = e^{-c} - e^{-10}.$$

Положив $c = 10\xi$, $0 < \xi < 1$, найдем

$$\int\limits_c^{10} e^{-x}dx = e^{-10\xi} - e^{-10} = \theta,$$

причем $0 < \theta < 1$. С учетом этого значение I_1 (10.117) примет вид

$$I_1 = 0{,}1\cdot 0{,}99995 - 0{,}05\theta = 0{,}099995 - 0{,}05\theta.$$

Как видим, эта оценка по второй теореме о среднем совпадает с оценкой (10.116).

11. Вычисление определённых интегралов

11.1. Определённый интеграл с переменным верхним пределом

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

существует и его, как известно, можно записать, заменив переменную интегрирования x любой другой, например, t:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt. \tag{11.1}$$

Заменим в последнем интеграле (11.1) верхний предел, зафиксированный значением b, произвольным значением переменной x и определим новую функцию $F(x)$ соотношением

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{11.2}$$

Если $x \in [a, b]$, то этот интеграл существует и задает функцию $F(x)$, определенную на всем отрезке $[a, b]$.

♦ Интеграл (11.2) называют *определенным интегралом с переменным верхним пределом* для заданной функции $f(x)$. Областью определения этого интеграла как функции $F(x)$ является промежуток интегрирования функции $f(x)$, поскольку интегрируемая на $[a, b]$ функция, согласно теореме 10.1, является ограниченной.

Интеграл с переменным верхним пределом (11.2) обладает полезными для практических приложений свойствами, которые определяются следующими теоремами.

Теорема 11.1 (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x)$ (11.2) непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. С учетом свойства аддитивности определенного интеграла и следуя определению непрерывности функции $F(x)$ (11.2) в точке x, найдем

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt, \tag{11.3}$$

где x и $x + \Delta x$ принадлежат отрезку интегрирования $[a, b]$ функции $f(x)$.

В силу теоремы 10.1 об ограниченности интегрируемой функции можно записать, что существует неотрицательная постоянная M такая, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$:

$$(\exists M > 0 : \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)| < M). \tag{11.4}$$

Это неравенство позволяет воспользоваться свойством 13 об оценке интеграла, из которого следует

$$|\Delta F(x)| \leqslant \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \right| \leqslant M|\Delta x|.$$

Но тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} |\Delta F(x)| = 0.$$

Это означает, что $F(x)$ непрерывна в точке x. Поскольку x — произвольная точка отрезка $[a, b]$, то функция $F(x)$ (11.2) непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Отметим, что интеграл с переменным верхним пределом (11.2) является непрерывной на $[a, b]$ функцией $F(x)$ независимо от того, имеет или нет $f(x)$ разрывы; достаточно лишь интегрируемости функции $f(x)$ на этом отрезке. Это наглядно иллюстрируется следующим примером.

Пример 11.1. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in]0, 1/2[; \\ x^2, & x \in]1/2, 1[\end{cases} \tag{11.5}$$

найти явный вид функции $F(x)$, представляющей собой интеграл с переменным верхним пределом, и проверить непрерывность в точке $x = 1/2$.

Решение. Согласно теореме 10.3, функция (11.5) интегрируема на отрезке $[0, 1]$ и имеет единственную точку разрыва 1-го рода $x = 1/2$ с конечным скачком

$$\Delta f(1/2) = f(1/2 + 0) - f(1/2 - 0) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Воспользовавшись результатами примера 10.4, найдем

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \begin{cases} \int\limits_0^x t\,dt = \dfrac{x^2}{2}, & x \in]0, 1/2[; \\ \int\limits_0^{1/2} t\,dt + \int\limits_{1/2}^x t^2 dt = \dfrac{1}{12} + \dfrac{x^3}{3}, & x \in]1/2, 1[\,. \end{cases} \tag{11.6}$$

Легко проверить, что функция $F(x)$ (11.6) является непрерывной в точке $x = 1/2$, поскольку

$$\Delta F\Big(\frac{1}{2}\Big) = F\Big(\frac{1}{2} + 0\Big) - F\Big(\frac{1}{2} - 0\Big) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^3 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = 0.$$

Этот пример наглядно иллюстрирует тот факт, что в результате интегрирования с переменным верхним пределом разрывной функции получается новая непрерывная функция (рис. 16,*б*).

Если требование интегрируемости функции дополнить требованием непрерывности в точке, то справедлива следующая теорема.

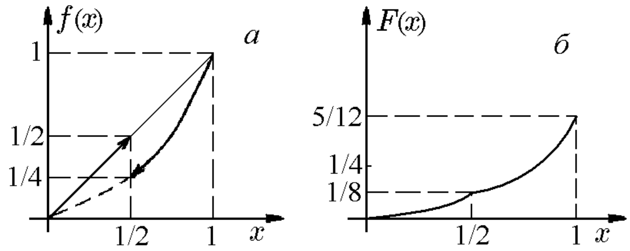


Рис. 16

Теорема 11.2 (Барру о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом). *Если интегрируемая на $[a,b]$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x \in [a,b]$, то функция $F(x)$ (11.2) дифференцируема в этой точке, причем*

$$F'(x) = \left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)' = f(x). \tag{11.7}$$

Доказательство. Пусть точка x из отрезка $[a,b]$ является точкой непрерывности функции $f(x)$. Тогда в силу теоремы 11.1 эта точка является и точкой непрерывности ее интеграла с переменным верхним пределом, т.е. функции $F(x)$. Рассмотрим отношение $\Delta F(x)/\Delta x$, где Δx — приращение переменной x до значений $x+\Delta x$, а $\Delta F(x)$ — соответствующее приращение функции $F(x)$. Если воспользоваться формулой (11.3) из доказательства предыдущей теоремы, то это соотношение можно представить в виде

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \tag{11.8}$$

Ввиду непрерывности $f(t)$ при $t = x$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\Delta x| < \delta$ будут выполняться неравенства

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon \tag{11.9}$$

для всех t на отрезке $[x, x+\Delta x]$.

Чтобы оценить интеграл в (11.8), содержащий $f(t)$, воспользуемся следствием 10.6.1 первой теоремы о среднем:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \frac{1}{\Delta x}f(c)\int\limits_x^{x+\Delta x} dt = f(c), \tag{11.10}$$

где $c \in [x, x+\Delta x]$, и, следовательно, в силу (11.9)

$$f(x) - \varepsilon \leqslant m \leqslant f(c) \leqslant M \leqslant f(x) + \varepsilon$$

или

$$|f(c) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

С учетом этого предельный переход в (11.10):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c)$$

дает

$$F'(x) = \left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)' = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Если точка x совпадает с точкой a, то формула (11.7) понимается как $F'(a+0) = f(a)$, а если с точкой b, то $F'(b-0) = f(b)$.

Доказанные теоремы логически завершает

Теорема 11.3 (о существовании первообразной). *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она имеет первообразную на этом отрезке, причем этой первообразной является интеграл с переменным верхним пределом:*

$$\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C, \tag{11.11}$$

где C — произвольная постоянная.

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то, во-первых, в силу теоремы 10.3 она интегрируема на этом отрезке и для нее существует интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt;$$

во-вторых, в силу теоремы 11.2 интеграл с переменным верхним пределом является дифференцируемым в каждой точке непрерывности $f(x)$, т.е. на всем отрезке $[a,b]$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right) = f(x). \tag{11.12}$$

Согласно определению первообразной, функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, и поэтому справедливо равенство (11.11).

$\Diamond$ Формула (11.12) позволяет утверждать, что операция интегрирования с переменным верхним пределом является обратной операции дифференцирования. Вытекающий из (11.12) вывод о том, что производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна значению подынтегральной функции при значении аргумента, равном верхнему пределу, играет важную роль в курсе математического анализа.

По аналогии с формулой (11.12) несложно убедиться в справедливости формулы

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_x^b f(t)dt\right) = -f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{11.13}$$

Наконец, именно теорема 11.3 устанавливает упомянутую ранее связь понятий первообразной и неопределенного интеграла.

11.2. Основная формула интегрального исчисления – формула Ньютона–Лейбница и примеры ее применения

Теорема 11.4 (формула Ньютона–Лейбница). *Если $F(x)$ – какая-либо первообразная непрерывной на отрезке $[a, b]$функции $f(x)$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{11.14}$$

Доказательство. Согласно теореме 11.3, существует число C такое, что любую первообразную функции $f(x)$ можно записать в виде

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C. \tag{11.15}$$

Подстановка $x = a$ в (11.15) с учетом свойств определенного интеграла дает

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C,$$

тогда (11.15) можно записать как

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a).$$

Теперь, положив здесь $x = b$, найдем

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a),$$

откуда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

откуда следует справедливость утверждения теоремы.

Очевидно, что вывод формулы (11.14) повторяет рассуждения при выводе формулы (8.37) для площади криволинейной трапеции в более корректной форме.

$\Diamond$ Формулу Ньютона–Лейбница (11.14) зачастую называют *основной формулой интегрального исчисления* и для краткости записывают так

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{11.16}$$

С открытием формулы Ньютона–Лейбница значительно расширилась область применения определенного интеграла, так как математика получила общий метод для решения различных задач частного вида и поэтому смогла существенно расширить круг его приложения в технике, механике, астрономии, военном деле и т.д.

Вообще-то название формулы условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница не было такой формулы в точном смысле этого слова. Важно то, что именно Лейбниц и Ньютон впервые установили связь между интегрированием и дифференцированием, позволяющую создать правило для вычисления определенных интегралов.

Следует заметить, что действия, аналогичные вычислению определенного интеграла как предела интегральной суммы, были знакомы еще в древности (Архимед), однако применение этого метода ограничивалось теми простейшими случаями, когда предел интегральной суммы мог быть вычислен непосредственно.

Пример 11.2. Вычислить определенные интегралы

$$J_1 = \int\limits_a^b x^\alpha dx, \ \alpha > 0; \quad J_2 = \int\limits_a^b e^x dx; \quad J_3 = \int\limits_a^b \sin x\, dx.$$

Решение. Для указанных интегралов все подынтегральные функции непрерывны на произвольном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, и, следовательно, для них возможно применение формулы Ньютона–Лейбница. Воспользовавшись таблицей интегралов, найдем

$$J_1 = \int\limits_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1});$$

$$J_2 = \int\limits_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a;$$

$$J_3 = \int\limits_a^b \sin x\, dx = -\cos x\Big|_a^b = -(\cos b - \cos a) = \cos a - \cos b.$$

Заметим, что эти интегралы были ранее найдены в примерах 9.2, 10.4 и 10.5 с использованием интегральных сумм или сумм Дарбу.

Пример 11.3. Вычислить интегралы

$$J_1 = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x} dx; \quad J_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2x\, dx.$$

Решение. Исходя из непрерывности подынтегральных функций на указанных отрезках интегрирования и используя известные первообразные, с помощью формулы Ньютона–Лейбница найдем

$$J_1 = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x} dx = \int\limits_0^1 (1+x)^{1/2} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1);$$

$$J_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{4}\sin 4x\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

$\Diamond$ Заметим, что использование формулы Ньютона–Лейбница без учета непрерывности подынтегральной функции может привести к серьезным недоразумениям. Действительно, формальное применение формулы Ньютона–Лейбница для положительно определенной на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(x) = 1/x^2$ дает отрицательную величину:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -(1+1) = -2 < 0,$$

что противоречит свойству 10 определенных интегралов. Это противоречие легко объясняется невозможностью применения формулы Ньютона–Лейбница в данном случае потому, что отрезок интегрирования $[-1, 1]$ содержит точку $x = 0$, которая для функции $f(x) = 1/x^2$ является точкой разрыва 2-го рода. В таких случаях следует использовать свойство аддитивности определенного интеграла и разбить его на сумму интегралов, в каждом из которых подынтегральная функция непрерывна.

В этом примере нарушение условий применения формулы Ньютона–Лейбница очевидно. Более показательным является пример вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$$

В этом случае подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

на промежутке интегрирования $[-1, 1]$ непрерывна, но в качестве первообразных можно выбрать как функцию

$$F_1(x) = \operatorname{arctg} x \text{ в силу } F_1'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

так и функцию

$$F_2(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \text{ в силу } F_2'(x) = \Big(\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}\Big)' = -\frac{1}{1+1/x^2}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Однако функцию $F_2(x)$ в качестве первообразной брать нельзя, поскольку для нее в точке $x = 0 \in [-1, 1]$ нарушается условие

$$F'(x) = f(x), \tag{11.17}$$

являющееся необходимым условием применения формулы Ньютона–Лейбница, поскольку функция

$$F_2(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$$

не определена в точке $x = 0$, тогда как функция $f(x)$ в точке $x = 0$ равна единице:

$$f(0) = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, что если точка $x = 0$ не принадлежит интервалу интегрирования, как например, в интеграле

$$\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2},$$

то условие (11.17) выполняется и обе первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дают один и тот же результат:

$$\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12};$$

$$\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1} = \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Пример 11.4. Вычислить интегралы

$$1)\ \int\limits_{0}^{8} \sqrt[3]{x}dx;\quad 2)\ \int\limits_{0}^{1}\Big(2e^x + \frac{3}{1+x^2}\Big)dx;\quad 3)\ \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{ctg}^2 x\, dx;$$

$$4)\ \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx;\quad 5)\ \int\limits_{1}^{e} \frac{1+x^2}{x(1+x^2)}dx;\quad 6)\ \int\limits_{0}^{1}(1+x^2)^2dx.$$

Решение. Все подынтегральные функции на указанных отрезках интегрирования непрерывны. Их первообразные найдены в примере 3.1. Применение формулы Ньютона–Лейбница дает

$$1)\ \int\limits_{0}^{8} \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{0}^{8} = \frac{3}{4}(8^{4/3} - 0) = 12;$$

$$2)\ \int\limits_{0}^{1}\Big(2e^x + \frac{3}{1+x^2}\Big)dx = (2e^x + 3\operatorname{arctg} x)\Big|_{0}^{1} = 2e + 3\operatorname{arctg} 1 - 2 - 3\operatorname{arctg} 0 =$$

$$= 2(e-1) + \frac{3\pi}{4};$$

$$3)\ \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{ctg}^2 x\, dx = -(x + \operatorname{ctg} x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\Big(\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\Big) + \Big(\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\Big) = 1 - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$4)\ \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx = (x - \operatorname{arctg} x)\Big|_{0}^{\sqrt{3}} = (\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}) - (0 - \operatorname{arctg} 0) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3};$$

5) $\int\limits_1^e \frac{1+x^2}{x(1+x^2)}dx = (\ln x + 2\operatorname{arctg} x)\Big|_1^e = \ln e + 2\operatorname{arctg} e - \ln 1 - 2\operatorname{arctg} 1 =$

$= 1 + 2\Big(\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}\Big);$

6) $\int\limits_0^1 (1+x^2)^2 dx = \Big(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\Big)\Big|_0^1 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}.$

Пример 11.5. Показать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$, то

$$\frac{d}{dx}\Bigg(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\Bigg) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)). \tag{11.18}$$

Решение. Если $F(t)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, то формула Ньютона–Лейбница дает

$$\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = F(t)\Big|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = F(\beta(x)) - F(\alpha(x)).$$

Отсюда, используя правило дифференцирования сложной функции и равенство $F'(t) = f(t)$, придем к (11.18).

Пример 11.6. Вычислить производную

$$\frac{d}{dx}\Bigg(\int\limits_x^{x^2} \cos^3 t\, dt\Bigg).$$

Решение. *1 способ.* Положив в соотношении (11.18) $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^2$, $f(t) = \cos^3 t$, найдем

$$\frac{d}{dx}\Bigg(\int\limits_x^{x^2} \cos^3 t\, dt\Bigg) = 2x\cos^3 x^2 - \cos^3 x. \tag{11.19}$$

2 способ. В справедливости этого результата можно убедиться непосредственным вычислением интеграла. Действительно,

$$\int\limits_x^{x^2} \cos^3 t\, dt = \int\limits_x^{x^2} (1 - \sin^2 t)d(\sin t) = \Big(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\Big)\Big|_x^{x^2} =$$

$$= \Big(\sin x^2 - \frac{\sin^3 x^2}{3}\Big) - \Big(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\Big),$$

а с учетом этого

$$\frac{d}{dx}\Bigg(\int\limits_x^{x^2} \cos^3 t\, dt\Bigg) = \frac{d}{dx}\Big[\sin x^2 - \frac{\sin^3 x^2}{3} - \sin x + \frac{\sin^3 x}{3}\Big] =$$

$$= 2x\cos x^2 - 2x\sin^2 x^2\cos x^2 - \cos x + \sin^2 x\cos x =$$
$$= 2x\cos x^2(1-\sin^2 x^2) - \cos x(1-\sin^2 x) = 2x\cos^3 x^2 - \cos^3 x.$$

полученный результат, как видим, совпадает с (11.19).

Пример 11.7. Вычислить пределы

$$A_1 = \lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_0^x \cos^3 t\,dt}{x}; \quad A_2 = \lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_x^{x^2}\cos^3 t\,dt}{\int\limits_0^x e^{t^2}dt}.$$

Решение. Оба предела представляют собой неопределенности вида 0/0. Используя правило Лопиталя и формулу дифференцирования (11.18), найдем

$$A_1 = \lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_0^x \cos^3 t\,dt}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x \cos^3 t\,dt\right)}{\dfrac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to+0}\frac{\cos^3 x}{1} = 1;$$

$$A_2 = \lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_x^{x^2}\cos^3 t\,dt}{\int\limits_0^x e^{t^2}dt} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_x^{x^2}\cos^3 t\,dt\right)}{\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+0}\frac{2x\cos^3 x^2 - \cos^3 x}{e^{x^2}} = -1.$$

Пример 11.8. Найти производную y'_x функции, заданной неявно соотношением

$$\int\limits_0^y e^t dt + \int\limits_0^x \cos t\,dt = 0.$$

Решение. Следуя правилу дифференцирования неявно заданной функции $F(x,y)=0$:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F(x,y)/\partial x}{\partial F(x,y)/\partial y}$$

с учетом того, что

$$F(x,y) = \int\limits_0^y e^t dt + \int\limits_0^x \cos t\,dt$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y e^t dt + \int\limits_0^x \cos t\,dt\right) = \cos x;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_0^y e^t dt + \int\limits_0^x \cos t\, dt\right) = e^y,$$

найдем

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y}.$$

Этот же результат можно получить, вычислив интегралы

$$\int\limits_0^y e^t dt = e^t\Big|_0^y = e^y - 1;$$

$$\int\limits_0^x \cos t\, dt = \sin t\Big|_0^x = \sin x,$$

тогда

$$F(x, y) = e^y - 1 + \sin x = 0,$$

откуда

$$e^y y'_x + \cos x = 0,$$

или

$$y'_x = -\frac{\cos x}{e^y}.$$

Пример 11.9. Найти точки экстремума и точки перегиба функции

$$y(x) = \int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2 dt.$$

Решение. Следуя правилам нахождения точек экстремумов и перегибов, вычислим, согласно (11.17), первую

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2 dt\right) = (x-1)(x-2)^2$$

и, соответственно, вторую

$$y''(x) = \frac{d}{dx}(x-1)(x-2)^2 = 3(x-2)\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

производные.

Поскольку первая производная $y'(x)$ обращается в нуль в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ и при переходе через точку $x_1 = 1$ меняет знак с минуса на плюс, а при переходе через точку $x_2 = 2$ производная знак не меняет, то точка $x_1 = 1$ является точкой минимума, а $x_2 = 2$ — точкой монотонности. В свою очередь, вторая производная обращается в нуль при $x_2 = 2$ и $x_3 = 4/3$ и при переходе через каждую точку меняет знак, то точки $x_2 = 2$ и $x_3 = 4/3$ являются точками перегиба.

Пример 11.10. Вычислить предел

$$S = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(e^{1/n} + e^{2/n} + e^{3/n} + ... + e^{n/n}\right).$$

Решение. Выражение в круглых скобках представляет собой сумму значений функции $f(x) = e^x$ в точках

$$x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ ...,\ x_n = \frac{n}{n} = 1,$$

делящих отрезок $[0,1]$ оси Ox на n равных частей длиной $\Delta x_i = 1/n$. Такое разбиение представляет возможность записать интегральную сумму функции e^x частного вида, соответствующего выборке ξ: $\xi_i = x_i$,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{i/n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\big(e^{1/n} + e^{2/n} + ... + e\big).$$

Поскольку функция $f(x) = e^x$ на отрезке $[0,1]$ интегрируема, то предел этой интегральной суммы существует, не зависит от способа разбиения и выборки и определяется интегралом Римана:

$$S = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\big(e^{1/n} + e^{2/n} + ... + e^{n/n}\big) = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1.$$

11.3. Замена переменной в определённом интеграле

Пусть требуется вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на $[a,b]$.

Теорема 11.5. *Если функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной на отрезке α,β $(\alpha < \beta)$, при изменении t от α до β значения функции $x = \varphi(t)$ не выходят за пределы отрезка $[a,b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{11.20}$$

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$ первообразной будет функция $F(\varphi(t))$, так как

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

а

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

так как $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы, то такая подстановка сводит вычисление определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ к вычислению интеграла

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$\Diamond$ Из доказанной теоремы следует, что для замены переменной в определенном интеграле необходимо задать новую переменную, дифференциал и пределы интегрирования.

Пример 11.11. Вычислить $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $x = a\sin t$, тогда $dx = a\cos t\,dt$ и из равенств $\sin\alpha = 0$, $\sin\beta = 1$ найдем $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$. Функция $x = a\sin t$ и ее производная непрерывны на отрезке $[0, \pi/2]$. Значения функции не выходят за пределы отрезка $[0, 1]$. Тогда по формуле (11.20) замены переменной в определенном интеграле имеем

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = a^2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\Big(t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 11.12. Вычислить

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}.$$

Решение. Преобразуем знаменатель:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2 + 1}.$$

Сделаем подстановку $x - 2 = t$, $dx = dt$ и найдем новые пределы интегрирования: $x_1 = 1$, $t_1 = -1$; $x_2 = 2$, $t_2 = 0$. Тогда

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^0 = -\operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 11.13. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$.

Решение. Сделаем подстановку $\sin x = t$, тогда $\cos x\,dx = dt$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int\limits_0^1 (1-t^2)dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Пример 11.14. Решить уравнение

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}.$$

Решение. Область определения данного уравнения определяется неравенством $x > \sqrt{2}$. Подстановкой Чебышева

$$t^2 - 1 = z^2, \quad t = \sqrt{z^2+1},\ dt = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}dz; \quad t_1 = \sqrt{2},\ z_1 = 1,\ t_2 = x,\ z_2 = \sqrt{x^2-1}$$

интеграл в левой части уравнения приводится к виду

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int\limits_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{z\,dz/\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}} = \int\limits_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z\Big|_1^{\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4}.$$

С учетом этого исходное уравнение запишется как

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

или

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} = \frac{\pi}{3}.$$

Отсюда

$$(x^2-1) = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^2 = 3$$

и, следовательно,

$$x^2 = 4, \quad x = \pm 2.$$

С учетом области определения корнем исходного уравнения является $x = 2$.

Пример 11.15. Доказать, что интеграл J от функции $f(x)$ в симметричных пределах равен

$$J = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \tag{11.21}$$

Решение. В силу свойства аддитивности исходный интеграл представим суммой

$$J = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = J_- + J_+. \tag{11.22}$$

В первом интеграле J_- сделаем замену $x = -t$, тогда

$$J_- = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt. \tag{11.23}$$

Если $f(x)$ — четная функция (т.е. $f(-x) = f(x)$), то из (11.23) следует

$$J_- = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = J_+. \tag{11.24}$$

Если же $f(x)$ — нечетная функция (т.е. $f(-x) = -f(x)$), то из (11.23) следует

$$J_- = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx = -J_+. \tag{11.25}$$

Подстановка (11.24) и (11.25) в (11.22) дает (11.21).

Пример 11.16. Доказать, что если $f(x)$ — периодическая функция:

$$f(x+T) = f(x), \tag{11.26}$$

то для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx. \tag{11.27}$$

Решение. В силу свойства аддитивности исходный интеграл представим суммой

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)dx + \int\limits_{T}^{T+a} f(x)dx \tag{11.28}$$

и в последнем интеграле проведем замену $x = t + T$, $dx = dt$, $x_1 = T$, $t_1 = 0$, $x_2 = T + a$, $t_2 = a$. Тогда с учетом (11.26) запишем

$$\int\limits_{T}^{T+a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(t+T)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt = -\int\limits_{a}^{0} f(t)dt. \tag{11.29}$$

Подставив (11.29) и (11.28), получим (11.27).

Пример 11.17. Вычислить интегралы

$$J_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\, dx; \quad J_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx; \quad J_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx; \quad J_4 = \int\limits_{\pi}^{3\pi} \sin x\, dx.$$

Решение. Для интеграла J_1 в силу нечетности подынтегральной функции на отрезке интегрирования $[-\pi/2, \pi/2]$ по формуле (11.21) сразу находим

$$J_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\, dx = 0.$$

Для интеграла J_2 в силу четности подынтегральной функции на $[-\pi/2, \pi/2]$ можем записать

$$J_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx.$$

Этот интеграл найден в примере 11.13, следовательно,

$$J_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Интеграл J_3, как и интеграл J_1, равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$J_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0.$$

При вычислении интеграла J_4 воспользуемся соотношением (11.27), поскольку подынтегральная функция $\sin x$ периодична и имеет период $T = 2\pi$. Получим

$$J_4 = \int\limits_{\pi}^{3\pi} \sin x\, dx = \int\limits_{-\pi+2\pi}^{\pi+2\pi} \sin x\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = J_3 = 0.$$

Для определенных интегралов, как и для неопределенных, можно использовать последовательно несколько замен переменных, а также замен с некоторыми особенностями. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 11.18. Вычислить интегралы

$$J_1 = \int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}; \quad J_2 = \int\limits_{1/2}^{2} \Big(1 + x - \frac{1}{x}\Big) e^{x+1/x} dx.$$

Решение. Обе подынтегральные функции непрерывны на своих отрезках интегрирования, поэтому оба интеграла существуют. Чтобы их вычислить, в интеграле J_1 проведем замену переменной

$$\frac{1}{1+x} = t, \tag{11.30}$$

тогда

$$x = \frac{1}{t} - 1, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad x^2 + 1 = \frac{2t^2 - 2t + 1}{t^2}$$

и новые пределы

$$t_1 = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1; \quad t_2 = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=1/2} = \frac{2}{3}.$$

С учетом этого

$$J_1 = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\int\limits_1^{2/3} t\frac{\dfrac{dt}{t^2}}{\sqrt{\dfrac{2t^2-2t+1}{t^2}}} = \int\limits_{2/3}^{1} \frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{2/3}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(t-1/2)^2+1/4}}.$$

В полученном интеграле проведем еще одну замену переменной:

$$t - \frac{1}{2} = y,$$

тогда $dt = dy$ и новые пределы интегрирования по переменной y определятся соотношениями

$$y_1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)\Big|_{t=2/3} = \frac{1}{6}; \quad y_2 = \left(t-\frac{1}{2}\right)\Big|_{t=1} = \frac{1}{2}.$$

С учетом этого

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{2/3}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(t-1/2)^2+1/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{1/6}^{1/2} \frac{dy}{\sqrt{y^2+1/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|y+\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}\Big|\,\Big|_{1/6}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{10}}{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{3(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{10}}.$$

В интеграле J_2 проведем замену

$$x + \frac{1}{x} = t, \tag{11.31}$$

тогда

$$x_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2-4}}{2}. \tag{11.32}$$

Подстановка (11.31) обладает особенностью, состоящей в том, что, согласно (11.32), каждому значению t: $2 < t \leqslant 2{,}5$ соответствуют два значения x_1 и x_2, принадлежащие промежуткам $[1/2, 1]$ и $[1, 2]$, соответственно (рис. 17). С учетом этого исходный интеграл J_2 представим суммой двух интегралов

$$J_2 = I_1 + I_2, \tag{11.33}$$

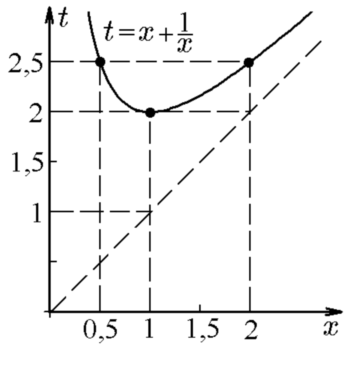


Рис. 17

где

$$I_1 = \int\limits_{1/2}^{1} \Big(1 + x - \frac{1}{x}\Big) e^{x+1/x} dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{1}^{2} \Big(1 + x - \frac{1}{x}\Big) e^{x+1/x} dx.$$

Для интеграла I_1 будем иметь

$$x = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2},$$

тогда

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{t - \sqrt{t^2 - 4}} = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}, \quad x + \frac{1}{x} = t, \quad x - \frac{1}{x} = -\sqrt{t^2 - 4},$$

$$dx = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\Big) dt,$$

$$\alpha_1 = \Big(x + \frac{1}{x}\Big)\Big|_{x=1/2} = 2{,}5; \quad \beta_1 = \Big(x + \frac{1}{x}\Big)\Big|_{x=1} = 2,$$

и, следовательно,

$$I_1 = \int\limits_{1/2}^{1} \Big(1 + x - \frac{1}{x}\Big) e^{x+1/x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{2{,}5}^{2} e^t \Big(1 - \sqrt{t^2 - 4}\Big)\Big(-\frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}} + 1\Big) dt$$

или

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int\limits_{2}^{2{,}5} e^t \Big(1 - \sqrt{t^2 - 4}\Big)\Big(-\frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}} + 1\Big) dt. \tag{11.34}$$

Для интеграла I_2 будем иметь

$$x = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2},$$

тогда

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{t + \sqrt{t^2 - 4}} = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2}, \quad x + \frac{1}{x} = t, \quad x - \frac{1}{x} = -\sqrt{t^2 - 4},$$

$$dx = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\Big) dt,$$

$$\alpha_2 = \Big(x + \frac{1}{x}\Big)\Big|_{x=1} = 2; \quad \beta_2 = \Big(x + \frac{1}{x}\Big)\Big|_{x=2} = 2{,}5,$$

и, следовательно,

$$I_2 = \int\limits_{1}^{2} \Big(1 + x - \frac{1}{x}\Big) e^{x+1/x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{2}^{2{,}5} e^t \Big(1 + \sqrt{t^2 - 4}\Big)\Big(\frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}} + 1\Big) dt. \tag{11.35}$$

Подстановка (11.34) и (11.35) в (11.33) дает

$$J_2 = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2}\int\limits_2^{2,5} e^t\Big(1-\sqrt{t^2-4}\Big)\Big(-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+1\Big)dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_2^{2,5} e^t\Big(1+\sqrt{t^2-4}\Big)\Big(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+1\Big)dt =$$
$$=\int\limits_2^{2,5} e^t\Big(\sqrt{t^2-4}+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\Big)dt = \int\limits_2^{2,5}\Big[e^t dt\,\sqrt{t^2-4}+e^t\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-4}}\Big] =$$
$$=\int\limits_2^{2,5}\big[\sqrt{t^2-4}d(e^t)+e^t d(\sqrt{t^2-4})\big].$$

Таким образом,

$$J_2 = \int\limits_2^{2,5} d(e^t\sqrt{t^2-4}) = e^t\sqrt{t^2-4}\Big|_2^{2,5} = e^{2,5}\sqrt{2,5^2-4} = 1,5e^{2,5}. \qquad (11.36)$$

$\Diamond$ Отметим, что подынтегральные выражения в соотношениях (11.34) и (11.35) содержат особенности в точке $t=2$. Это означает, что интегралы I_1 и I_2 — несобственные, подробное рассмотрение которых мы проведем в следующей главе. Однако согласно (11.36) интеграл J_2 удается представить в виде

$$J_2 = \int\limits_\alpha^\beta d(F(t)),$$

где первообразная $F(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и дифференцируема на интервале $]\alpha,\beta[$, что позволяет воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница (11.14).

Пример 11.19. Показать, что для непрерывной на отрезке $[0,a]$, $a>0$, функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_0^a f(a-x)dx \qquad (11.37)$$

и, в частности,

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx. \qquad (11.38)$$

Решение. В силу непрерывности функции $f(x)$ на отрезке интегрирования $[0,a]$ интеграл в левой части равенства (11.37) существует. Замена переменной в этом интеграле $x = a - t$, $dx = -dt$ с новыми пределами по переменной t $\alpha = (a-x)\big|_{x=0} = a$, $\beta = (a-x)\big|_{x=a} = 0$ дает

$$\int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_a^0 f(a-t)(-dt) = \int\limits_0^a f(a-t)dt.$$

если учесть, что значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то равенство (11.37) можно считать доказанным. Так как $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, то из (11.37) очевидным образом следует (11.38).

Пример 11.20. Показать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)dx = 2\int\limits_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos t)\,dt, \tag{11.39}$$

где $f(\varphi(x))$ — любая функция, непрерывная для $|\varphi(x)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. С помощью формулы (11.39) вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} (4 - 2\sin 2x - 3\sin^2 x)^{\mu}(\cos x + 2\sin x)dx, \quad \mu > 0. \tag{11.40}$$

Решение. Воспользуемся известным тригонометрическим соотношением

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha),$$

где угол α определяется соотношениями

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)dx = \int\limits_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha))dx.$$

В силу периодичности функции $\cos(x-\alpha)$ интеграл в правой части можно записать, согласно (11.27),

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha))dx = \int\limits_{0+\alpha-\pi}^{2\pi+\alpha-\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha))dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha))dx.$$

Заменой $x - \alpha = t$ последний интеграл сводится к виду

$$\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos t)dt,$$

а в силу четности подынтегральной функции его можно записать как (11.39):

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)dx = 2\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos t)dt.$$

Чтобы вычислить интеграла (11.40), проведем следующие преобразования:

$$4 - 2\sin 2x - 3\sin^2 x = 5 - \sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x\cos x - 3\sin^2 x =$$
$$= 5 - (\cos^2 x + 4\sin x\cos x + 4\sin^2 x) = 5 - (\cos x + 2\sin x)^2,$$

тогда

$$\int_0^{2\pi}(4-2\sin 2x-3\sin^2 x)^\mu(\cos x+2\sin x)dx = \int_0^{2\pi}[5-(\cos x+2\sin x)^2]^\mu(\cos x+2\sin x)dx.$$

Теперь можно воспользоваться формулой (11.39):

$$\int_0^{2\pi}(4 - 2\sin 2x - 3\sin^2 x)^\mu(\cos x + 2\sin x)dx =$$
$$= \int_0^{2\pi}[5 - 5(\cos x + 2\sin 2x)^2]^\mu(\cos x + 2\sin x)dx =$$
$$= 2\int_0^{\pi}[5 - 5\sin^2 t]^\mu\sqrt{5}\sin t\, dt = 2\cdot 5^{\mu+1/2}\int_0^{\pi}\cos^{2\mu} t\sin t\, dt =$$
$$= 2\cdot 5^{\mu+1/2}\int_0^{\pi}\cos^{2\mu} t\, d(\cos t) = 2\cdot 5^{\mu+1/2}\frac{\cos^{2\mu+1} t}{2\mu+1}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Пример 11.21. Вычислить интегралы

$$J_1 = \int_{0,5}^{6}[x]|\sin\pi x|dx, \quad J_2 = \int_{1,5}^{4,3}[x]dx, \quad J_3 = \int_{\pi/3}^{3\pi}\operatorname{sign}(\cos x)dx,$$
$$J_4 = \int_{-11}^{20}(-1)^{[x]}dx, \quad J_5 = \int_{1/9}^{1/4}\Big[\frac{1}{\sqrt{x}}\Big]dx.$$

Решение. Согласно результатам примера 8.11, имеем

$$J_1 = \int_{0,5}^{6}[x]|\sin\pi x|dx = \frac{[x]}{\pi}\{[x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\}\Big|_{0,5}^{6} = \frac{[6]}{\pi}\{[6]-(-1)^{[6]}\cos 6\pi\}-0 = \frac{30}{\pi}.$$

Соответственно,

$$J_2 = \int_{1,5}^{4,3}[x]dx = \Big([x]x - \frac{[x]([x]+1)}{2}\Big)\Big|_{1,5}^{4,3} =$$

$$= \Big([4{,}3]\cdot 4{,}3 - \frac{[4{,}3]([4{,}3]+1)}{2}\Big) - \Big([1{,}5]\cdot 1{,}5 - \frac{[1{,}5]([1{,}3]+1)}{2}\Big) =$$
$$= (4\cdot 4{,}3 - 2\cdot 5) - (1{,}5-1) = 7{,}2 - 0{,}5 = 6{,}7.$$

В свою очередь, согласно результатам примера 8.12, имеем

$$J_3 = \int\limits_{\pi/3}^{3\pi} \operatorname{sign}(\cos x)dx = \arccos(\cos x)\Big|_{\pi/3}^{3\pi} =$$
$$= \arccos(\cos 3\pi) - \arccos\Big(\cos\frac{\pi}{3}\Big) = \arccos(-1) - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$
$$J_4 = \int\limits_{-11}^{20} (-1)^{[x]}dx = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)\Big|_{-11}^{20} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\{\arccos(\cos 20\pi) - \arccos(\cos(-11\pi))\} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\{\arccos 1 - \arccos(-1)\} = \frac{1}{\pi}(0-\pi) = -1.$$

В интеграле J_5 проведем замену переменной:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = t, \quad x = \frac{1}{t^2}, \quad dx = -\frac{2dt}{t^3}; \quad x_1 = \frac{1}{9},\ t_1 = 3; \quad x_2 = \frac{1}{4},\ t_2 = 2,$$

при которой $x \in]0,1[\Rightarrow t \in [1,+\infty[$. В результате придем к интегралу

$$J_5 = \int\limits_{1/9}^{1/4}\Big[\frac{1}{\sqrt{x}}\Big]dx = \int\limits_{3}^{2}[t]\Big(-\frac{2dt}{t^3}\Big) = 2\int\limits_{2}^{3}\frac{[t]}{t^3}dt,$$

в котором положим $[t] = n$. Тогда $n \leqslant t < n+1$, и для интеграла $J_n(t)$ можно записать

$$J_n(t) = \int\frac{[t]}{t^3}dt = \int\frac{n}{t^3}dt = -\frac{n}{4t^4} + C_n.$$

В силу непрерывности первообразной $J_n(n) = J_{n-1}(n)$ имеем

$$-\frac{n}{4n^4} + C_n = -\frac{n-1}{4n^4} + C_{n-1},$$

или

$$C_n = \frac{1}{4n^4} + C_{n-1}.$$

Отсюда последовательно находим

$$C_1 = \frac{1}{4} + C_0;$$
$$C_2 = \frac{1}{4\cdot 2^4} + C_1 = \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{2^4}\Big) + C_0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$
$$C_n = \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4}\Big) + C_0.$$

Поскольку $n=[t]$, то для $J_n(t)$ получим

$$\int \frac{[t]}{t^3}dt = -\frac{[t]}{4t^4}+\frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{[t]^4}\Big)+C_0,$$

но тогда

$$J_5 = 2\int\limits_2^3 \frac{[t]}{t^3}dt = \frac{1}{2}\Big[-\frac{[t]}{t^4}+1+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{[t]^4}\Big]\Big|_2^3 =$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[-\frac{3}{3^4}+1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}\Big]-\Big[-\frac{2}{2^4}+1+\frac{1}{2^4}\Big]=\frac{1}{2}\Big[-\frac{3}{3^3}+1+\frac{1}{3^4}+\frac{2}{2^4}\Big]=\frac{65}{324}.$$

11.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 11.6 (интегрирование по частям в определенном интеграле). *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x). \tag{11.41}$$

Доказательство. Поскольку произведение $u(x)v(x)$ является так же непрерывно дифференцируемой функцией, то

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x)+u(x)dv(x) = [v(x)u'(x)+u(x)v'(x)]dx. \tag{11.42}$$

Если при этом учесть интегрируемость функций $v(x)u'(x)$, $u(x)v'(x)$ на $[a,b]$, то из (11.42) с помощью формулы Ньютона–Лейбница найдем

$$\int\limits_a^b d(u(x)v(x)) = u(x)v(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b v(x)\,du(x)+\int\limits_a^b u(x)\,dv(x),$$

откуда и следует (11.41).

Формулу (11.41) иногда удобнее использовать в виде

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx. \tag{11.43}$$

Вид формул (11.41), (11.43) показывает, как формулы, полученные методом интегрирования по частям для неопределенных интегралов, могут быть использованы для вычисления определенных интегралов. Обобщенная формула интегрирования по частям (3.68) для определенного интеграла запишется как

$$\int\limits_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int\limits_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\,dx. \tag{11.44}$$

Аналогично формула интегрирования по частям (3.71) для полиномов примет вид

$$\int\limits_a^b P_n(x)v^{(n+1)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P_n^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)\Big|_a^b. \qquad (11.45)$$

Формулы циклического интегрирования (3.72), (3.74) и следствия из них (3.75), (3.76) также можно модифицировать для определенных интегралов.

Пример 11.22. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin x\,dx; \quad I_2 = \int\limits_0^{e} \ln x\,dx; \quad I_3 = \int\limits_e^{3} x\ln x\,dx; \quad I_4 = \int\limits_0^{\pi/2} (x+2)\cos x\,dx;$$

$$I_5 = \int\limits_1^{2} x^3 e^{x^2} dx; \quad I_6 = \int\limits_{-1/2}^{0} \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}.$$

Решение. Соответствующие неопределенные интегралы вычислены в примере 3.13. Подставив пределы интегрирования в полученные там результаты, запишем

$$I_1 = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin x\,dx = (x\arcsin x + \sqrt{1-x^2})\Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{1-\frac{3}{4}} - 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi - 3}{6};$$

$$I_2 = \int\limits_0^{e} \ln x\,dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^e = e(\ln e - 1) - (\ln 1 - 1) = 1;$$

$$I_3 = \int\limits_e^{3} x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big(\ln x - \frac{1}{2}\Big)\Big|_e^3 = \frac{9}{2}\Big(\ln 3 - \frac{1}{2}\Big) - \frac{e^2}{2}\Big(\ln e - \frac{1}{2}\Big) = \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{9+e^2}{4};$$

$$I_4 = \int\limits_0^{\pi/2} (x+2)\cos x\,dx = [(x+2)\sin x + \cos x]\Big|_0^{\pi/2} = \Big(\frac{\pi}{2} + 2\Big)\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1;$$

$$I_5 = \int\limits_1^{2} x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}e^4(4-1) - \frac{1}{2}e(1-1) = \frac{3}{2}e^4;$$

$$I_6 = \int\limits_{-1/2}^{0} \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}\Big|_{-1/2}^{0} = 1 - \frac{e^{-1/2}}{1-1/2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Пример 11.23. Вычислить

$$\int\limits_0^1 (1-x)^p x^q dx, \quad p, q \in \mathbb{N}. \qquad (11.46)$$

Решение. В примере 7.17 было показано, что для определенного интеграла вида (11.46) при $p+q\neq -1$ справедливо рекуррентное соотношение (7.126), которое применительно к определенному интегралу (11.46) будет иметь вид

$$\int\limits_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{1}{p+q+1}\left[p\int\limits_0^1 (1-x)^{p-1}x^q dx - (1-y)^p y^{q+1}\Big|_0^1\right] = \\ = \frac{p}{p+q+1}\int\limits_0^1 (1-x)^{p-1}x^q dx. \qquad (11.47)$$

Последовательно применив эту формулу p раз, получим

$$\int\limits_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots 1}{(p+q+1)(p+q)\cdots(q+2)}\int\limits_0^1 x^q dx$$

и окончательно

$$\int\limits_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p!}{(p+q+1)(p+q)\cdots(q+2)}\frac{x^{q+1}}{q+1}\Big|_0^1 = \\ = \frac{p!}{(p+q+1)(p+q)\cdots(q+2)(q+1)} = \\ = \frac{p!q!}{(p+q+1)(p+q)\cdots(q+2)(q+1)q!} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

ГЛАВА 3

Приложения определённого интеграла

12. Измеримость геометрических объектов

В элементарной геометрии измерение длин прямолинейных отрезков осуществляется с помощью их отношения, а именно: для двух отрезков AB и CD определяется вещественное число l (рациональное или иррациональное), показывающее, сколько раз отрезок AB укладывается в отрезке CD. Для этого выбирается такое натуральное число n, что одна n-ая часть отрезка AB укладывается без остатка m раз в отрезке CD. Тогда отношение $l = m/n$ рационально. Увеличением числа n можно достичь того, что рациональное l со сколь угодно малой ошибкой приблизится к иррациональному l. Число l, как известно, называется *отношением отрезка CD к отрезку AB*. При $l = 1$ (и только в этом случае) отрезки AB и CD называются *равными между собой* (или *конгруэнтными*). Если отрезок AB принять за единицу измерения длины, то число

$$l = \frac{m}{n} \tag{12.1}$$

будет длиной отрезка CD, измеренной посредством этой единицы измерения. Сравнение других отрезков с отрезком AB позволяет с помощью соотношения (12.1) установить их длину.

Исходя из свойств дробей (12.1), можно убедиться, что длины прямолинейных отрезков обладают следующими свойствами:

а) инвариантности: длины равных отрезков совпадают ($m_1 = m_2 \Rightarrow m_1/n = m_2/n$);

б) монотонности: длина целого отрезка больше длины отрезка, составляющего любую часть целого ($m_1 < m \Rightarrow m_1/n < m/n$);

в) аддитивности: длина отрезка, составленного из двух частей, равна сумме длин этих отрезков ($(m_1 + m_2)/n = m_1/n + m_2/n$).

Свойство аддитивности позволяет перейти к измерению длин ломаных линий. Для этого все звенья ломаной можно, например, расположить вдоль одной прямой. Длина отрезка, полученного таким «спрямлением», стандартным образом определяется с помощью соотношения (12.1) и задает длину ломаной. Кроме этого, длину или периметр ломаной можно найти как сумму длин всех ее звеньев, измеренных по отдельности.

Установленный способ измерения длины ломаной является основанием для измерения длины произвольной кривой. Для этого достаточно рассмотреть все ломаные, вписанные в эту кривую. Понятно, что по мере уменьшения длин хорд, составляющих звенья вписанной ломаной, ее длина будет приближаться к величине, равной длине кривой (рис. 18).

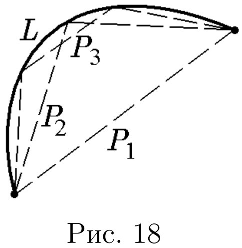


Рис. 18

♦ *Длиной l кривой L* будем называть точную верхнюю грань множества периметров P всевозможных вписанных в кривую ломаных:

$$l = \sup P(l). \tag{12.2}$$

Если число l конечно, то кривая L называется *спрямляемой*.

Из определения (12.2) следует, что длины спрямляемых кривых обладают свойствами, аналогичными свойствам, вытекающим из определения (12.1), а именно:

а) инвариантности: длины совпадающих (конгруэтных) кривых равны;

б) монотонности: длина спрямляемой кривой больше любой его части;

в) аддитивности: если кривая спрямляема, то спрямляемы порознь и кривые, составляющие ее, и наоборот; при этом длина всей кривой равна сумме длин кривых, ее составляющих.

Замкнутая ломаная линия на плоскости образует плоскую фигуру, называемую *многоугольником.* Периметр его измеряется способом, указанным выше. Однако для многоугольника наряду с периметром существует еще одна характеристика: его площадь. Выберем в качестве единицы площади квадрат со стороной, длина которой равна единице длины. Тогда для прямоугольника со сторонами a и b число

$$S = ab \tag{12.3}$$

будет определять его площадь, измеренную посредством этой единицы измерения площади. Из простых геометрических соображений с учетом (12.3) площадь треугольника с основанием a и высотой b найдется как $S = ab/2$. Поскольку в элементарной геометрии любой многоугольник можно представить совокупностью непересекающихся треугольников, это позволяет найти его площадь как сумму площадей этих треугольников.

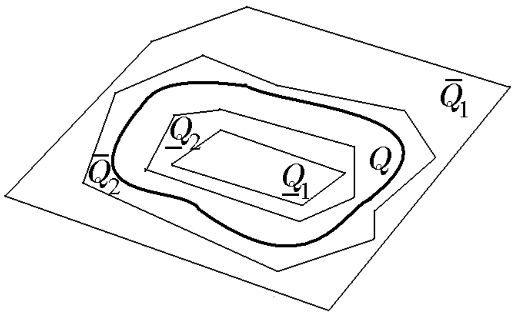


Рис. 19

Возьмем теперь произвольную плоскую фигуру Q, границей которой является спрямляемая кривая L. Длина кривой L определяется формулой (12.2), а для измерения площади S фигуры Q рассмотрим все многоугольники $\{\underline{Q}\}$, целиком содержащиеся в Q, и многоугольники $\{\overline{Q}\}$, целиком содержащие в себе Q (рис. 19). Если $\overline{Q}$ и $\underline{Q}$ обозначают соответственно их площади, то всегда $\overline{Q} \geqslant \underline{Q}$. Множество чисел $\{\underline{Q}\}$, ограниченное сверху любым числом $\overline{Q}$, имеет точную верхнюю грань $\underline{S}$, причем $\underline{S} \leqslant \overline{Q}$. Точно так же множество чисел $\{\overline{Q}\}$, ограниченное снизу числом $\underline{S}$, имеет точную нижнюю грань $\overline{S} \geqslant \underline{S}$.

♦ Точные грани $\overline{S}$ и $\underline{S}$ называются *внешней* и *внутренней* площадями фигуры Q. Если обе грани

$$\underline{S} = \sup\{\underline{Q}\}, \quad \overline{S} = \inf\{\overline{Q}\} \tag{12.4}$$

совпадают, то их общее значение

$$\underline{S} = \overline{S} = S \tag{12.5}$$

называется *площадью фигуры* Q; саму фигуру в этом случае называют *квадрируемой.*

Из определения площадей квадрируемых фигур следует, что они удовлетворяют свойствам, аналогичным свойствам длин спрямляемых кривых:

а) инвариантности: площади равных (конгруэтных) фигур совпадают;

б) монотонности: площадь квадрируемой фигуры больше площади любой ее части;

в) аддитивности: если плоская фигура квадрируема, то квадрируемы порознь и непересекающиеся фигуры, составляющие ее, и наоборот; при этом площадь всей фигуры равна сумме площадей фигур, ее составляющих.

Вместе с плоскими фигурами элементарная геометрия изучает пространственные объекты, называемые *телами.* Простейшими являются тела, называемые *многогранниками.* Их поверхность состоит из плоских многоугольников, составляющих единую замкнутую поверхность тела. Самым простым многогранником (симплексом) является четырехгранник (тетраэдр или пирамида). Если поверхность многогранника квадрируема, то ее площадь можно измерить. Однако в этом случае для многогранника существует еще одна характеристика: его объем. Для измерения объема, как и ранее, вводится единица измерения объема. В качестве такой единицы можно выбрать объем куба с ребром, равным единице длины, выбранной ранее. Тогда для прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c число

$$V = abc = Sc \tag{12.6}$$

будет определять его объем, измеренный посредством этой единицы измерения объема. Из простых геометрических соображений, подробно обсуждаемых в школьном курсе геометрии, с учетом (12.6) объем пирамиды с площадью основания S и высотой c найдется как $V = Sc/3$. Поскольку в элементарной геометрии любой многогранник можно представить совокупностью непересекающихся пирамид (четырехгранников), то это позволяет найти его объем как сумму объемов таких пирамид.

Возьмем теперь произвольное тело T, поверхность которого является квадрируемой. Для определения объема этого тела рассмотрим все многогранники $\{\underline{T}\}$, целиком содержащиеся в T, и многогранники $\{\overline{T}\}$, целиком содержащие в себе T. Если $\overline{T}$ и $\underline{T}$ обозначают соответственно их объемы, то всегда $\overline{T} \geqslant \underline{T}$. Множество чисел $\{\underline{T}\}$, ограниченное сверху любым числом $\overline{T}$, имеет точную верхнюю грань $\underline{V}$, причем $\underline{V} \leqslant \overline{T}$. Точно так же множество чисел $\{\overline{T}\}$, ограниченное снизу числом $\underline{V}$, имеет точную нижнюю грань $\overline{V} \geqslant \underline{V}$.

♦ Точные грани $\overline{V}$ и $\underline{V}$ называются *внешним* и *внутренним* объемами тела T. Если оба объёма

$$\underline{V} = \sup\{\underline{T}\}, \quad \overline{V} = \inf\{\overline{T}\} \tag{12.7}$$

совпадают, то их общее значение

$$\underline{V} = \overline{V} = V \tag{12.8}$$

называется *объемом тела* T, а само тело — *кубируемым.*

Свойства инвариантности, монотонности и аддитивности, сформулированные для длин спрямляемых кривых и площадей квадрируемых фигур, легко переформулировать для объемов кубируемых тел, которыми те обладают в силу определения (12.6)–(12.8).

Таким образом, поскольку нахождение длин, площадей и объемов сводится к вычислению точных граней соответствующих множеств, обладающих одним набором свойств, то, владея понятием интеграла, мы можем перейти к их вычислению с помощью определенного интеграла. Для этого удобно воспользоваться такими понятиями аналитической геометрии, как евклидово пространство и декартова система координат. В таком случае длина прямолинейного отрезка между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в выбранных единицах длины определится как

$$l = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{12.9}$$

Вместе с этим для описания кривых, фигур и тел можно воспользоваться их аналитическим представлением в виде функций одной или нескольких переменных, которыми являются декартовы координаты или некоторые параметры.

Для сравнения рассмотрим пример неквадрируемого множества. Для наглядности изложения воспользуемся плоскими фигурами.

Пример 12.1. Пусть K_1 и K_2 — два квадрата на плоскости xOy:

$$K_1 = \{(x,y) \,|\, |x| \leqslant 2,\ |y| \leqslant 2\}; \quad K_2 = \{(x,y) \,|\, |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}.$$

Показать, что множество K, состоящее из точек квадрата K_2 и точек $K_1 \setminus K_2$, координаты которых рациональны, не является квадрируемым.

Решение. Сразу же отметим, что всякий многоугольник, включенный в $K_1 \setminus K_2$, содержит как точки, принадлежащие K, т.е. точки с рациональными координатами, так и точки, не принадлежащие K, т.е. точки, хотя бы одна из координат которых иррациональна. Такой многоугольник не лежит в K. Так, например, треугольник A' (рис. 20) не может быть включен в K, так как его заштрихованная часть содержит точки с иррациональными координатами. Следовательно, любой многоугольник, принадлежащий квадрату K_2, не может выходить за его границу, в противном случае он не будет включен в K.

Но тогда для любого многоугольника $A \subset K_2$, согласно свойству монотонности площадей плоских фигур, запишем

$$S(A) \leqslant S(K_2) = 2^2 = 4,$$

т.е.

$$\sup(A) = 4. \tag{12.10}$$

С другой стороны, всякий многоугольник B (рис. 20), включающий в себя множество K, должен включать в себя и квадрат K_1, поскольку во всякой окрестности любой точки из K_1 имеются точки с рациональными координатами. И вновь для любого многоугольника $B \supset K_1$ в соответствии со свойством монотонности площадей плоских фигур запишем

$$S(B) \geqslant S(K_1) = 4^2 = 16,$$

т.е.

$$\inf(B) = 16. \tag{12.11}$$

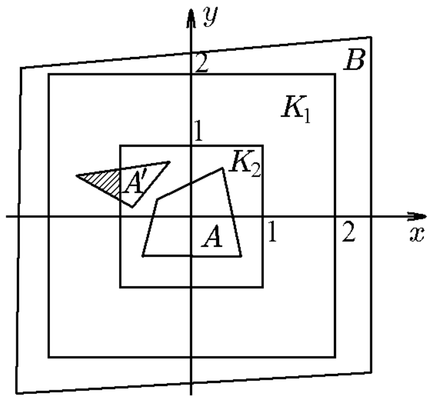


Рис. 20

Таким образом, для любых множеств

$$A \subset K \subset B.$$

Согласно (12.10) и (12.11), точные грани не могут совпадать:

$$\sup(A) \neq \inf(B),$$

что и означает неквадрируемость K: $K \subset \mathbb{R}$.

13. Вычисление длины спрямляемой кривой

13.1. Вектор-функция скалярного аргумента

Рассмотрим два евклидовых пространства: трехмерное $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Oxyz$ в ортонормированном базисе $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ и одномерное $\mathbb{R}$ — числовую ось Ot.

♦ Если на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ заданы непрерывные функции

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{13.1}$$

то говорят, что *в трехмерном пространстве* $\mathbb{R}^3$ *задана непрерывная кривая* $r = r(t)$ или $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (*непрерывное отображение отрезка* $[\alpha, \beta]$ в множестве $\mathbb{R}^3$).

Числа (13.1) можно рассматривать как координаты точки $M = M(t) = M(x(t), y(t), z(t))$ или координаты радиус-вектора

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t)). \tag{13.2}$$

Для представления (13.2) возможны различные интерпретации. Так, если считать, что переменная t есть время, то уравнения (13.1) определяют закон движения точки $M(t)$, а множество точек $M(t)$, соответствующих всем значениям t из $[\alpha, \beta]$, можно рассматривать как след или траекторию ее движения (рис. 21). С другой стороны, совокупность функций (13.1) можно рассматривать как одну векторную функцию, или вектор-функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$ скалярного аргумента $t \in \mathbb{R}$. При этом множество точек $M(t)$ будет представлять собой множество концов радиус-векторов $\overrightarrow{OM}(t)$, называемое *годографом вектор-функций* (рис. 21).

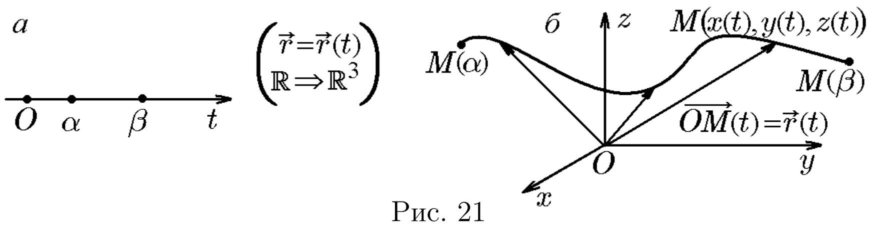


Рис. 21

Геометрически и годограф (от греческого *путь* и *пишу*), и траекторию (от латинского *относящийся к перемещению*) можно рассматривать как некоторую кривую в $\mathbb{R}^3$ (рис. 21). Однако в общем случае существуют такие функции (13.1), при которых годограф или траектория может проходить через каждую точку некоторого кубируемого тела.

Исходя из свойств евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, для вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ можно переформулировать основные понятия, сформулированные для скалярной, т.е. обычной, функции $f = f(t)$.

♦ Вектор $\vec{a}$ называют *пределом вектор-функции* $\vec{r}(t)$ в точке t_0 и пишут

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \text{ или } \vec{r}(t) \to \vec{a} \text{ при } t \to t_0, \tag{13.3}$$

если существует предел

$$\lim_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0 \tag{13.4}$$

от скалярной, т.е. обычной, функции $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$.

Предел $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ вектор-функции $\vec{r}(x(t), y(t), z(t))$ существует тогда и только тогда, когда (см., например, [17])

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_x, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = a_y, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = a_z. \tag{13.5}$$

Это утверждение очевидным образом вытекает из определения модуля вектора:

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{[x(t) - a_x]^2 + [y(t) - a_y]^2 + [z(t) - a_z]^2}, \tag{13.6}$$

используемого в (13.4).

Предел вектор-функции обладает следующими свойствами, вытекающими из (13.4) и (13.5):

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to t_0}[f_1(t)\vec r_1(t)+f_2(t)\vec r_2(t)]=\lim_{t\to t_0}f_1(t)\lim_{t\to t_0}\vec r_1(t)+\lim_{t\to t_0}f_2(t)\lim_{t\to t_0}\vec r_2(t);\\
&\lim_{t\to t_0}(\vec r_1(t),\vec r_2(t))=\big(\lim_{t\to t_0}\vec r_1(t),\lim_{t\to t_0}\vec r_2(t)\big);\\
&\lim_{t\to t_0}[\vec r_1(t),\vec r_2(t)]=\big[\lim_{t\to t_0}\vec r_1(t),\lim_{t\to t_0}\vec r_2(t)\big]
\end{aligned}\tag{13.7}$$

в предположении, что все пределы в (13.7) существуют.

♦ Вектор-функция $\vec r=\vec r(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0, если

$$\lim_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec r(t_0).\tag{13.8}$$

Вектор-функция $\vec r(x(t),y(t),z(t))$ непрерывна в точке t_0 тогда и только тогда, когда в этой точке t_0 непрерывны функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

Рассмотрим вектор-функцию

$$\Delta\vec r=\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0),\tag{13.9}$$

называемую *приращением вектор-функции* $\vec r(t)$ в точке t_0. С ее помощью условие (13.8) в определении непрерывности вектор-функции можно переформулировать так:

$$\lim_{\Delta t\to0}[\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)]=\lim_{\Delta t\to0}\Delta\vec r=0,\tag{13.10}$$

где $\Delta t=t-t_0$.

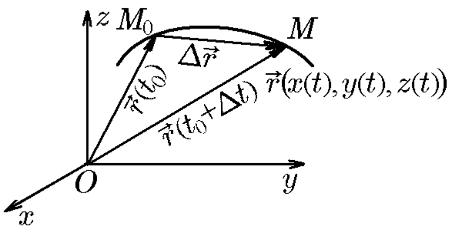


Рис. 22

Геометрически (рис. 22) (13.10) означает, что для непрерывной вектор-функции $\vec r(t)$ длина отрезка M_0M (хорды дуги $\overset{\frown}{M_0M}$), равная $|\Delta\vec r|$, стремится к нулю при $\Delta t\to0$ или $t\to t_0$.

Из свойств (13.7) и определения (13.8) следует, что сумма, скалярное и векторное произведения вектор-функций $\vec r_1(t)$ и $\vec r_2(t)$ являются непрерывными при $t=t_0$, если вектор-функции $\vec r_1(t)$ и $\vec r_2(t)$ непрерывны в точке t_0.

♦ *Производной вектор-функции* $\vec r(t)$ *в точке* t_0 называется вектор-функция $\vec r\,'(t_0)$, равная пределу

$$\vec r\,'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)}{\Delta t}\tag{13.11}$$

в предположении, что он существует.

Аналогично вводится понятие второй производной:

$$\vec r\,''(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec r\,'(t_0+\Delta t)-\vec r\,'(t_0)}{\Delta t},\tag{13.12}$$

и производных порядка $n>2$.

Из (13.11) и (13.12) следует, что если $\vec r=(x(t),y(t),z(t))$, то

$$\vec r\,'(t_0)=\big(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\big);\tag{13.13}$$

$$\vec r\,''(t_0)=\big(x''(t_0),y''(t_0),z''(t_0)\big)\tag{13.14}$$

и вообще
$$\vec{r}^{\,(n)}(t_0) = \big(x^{(n)}(t_0), y^{(n)}(t_0), z^{(n)}(t_0)\big). \tag{13.15}$$

Как и скалярная функция $f(t)$, вектор-функция $\vec{r}(t)$, имеющая производную в точке t_0, непрерывна в этой точке. Действительно, из определения производной (13.11) следует, что $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,'(t_0)\Delta t + \vec{\alpha}(\Delta t)\Delta t$, где $\vec{\alpha}(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, но тогда $\Delta\vec{r} \to 0$ при $\Delta t \to 0$, и, следовательно, в силу (13.10) вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна в точке t_0.

♦ Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется *дифференцируемой в этой точке*, если ее приращение $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ в точке t_0 можно представить в виде
$$\Delta\vec{r} = \vec{a}\Delta t + \vec{\alpha}(\Delta t)\Delta t, \tag{13.16}$$
где $\vec{a}$ не зависит от Δt и $\vec{\alpha}(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Как и в случае скалярной функции, вектор $\vec{a}\Delta t$ называется *дифференциалом* вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается как
$$d\vec{r} = \vec{a}\Delta t. \tag{13.17}$$
Представление (13.16) равносильно условию (13.11) существования производной вектор-функции $\vec{r}\,'(t)$, причем
$$\vec{r}\,'(t_0) = \vec{a}. \tag{13.18}$$
Если вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ дифференцируема при $t = t_0$, то из (13.16) и (13.18) следует
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,'(t_0)\Delta t + \vec{\alpha}(\Delta t)\Delta t, \quad \vec{\alpha}(\Delta t) \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0. \tag{13.19}$$
Положив $\Delta t = dt$, в любой точке t из области дифференцируемости $\vec{r}$ имеем
$$d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)dt \tag{13.20}$$
и, соответственно,
$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{13.21}$$

Из определений предела и производной для скалярных и векторных функций вытекают следующие правила дифференцирования:
$$\big(f(t)\vec{r}(t)\big)' = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}\,'(t); \tag{13.22,a}$$
$$[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}\,'_1(t) + \vec{r}\,'_2(t); \tag{13.22,$б$}$$
$$\big(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\big)' = \big(\vec{r}\,'_1(t), \vec{r}_2(t)\big) + \big(\vec{r}_1(t), \vec{r}\,'_2(t)\big); \tag{13.22,$в$}$$
$$[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)]' = [\vec{r}\,'_1(t), \vec{r}_2(t)] + [\vec{r}_1(t), \vec{r}\,'_2(t)]; \tag{13.22,$г$}$$
$$\vec{r}\,'_s(t(s)) = \vec{r}\,'_t(t)t'_s, \tag{13.22,$д$}$$
где $t = t(s)$ является функцией, дифференцируемой в некоторой окрестности точки s.

Пример 13.1. Для вектор-функций
$$\vec{r}_1(t) = \Big(\frac{\sin t}{t}, \frac{e^{-t^3} - 1}{t^2}, \cos t\Big), \quad \vec{r}_2(t) = (t, t^2, 0)$$
вычислить
$$1)\lim_{t\to 0}\vec{r}_1(t); \quad 2)\lim_{t\to 0}\vec{r}_2(t); \quad 3)\lim_{t\to 0}\big(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\big); \quad 4)\lim_{t\to 0}[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)]$$
и
$$5)\ \big(\vec{r}_1(t) + 2\vec{r}_2(t)\big)'; \quad 6)\ \big(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\big)'; \quad 7)\ [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)]'$$

Решение. Исходя из (13.5), найдем

$$1)\ \lim_{t\to0}\vec{r}_1(t)=\lim_{t\to0}\Big(\frac{\sin t}{t},\frac{e^{-t^3}-1}{t^2},\cos t\Big)=\Big(\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t},\lim_{t\to0}\frac{e^{-t^3}-1}{t^2},\lim_{t\to0}\cos t\Big)=$$
$$=\Big(1,\lim_{t\to0}\frac{-3t^2e^{-t^3}}{2t},1\Big)=(1,0,1);$$
$$2)\ \lim_{t\to0}\vec{r}_2(t)=\lim_{t\to0}(t,t^2,0)=(0,0,0).$$

Для вычисления пределов 3 и 4 найдем предварительно

$$\big(\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)\big)=\sin t+e^{-t^3}-1+0=\sin t+e^{-t^3}-0;$$
$$[\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)]=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\ \dfrac{\sin t}{t}&\dfrac{e^{-t^3}-1}{t^2}&\cos t\\ t&t^2&0\end{vmatrix}=\Big(-t^2\cos t,t\cos t,t\sin t-\frac{e^{-t^3}-1}{t}\Big),\tag{13.23}$$

тогда

$$3)\ \lim_{t\to0}\big(\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)\big)=\lim_{t\to0}(\sin t+e^{-t^3}-1)=0;$$
$$4)\ \lim_{t\to0}[\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)]=\lim_{t\to0}\Big(-t^2\cos t,t\cos t,t\sin t-\frac{e^{-t^3}-1}{t}\Big)=(0,0,0).$$

Чтобы вычислить производные, предварительно найдем

$$\vec{r}\,'_1(t)=\Big(\frac{\sin t}{t},\frac{e^{-t^3}-1}{t^2},\cos t\Big)'=\Big(\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)',\Big(\frac{e^{-t^3}-1}{t^2}\Big)',(\cos t)'\Big)=$$
$$=\Big(\frac{t\cos t-\sin t}{t^2},\frac{-3t^4e^{-t^3}-2t(e^{-t^3}-1)}{t^4},-\sin t\Big);$$
$$\vec{r}\,'_2(t)=(t,t^2,0)'=(1,2t,0).$$

Тогда

$$\big(\vec{r}_1(t)+2\vec{r}_2(t)\big)'=\vec{r}\,'_1(t)+2\vec{r}\,'_2(t)=\Big(\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}+2,-\frac{(3t^3+2)e^{-t^3}-2}{t^3}+4t,-\sin t\Big),$$

а с учетом (13.23), соответственно,

$$\big(\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)\big)'=(\sin t+e^{-t^3}-1)'=\cos t-3t^2e^{-t^3};$$
$$[\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)]'=\Big(-t^2\cos t,t\cos t,t\sin t-\frac{e^{-t^3}-1}{t}\Big)'=$$
$$=\Big(-2t\cos t+t^2\sin t,\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t+3t^2e^{-t^3}+\frac{e^{-t^3}-1}{t^2}\Big).$$

Пример 13.2. Показать, что векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$ ортогональны, если $|\vec{r}(t)|=\mathrm{const}$ для всех $t\in]\alpha,\beta[$.

Решение. Используя равенство $|\vec{r}(t)|^2=\big(\vec{r}(t),\vec{r}(t)\big)$ и правила дифференцирования скалярного произведения (13.22,*в*), имеем

$$\big(|\vec{r}(t)|^2\big)'=(\mathrm{const})'=\big(\vec{r}(t),\vec{r}(t)\big)'=\big(\vec{r}\,'(t),\vec{r}(t)\big)+\big(\vec{r}(t),\vec{r}\,'(t)\big)=2\big(\vec{r}(t),\vec{r}\,'(t)\big)$$

или
$$0 = 2\big(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)\big).$$
Отсюда
$$\big(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)\big) = 0,$$
что и означает ортогональность векторов $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$.

Для вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, как и для скалярной функции, справедлива так называемая *локальная формула Тейлора*
$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\vec{r}^{\,(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \vec{o}[(t-t_0)^n], \qquad (13.24)$$
где $\vec{o}[(t-t_0)^n]$ — бесконечно малая вектор-функция по отношению к $(t-t_0)^n$ при $t - t_0 \to 0$.

◊ Если, следуя (13.24), записать формулу Лагранжа в конечных приращениях для вектор-функции $\vec{r}(t)$:
$$\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha) = \vec{r}\,'(\xi)(\beta - \alpha), \quad \xi \in]\alpha, \beta[, \qquad (13.25)$$
то в общем случае эта формула окажется неверной.

Однако для модуля разности $|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)|$, если $\vec{r}(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и дифференцируема на $]\alpha, \beta[$, справедлива формула
$$|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)| \leqslant |\vec{r}\,'(\xi)||\beta - \alpha|, \quad \xi \in]\alpha, \beta[.$$

Пример 13.3. Показать, что формула Лагранжа в конечных приращениях, т.е. формула
$$\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha) = \vec{r}\,'(\xi)(\beta - \alpha), \quad \xi \in]\alpha, \beta[, \qquad (13.26)$$
для вектор-функций $\vec{r}(t)$ в общем случае неверна.

Решение. Предположим, что формула (13.26) верна. Тогда для вектор-функции $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ найдем $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t)$, причем $|\vec{r}\,'(t)| = 1$. Положив теперь $\alpha = 0$ и $\beta = 2\pi$, из равенства (13.26) получим
$$\vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) = \vec{r}\,'(\xi)2\pi, \qquad (13.27)$$
а поскольку
$$\vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) = (\cos 2\pi - \cos 0, \sin 2\pi - \sin 0) = (0, 0)$$
и
$$|\vec{r}\,'(\xi)| = 1,$$
то равенство (13.26) невозможно, что и требовалось показать.

В заключение по аналогии со скалярной функцией $y = f(x)$ определим первообразную вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и вытекающие из этого определения понятия неопределенного и определенного интегралов.

♦ Вектор-функция $\vec{R}(t)$ называется *первообразной* для функции $\vec{r}(t)$ на интервале $]\alpha, \beta[$, если функция $\vec{R}(t)$ дифференцируема на этом интервале и в каждой его точке выполняется равенство
$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{r}(t), \quad t \in]\alpha, \beta[. \qquad (13.28)$$

♦ *Неопределенным интегралом* от вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ скалярного аргумента называется совокупность всех первообразных для $\vec{r}(t)$. Неопределенный интеграл от $\vec{r}(t)$, как и для скалярной функции, обозначается знаком $\int$, причем

$$\int \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t) + \vec{C}, \tag{13.29}$$

где $\vec{R}(t)$ — какая-либо первообразная для $\vec{r}(t)$, а $\vec{C}$ — произвольный постоянный вектор.

Если $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{\imath}x(t) + \vec{\jmath}y(t) + \vec{k}z(t)$, то неопределенный интеграл (13.29) для каждой компоненты вектора $\vec{r}(t)$ вычисляется по формуле скалярной функции, обозначается знаком $\int$, причем

$$\int \vec{r}(t)dt = \int [\vec{\imath}x(t) + \vec{\jmath}y(t) + \vec{k}z(t)]dt = \vec{\imath}\int x(t)dt + \vec{\jmath}\int y(t)dt + \vec{k}\int z(t)dt. \tag{13.30}$$

В правой части этого равенства мы имеем неопределенные интегралы от скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, для которых справедливы все свойства и правила их вычисления, сформулированные выше.

Пример 13.4. Найти интеграл от вектор-функции

$$\vec{r}_1(t) = \vec{\imath}te^t + \vec{\jmath}\sin^2 t - \vec{k}\frac{1}{1+t^2}, \quad \vec{r}_2(t) = \vec{\imath}\frac{t}{1+t^2} + \vec{\jmath}te^{t^2} + \vec{k}\cos t.$$

Решение. Согласно (13.30), имеем

$$\int \vec{r}_1(t)dt = \vec{\imath}\int te^t dt + \vec{\jmath}\int \sin^2 t\,dt - \vec{k}\int \frac{1}{1+t^2}dt =$$
$$= \vec{\imath}e^t(t-1) + \vec{\jmath}\Big(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\Big) - \vec{k}\,\mathrm{arctg}\,t + \vec{C};$$
$$\int \vec{r}_2(t)dt = \vec{\imath}\int \frac{t}{1+t^2}dt + \vec{\jmath}\int te^{t^2}dt + \vec{k}\int \cos t\,dt =$$
$$= \vec{\imath}\ln\sqrt{1+t^2} + \vec{\jmath}\frac{1}{2}e^{t^2} + \vec{k}\sin t + \vec{C}.$$

♦ *Определенным интегралом* вектор-функции $\vec{r}(t)$, дифференцируемой на интервале $]\alpha, \beta[$ и непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$, называется предел векторных интегральных сумм

$$\int\limits_\alpha^\beta \vec{r}(t)dt = \lim_{\substack{\max\Delta t\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^n \vec{r}(\xi_i)\Delta t_i, \tag{13.31}$$

где Δt_i — длина отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения интервала $[\alpha, \beta]$, а ξ_i — произвольная точка этого интервала.

Как и для интеграла от скалярной функции, для определенного интеграла (13.31) справедлива формула Ньютона–Лейбница в векторной форме

$$\int\limits_\alpha^\beta \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t)\Big|_\alpha^\beta = \vec{R}(\beta) - \vec{R}(\alpha), \tag{13.32}$$

где $\vec{R}(t)$ — какая-либо первообразная вектор-функции $\vec{r}(t)$.

Пример 13.5. Вычислить определенные интегралы

$$\int\limits_0^1 \vec{r}_1(t)dt, \quad \int\limits_{-1}^{\pi} \vec{r}_2(t)dt,$$

где $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ — вектор-функции из предыдущего примера.

Решение. Согласно формуле Ньютона–Лейбница в векторной форме (13.32) и результатам предыдущего примера, получим

$$\int\limits_0^1 \vec{r}_1(t)dt = \Big[\vec{\imath}e^t(t-1) + \vec{\jmath}\Big(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\Big) - \vec{k}\,\mathrm{arctg}\,t + \vec{C}\Big]\Big|_0^1 =$$

$$= \vec{\imath} + \vec{\jmath}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\Big) + \vec{k}\frac{\pi}{4};$$

$$\int\limits_{-1}^{\pi} \vec{r}_2(t)dt = \big[\vec{\imath}\ln\sqrt{1+t^2} + \vec{\jmath}\frac{1}{2}e^{t^2} + \vec{k}\sin t + \vec{C}\big]\Big|_{-1}^{\pi} =$$

$$= \vec{\imath}\ln\sqrt{\frac{1+\pi^2}{2}} + \vec{\jmath}\frac{1}{2}(e^{\pi^2} - e) - \vec{k}\sin 1.$$

13.2. Простые, параметризуемые и гладкие кривые

Возвращаясь к геометрическому смыслу годографа вектор-функции

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \tag{13.33}$$

будем предполагать, что любым двум различным значениям t_1 и t_2 из отрезка $[\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки $M(t_1)$ и $M(t_2)$ пространства $\mathbb{R}^3$, и обозначим через M множество всех точек $M(x, y, z)$, координаты которых определяются формулами (13.33). Введем правило следования точек на множестве M. Для этого условимся считать, что точка $M(t_2) \in M$ следует за точкой $M(t_1) \in M$ или точка $M(t_1)$ предшествует точке $M(t_2)$, если $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$. Такая договоренность позволяет упорядочить множество M по переменной t.

♦ Упорядоченное множество M точек (13.1) будем называть *простой кривой* L пространства $\mathbb{R}^3$ и записывать уравнение этой кривой или в координатной форме:

$$L = \big\{x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\big\}, \tag{13.34}$$

или в векторной форме:

$$L = \big\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\big\}, \tag{13.35}$$

где вектор-функция $\vec{r}(t)$ определяется как (13.2). Вместе с этим переменную t в уравнениях (13.34), (13.35) будем называть *параметром кривой* L.

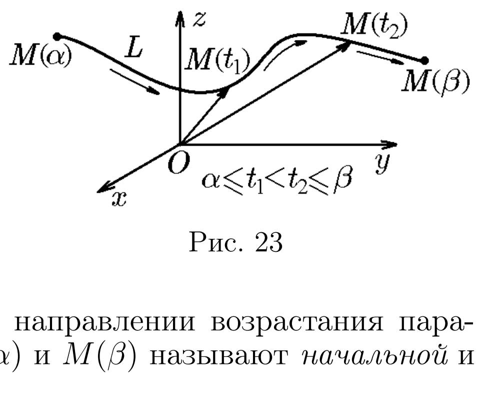


Рис. 23

Таким образом, простую кривую можно считать ориентированной в том смысле, что движение точки вдоль кривой всегда идет в направлении возрастания параметра t (рис. 23). По этой причине точки $M(\alpha)$ и $M(\beta)$ называют *начальной* и *конечной* точками кривой L, соответственно.

Отметим, что если кривая L лежит в некоторой плоскости $\pi \subset \mathbb{R}^3$, то такую кривую называют *плоской*. Для плоской кривой всегда можно выбрать систему координат, в которой координату z в формуле (13.34) можно считать равной нулю, т.е.

$$L = \{x = x(t), y = y(t), z = 0,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}. \tag{13.36}$$

Зачастую равенство $z = 0$ в (13.36) опускают и пишут просто

$$L = \{x = x(t), y = y(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}. \tag{13.37}$$

График функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$, можно рассматривать как простую кривую L, задаваемую уравнением

$$L = \{x = t, y = f(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}. \tag{13.38}$$

Определение простой кривой (13.34) подразумевает взаимно однозначное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ в $\mathbb{R}^3$. Если же из уравнений (13.34) следует, что двум различным значениям t_1 и t_2 из $[\alpha, \beta]$ соответствует одна точка $M(t_1) = M(t_2)$, то в этом случае взаимная однозначность отображения нарушается. Тем не менее, если отрезок $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = \beta$$

можно разбить на отрезки $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$, такие что каждое из непрерывных отображений

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1, n},$$

является взаимно однозначным, то каждый отрезок $[t_{k-1}, t_k]$ будет задавать простую кривую

$$L_k = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in [t_{k-1}, t_k]\}. \tag{13.39}$$

Это означает, что кривую L на отрезке $[\alpha, \beta]$ можно рассматривать как упорядоченную последовательность простых кривых L_k, $k = \overline{1, n}$, таких что конечная точка простой кривой L_k будет совпадать с начальной точкой простой кривой L_{k+1}.

♦ Кривую L будем называть *параметризуемой на отрезке* $[\alpha, \beta]$, если ее можно представить упорядоченной последовательностью простых кривых $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ (13.39). В этом случае пишут $L = L_1 L_2 \ldots L_n$ и говорят, что кривая L разбита на простые кривые L_k (или составлена из L_k), а каждую кривую L_k называют *простой дугой*, или *частью* L (рис. 24,*а*).

♦ Точка M параметризуемой кривой, в которой нарушается взаимная однозначность отображения $[\alpha, \beta]$ в $\mathbb{R}^3$ в силу равенства

$$\overrightarrow{OM}(t_1) = \overrightarrow{OM}(t_2), \tag{13.40}$$

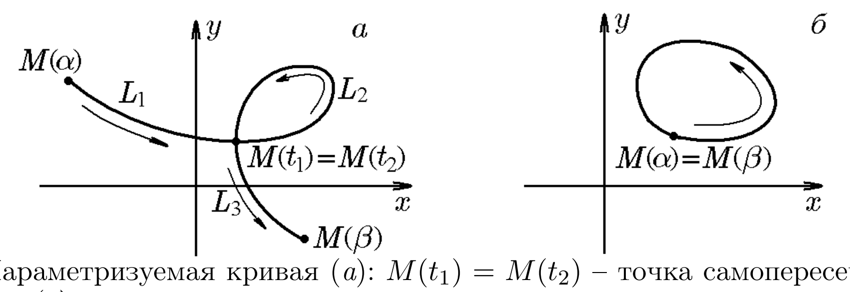


Рис. 24. Параметризуемая кривая (*а*): $M(t_1) = M(t_2)$ – точка самопересечения; простой контур (*б*)

называется *кратной*, или *точкой самопересечения* кривой L (рис. 24,*а*).

⧫ Если равенство (13.40) выполняется при $t_1 = \alpha$ и $t_2 = \beta$, то такую кривую называют *замкнутой*. Замкнутую кривую, не имеющую точек самопересечения, отличных от точки $M(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$, называют *простым контуром* (рис. 24,*б*).

⧫ Если кривая L задается дифференцируемой вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то такая кривая называется *дифференцируемой кривой*. Если в дополнение к этому вектор-функция $\vec{r}\,'(t)$ является непрерывной, то кривую L называют *непрерывно дифференцируемой*.

⧫ Если $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, то точка $M_0 \in L$, где $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{r}(t_0)$, называется *неособой точкой* кривой L, если же $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{0}$, то точка $M_0 \in L$ называется *особой точкой* этой кривой.

Точка $M_0 \in L$ является неособой тогда и только тогда, когда

$$[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2 > 0.$$

⧫ Кривая L называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Если кривая составлена из конечного числа гладких кривых, то такая кривая называется *кусочно гладкой*.

⧫ Гладкая кривая в любой своей точке t_0 имеет касательную, описываемую векторным уравнением

$$\vec{\rho}(s, t_0) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)s, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{13.41}$$

Действительно, гладкая кривая по определению описывается непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$, причем для любой $t_0 \in [\alpha, \beta]$ ее производная $\vec{r}\,'(t) \neq 0$. Тогда

$$\Delta\vec{r}(\Delta t) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0)\Delta t + \vec{\alpha}(\Delta t)\Delta t, \tag{13.42}$$

где в силу (13.19) $\vec{\alpha}(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Из равенства (13.42) и условия $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ следует, что при всех достаточно малых Δt правая часть (13.42) есть ненулевой вектор, и поэтому $\Delta\vec{r} \neq 0$, т.е. существует число $\delta > 0$ такое, что если

$$0 < |\Delta t| < \delta, \quad t_0 + \Delta t \in [\alpha, \beta], \tag{13.43}$$

то $\vec{r}(t_0 + \Delta t) \neq \vec{r}(t_0)$.

Пусть $M_0(t_0)$ и $M(t_0+\Delta t)$ — точки гладкой кривой L. Проведем через эти точки секущую (рис. 25) и покажем, что ее уравнение имеет вид

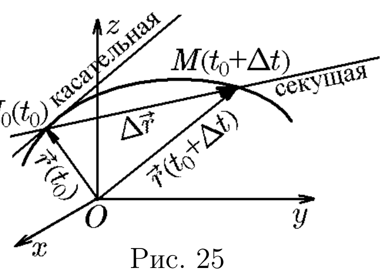


Рис. 25

$$\vec{\rho}(s, t_0, \Delta t) = \vec{r}(t_0) + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}s, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{13.44}$$

Действительно, при выполнении условия (13.44) ненулевой вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ является направляющим вектором секущей M_0M. Ему коллинеарен вектор $\Delta\vec{r}/\Delta t$, следовательно, уравнение секущей можно записать как (13.44).

Поскольку касательная представляет собой предельное положение секущей, то при условии

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0) \neq 0 \tag{13.45}$$

предельный переход в уравнении (13.45) при $\Delta t \to 0$ дает уравнение касательной к кривой L в точке $M_0(t_0)$:

$$\vec{\rho}(s, t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\rho}(s, t_0, \Delta t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)s, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{13.46}$$

Это уравнение совпадает с заявленным в (13.41) и может быть записано в координатной

$$x = x(t_0) + sx'(t_0), \quad y = y(t_0) + sy'(t_0), \quad z = z(t_0) + sz'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{13.47}$$

и канонической

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)} \tag{13.48}$$

формах.

Пример 13.6. Исследовать кривую

$$1)\ L = \{x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = ct,\ t \in [0, 4\pi]\}, \quad a, b, c > 0, \quad t_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$2)\ L = \{x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad R > 0, \quad t_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$3)\ L = \{x = R\cos t,\ y = -R\sin t,\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad R > 0, \quad t_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$4)\ L = \{x = 1 - t,\ y = \sqrt{2t - t^2},\ t \in [0, 2]\}, \quad t_0 = \frac{1}{2};$$

записать уравнение ее касательной в точке $\vec{r}(t_0)$, в этой же точке найти угол между касательной и радиус-вектором.

Решение. 1) Данная кривая представляет собой винтовую линию, расположенную на цилиндрической поверхности с направляющим эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в плоскости $z = 0$ и образующей, параллельной оси Oz (рис. 26,1)).

В силу этого она является простой кривой с начальной точкой $M_0(0) = (a, 0, 0)$ и конечной $M_1(a, 0, 4\pi)$. Движение от начальной точки M_0 к конечной M_1 определяет ее ориентацию (рис. 26,1)). Вычисление $\vec{r}\,'(t)$ дает

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t,\ b\cos t,\ c), \tag{13.49}$$

причем

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t + c^2} > 0.$$

Это означает, что кривая является гладкой, поскольку вектор-функция $\vec{r}(t)$ является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек.

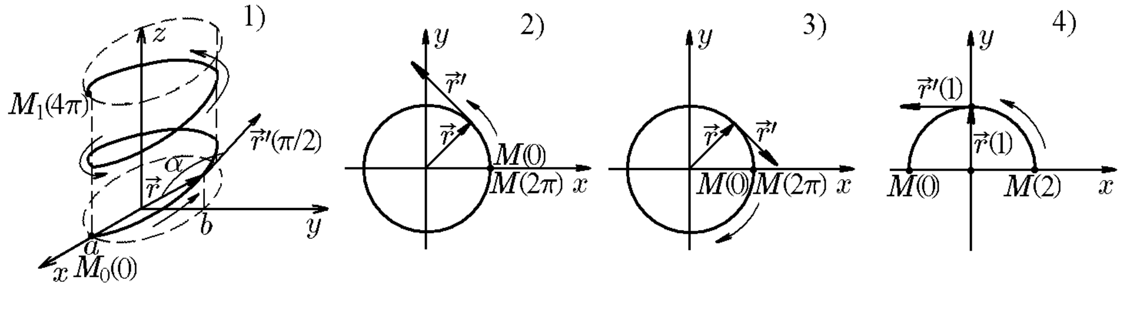


Рис. 26

Чтобы записать уравнение касательной в точке $t_0 = \pi/2$, найдем

$$\vec{r}\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \Big(a\cos\frac{\pi}{2}, b\sin\frac{\pi}{2}, c\frac{\pi}{2}\Big) = \Big(0, b, \frac{c\pi}{2}\Big),\ \Big|\vec{r}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big| = \sqrt{b^2 + \frac{c^2\pi^2}{4}};$$

и

$$\vec{r}\,'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \Big(-a\sin\frac{\pi}{2}, b\cos\frac{\pi}{2}, c\Big) = (-a, 0, c),\ \Big|\vec{r}\,'\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big| = \sqrt{a^2 + c^2}. \tag{13.50}$$

Тогда в силу (13.46) получим векторное уравнение касательной

$$\vec{r} = \vec{r}\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \vec{r}\,'\Big(\frac{\pi}{2}\Big)s,$$

которое в канонической форме (13.48) запишется как

$$\frac{x}{-a} = \frac{y-b}{0} = \frac{z - c\pi/2}{c}.$$

Используя (13.50), найдем угол между $\vec{r}(\pi/2)$ и $\vec{r}\,'(\pi/2)$ (рис. 26,1):

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{r}(\pi/2), \vec{r}\,'(\pi/2))}{|\vec{r}(\pi/2)|\,|\vec{r}\,'(\pi/2)|} = \frac{c^2\pi/2}{\sqrt{b^2 + (c^2\pi^2/4)}\sqrt{a^2+c^2}}.$$

2) В этом случае при изменении t от 0 до 2π точка $M(R\cos t, R\sin t)$ «описывает» окружность радиуса R, двигаясь против часовой стрелки. Так как начальная точка $M(0) = (1,0)$ совпадает с конечной $M(2\pi) = (1,0)$ (рис. 26,2)), то кривая является простым контуром.

Вычисление $\vec{r}\,'(t)$ дает

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-R\sin t,\ R\cos t),$$

причем

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R > 0.$$

Это означает, что простой контур является гладким.

Чтобы записать уравнение касательной в точке $t_0 = \pi/4$, найдем

$$\vec{r}\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \Big(R\cos\frac{\pi}{4}, R\sin\frac{\pi}{4}\Big) = \Big(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\Big),\ \Big|\vec{r}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\Big| = \sqrt{\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2}} = R;$$

$$\vec{r}\,'\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \Big(-R\sin\frac{\pi}{4}, R\cos\frac{\pi}{4}\Big) = \Big(-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\Big),\ \Big|\vec{r}\,'\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\Big| = \sqrt{\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2}} = R. \tag{13.51}$$

Тогда в силу (13.46) имеем векторное уравнение касательной

$$\vec{r} = \vec{r}\Big(\frac{\pi}{4}\Big) + \vec{r}\,'\Big(\frac{\pi}{4}\Big)s, \quad s \in \mathbb{R},$$

которое в канонической форме запишется как

$$\frac{x - R/\sqrt{2}}{-R/\sqrt{2}} = \frac{y - R/\sqrt{2}}{R/\sqrt{2}}$$

или
$$y = \sqrt{2}R - x.$$
Используя (13.51), найдем угол между $\vec{r}(\pi/4)$ и $\vec{r}\,'(\pi/4)$ (рис. 26,2)):
$$\cos\alpha = \frac{(\vec{r}(\pi/4), \vec{r}\,'(\pi/4))}{|\vec{r}(\pi/4)|\,|\vec{r}\,'(\pi/4)|} = 0.$$
Это означает, что векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}\,'(t)$ перпендикулярны, что полностью соответствует результату примера 13.2.

3) Единственное отличие данной кривой от кривой 2) состоит в противоположном направлении обхода простого гладкого контура.

4) Данная кривая представляет собой верхнюю полуокружность единичного радиуса. Действительно, $t = 1 - x$ и, следовательно, $y = \sqrt{2(1-x) - (1-x)^2}$ или
$$y^2 = 2(1-x) - (1-x)^2 = 2 - 2x - 1 + 2x - x^2, \quad y > 0,$$
откуда
$$x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0.$$
В силу этого она является простой кривой с начальной точкой $M_0(0) = (1, 0)$ и конечной $M_1(2) = (-1, 0)$. Движение от начальной точки M_0 к конечной M_1 определяет ее ориентацию (рис. 26,4)).

Вычисление $\vec{r}\,'(t)$ дает
$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t)) = \Big(-1, \frac{1-t}{\sqrt{t(2-t)}}\Big),$$
причем
$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1 + \frac{(1-t)^2}{t(2-t)}} = \frac{1}{\sqrt{t(2-t)}} > 0.$$
Это означает, что кривая является гладкой, поскольку вектор-функция $\vec{r}(t)$ является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек.

Чтобы записать уравнение касательной в точке $t_0 = 1$, найдем
$$\begin{aligned} &\vec{r}(1) = (0, 1), && |\vec{r}(1)| = 1; \\ &\vec{r}\,'(1) = (-1, 0), && |\vec{r}\,'(1)| = 1. \end{aligned} \tag{13.52}$$
Тогда с учетом (13.52) имеем векторное уравнение касательной
$$\vec{r} = \vec{r}(1) + \vec{r}\,'(1)s, \quad s \in \mathbb{R},$$
которое в канонической форме запишется как
$$\frac{x-0}{-1} = \frac{y-1}{0}$$
или
$$y = 1.$$
Поскольку $(\vec{r}(1), \vec{r}\,'(1)) = 0$, то $\vec{r}(1) \perp \vec{r}\,'(1)$, что полностью соответствует результату примера 13.2 (рис. 26,4)).

13.3. Достаточные условия спрямляемости. Производная и дифференциал переменной длины дуги

Пусть кривая L задана вектор-функцией

$$L = \{\vec{r} = \vec{r}(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}. \tag{13.53}$$

Согласно определению (12.2), ее длина определяется как точная верхняя грань множества периметров P всевозможных вписанных в кривую ломаных (см. рис. 18). Проведем разбиение τ_n отрезка $[\alpha, \beta]$ оси t так, что

$$\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_n = \beta. \tag{13.54}$$

Разбиению τ_n будет соответствовать последовательность радиус-векторов

$$\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), ..., \vec{r}(t_k), ...\vec{r}(t_n), \quad t_0 = \alpha, \quad t_n = \beta, \tag{13.55}$$

или упорядоченное множество точек кривой $\{M_k\}_{k=0}^n$:

$$M_0, M_1, ..., M_k, ..., M_n, \tag{13.56}$$

таких что $\overrightarrow{OM}_k = \vec{r}(t_k)$. Соответствующее разбиению τ_n упорядоченное множество точек M_k (13.56) будем называть *M-разбиением* кривой L, поскольку порядок следования точек M_k (13.56) совпадает с порядком следования точек простой кривой L, принятом выше.

Теперь, соединив последовательно точки M_k отрезками

$$M_0M_1,\ M_1M_2,\ ...,\ M_{n-1}M_n,$$

получим ломаную $\mathcal{P}_n$, вписанную в кривую L. Отрезки $M_{k-1}M_k$, составляющие ломаную $\mathcal{P}_n$, будем называть ее *звеньями*, а точки M_k – ее *вершинами*. Все эти построения, приводящие к ломаной $\mathcal{P}_n$, позволяют вычислить ее длину и сформулировать достаточные условия спрямляемости кривой L.

Теорема 13.1 (о достаточных условиях спрямляемости кривой). *Пусть кривая L параметрически задана уравнением* (13.53), *вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывно дифференцируема. Тогда кривая L спрямляема, а для ее длины l справедлива оценка*

$$l \leqslant (\beta - \alpha) \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\vec{r}\,'(t)|. \tag{13.57}$$

Доказательство. Пусть кривая L задана уравнением (13.53). Воспользуемся ее M-разбиением, соответствующим разбиению τ_n отрезка $[\alpha, \beta]$ (рис. 27). Длина l_n ломаной $\mathcal{P}_n$, для которой точки M_k являются вершинами, в силу аддитивного свойства длины найдется как сумма всех ее звеньев, т.е.

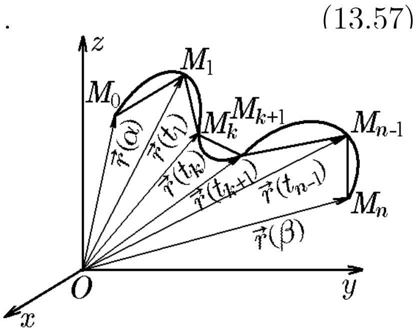


Рис. 27

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} |M_{k-1}M_k|. \tag{13.58}$$

Так как длина k-го звена, т.е. отрезка $M_{k-1}M_k$, равна $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$, то равенство (13.58) примет вид

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|. \tag{13.59}$$

Согласно теореме Лагранжа, для модуля вектор-функции $\vec{r}(t)$ имеем оценку

$$|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| \leqslant |\vec{r}\,'(\zeta_k)|(t_k - t_{k-1}), \quad \zeta_k \in]t_k t_{k-1}[. \tag{13.60}$$

Поскольку вектор-функция $\vec{r}\,'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то модуль ее производной $|\vec{r}\,'(t)|$ также непрерывен и ограничен, т.е.

$$\exists A > 0 : \forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow |\vec{r}\,'(t)| < A, \tag{13.61}$$

где число A, исходя из теоремы Вейерштрасса, можно выбрать в виде

$$A = \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\vec{r}\,'(t)|. \tag{13.62}$$

Так как $|\vec{r}\,'(\zeta_k)| \leqslant A$, то из (13.60) и (13.61) следует, что

$$l_n \leqslant A \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = A \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = A(\beta - \alpha),$$

где число A определяется (13.62).

Итак, множество P длин l_n ломаных $\mathcal{P}_n$, вписанных в L, ограничено сверху, из чего, согласно теореме о точной верхней грани, следует, что L — спрямляемая кривая и выполняется неравенство (13.57).

Формула (13.57) дает оценку длины кривой с фиксированными начальной и конечной точками. Рассмотрим ту часть кривой, у которой начальная точка остается фиксированной, а конечная точка может менять свое положение на кривой L. В этом случае, если конечной точке соответствует произвольное значение параметра $t < \beta$, то длина такой переменной дуги будет функцией параметра t, т.е. $l = l(t)$. Возникает вопрос о скорости изменения длины дуги $l(t)$ в зависимости от изменения параметра t. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 13.2 (о производной переменной длины дуги). *Пусть $l(t)$ — длина той части непрерывно дифференцируемой кривой*

$$L = \{\vec{r} = \vec{r}(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

которая соответствует изменению параметра от α до t. Тогда для любого $t \in [\alpha, \beta]$ существует $l'(t)$, причем

$$l'(t) = |\vec{r}\,'(t)|. \tag{13.63}$$

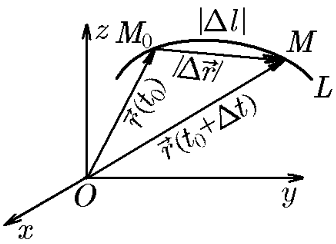


Рис. 28

Доказательство. Пусть M_0 и M — точки кривой L, соответствующие значениям параметра t_0 и $t_0 + \Delta t$. Согласно рис. 28, этим точкам соответствуют два геометрических объекта: дуга $\smile{M_0M}$ и отрезок (или хорда дуги) M_0M. Положив

$$\Delta l = l(t_0 + \Delta t) - l(t_0),$$

длину дуги $\overset{\smile}{M_0M}$ можем записать как $|\overset{\smile}{M_0M}| = |\Delta l|$, а длину хорды как $|M_0M| = |\Delta\vec{r}|$, причем очевидно, что

$$|\Delta\vec{r}| \leqslant |\Delta l|. \tag{13.64}$$

В свою очередь, в силу теоремы 13.1 для величины $|\Delta l|$ справедлива оценка

$$|\Delta l| \leqslant \max_{t\in[t_0,t_0+\Delta t]} |\vec{r}\,'(t)|\,|\Delta t|, \tag{13.65}$$

с помощью которой из (13.64) и (13.65) можно записать

$$\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta l}{\Delta t}\right| \leqslant \max_{t\in[t_0,t_0+\Delta t]} |\vec{r}\,'(t)|. \tag{13.66}$$

Поскольку длина дуги $l(t)$ является возрастающей функцией, то при $\Delta t > 0$ приращение $\Delta l \geqslant 0$, а при $\Delta t < 0$ оно отрицательно: $\Delta l \leqslant 0$. Это означает, что отношение $\Delta l/\Delta t \geqslant 0$, откуда $|\Delta l/\Delta t| = \Delta l/\Delta t$, и тогда

$$\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta l}{\Delta t} \leqslant \max_{t\in[t_0,t_0+\Delta t]} |\vec{r}\,'(t)|. \tag{13.67}$$

По условию теоремы, вектор-функция $\vec{r}\,'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, и поэтому ее модуль $|\vec{r}\,'(t)|$ также является на этом отрезке непрерывной функцией. Но тогда, согласно теореме Вейерштрасса, существует точка $\xi \in [t_0, t_0+\Delta t]$, такая что

$$\max_{t\in[t_0,t_0+\Delta t]} |\vec{r}\,'(t)| = |\vec{r}\,'(\xi)|.$$

Вместе с этим в силу непрерывности функции $|\vec{r}\,'(t)|$ в точке $t = t_0$ правая часть неравенства (13.67) при $\Delta t \to 0$ имеет предел, равный $|\vec{r}\,'(t_0)|$. Кроме этого, по определению производной вектор-функции существует

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = |\vec{r}\,'(t_0)|.$$

С учетом этого, согласно свойствам пределов, из (13.67) следует, что существует

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = l'(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|.$$

В силу произвольности $t_0 \in [\alpha,\beta]$ соотношение (13.63) справедливо.

С помощью дифференциалов формулу (13.63) можно записать как

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dz}{dt}\Big)^2}, \tag{13.68}$$

откуда

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \tag{13.69}$$

♢ В некоторых случаях в качестве начальной точки отсчета длины дуги удобнее выбирать не один из концов кривой, а какую-либо внутреннюю ее точку. Тогда дуги, откладываемые в направлении возрастания параметра, согласно договоренности, считаются положительными, а в направлении убывания параметра — отрицательными. Дуги в этом направлении будем снабжать знаком минус.

Для гладкой кривой L из условия (13.63) следует $dl/dt > 0$ для всех $t \in [\alpha,\beta]$, что означает строго возрастающий характер функции $l = l(t)$. Но тогда, согласно теореме об обратной функции, на отрезке $[0,\mathcal{L}]$, где $\mathcal{L}$ — длина кривой L, определена обратная функция $t = t(l)$, причем $t(l)$ — непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция и

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} > 0.$$

Это означает, что функция $t = t(l)$ является допустимым преобразованием параметра, не нарушающим порядок следования точек, и уравнение кривой L можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t(l)) = \vec{r}(l), \quad 0 \leqslant l \leqslant \mathcal{L}.$$

Это равенство можно рассматривать как параметрическое уравнение кривой L, параметром которого является переменная длина ее дуги l.

♦ Параметр уравнения кривой называют *натуральным*, или *естественным, параметром*, если он с точностью до постоянного слагаемого равен длине дуги этой кривой, отсчитываемой от какой-либо ее точки и в каком-либо выбранном направлении со знаком плюс, а в противоположном – со знаком минус. Естественный параметр обозначают букой l или s. Уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}(l), \quad 0 \leqslant l \leqslant \mathcal{L}, \tag{13.70}$$

натуральным, или *естественным, уравнением кривой* L, соответственно.

Натуральное уравнение кривой (13.70) обладает замечательным свойством:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right| = 1, \tag{13.71}$$

вытекающим из (13.63).

13.4. Формулы для вычисления длины кривой

Теорема 13.3. *Длина $\mathcal{L}$ непрерывно дифференцируемой кривой*

$$L = \{\vec{r} = \vec{r}(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \tag{13.72}$$

выражается формулой

$$\mathcal{L} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}\,'(t)|dt. \tag{13.73}$$

Доказательство. В силу теоремы 13.1 непрерывно дифференцируемая кривая (13.72) спрямляема, а в силу теоремы 13.2 производная (13.63) переменной длины дуги $l(t)$ этой кривой выражается как

$$l'(t) = \frac{dl(t)}{dt} = |\vec{r}\,'(t)|. \tag{13.74}$$

Если $\mathcal{L}$ — длина всей кривой L, то из (13.74) с помощью формулы Ньютона–Лейбница приходим к (13.73):

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}\,'(t)|dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dl(t)}{dt}dt = l(t)\Big|_{\alpha}^{\beta} = l(\beta) - l(\alpha) = \mathcal{L},$$

поскольку $l(\alpha) = 0$ и $l(\beta) = \mathcal{L}$.

Следствие 13.3.1. Если $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, то формула (13.73) примет вид

$$\mathcal{L} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \tag{13.75}$$

Следствие 13.3.2. Если L – плоская кривая $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то формула (13.73) примет вид

$$\mathcal{L} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\mathcal{L} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \tag{13.76}$$

поскольку в этом случае, согласно (13.53),

$$L = \{x = t, y = f(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

и

$$x'_t = 1, \quad y'_t = f'_t = f'_x, \quad dt = dx.$$

Следствие 13.3.3. В случае полярного задания кривой

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

формула (13.73) примет вид

$$\mathcal{L} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\mathcal{L} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \tag{13.77}$$

Действительно, поскольку

$$x(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = \rho(\varphi)\sin\varphi,$$

то

$$x'_\varphi = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi, \quad y'_\varphi = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi,$$

причем

$$(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = [\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi]^2 + [\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi]^2 = \\ = (\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2.$$

Подставив это выражение в (13.73), получим (13.77).

Следствие 13.3.4. В частном случае, когда кривая в полярной системе координат задана в виде $\varphi = \varphi(\rho)$, $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, формула (13.77) преобразуется к формуле

$$\mathcal{L} = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} d\mathcal{L} = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + (\rho\varphi'(\rho))^2} d\rho, \tag{13.78}$$

если учесть, что

$$\rho'(\varphi) = \frac{1}{\varphi'(\rho)}, \quad d\rho = \frac{d\varphi}{\varphi'(\rho)}.$$

Следствие 13.3.5. Длина переменной дуги кривой на промежутке $[t_0, t]$ найдется как

$$\mathcal{L} = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathcal{L} = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt; \tag{13.79}$$

на промежутке $[x_0, x]$

$$\mathcal{L} = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx; \tag{13.80}$$

на промежутке $[\varphi_0, \varphi]$

$$\mathcal{L} = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi \tag{13.81}$$

и т.д.

Следствие 13.3.6. Если $]\alpha, \beta[$ и $]\beta, \gamma[$ — интервалы непрерывной дифференцируемости кривой L (13.72), то общая длина кривой в силу аддитивности определяется по формуле

$$\mathcal{L} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}\,'(t)| dt + \int\limits_{\beta}^{\gamma} |\vec{r}\,'(t)| dt; \tag{13.82}$$

каждый из этих интегралов можно вычислить по формулам (13.77)–(13.81) в зависимости от способа задания кривой на промежутках $]\alpha, \beta[$ и $]\beta, \gamma[$.

Пример 13.7. Найти длину одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t). \tag{13.83}$$

Решение. Выберем ту арку циклоиды, которая соответствует изменению параметра от $t = 0$ до $t = 2\pi$ (рис. 29).

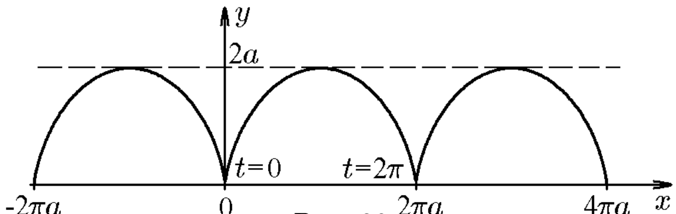


Рис. 29

Тогда по формуле (13.75) с учетом соотношений

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t$$

и

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \frac{1 - \cos t}{2} = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

найдем

$$\mathcal{L} = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int\limits_{0}^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(-1 - 1) = 8a.$$

Пример 13.8. Найти длину одного витка винтовой линии

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = ht \tag{13.84}$$

и записать ее натуральное уравнение.

Решение. Данная кривая представляет собой частный случай кривой, рассмотренной в примере 13.6. Одному витку линии соответствует изменение параметра от $t = 0$ до $t = 2\pi$. Вычислив производные

$$x'_t = -R\sin t, \quad y'_t = R\cos t, \quad z'_t = h \tag{13.85}$$

и подставив их в формулу (13.75), найдем искомую длину

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + h^2} dt =$$

$$= \sqrt{R^2 + h^2} \int\limits_0^{2\pi} dt = \sqrt{R^2 + h^2} t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}.$$

Чтобы найти натуральное уравнение винтовой линии (13.85), запишем длину переменной дуги $l(t)$ при изменении параметра от $t = 0$ до его произвольного значения t. Используя, как и выше, (13.85), получим

$$l(t) = \int\limits_0^{t} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + h^2} dt = \sqrt{R^2 + h^2} t, \tag{13.86}$$

откуда

$$t = \frac{l}{\sqrt{R^2 + h^2}}. \tag{13.87}$$

Подставив (13.87) в (13.84), получим натуральное уравнение винтовой линии, параметром которой является переменная длина дуги l:

$$x = R\cos\frac{l}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \quad y = R\sin\frac{l}{\sqrt{R^2 + h^2}} \quad z = \frac{lh}{\sqrt{R^2 + h^2}}. \tag{13.88}$$

В этих уравнениях величина l меняется от $l = 0$ до $l = T\sqrt{R^2 + h^2}$. Последнее значение вытекает из (13.86): $l(T) = T\sqrt{R^2 + h^2}$.

Легко проверить, что для натурального уравнения винтовой линии (13.85) справедливо равенство $|d\vec{r}/dl| = 1$:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right| = \sqrt{(x'_l)^2 + (y'_l)^2 + (z'_l)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{R^2}{R^2 + h^2}\sin^2\frac{l}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{R^2}{R^2 + h^2}\cos^2\frac{l}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{h^2}{R^2 + h^2}} = 1.$$

Пример 13.9. Найти длину кривых

$$L_1 = \{x = R\cos t,\ y = R\sin t\}, \quad L_2 = \{x = R\cos^3 t,\ y = R\sin^3 t\}, \quad R > 0.$$

Решение. Из курса аналитической геометрии известно, что первая кривая L_1 является окружностью (рис. 30,*а*), а вторая L_2 — астроидой (рис. 30,*б*). При изменении параметра от $t = 0$ до $t = 2\pi$ обе кривые являются замкнутыми. Чтобы найти длину $\mathcal{L}_1$, вычислим

$$x'_t = -R\sin t, \quad y'_t = R\cos t$$

и

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = R > 0, \quad t \in]0, 2\pi[.$$

Тогда по формуле (13.75) найдем

$$\mathcal{L}_1 = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \int\limits_0^{2\pi} R\,dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Заметим, что, во-первых, этот же результат можно получить, используя симметрию кривой, т.е. найти четвертую часть длины окружности при изменении параметра от $t = 0$ до $t = \pi/2$ (рис. 30,*а*):

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \int\limits_0^{\pi/2} R\,dt = \frac{\pi}{2}R,$$

откуда, естественно, $\mathcal{L}_1 = 2\pi R$. А, во-вторых, можно воспользоваться полярной системой координат: $\rho = R$, $\rho' = 0$, и, следовательно, по формуле (13.77):

$$\mathcal{L}_1 = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0}d\varphi = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R$$

получим тот же результат.

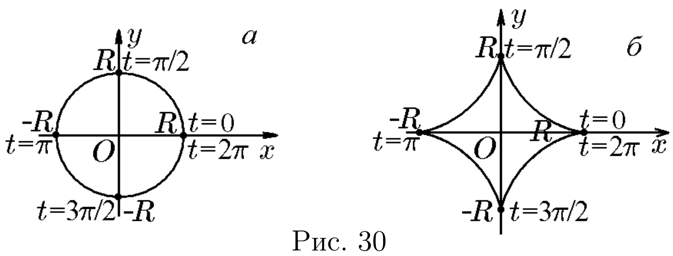


Рис. 30

Чтобы найти длину $\mathcal{L}_2$, вычислим

$$x'_t = -3R\cos^2 t\sin t, \quad y'_t = 3R\sin^2 t\cos t$$

и

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{9R^2\cos^4 t\sin^2 t + 9R^2\sin^4 t\cos^2 t} =$$

$$= 3R\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3R\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t} = 3R|\cos t\sin t| =$$

$$= \begin{cases} 3R\cos t\sin t, & t \in]0, \pi/2[\cup]\pi, 3\pi/2[; \\ -3R\cos t\sin t, & t \in]\pi/2, \pi[\cup]3\pi/2, 2\pi[. \end{cases} \qquad (13.89)$$

Проще всего длину можно найти, воспользовавшись симметрией астроиды (рис. 30,*б*) и вычислив ее четвертую часть при изменении параметра от $t = 0$ до $t = \pi/2$. В этом случае с учетом (13.89) по формуле (13.75) получим

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \int\limits_0^{\pi/2} 3R\cos t \sin t\, dt = 3R\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}R,$$

откуда $\mathcal{L}_2 = 6R$.

При интегрировании по параметру от $t = 0$ до $t = 2\pi$ по формуле (13.75) с обязательным учетом знаков в (13.89) получим тот же результат:

$$\mathcal{L}_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \int\limits_0^{\pi/2} 3R\cos t \sin t\, dt + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (-3R\cos t \sin t)dt +$$

$$+ \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} 3R\cos t \sin t\, dt + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} (-3R\cos t \sin t)dt = \frac{3R}{2}\Big[\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} - \sin^2 t\Big|_{\pi/2}^{\pi} +$$

$$+ \sin^2 t\Big|_{\pi}^{3\pi/2} - \sin^2 t\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\Big] = \frac{3R}{2}[(1-0) - (0-1) + (1-0) - (0-1)] = 6R.$$

Обратим внимание, что интегрирование в (13.75) без учета знаков в (13.89) дает неверный результат:

$$\mathcal{L}_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \int\limits_0^{\pi/2} 3R\cos t \sin t\, dt = \frac{3R}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 13.10. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически

$$x(t) = \int\limits_1^t \frac{\cos\tau}{\tau}d\tau, \quad y(t) = \int\limits_1^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau,$$

от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

Решение. Очевидно, что кривая проходит через начало координат при $t = 1$. Приняв во внимание, что

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

и согласно (11.17),

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_1^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\Big) = \frac{\sin t}{t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_1^t \frac{\cos\tau}{\tau}d\tau\Big) = \frac{\cos t}{t},$$

найдем

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\sin t)/t}{(\cos t)/t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Это означает, что касательная к данной кривой будет вертикальной во всех точках, для которых $\cos t = 0$, т.е. в точках со значениями параметра $t = (1 + 2n)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. ближайшей к началу координат является точка со значением параметра $t = \pi/2$. Таким образом, необходимо найти длину дуги кривой при изменении параметра от $t = 1$ до $t = \pi/2$. По формуле (13.75) эта длина найдется как

$$\mathcal{L} = \int\limits_1^{\pi/2} \sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}\, dt = \int\limits_1^{\pi/2} \sqrt{\Big(\frac{\cos t}{t}\Big)^2 + \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_1^{\pi/2} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2} - \ln 1 = \ln\frac{\pi}{2}.$$

Пример 13.11. Найти длину дуги кривых

$$L_1 = \Big\{y = R\operatorname{ch}\frac{x}{R},\ R > 0,\ x \in [a, b]\Big\};\quad L_2 = \{y^2 = 2px,\ p > 0,\ x \in [0, a],\ a > 0\};$$

$$L_3 = \Big\{x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y,\ y \in [1, e]\Big\}.$$

Решение. Все кривые на указанных промежутках непрерывно дифференцируемы и, следовательно, спрямляемы. Для первой кривой L_1, известной как «цепная линия» (рис. 31,*а*), воспользуемся формулой (13.76), вычислив предварительно

$$y'(x) = \Big(R\operatorname{ch}\frac{x}{R}\Big)' = \operatorname{sh}\frac{x}{R}$$

и

$$\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{R}} = \operatorname{ch}\frac{x}{R} > 0 \text{ для всех } x \in]-\infty, \infty[.$$

Тогда

$$\mathcal{L}_1 = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \int\limits_a^b \operatorname{ch}\frac{x}{R}dx = \frac{1}{R}\operatorname{sh}\frac{x}{R}\Big|_a^b = \frac{1}{R}\Big(\operatorname{sh}\frac{b}{R} - \operatorname{sh}\frac{a}{R}\Big).$$

Положив, например, $a = -1$, $b = 3$, получим

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{R}\Big[\operatorname{sh}\frac{3}{R} - \operatorname{sh}\Big(-\frac{x}{R}\Big)\Big] = \frac{1}{R}\Big(\operatorname{sh}\frac{3}{R} + \operatorname{sh}\frac{1}{R}\Big).$$

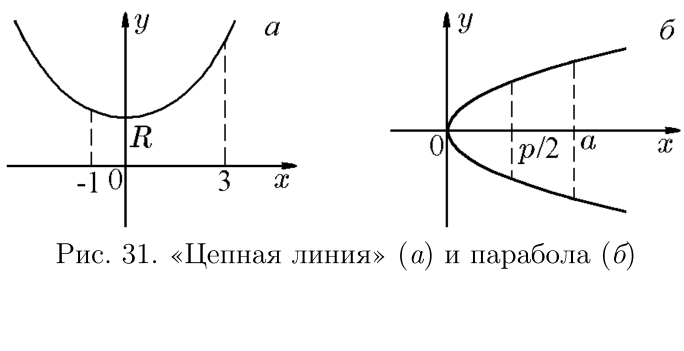


Рис. 31. «Цепная линия» (*а*) и парабола (*б*)

Для второй кривой L_2, являющейся параболой (рис. 31,*б*), воспользуемся ее симметрией относительно оси Ox. Тогда по формуле (13.76), вычислив предварительно

$$y'_x = (\sqrt{2px})' = \sqrt{\frac{p}{2x}}$$

и

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\frac{p}{2x}} > 0 \text{ для всех } x \in [0,a],$$

найдем длины двух симметричных веток:

$$\mathcal{L}_2 = 2\int\limits_0^a \sqrt{1+(y'_x)^2}dx = 2\int\limits_0^a \sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx = 2\int\limits_0^a \sqrt{\frac{p+2x}{2x}}dx =$$
$$= 2\int\limits_0^a \sqrt{p+(\sqrt{2x})^2}\frac{dx}{\sqrt{2x}} = 2\int\limits_0^a \sqrt{p+(\sqrt{2x})^2}d(\sqrt{2x}).$$

После замены переменной $\sqrt{2x} = t$ с учетом результатов примера 3.18 для интеграла по новой переменной t получим

$$\mathcal{L}_2 = 2\int\limits_0^{\sqrt{2a}} \sqrt{p+t^2}dt = \left[t\sqrt{p+t^2} + p\ln(t+\sqrt{p+t^2})\right]\Big|_0^{\sqrt{2a}} =$$
$$= 2\sqrt{a\Big(a+\frac{p}{2}\Big)} + p\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+p/2}}{\sqrt{p/2}}.$$

Положив здесь, например $a = p/2$, будем иметь

$$\mathcal{L}_2 = 2\sqrt{p\frac{p}{2}} + p\ln\frac{\sqrt{p/2}+\sqrt{p}}{\sqrt{p/2}} = p\big[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\big]. \tag{13.90}$$

Для третьей кривой L_3 в качестве переменной интегрирования возьмем y. Формула (13.76) в этом случае примет вид

$$\mathcal{L}_3 = \int\limits_0^e \sqrt{1+(x'(y))^2}dy,$$

а поскольку

$$x'(y) = \Big(\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y\Big)' = \frac{1}{2}\Big(y - \frac{1}{y}\Big)$$

и

$$\sqrt{1+(x'(y))^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\Big(y-\frac{1}{y}\Big)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\Big(y+\frac{1}{y}\Big)^2} = \frac{1}{2}\Big|y+\frac{1}{y}\Big| = \frac{1}{2}\Big(y+\frac{1}{y}\Big), \quad x \in]1,e[,$$

то

$$\mathcal{L}_3 = \int\limits_0^e \sqrt{1+(x'(y))^2}dy = \int\limits_0^e \frac{1}{2}\Big(y+\frac{1}{y}\Big)dy = \frac{1}{2}\Big(\frac{y^2}{2}+\ln y\Big)\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

Пример 13.12. Найти длину дуги кривых

$$L_1 = \{\rho = R\varphi,\ R > 0, \varphi \in [0, \alpha]\}; \quad L_2 = \{\rho = R(1 + \cos\varphi),\ R > 0\};$$
$$L_3 = \Big\{\rho = \frac{R}{1 + \cos\varphi},\ R > 0, |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\Big\}; \quad L_4 = \Big\{\varphi = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big),\ 1 \leqslant \rho \leqslant 3\Big\}.$$

Решение. Все кривые на указанных промежутках непрерывно дифференцируемы и, следовательно, спрямляемы. Для первой кривой L_1, известной как спираль Архимеда (рис. 32,*а*), воспользуемся формулой (13.77), вычислив предварительно

$$\rho'(\varphi) = (R\varphi)' = R$$

и

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} = \sqrt{R^2\varphi^2 + R^2} = R\sqrt{1 + \varphi^2} > 0 \text{ для всех } \varphi \in [0, \alpha].$$

Тогда

$$\mathcal{L}_1 = \int\limits_0^\alpha \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi = \int\limits_0^\alpha R\sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi =$$
$$= \frac{R}{2}\big[\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \ln\big(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}\big)\big]\Big|_0^\alpha =$$
$$= \frac{R}{2}\big[\alpha\sqrt{1 + \alpha^2} + \ln\big(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}\big)\big].$$

Вторая кривая L_2 при изменении азимутального угла φ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ является замкнутой линией, называемой кардиоидой (рис. 32,*б*). Чтобы найти ее длину, вычислим

$$\rho'(\varphi) = [R(1 + \cos\varphi)]' = -R\sin\varphi$$

и

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} = \sqrt{R^2(1 + \cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi} = \sqrt{R(2 + 2\cos\varphi)} =$$
$$= 2R\sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}} = 2R\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2R\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big| = \begin{cases} 2R\cos\dfrac{\varphi}{2} & \text{для всех } \varphi \in [0, \pi]; \\ -2R\cos\dfrac{\varphi}{2} & \text{для всех } \varphi \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \tag{13.91}$$

Проще всего длину кардиоиды можно найти, воспользовавшись ее симметрией относительно оси Ox (рис. 32,*б*) и вычислив половину ее длины в верхней

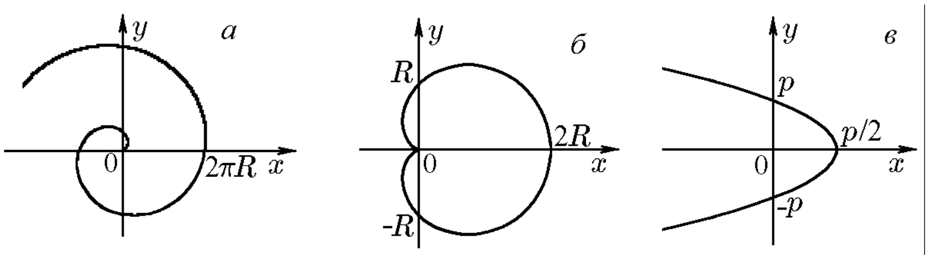


Рис. 32. «Спираль Архимеда» (*а*); кардиоида (*б*) и парабола (*в*)

полуплоскости при изменении азимутального угла φ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$. В этом случае с учетом (13.91) по формулам (13.77) найдем

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi = \int\limits_0^{\pi} 2R\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4R\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4R,$$

откуда $\mathcal{L}_2 = 8R$.

При интегрировании по азимутальному углу от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ по формуле (13.77) с обязательным учетом знаков в (13.91) получим тот же результат:

$$\mathcal{L}_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi = \int\limits_0^{\pi} 2R\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\Big(-2R\cos\frac{\varphi}{2}\Big)d\varphi =$$

$$= 4R\Big[\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - \sin\frac{\varphi}{2}\Big]\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4R[(1-0)-(0-1)] = 8R.$$

Третья кривая L_3 является параболой, заданной в полярных координатах (рис. 32,*в*). В декартовых координатах ее уравнение имеет вид

$$y^2 = -2p\Big(x - \frac{p}{2}\Big).$$

Длину дуги кривой L_3 найдем в полярных координатах по формуле (13.77), вычислив предварительно

$$\rho'(\varphi) = \Big(\frac{p}{1+\cos\varphi}\Big)' = \frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$$

и

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} = \sqrt{\frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2}\Big[1 + \frac{\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}\Big]} = p\sqrt{\frac{2(1+\cos\varphi)}{(1+\cos\varphi)^4}} = p\sqrt{\frac{2}{2^3[(1+\cos\varphi)/2]^3}} =$$

$$= \frac{p}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^6(\varphi/2)}} = \frac{p}{2|\cos^3(\varphi/2)|} = \frac{p}{2\cos^3(\varphi/2)} > 0$$

для всех $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Тогда

$$\mathcal{L}_3 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{p}{2\cos^3(\varphi/2)}d\varphi = p\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d(\varphi/2)}{\cos^3(\varphi/2)}.$$

После замены переменной $\varphi = 2t$ с учетом результатов примера 3.19 [см. также пример 8.6 (формула (8.14) при $\alpha = 0$ и $\beta = -3$)] для интеграла по новой переменной получим

$$\mathcal{L}_3 = p\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d(\varphi/2)}{\cos^3(\varphi/2)} = p\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{p}{2}\Big[\ln\operatorname{tg}\Big(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\Big) + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\Big]\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{p}{2}\Big[\ln\frac{\operatorname{tg}(3\pi/8)}{\operatorname{tg}(\pi/8)} + \frac{\sin(\pi/4)}{\cos^2(\pi/4)} - \frac{\sin(-\pi/4)}{\cos^2(\pi/4)}\Big] =$$
$$= \frac{p}{2}\Big[\ln\frac{[1-\cos(3\pi/4)]/\sin(3\pi/4)}{[1-\cos(\pi/4)]/\sin(\pi/4)} + 2\frac{1/\sqrt{2}}{1/2}\Big] =$$
$$= \frac{p}{2}\Big[\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{4}{\sqrt{2}}\Big] = \frac{p}{2}[\ln(\sqrt{2}+1)^2 + 2\sqrt{2}] = p[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})].$$

Здесь мы воспользовались известной тригонометрической формулой

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Заметим, что в примере 13.11 (формула (13.90)) для такой же дуги параболы этот же результат в декартовой системе координат был получен более просто.

Чтобы вычислить длину дуги четвертой кривой L_4, воспользуемся формулой (13.78), вычислив предварительно

$$\varphi'(\rho) = \Big[\frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\Big]' = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\rho^2}\Big)$$

и

$$\sqrt{1+[\rho\varphi'(\rho)]^2} = \sqrt{1 + \Big[\frac{\rho}{2}\Big(1-\frac{1}{\rho^2}\Big)\Big]^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+\Big(\rho-\frac{1}{\rho}\Big)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\Big(1+\frac{1}{\rho}\Big)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big|\rho+\frac{1}{\rho}\Big| = \frac{1}{2}\Big(\rho+\frac{1}{\rho}\Big) > 0$$

для всех $\rho \in]0,\infty[$. Тогда

$$\mathcal{L}_4 = \int\limits_1^3 \frac{1}{2}\Big(\rho+\frac{1}{\rho}\Big)d\rho = \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho^2}{2} + \ln\rho\Big)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\Big(\frac{9}{2} + \ln 3 - \frac{1}{2} - \ln 1\Big) = \frac{1}{2}(4+\ln 3).$$

Пример 13.13. Доказать, что длина эллипса $L_1 = \{x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi]\}$ равна длине одной волны синусоиды $L_2 = \{y = \sqrt{a^2-b^2}\sin(x/b), x \in [0, 2\pi b]\}$.

Решение. Длина эллипса $\mathcal{L}_1$ по формуле (13.75) равна

$$\mathcal{L}_1 = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = 2\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt =$$
$$= 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = 4\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt. \qquad (13.92)$$

Здесь мы воспользовались четностью функций $\sin^2 t$, $\cos^2 t$ и их периодичностью.

Длина одной волны синусоиды $\mathcal{L}_2$ по формуле (13.76) равна

$$\mathcal{L}_2 = \int\limits_0^{2\pi b}\sqrt{1+(y')^2}dx = \int\limits_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}dx = \int\limits_0^{2\pi b}\sqrt{b^2\sin^2\frac{x}{b} + a^2\cos^2\frac{x}{b}}d\Big(\frac{x}{b}\Big).$$

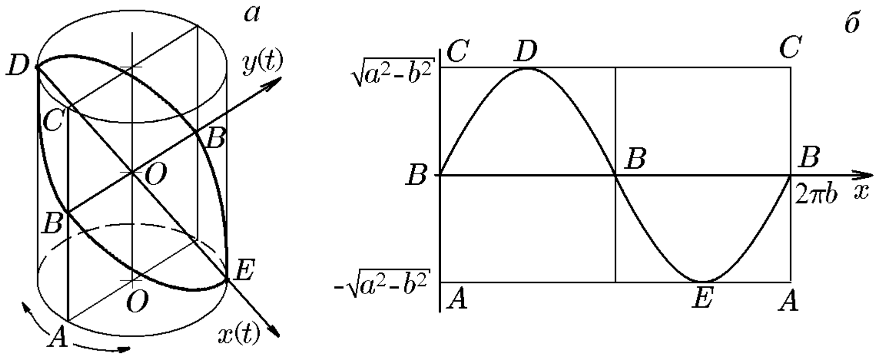


Рис. 33

Замена $x = bz$ дает

$$\mathcal{L}_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{b^2 \sin^2 z + a^2 \cos^2 z} dz = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 \sin^2 z + a^2 \cos^2 z} dz. \tag{13.93}$$

Еще одна замена $(\pi/2) - z = t$ позволяет записать

$$\mathcal{L}_2 = 4 \int\limits_{\pi/2}^{0} \sqrt{b^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}(-dt) = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt. \tag{13.94}$$

Сравнение выражений (13.92) и (13.94) приводит к заявленному равенству

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2. \tag{13.95}$$

Любопытно, что это равенство имеет весьма наглядную геометрическую интерпретацию. Действительно, рассмотрим прямой круговой цилиндр радиуса b. Как известно, линией пересечения его поверхности с плоскостью является окружность радиуса b, если плоскость перпендикулярна оси цилиндра, и эллипс, если плоскость сечения образует с осью цилиндра некоторый угол α. Этот угол α определяет эксцентриситет эллипса $\varepsilon < 1$ и, соответственно, его большую полуось $a = b/\sqrt{1-\varepsilon^2}$ (рис. 33,*а*). Если теперь разрезать цилиндрическую поверхность по образующей ABC, проходящей через вершину малой оси, и развернуть, то эллипс преобразуется в синусоиду $y = \sqrt{a^2-b^2}\sin(x/b)$ (рис. 33,*б*). Таким образом, синусоида на рис. 33,*б* представляет собой развертку эллипса на рис. 33,*а*. Естественно, что их длины должны совпадать: $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Заметим, что, доказав равенство длины эллипса и длины одной волны синусоиды, само значение этой длины мы записали посредством определенного интеграла (13.94), который не вычислили. Дело в том, что первообразная соответствующего неопределенного интеграла не выражается в элементарных функциях, потому применение формулы Ньютона–Лейбница требует использования дополнительного математического аппарата. Неопределенные интегралы, не не выражающиеся через элементарные функции, мы назвали «неберущимися». Рассматриваемый в примере интеграл относится к «неберущимся» интегралам вида (8.29), которые мы назвали *эллиптическими*.

Эллиптические интегралы (8.29) можно упростить подстановкой $z = \sin\varphi$, предложенной Лежандром. После такой замены эллиптические интегралы преобразуются к эллиптическим интегралам 1-го, 2-го и 3-го рода в форме Лежандра:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin\varphi}d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{13.96}$$

Кроме этого, если считать, что интегралы (13.96) при $\varphi = 0$ обращаются в нуль, и тем самым фиксировать содержащиеся в них произвольные постоянные, то получатся вполне определенные функции от φ, имеющие обще принятые обозначения, предложенные Лежандром:
эллиптические интегралы (функции) 1-го рода

$$F(k,\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \tag{13.97,a}$$

эллиптические интегралы (функции) 2-го рода

$$E(k,\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi; \tag{13.97,$б$}$$

эллиптические интегралы (функции) 3-го рода

$$\Pi(n,k,\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{13.97,$в$}$$

В этих интегралах, помимо переменной φ, присутствует величина $0 \leqslant k \leqslant 1$, называемая их *модулем*, и комплексная в общем случае величина n, называемая *характеристикой*.

Для эллиптических интегралов (13.97) были составлены обширные таблицы и изучены их свойства. Благодаря этому эллиптические интегралы (13.97) применяются в математическом анализе и приложениях на равных правах с элементарными функциями.

Следует отметить, что для приложений из интегралов (13.97) особенно часто используются первые два (13.97,a) и (13.97,$б$) при $\varphi = \pi/2$. Такие интегралы называют *полными эллиптическими интегралами* и обозначают как

$$K(k) = F\Big(k, \frac{\pi}{2}\Big) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \tag{13.98,a}$$

$$E(k) = E\Big(k, \frac{\pi}{2}\Big) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{13.98,$б$}$$

Теперь, имея в распоряжении полные эллиптические интегралы (13.98), вернемся к формуле (13.93) для определения длины $\mathcal{L}$ эллипса с полуосями a и b:

$$\mathcal{L} = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt.$$

Этот интеграл простейшим преобразованием сводится к полному эллиптическому интегралу 2-го рода (13.98,*б*):

$$\mathcal{L} = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t)}dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}dt =$$

$$= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}dt = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}dt, \tag{13.99}$$

где величина $\varepsilon = \sqrt{(a^2-b^2)/a^2}$ представляет собой эксцентриситет эллипса, и поскольку $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, то длину эллипса можно записать как

$$\mathcal{L} = 4aE(\varepsilon), \tag{13.100}$$

где $E(\varepsilon)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода (13.98,*б*).

Таким образом, длина эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{13.101}$$

согласно (13.100), определяется через полный эллиптический интеграл $E(\varepsilon)$ (именно поэтому такие интегралы называют эллиптическими). Если учесть, что при $\varepsilon = 0$ эллипс (13.101) вырождается в окружность радиуса a:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

а частное значение полного эллиптического интеграла $E(0) = \pi/2$, то формула (13.100) для длины эллипса переходит в известную формулу для длины окружности

$$\mathcal{L} = 4aE(0) = 4a\frac{\pi}{2} = 2\pi a.$$

С другой стороны, если при заданной большой полуоси a эллипса его эксцентриситет $\varepsilon \to 1$, то эллипс вырождается в отрезок $[-a, a]$, который проходится в прямом и обратном направлениях, т.е. дважды. А поскольку частное значение полного эллиптического интеграла $E(1) = 1$, то формула (13.100) дает удвоенную длину отрезка $[-a, a]$, т.е.

$$\mathcal{L} = 4aE(1) = 4a.$$

Пример 13.14. Найди длину эллипса

$$L_1: \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{23} = 1; \quad L_2: \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Решение. В первом случае полуоси эллипса очень близки по своим значением: $a = \sqrt{25} = 5$, $b = \sqrt{23} = 4{,}8$, и, следовательно, форма эллипса очень близка к окружности (рис. 34,*а*). Количественной характеристикой его формы является эксцентриситет, равный

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{25-23}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5} \approx 0{,}28.$$

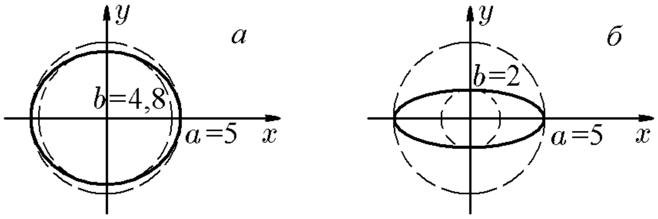


Рис. 34

Тогда по формуле (13.100) длина первого эллипса с учетом частного значения полного эллиптического интеграла $E(0{,}28) \approx 1{,}53$ найдется как

$$\mathcal{L}_э = 4aE(\varepsilon) \approx 4 \cdot 5E(0{,}28) \approx 4 \cdot 5 \cdot 1{,}53 = 30{,}6.$$

Для сравнения найдем длину окружности радиусом $a = 5$:

$$\mathcal{L}_a = 2\pi a \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$$

и окружности радиусом $b = 4{,}8$:

$$\mathcal{L}_b = 2\pi a \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}8 = 30{,}1.$$

Это позволяет записать оценку длины эллипса

$$\mathcal{L}_b = 30{,}1 < \mathcal{L}_э = 30{,}6 < \mathcal{L}_a = 31{,}4.$$

Полуоси второго эллипса $a = \sqrt{25} = 5$, $b = \sqrt{4} = 2$ сильно отличаются друг от друга. Поскольку эксцентриситет

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{25 - 4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}92$$

в данном случае близок к единице, то это говорит о большой «сплющенности» (рис. 34,*б*). Применение формулы (13.100) для второго эллипса с учетом частного значения полного эллиптического интеграла $E(0{,}92) \approx 1{,}08$ найдется как

$$\mathcal{L}_э = 4aE(\varepsilon) = 4 \cdot 5E(0{,}92) = 4 \cdot 5 \cdot 1{,}08 = 21{,}6.$$

Как и выше, для сравнения запишем длину окружности радиуса $a = 2$:

$$\mathcal{L}_a = 2\pi a \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$$

и окружности радиусом $b = 2$:

$$\mathcal{L}_b = 2\pi a \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}6.$$

Это позволяет записать оценку длины эллипса

$$\mathcal{L}_b = 12{,}6 < \mathcal{L}_э = 21{,}6 < \mathcal{L}_a = 31{,}4,$$

из которой следует, что длина эллипса во втором случае сильно отличается от длины как одной, так и другой окружности, тогда как для первого эллипса это различие было незначительным.

Чтобы найти частные значения полного эллиптического интеграла $E(k)$, мы воспользовались «Справочником по специальным функциям» [47].

В заключение сформулируем один частный подход к выводу формул для вычисления длины кривой. Так, при выводе формулы (13.73) мы исходили из общего определения (12.2). В частном случае незамкнутой кривой можно показать, что ее длина является не только точной верхней гранью множества всех периметров P вписанных в кривую L ломаных, но и попросту пределом периметра $\mathcal{P}_n$ ломаной P_n, вписанной в кривую, т.е.

$$\mathcal{L} = \sup(P(L)) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_l \to 0}} \mathcal{P}_n \tag{13.102}$$

при условии, что длина Δl_i наибольшего звена ломаной $\mathcal{P}_n$ стремится к нулю.

Отметим, что определение длины в виде предела (13.102) для замкнутой кривой не может быть применено безоговорочно. Дело в том, что в случае замкнутой кривой даже при соблюдении условия $\max \Delta l_i \to 0$ ничто не мешает ломаной P_n стягиваться в точку, а ее периметру $\mathcal{P}_n$ стремиться к нулю, как это показано на рис. 35,*а*. Напротив, для незамкнутой кривой убывание длины максимального звена обеспечивает более тесное примыкание всех хорд ломаной к своим дугам, поэтому-то и естественно предел ее периметра $\mathcal{P}_n$ принять за длину всей дуги (рис. 35,*б*). В этом случае, исходя из предела (13.102), формулу для вычисления длины кривой можно получить с помощью интегральной суммы (10.2), не обращаясь к понятию производной или дифференциала переменной длины дуги.

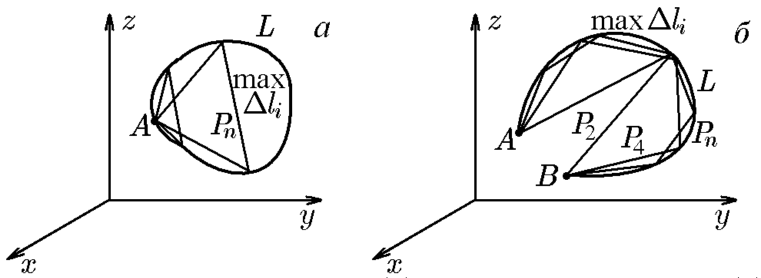


Рис. 35. Замкнутый контур (*а*) и незамкнутая кривая (*б*)

Действительно, для непрерывно дифференцируемой кривой

$$L = \{x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

воспользуемся разбиением τ_n отрезка $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_n = \beta,$$

которому будет соответствовать M-разбиение кривой L точками

$$M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)), ..., M_k(x(t_k), y(t_k), z(t_k)), ..., M_n(x(t_n), y(t_n), z(t_n)).$$

Соединив последовательно точки M_k, получим звенья $M_{k-1}M_k$, $k = \overline{1, n}$, составляющие ломаную P_n. Длину звена, соединяющего вершины $M_{k-1}(x(t_{k-1}), y(t_{k-1}))$ и $M_k(x(t_k), y(t_k))$, обозначим через Δl_k, тогда

$$\Delta l_k = \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2},$$

и, следовательно, периметр $\mathcal{P}_n$ ломаной P_n найдется суммой

$$\mathcal{P}_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2}. \tag{13.103}$$

Но для непрерывно дифференцируемых функций по формуле конечных приращений имеем

$$\begin{aligned} x(t_k)-x(t_{k-1})&=x'(\zeta_{1k})(t_k-t_{k-1}), && t_{k-1}<\zeta_{1k}<t_k;\\ y(t_k)-y(t_{k-1})&=y'(\zeta_{2k})(t_k-t_{k-1}), && t_{k-1}<\zeta_{2k}<t_k;\\ z(t_k)-z(t_{k-1})&=z'(\zeta_{3k})(t_k-t_{k-1}), && t_{k-1}<\zeta_{3k}<t_k, \end{aligned}$$

поэтому длину хорды Δl_k в соотношении (13.103) можно записать как

$$\Delta l_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(\zeta_{1k})]^2+[y'(\zeta_{2k})]^2+[z'(\zeta_{3k})]^2}(t_k-t_{k-1})$$

или

$$\Delta l_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(\zeta_k)]^2+[y'(\zeta_k)]^2+[z'(\zeta_k)]^2}\Delta t_k+\gamma_k\Delta t_k, \tag{13.104}$$

где

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1};$$
$$\gamma_k=\sqrt{[x'(\zeta_{1k})]^2+[y'(\zeta_{2k})]^2+[z'(\zeta_{3k})]^2}-\sqrt{[x'(\zeta_k)]^2+[y'(\zeta_k)]^2+[z'(\zeta_k)]^2}, \tag{13.105}$$

а сам периметр $\mathcal{P}_n$, соответственно,

$$\mathcal{P}_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(\zeta_k)]^2+[y'(\bar\zeta_k)]^2+[z'(\zeta_k)]^2}\Delta t_k+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Delta t_k. \tag{13.106}$$

Покажем, как из определения (13.102) с учетом (13.106) можно вывести формулу (13.75):

$$\mathcal{L}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt. \tag{13.107}$$

Заметим, что первое слагаемое в (13.106) представляет собой интегральную сумму

$$\mathcal{L}_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(\zeta_k)]^2+[y'(\zeta_k)]^2+[z'(\zeta_k)]^2}\Delta t_k, \tag{13.108}$$

которая в пределе $\max\Delta l_k\to 0$ $(n\to\infty)$ действительно дает интеграл (13.107). Согласно теореме 10.3, последний интеграл существует, так как функции $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ непрерывны.

Перейдем теперь к рассмотрению второго слагаемого в сумме (13.106), задающей $\mathcal{P}_n$. Для его оценки воспользуемся неравенством

$$\left|\sqrt{\sum_{k=1}^{m}a_k^2}-\sqrt{\sum_{k=1}^{m}b_k^2}\right|<\sum_{k=1}^{m}|a_k-b_k|, \tag{13.109}$$

где a_k, b_k — произвольные вещественные числа.

Прежде чем воспользоваться этим неравенством, докажем его. С помощью простейших тождественных преобразований

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}a_k^2}-\sqrt{\sum_{k=1}^{m}b_k^2}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2-\sum\limits_{k=1}^{m}b_k^2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2}+\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}b_k^2}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}(a_k^2-b_k^2)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2}+\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}b_k^2}}=$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{m}(a_k+b_k)(a_k-b_k)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2}+\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}b_k^2}},$$

учитывая, что каждый множитель

$$\frac{a_k+b_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2}+\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}b_k^2}}$$

меньше единицы по абсолютной величине, можем записать

$$\left|\sqrt{\sum_{k=1}^{m}a_k^2}-\sqrt{\sum_{k=1}^{m}b_k^2}\right| < \sum_{k=1}^{m}|a_k-b_k|,$$

что и требовалось доказать.

Доказав неравенство (13.109), применим его к оценке величины γ_k:

$$|\gamma_k| < |x'(\zeta_{1k})-x'(\zeta_k)|+|y'(\zeta_{2k})-y'(\zeta_k)|+|z'(\zeta_{3k})-z'(\zeta_k)|,\ \zeta_k,\zeta_{1k},\zeta_{2k},\zeta_{3k}\in[t_k,t_{k-1}].$$

В силу непрерывности функций $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ при достаточно малых значениях разности $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ каждое слагаемое в правой части будет меньше $\varepsilon/3$, где ε — любое заранее заданное положительное число, а потому и получим, что $|\gamma_k| < \varepsilon$, каково бы ни было k. Но тогда

$$\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|\Delta t_k < \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k = \varepsilon(\beta-\alpha),$$

и, следовательно,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\(\max\Delta t_k\to 0)}}\mathcal{P}_n = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\max\Delta t_k\to 0)}}\mathcal{L}_n + \lim_{\substack{n\to\infty\\(\max\Delta t_k\to 0)}}\Delta_k\Delta t =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt = \mathcal{L}$$

в полном соответствии с утверждениями (13.102) и (13.107).

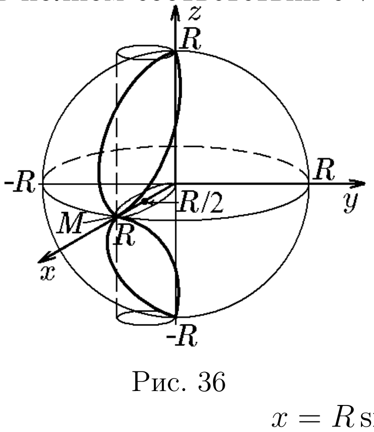


Рис. 36

Аналогичным образом, используя свойство аддитивности длины кривой, можно доказать справедливость формулы (13.107) для замкнутого контура.

В заключение рассмотрим задачу о вычислении длины кривой в самой общей постановке: пространственная кривая является замкнутой, имеет точку самопересечения и требует использования полного эллиптического интеграла $E(\varepsilon)$.

Пример 13.15. Найти длину кривой Вивиани

$$x = R\sin^2 t,\quad y = R\sin t\cos t,\quad z = R\cos t.$$

Решение. Поскольку функция $x = R\sin^2 t$ периодична с периодом $T = \pi$, функция $y = R\sin t\cos t = \frac{1}{2}R\sin 2t$ периодична с периодом $T = \pi$, а функция $z = R\cos t$ периодична с периодом $T = 2\pi$, то кривая Вивиани является замкнутой на отрезке $[0, 2\pi]$ и имеет точку самопересечения $M(R, 0, 0)$ при $t_1 = \pi/2$ и $t_2 = 3\pi/2$. Тогда по формуле (13.75) с учетом

$$x'(t) = 2R\sin t\cos t, \quad y'(t) = R(\cos^2 t - \sin^2 t),$$
$$z'(t) = -R\sin t,$$

найдем

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4R^2\sin^2 t\cos^2 t + R^2(\cos^2 t - \sin^2 t)^2 + R^2\sin^2 t}dt =$$
$$= R\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 + \sin^2 t}dt = R\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}dt.$$

Воспользовавшись четностью и периодичностью функции $1 + \sin^2 t$, запишем

$$\mathcal{L} = R\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}dt = 2R\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}dt = 4R\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 t}dt. \qquad (13.110)$$

С учетом очевидного равенства

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 t}dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 t}dt$$

и элементарного тригонометрического соотношения $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ получим

$$\mathcal{L} = 4R\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 t}dt = 4R\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 t}dt = 4R\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{2 - \sin^2 t}dt =$$
$$= 4\sqrt{2}R\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}dt = 4\sqrt{2}RE\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \approx 4\sqrt{2}\cdot 1{,}35R \approx 7{,}6R.$$

Легко проверить, что кривая Вивиани является линией пересечения сферической и цилиндрической поверхностей. Их уравнения можно установить, вычислив

$$x^2 + y^2 = R^2(\sin^4 t + \sin^2 t\cos^2 t) = R^2\sin^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2\sin^2 t = Rx$$

и

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2.$$

Таким образом, кривая Вивиани является линией пересечения цилиндрической поверхности

$$x^2 + y^2 = Rx \text{ или } \Big(x - \frac{R}{2}\Big)^2 + y^2 = \Big(\frac{R}{2}\Big)^2$$

и сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Эта кривая имеет две плоскости симметрии: $y = 0$ и $z = 0$ (рис. 36), поэтому ее длину можно найти, вычислив длину одной ее четверти, как в формуле (13.110).

14. Вычисление площади плоской фигуры

14.1. Условия квадрируемости и классы квадрируемых плоских фигур

Выше площадь произвольной плоской фигуры мы определили через площади многоугольников. Более детальное рассмотрение этого вопроса связано, как и в случае кривой, с использованием декартовой системы координат и методов аналитической геометрии. Оказывается, что в такой постановке задачи удобнее вместо многоугольников воспользоваться клеточными фигурами, составленными из прямоугольников.

♦ *Прямоугольником* будем называть множество точек, которое в декартовых координатах задается как

$$K = \{(x, y) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}, \tag{14.1}$$

или множество, получаемое из K (14.1) удалением всей или части границы множества K. Число $S = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ будем называть *площадью прямоугольника* K независимо от того, принадлежат или не принадлежат множеству K его граничные точки (точки периметра рис. 37,*а*).

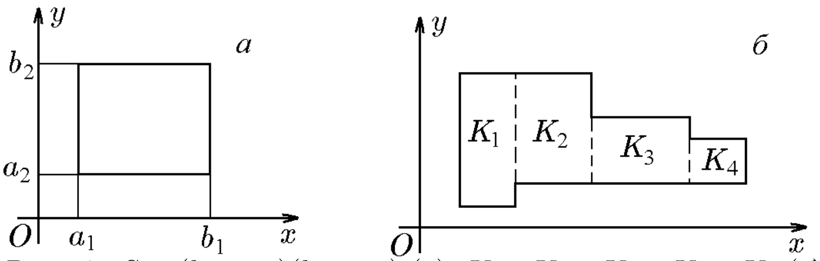


Рис. 37. $S = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ (*а*); $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ (*б*)

♦ Плоскую фигуру, представляющую собой объединение конечного числа непересекающихся прямоугольников, будем называть *клеточной* (рис. 37,*б*). *Площадью клеточной фигуры* будем называть сумму площадей составляющих ее прямоугольников.

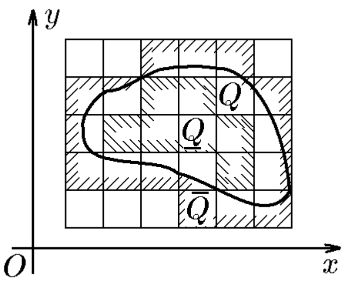


Рис. 38

Площадь клеточной фигуры обладает общими свойствами площадей плоских фигур: аддитивности, монотонности и, кроме того, не зависит от способа ее разбиения на прямоугольники. С помощью понятия клеточной фигуры рис. 19, иллюстрирующий определение площади произвольной плоской фигуры, можно видоизменить к рис. 38, где $\overline{Q}$ — клеточная фигура, содержащая в себе фигуру Q, а $\underline{Q}$ — клеточная фигура, целиком содержащаяся в фигуре Q, т.е.

$$\underline{Q} \subset Q \subset \overline{Q}. \tag{14.2}$$

Клеточные фигуры $\underline{Q}$ и $\overline{Q}$ квадрируемы, их площади $S(\underline{Q})$ и $S(\overline{Q})$ можно вычислить, как сумму площадей составляющих их прямоугольников (рис. 37,*б*). Произвольную плоскую фигуру Q будем считать квадрируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие клеточные фигуры $\underline{Q}$ и $\overline{Q}$ (14.1), что

$$0 \leqslant S(\overline{Q}) - S(\underline{Q}) < \varepsilon, \tag{14.3}$$

а ее площадью считать число $S(Q)$, удовлетворяющее неравенству

$$S(\underline{Q}) \leqslant S(Q) \leqslant S(\overline{Q}). \tag{14.4}$$

Теорема 14.1. *Для квадрируемой плоской фигуры Q ее площадь $S(Q)$ определяется однозначно величиной*

$$S(Q) = \sup S(\underline{Q}) = \inf S(\overline{Q}). \tag{14.5}$$

Доказательство. Пусть $\{\overline{Q}\}$ и $\{\underline{Q}\}$ — два множества клеточных фигур, удовлетворяющих условиям (14.2), т.е $\underline{Q} \subset Q \subset \overline{Q}$. Если $S(\overline{Q})$ и $S(\underline{Q})$ — площади этих фигур, то для фигуры Q существует внутренняя $\underline{S}$ и внешняя $\overline{S}$ площади

$$\underline{S} = \sup S(\underline{Q}), \quad \overline{S} = \inf S(\overline{Q})$$

такие, что

$$S(\underline{Q}) \leqslant \underline{S} = \sup S(\underline{Q}) \leqslant \inf S(\overline{Q}) = \overline{S} \leqslant S(\overline{Q}), \tag{14.6}$$

и, в частности, например,

$$S(\underline{Q}) \leqslant \sup S(\underline{Q}) \leqslant S(\overline{Q}). \tag{14.7}$$

Это неравенство, по сути дела, совпадает с неравенством (14.4), и это означает, что число $\sup S(\underline{Q})$ можно считать площадью фигуры Q, т.е. считать

$$S(Q) = \sup S(\underline{Q}). \tag{14.8}$$

Для доказательства единственности числа (14.8) предположим, что существует другое число $S'(Q)$, удовлетворяющее условию (14.4), т.е.

$$S(\underline{Q}) \leqslant S'(Q) \leqslant S(\overline{Q}). \tag{14.9}$$

Но тогда из (14.3) и (14.9) в силу известных свойств неравенств можно записать

$$|S(Q) - S'(Q)| < S(\overline{Q}) - S(\underline{Q}) < \varepsilon, \tag{14.10}$$

Это означает, что для квадрируемой фигуры Q выбором клеточных фигур $\overline{Q}$ и $\underline{Q}$ разность площадей $S(Q)$ и $S'(Q)$ можно сделать сколь угодно малой. Поэтому из (14.10) следует равенство $S(Q) = S'(Q)$, единственным образом определяющее площадь фигуры $S(Q)$, причем в силу (14.6) справедливо равенство (14.5).

Теорема 14.2. *Для того чтобы плоская фигура Q была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такие квадрируемые плоские фигуры $\underset{\sim}{Q}$ и $\tilde{Q}$, что*

$$\underset{\sim}{Q} \subset Q \subset \tilde{Q}, \quad 0 \leqslant S(\tilde{Q}) - S(\underset{\sim}{Q}) < \varepsilon, \tag{14.11}$$

где $S(\tilde{Q})$ и $S(\underset{\sim}{Q})$ — площади фигур $\tilde{Q}$ и $\underset{\sim}{Q}$, соответственно.

Доказательство. Необходимость условий (14.11) очевидным образом вытекает из теоремы 14.1, если в качестве произвольных плоских фигур $\widetilde{Q}$ и $\underset{\sim}{Q}$ выбрать клеточные фигуры $\overline{Q}$ и $\underline{Q}$, т.е. $\widetilde{Q} = \overline{Q}$ и $\underset{\sim}{Q} = \underline{Q}$.

Для доказательства достаточности условий (14.11), зафиксировав число $\varepsilon > 0$, найдем в соответствии с (14.11) квадрируемые фигуры $\underset{\sim}{Q}$ и $\widetilde{Q}$ такие, что

$$\underset{\sim}{Q} \subset Q \subset \widetilde{Q}, \quad 0 \leqslant S(\widetilde{Q}) - S(\underset{\sim}{Q}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.12}$$

Так как $\underset{\sim}{Q}$ и $\widetilde{Q}$ — квадрируемые плоские фигуры, то существуют клеточные фигуры $\underline{Q}'$ и $\overline{Q}'$ такие, что

$$\begin{gathered} \underset{\sim}{Q} \supset \underline{Q}', \quad \widetilde{Q} \subset \overline{Q}', \\ 0 \leqslant S(\underset{\sim}{Q}) - S(\underline{Q}') < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 0 \leqslant S(\overline{Q}') - S(\widetilde{Q}) < \frac{\varepsilon}{4}. \end{gathered} \tag{14.13}$$

Из (14.12) и (14.13) следует, что

$$\underline{Q}' \subset Q \subset \overline{Q}' \tag{14.14}$$

и

$$0 \leqslant S(\widetilde{Q}) - S(\underset{\sim}{Q}) + S(\underset{\sim}{Q}) - S(\underline{Q}') + S(\overline{Q}') - S(\widetilde{Q}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$

или

$$0 \leqslant S(\overline{Q}') - S(\underline{Q}') < \varepsilon. \tag{14.15}$$

Но выполнение условий (14.14) и (14.15) означает, что Q — квадрируемая фигура, причем

$$S(Q) = \sup S(\underset{\sim}{Q}) = \inf S(\widetilde{Q}).$$

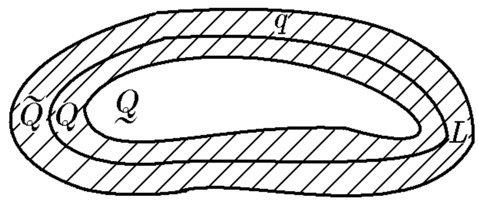


Рис. 39. $q = \widetilde{Q} - \underset{\sim}{Q}$

Условиям теоремы 14.2 можно придать наглядную геометрическую интерпретацию, предварительно договорившись, что любая кривая L (замкнутая или нет) имеет нулевую площадь, если ее можно покрыть областью q со сколь угодно малой площадью: $S(q) < \varepsilon$. Исходя из этой договоренности, неравенство (14.11) геометрически можно интерпретировать следующим образом. Пусть Q — плоская фигура, ограниченная простым замкнутым контуром L, а $\widetilde{Q}$ и $\underset{\sim}{Q}$ — квадрируемые фигуры с площадями $S(\widetilde{Q})$ и $S(\underset{\sim}{Q})$, удовлетворяющие условиям (14.11). Как следует из рис. 39, кривую L покрывает область $q = \widetilde{Q} - \underset{\sim}{Q}$ с площадью $S(q) = S(\widetilde{Q} - \underset{\sim}{Q}) = S(\widetilde{Q}) - S(\underset{\sim}{Q}) < \varepsilon$. Это означает, что кривую L покрывает область, площадь которой может быть сколь угодно малой, т.е. контур L имеет площадь, равную нулю.

С учетом сказанного условия квадрируемости области Q, согласно теореме 14.2, можно переформулировать следующим образом: для того чтобы фигура

Q была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее контур (периметр) L имел нулевую площадь.

Критерий квадрируемости плоской фигуры в такой формулировке указывает на необходимость выделения классов кривых с нулевой площадью.

Лемма 14.1. *Кривая L обладает нулевой площадью, если она является:*
1) *непрерывной на отрезке $[a, b]$, явно заданной уравнением*

$$y = f(x); \tag{14.16}$$

2) *непрерывной на отрезке $[c, d]$, явно заданной уравнением*

$$x = \varphi(y); \tag{14.17}$$

3) *гладкой на отрезке $[\alpha, \beta]$, заданной параметрическими уравнениями*

$$x = x(t), \quad y = y(t); \tag{14.18}$$

4) *кусочно гладкой на отрезке $[\alpha, \beta]$, заданной параметрическими уравнениями* (14.18) *и имеющей конечное число особых точек.*

Доказательство. 1) По заданному значению $\varepsilon > 0$ промежуток $[a, b]$ разобьем на промежутки $[x_k, x_{k-1}]$, $k = \overline{1, n}$, на каждом из которых функция $f(x)$ принимает наибольшее M_k и наименьшее m_k значения такие, что

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Геометрически это означает, что кривая L покроется фигурой, состоящей из прямоугольников со сторонами $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\omega_k = M_k - m_k$ (рис. 40), с общей площадью

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

Так как ε может быть сколь угодно малой величиной, то кривая L имеет нулевую площадь, что и требовалось доказать.

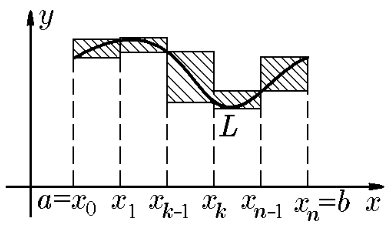


Рис. 40

2) Доказательство в этом случае аналогично предыдущему, если координатные оси Ox и Oy поменять местами.

3) В силу определения кривая (14.18) на отрезке $[\alpha, \beta]$ имеет непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$ и не имеет ни кратных, ни вообще особых точек. Выберем на гладкой кривой L точки M_k, определяемых значениями параметра t_k, $k = \overline{1, n}$. Так как эти точки не могут быть особыми, то для каждой точки M_k можно выделить непересекающиеся окрестности $]t_k - \delta_k, t_k + \delta_k[$, покрывающие весь отрезок $[\alpha, \beta]$. При таком разбиении каждый участок кривой L можно будет описать в явной форме (14.17), (14.18) непрерывными функциями $f(x)$ или $\varphi(y)$. В таком случае, исходя из первых двух пунктов леммы 14.1, можно утверждать, что кривую L можно покрыть конечной совокупностью фигур, имеющих нулевую площадь, т.е. вся кривая L имеет нулевую площадь, что и требовалось доказать.

4) Если кривая L является кусочно гладкой и имеет конечное число особых точек, то, выделив эти точки с помощью окрестностей произвольной малой площади, мы будем иметь дело уже с гладкими кривыми, рассмотренными в предыдущем пункте.

Теорема 14.3 (о квадрируемости плоской фигуры). *Если плоская фигура ограничена одной или несколькими гладкими кривыми, то она заведомо квадрируема.*

Доказательство очевидным образом вытекает из теоремы 14.2 и леммы 14.1.

14.2. Формулы для вычисления площади плоской фигуры

Сформулированные выше условия квадрируемости плоских фигур не дают, однако, рецептов и формул вычисления их площадей. К рассмотрению именно этих вопросов мы и переходим. Начнем с упоминавшейся уже криволинейной трапеции Q, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и непрерывной кривой $y = f(x) \geqslant 0$.

Теорема 14.4. *Криволинейная трапеция Q является квадрированной фигурой, площадь которой выражается формулой*

$$S(Q) = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{14.19}$$

Доказательство. Квадрируемость криволинейной трапеции Q очевидным образом вытекает из теоремы 14.3, поскольку ее контур является кусочно гладким. Однако, чтобы получить формулу (14.19), мы еще раз воспользуемся разбиением $\tau_n = \{x_i,\ i = \overline{0,n}\}$ отрезка $[a,b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выбрав на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ наибольшее M_i и наименьшее m_i значения функции $f(x)$, построим две клеточные фигуры. Одну из них $\underline{Q}$ составим из прямоугольников $\underline{Q}_i$, $i = \overline{1,n}$, таких, что длина основания i-го прямоугольника равна Δx_i, а высота m_i, а другую $\overline{Q}$ составим из прямоугольников $\overline{Q}_i$, $i = \overline{1,n}$, где $\overline{Q}_i$ — прямоугольник с длиной основания Δx_i и высотой M_i.

Очевидно, что

$$\underline{Q} \subset Q \subset \overline{Q}, \tag{14.20}$$

а площади клеточных фигур $\underline{Q}$ и $\overline{Q}$ равны

$$S(\underline{Q}) = \sum_{i=1}^{n} \underline{Q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad S(\overline{Q}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{Q}_i = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{14.21}$$

Но, с другой стороны, суммы (14.21) представляют собой ни что иное, как введенные ранее нижнюю и верхнюю суммы Дарбу $\underline{S}(\tau_n)$ и $\overline{S}(\tau_n)$ функции $f(x)$ при разбиении τ_n отрезка $[a,b]$, т.е.

$$S(\underline{Q}) = \underline{S}(\tau_n), \quad S(\overline{Q}) = \overline{S}(\tau_n). \tag{14.22}$$

Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то, согласно теореме 10.2 об интегрируемости функций, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение отрезка $[a,b]$, что

$$0 \leqslant \overline{S}(\tau_n) - S(\underline{Q}) < \varepsilon. \tag{14.23}$$

С учетом равенств (14.22) оценку (14.23) можно распространить на площади клеточных фигур $S(\underline{Q})$ и $S(\overline{Q})$:

$$0 \leqslant S(\overline{Q}) - S(\underline{Q}) < \varepsilon. \tag{14.24}$$

Эта оценка в совокупности с условием (14.20) еще раз подтверждает квадрируемость криволинейной трапеции Q. Но квадрируемость трапеции Q означает, что из оценку (14.23) для сумм Дарбу следует равенства

$$S(Q) = \sup \underline{S}(\tau_n) = \inf \overline{S}(\tau_n), \tag{14.25}$$

которые с помощью интегралов Дарбу (10.29), (10.39) можно записать через определенный интеграл:

$$S(Q) = \underline{I} = \overline{I} = I = \int\limits_a^b f(x)dx, \tag{14.26}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, равенства (14.22) между площадями клеточных фигур $S(\underline{Q})$, $S(\overline{Q})$ и суммами Дарбу $\underline{Q}(\tau_n)$, $\overline{Q}(\tau_n)$ позволяет дополнить условие квадрируемости криволинейной трапеции Q конкретной формулой (14.19) для вычисления ее площади.

Кроме этого, при выводе формулы (14.19) мы воспользовались определением площади криволинейной трапеции через точные грани сумм Дарбу (14.25), хотя ранее эта же площадь формулами (9.3) и (9.4) была определена пределом интегральной суммы

$$S(Q) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{d\to 0} S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) \tag{14.27}$$

при условии, что этот предел существует и не зависит от разбиения τ_n и выборки $\xi(\tau_n)$. Если интегральная сумма (14.27) представляет функцию $y = f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$, то из теоремы 10.2 следует, что этот предел действительно существует, не зависит от разбиения τ_n, выборки $\xi(\tau_n)$ и может быть представлен определенным интегралом

$$S(Q) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{d\to 0} S(f, \tau_n, \xi(\tau_n)) = \int\limits_a^b f(x)dx, \tag{14.28}$$

совпадающим с (14.26).

Таким образом, оба определения площади криволинейной трапеции (14.25) и (14.27) эквивалентны и приводят к одному и тому же определенному интегралу (14.26), (14.28).

◊ Отметим, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ (или Q) можно также найти из уравнения

$$S'(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \tag{14.29}$$

при условии

$$S(a) = 0. \tag{14.30}$$

Решение задачи (14.29), (14.30) дается формулой (8.37):

$$S_{ABCD} = S(Q) = F(b) - F(a). \tag{14.31}$$

Если учесть, что $F(x)$ — это первообразная функции $f(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

то результат (14.31) можно в силу теоремы Ньютона–Лейбница представить определенным интегралом

$$S(Q) = \int_a^b f(x)dx.$$

Забегая вперед, отметим, что уравнение (14.29) представляет собой простейшее дифференциальное уравнение, а условие (14.30) — его начальное условие.

Таким образом, задача о вычислении площади криволинейной трапеции имеет, по меньшей мере, три способа решения, которые приводят к вычислению определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы 14.4.

Следствие 14.4.1. Если явному заданию функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, соответствует параметрическое задание $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то площадь криволинейной трапеции определяется как

$$S(Q) = \int_\alpha^\beta y(t)x'_t(t)dt. \tag{14.32}$$

Эта формула получается из (14.19) заменой переменной $x = x(t)$, $dx = x'_t(t)dt$, причем пределы α и β находятся из уравнений $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$.

Следствие 14.4.2. Пусть S — площадь криволинейной трапеции

$$Q = \{a \leqslant x \leqslant b; \quad f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x)\}.$$

Площадь как геометрическая характеристика является величиной положительной, т.е. $S > 0$, если на отрезке $[a, b]$:

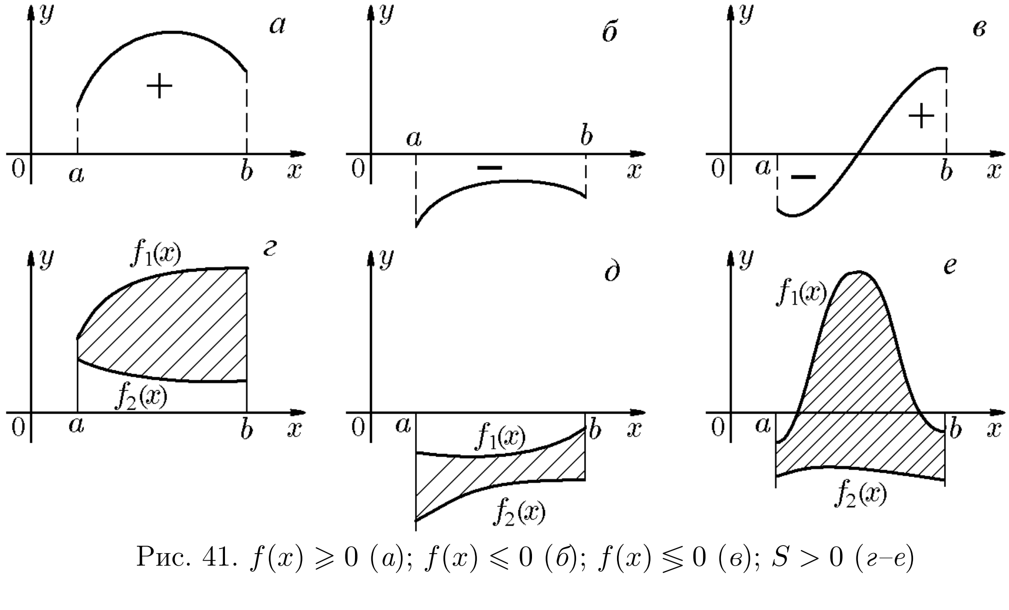


Рис. 41. $f(x) \geqslant 0$ (*а*); $f(x) \leqslant 0$ (*б*); $f(x) \lesseqgtr 0$ (*в*); $S > 0$ (*г–е*)

а) $f(x) \geqslant 0$ (рис. 41,*а,в*), то

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0; \tag{14.32,а}$$

б) $f(x) \leqslant 0$ (рис. 41,*б,в*), то

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0; \tag{14.32,б}$$

в) $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ (рис. 41,*г–е*), то

$$S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \geqslant 0 \tag{14.32,в}$$

независимо от знака $f_1(x)$.

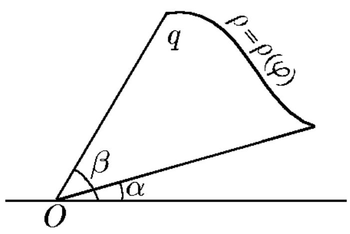


Рис. 42

Кроме задач о вычислении площади криволинейных трапеций в геометрических приложениях часто встречаются задачи о вычислении площади криволинейного сектора q. Криволинейный сектор удобнее рассматривать в полярной системе координат как фигуру, ограниченную непрерывной полярной кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, и отрезками двух лучей, выходящих из полюса под углами α и β к полярной оси (рис. 42).

Следствие 14.4.3. Площадь S криволинейного сектора q равна

$$S(q) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{14.33}$$

Приведем два способа вывода формулы (14.33), полезных в других приложениях. Предварительно отметим, что интеграл (14.32) для непрерывных $\rho(\varphi)$ существует в силу квадрируемости криволинейного сектора, ограниченного кусочно гладкой кривой.

I. Воспользуемся свойством аддитивности площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 43,*а*.

Площадь криволинейного сектора q можно записать как

$$S(q) = S(Q_1) + S(Q_2) - S(Q_3), \tag{14.34}$$

где Q_1 — треугольник OBB'; Q_3 — треугольник OAA', а Q_2 — криволинейная трапеция $ABB'A'$. Площади треугольников находятся просто (рис. 43,*а*):

$$\begin{aligned} S(Q_1) &= \frac{1}{2}|OB'| \cdot |BB'| = \frac{1}{2}\rho^2(\beta)\cos\beta\sin\beta = \frac{1}{4}\rho^2(\beta)\sin 2\beta, \\ S(Q_1) &= \frac{1}{2}|OA'| \cdot |AA'| = \frac{1}{2}\rho^2(\alpha)\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{4}\rho^2(\alpha)\sin 2\alpha, \end{aligned} \tag{14.35}$$

а площадь криволинейной трапеции $ABB'A'$ задается интегралом

$$S(Q_2)=\int\limits_{\rho(\beta)\cos\beta}^{\rho(\alpha)\cos\alpha} y(x)dx.$$

Переход в этом интеграле к полярным координатам $x=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, дает

$$S(Q_2)=\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho(\varphi)\sin\varphi\, d(\rho(\varphi)\cos\varphi)=\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho(\varphi)\sin\varphi[\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi]d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho(\varphi)\rho'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi-\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho^2\sin^2\varphi\, d\varphi=I_1-I_2. \tag{14.36}$$

Это выражение можно упростить однократным интегрированием по частям в интеграле I_1:

$$I_1=\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho(\varphi)\rho'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi=\left|\begin{matrix} u=\sin\varphi\cos\varphi, & du=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)d\varphi\\ dv=\rho(\varphi)\rho'(\varphi)d\varphi, & v=\dfrac{1}{2}\rho^2(\varphi)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\Big|_{\beta}^{\alpha}-\int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)[\cos^2\varphi-\sin^2\varphi]d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\rho^2(\alpha)\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\rho^2(\beta)\sin 2\beta-\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho^2(\varphi)[\cos^2\varphi-\sin^2\varphi]d\varphi,$$

тогда

$$S(Q_2)=\frac{1}{4}\rho^2(\alpha)\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\rho^2(\beta)\sin 2\beta-\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho^2(\varphi)[\cos^2\varphi-\sin^2\varphi]d\varphi-$$

$$-\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho^2\sin^2\varphi\, d\varphi=\frac{1}{4}\rho^2(\alpha)\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\rho^2(\beta)\sin 2\beta-\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{14.37}$$

Теперь подстановка (14.35) и (14.37) в (14.34) приводит к (14.33). Действительно,

$$S(q)=\frac{1}{4}\rho^2(\beta)\sin 2\beta+\frac{1}{4}\rho^2(\alpha)\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\rho^2(\beta)\sin 2\beta-\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho^2(\varphi)d\varphi-$$

$$-\frac{1}{4}\rho^2(\alpha)\sin 2\alpha=-\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

II. В этом случае воспользуемся квадрируемостью криволинейного сектора и для τ-разбиения отрезка $[\alpha,\beta]$ на отрезки $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$, $i=\overline{1,n}$, длиной $\Delta\varphi_i=$

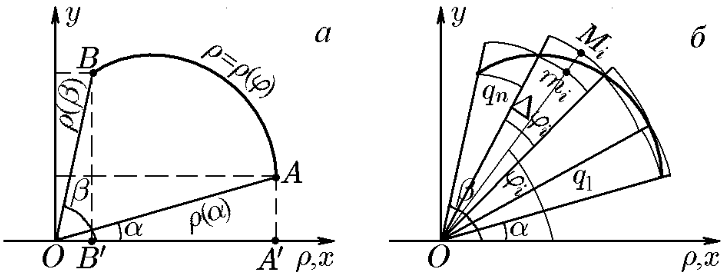


Рис. 43

$\varphi_i - \varphi_{i-1}$ (рис. 43,*б*) составим суммы Дарбу. Для этого обозначим через $\underline{q}_i$ и $\overline{q}_i$ круговые секторы, ограниченные лучами $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$ и дугами окружностей радиусов m_i, M_i, где m_i и M_i — наименьшее и наибольшее значения функции $\rho(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Площадь сектора $\underline{q}_i$ при малых $\Delta\varphi_i$ можно найти как площадь треугольника с катетами m_i и $m_i \sin\Delta\varphi_i \approx m_i\Delta\varphi_i$, т.е. $S(\underline{q}_i) = \dfrac{1}{2}m_i^2\Delta\varphi_i$ и, соответственно, $S(\overline{q}_i) = \dfrac{1}{2}M_i^2\Delta\varphi_i$ (рис. 43,*б*). Если $\underline{q}$ — объединение фигур $\underline{q}_i$, а $\overline{q}$ — объединение фигур $\overline{q}_i$, то $\underline{q} \subset q \subset \overline{q}$, причем их площади равны, соответственно,

$$S(\underline{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2\Delta\varphi_i, \quad S(\overline{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\Delta\varphi_i.$$

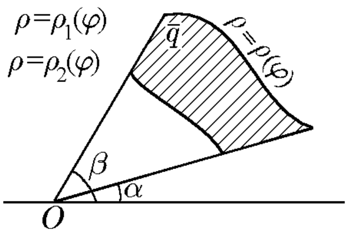


Рис. 44

Отсюда следует, что $S(\underline{q})$ и $S(\overline{q})$ представляют собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, поэтому в силу теоремы 10.2 верхний и нижний интегралы Дарбу совпадают и равны определенному интегралу (14.33):

$$\underline{I} = \sup S(\underline{q}) = \overline{I} = \inf S(\overline{q}) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Следствие 14.4.4. Площадь S криволинейного сектора $\bar{q}$ между двумя полярными кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рис. 44) равна

$$S(\bar{q}) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho_1^2(\varphi) - \rho_2^2(\varphi)]d\varphi. \qquad (14.33,a)$$

Формула (14.33,*a*) очевидным образом вытекает из формулы (14.33) и свойства аддитивности площади.

Следствие 14.4.5. Если в декартовых координатах криволинейная трапеция Q задается уравнениями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y \in [A, B]$ (рис. 45), то ее площадь выражается формулой

$$S(Q) = \int_{A}^{B} [x_1(y) - x_2(y)]dy, \qquad (14.33,б)$$

аналогичной формуле (14.32,*в*).

Следствие 14.4.6. Пусть Q — плоская выпуклая фигура, границей которой является простой контур, задаваемый параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (рис. 45). Если обход границы совершается против хода часовой стрелки при изменении параметра от $t = \alpha$ до $t = \beta$, то площадь фигуры Q можно вычислить по любой из формул

$$S(Q) = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'_t(t)dt; \qquad (14.33,\text{в})$$

$$S(Q) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt; \qquad (14.33,\text{г})$$

$$S(Q) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - y(t)x'_t(t)]dt. \qquad (14.33,\text{д})$$

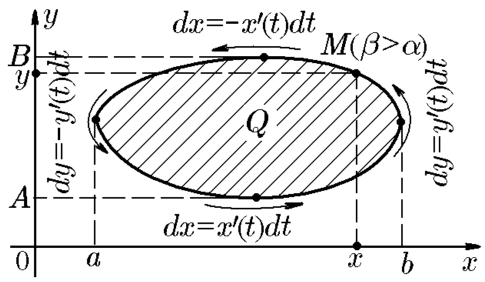


Рис. 45

Поскольку, согласно определению, простой контур представляет собой замкнутую кривую с совпадающими начальной и конечной точкой M, соответствующей значениям параметра $t = \alpha$ и $t = \beta$ ($\beta > \alpha$) (рис. 45), то формула (14.33,*в*) следует из формул (14.32) и (14.32,*в*) с учетом того, что при заданном направлении обхода на верхней части контура $dx = -x'_t(t)dt$, а на нижней, соответственно, $dx = x'_t(t)dt$.

Аналогично формула (14.33,*г*) очевидным образом вытекает из формулы (14.33,*б*), а формула (14.33,*д*) следует из суммы формул (14.33,*в*) и (14.33,*г*). Причем формулу (14.33,*д*) иногда удобнее использовать в виде

$$S(Q) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - x'_t(t)y(t)]dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2(t)d\Big(\frac{y(t)}{x(t)}\Big), \qquad (14.33,\text{д}')$$

поскольку

$$x(t)y'(t) - x'_t(t)y(t) = x^2(t)\frac{x(t)y'(t) - x'_t(t)y(t)}{x^2(t)} = x^2(t)d\Big(\frac{y(t)}{x(t)}\Big).$$

Пример 14.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$1)\ y = 4 - x^2,\ 2x + y = 4; \quad 2)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$3)\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 1 = 0,\ a_{11} > 0,\ \delta = a_{11}a_{22} - a^2 + 12 > 0.$$

Решение. 1) Имеем параболу и прямую. Чтобы найти площадь фигуры, ограниченной этими гладкими линиями, вычислим абсциссы их точек пересечения A и B (рис. 46,*а*). Подстановка $y = 4 - 2x$ в уравнение параболы приводит к квадратному уравнению $x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$ с корнями $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Теперь, положив $y_1 = 4 - x^2$, $y_2 = 4 - 2x$ и следуя формуле (14.32), найдем

$$S = \int\limits_0^2 [y_1(x) - y_2(x)]dx = \int\limits_0^2 (4 - x^2 - 4 + 2x)dx = \int\limits_0^2 (2x - x^2)dx =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

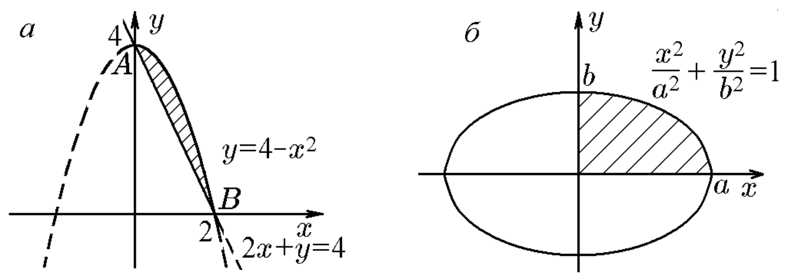


Рис. 46

2) Имеем эллипс с полуосями a и b (рис. 46,*б*), являющийся гладкой замкнутой кривой. В силу симметрии эллипса относительно координатных осей можно вычислить четвертую часть его площади при $x > 0$ и $y > 0$. Учитывая, что $y = b\sqrt{a^2 - x^2}/a$ и следуя формуле (14.18), имеем

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_a^b y(x)dx = \int\limits_a^b \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx. \tag{14.34}$$

Воспользовавшись результатом примера 3.18 для вычисления соответствующего неопределенного интеграла, можем записать

$$\frac{1}{4}S = \frac{ab}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]\Big|_0^a = \frac{ab}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi ab}{4},$$

откуда

$$S = \pi ab. \tag{14.35}$$

Отметим, что интеграл (14.34) можно вычислить, воспользовавшись параметрическим представлением эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

При этом значению $x = 0$ будет соответствовать значение параметра $t = \pi/2$, а значению $x = a$ соответственно $t = 0$, поэтому

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{\pi/2}^{0} b\sin t\, d(a\cos t) = -ab\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\, dt = ab\int\limits_0^{\pi/2}(1 - \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4},$$

т.е. снова приходим к формуле (14.35), из которой при $a = b = R$ найдем теперь площадь круга $S = \pi R^2$ и площадь кругового сектора, соответствующего центральному углу α:

$$S_\alpha = \frac{\alpha}{2\pi}\pi R^2 = \frac{\alpha R^2}{2}. \tag{14.36}$$

Эту же формулу можно получить, воспользовавшись непосредственно полярной системой координат, в которой уравнение окружности радиуса R имеет простой вид $\rho = R$. Тогда по формуле (14.33) площадь кругового сектора найдется как

$$S_\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha \rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha R^2 d\varphi = \frac{R^2}{2}\varphi\Big|_0^\alpha = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

Эта формула, естественно, совпадает с (14.36) и при $\alpha = 2\pi$ дает площадь круга $S = \pi R^2$.

3) Уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 1 = 0 \tag{14.37}$$

в силу условия $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ определяет кривую эллиптического типа. Решив уравнение (14.37), например, относительно переменной x, найдем

$$x_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{11} - \delta y^2}}{a_{11}}.$$

В силу еще одного условия $a_{11} > 0$ уравнение (14.37) определяет эллипс, для которого

$$|y| \leqslant \sqrt{\frac{a_{11}}{\delta}} = B,$$

поэтому искомую площадь найдем по формуле (14.33,*б*):

$$S(Q) = \int\limits_{-B}^{B} [x_1(y) - x_2(y)]dy,$$

где

$$x_1(y) = \frac{-a_{12} + \sqrt{a_{11} - \delta y^2}}{a_{11}}, \quad x_2(y) = \frac{-a_{12} - \sqrt{a_{11} - \delta y^2}}{a_{11}}.$$

Таким образом, имеем интеграл

$$S(Q) = \int\limits_{-B}^{B} [x_1(y) - x_2(y)]dy = \frac{2}{a_{11}}\int\limits_{-B}^{B} \sqrt{a_{11} - \delta y^2}\, dy = \frac{4}{a_{11}}\int\limits_0^B \sqrt{a_{11} - \delta y^2}\, dy =$$
$$= \frac{4\sqrt{\delta}}{a_{11}}\int\limits_0^B \sqrt{B^2 - y^2}\, dy,$$

который с помощью замены переменной $y = B\sin z$ легко вычисляется:

$$S(Q) = \frac{4\sqrt{\delta}}{a_{11}}\int\limits_0^B \sqrt{B^2 - y^2}\, dy = \frac{4\sqrt{\delta}}{a_{11}}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 z\, dz = \frac{\pi\sqrt{\delta}}{a_{11}}B^2 =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} = \frac{\pi}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}. \tag{14.38}$$

Заметим, что этот результат можно получить, исходя из результата предыдущего примера, согласно которому площадь эллипса равна

$$S(Q) = \pi ab,$$

где a и b — полуоси эллипса.

Действительно, следуя формализму приведения кривой 2-го порядка к каноническому виду (см. [20]), найдем ее инварианты, исходя из уравнения кривой (14.37):

$$\delta = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0;$$

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\delta.$$

Таким образом, канонический вид кривой (14.37) есть

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

или

$$\frac{(x')^2}{(1/\sqrt{\lambda_1})^2} + \frac{(y')^2}{(1/\sqrt{\lambda_2})^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 1/\sqrt{\lambda_1}$, $b = 1/\sqrt{\lambda_2}$. Но тогда

$$S(Q) = \pi ab = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}.$$

Если учесть, что λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + \delta = 0,$$

из которого следует, что $\lambda_1\lambda_2 = \delta$, то

$$S(Q) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

что совпадает со значением (14.38).

Пример 14.2. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямой, проходящей через начало координат и точку M с абсциссой x, лежащую на кривой

$$1)\quad \begin{matrix} x = R\cos t, \\ y = R\sin t; \end{matrix} \qquad 2)\quad \begin{matrix} x = R\operatorname{ch} t, \\ y = R\operatorname{sh} t, \end{matrix}$$

и самой этой кривой. Выяснить геометрический смысл параметра t.

Решение. 1) В этом случае кривая является окружностью $x^2 + y^2 = R^2$. Область, ограниченная этой окружностью и прямыми, представляет собой круговой сектор OMM'' (рис. 47,a). Его площадь $S_{OMM''}$ можно определить суммой площадей прямоугольного треугольника OMM'

$$S_{OMM'} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}R^2\cos t\sin t = \frac{R^2}{4}\sin 2t$$

и площадью криволинейной трапеции

$$S_{M'MM''} = \int\limits_x^R y(x)dx.$$

Учтем, что $y = R\sin t$, а $x = R\cos t$ и $dx = -R\sin t\,dt$, а также что значению $x = R$ соответствует значение параметра $t = 0$, а значению x — значение t. Тогда этот интеграл можно записать как

$$S_{M'MM''} = \int\limits_x^R y(x)dx = \int\limits_t^0 R\sin t(-R\sin t\,dt) = -R^2\int\limits_t^0 \sin^2 t\,dt = R^2\int\limits_0^t \sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}R^2\int\limits_0^t (1-\cos 2t)dt = \frac{1}{2}R^2\Big(t - \frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_0^t = \frac{1}{2}R^2\Big(t - \frac{1}{2}\sin 2t\Big).$$

Тогда площадь кругового сектора будет равна

$$S_{OMM''} = S_{OMM'} + S_{M'MM''} = \frac{R^2}{4}\sin 2t + \frac{R^2}{2}t - \frac{R^2}{4}\sin 2t = \frac{R^2 t}{2}. \tag{14.39}$$

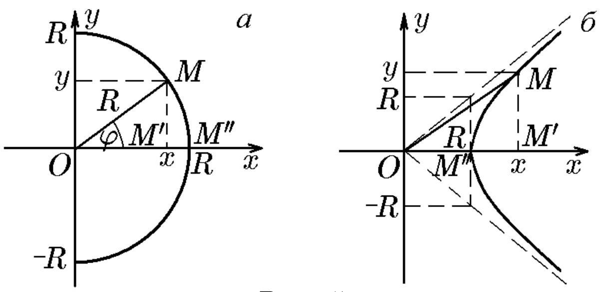


Рис. 47

2) В этом случае кривая является равнобочной гиперболой $x^2 - y^2 = R^2$. Область, ограниченная этой гиперболой и прямыми, представляет собой гиперболический сектор OMM'' (рис. 47,*б*). Его площадь можно определить разностью площадей прямоугольного треугольника OMM'

$$S_{OMM'} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}R^2\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t = \frac{R^2}{4}\operatorname{sh} 2t$$

и площадью криволинейной трапеции

$$S_{M'MM''} = \int\limits_R^x y(x)dx.$$

Учтем, что $y = R\operatorname{sh} t$, а $x = R\operatorname{ch} t$ и $dx = R\operatorname{sh} t\,dt$, а также что значению $x = R$ соответствует значение параметра $t = 0$, а значению x — значение t. Тогда этот интеграл можно записать как

$$S_{M'MM''} = \int\limits_R^x y(x)dx = \int\limits_0^t R\operatorname{sh} tR\operatorname{sh} t\,dt = R^2\int\limits_0^t \operatorname{sh}^2 t\,dt = R^2\int\limits_0^t (\operatorname{ch} 2t - 1)dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t\Big)\Big|_0^t = \frac{R^2}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t\Big).$$

Тогда площадь гиперболического сектора будет равна

$$S_{OMM''} = S_{OMM'} - S_{M'MM''} = \frac{R^2}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{R^2}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t\Big) = \frac{R^2 t}{2}. \tag{14.40}$$

Сравнение формул (14.39) и (14.40) говорит о том, что в обоих случаях площади указанных секторов определяются одним выражение:

$$S = \frac{R^2 t}{2},$$

которое при $R = 1$ можно записать в виде

$$t = 2S. \tag{14.41}$$

Согласно формуле (14.41), геометрически угловой параметр t имеет смысл удвоенной площади сектора. Это справедливо как для кругового, так и для гиперболического секторов. Однако для кругового сектора в силу формулы (14.36) параметр t дополнительно можно интерпретировать еще и как центральный угол сектора (что, впрочем, очевидно из геометрического смысла полярных координат). К сожалению, для гиперболического сектора параметр t можно интерпретировать лишь как удвоенную площадь этого сектора. Интересно, что такое различие учитывается при обозначении обратных тригонометрических

$$\arcsin t, \quad \arccos t \quad \text{и т.п.}$$

и гиперболических

$$\operatorname{arsh} t, \quad \operatorname{arch} t \quad \text{и т.п.}$$

функций.

В символах обратных тригонометрических функциях обозначение *arc* является сокращением от латинского слова *arcus* — дуга окружности, соответствующая центральному углу t, тогда как для обратных гиперболических функций обозначение *ar* является начальными буквами латинского слова *area* — площадь.

Пример 14.3. Вычислить площадь, ограниченную осью Ox и кривыми

$$1)\ y = \sin^3 x,\ x \in [0, 2\pi]; \quad 2)\ y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\ x \in \mathbb{R}.$$

Решение. 1) Как следует из рис. 48,*а*, на отрезке $[0, \pi]$ функция $y = \sin^3 x$ положительна, а на отрезке $[\pi, 2\pi]$ — отрицательна. С учетом этого искомая площадь найдется как

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^\pi \sin^3 x\,dx + \left|\int_\pi^{2\pi} \sin^3 x\,dx\right| = \int_0^\pi \sin^3 x\,dx - \int_\pi^{2\pi} \sin^3 x\,dx =$$

$$= 2\int_0^\pi \sin^3 x\,dx = -2\int_0^\pi \sin^2 x\,d(\cos x) = -2\int_0^\pi (1 - \cos^2 x) d(\cos x) =$$

$$= -2\Big(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\Big)\Big|_0^\pi = -2\Big(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\Big) = \frac{8}{3}.$$

2) Найдем точки пересечения кривой с осью Ox. Можно заметить, что $x_1 = 1$ является корнем уравнения $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Тогда

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Таким образом, имеем кубическую параболу, пересекающую ось Ox в трех точках: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ (рис. 48,*б*). Как следует из этого рисунка, на отрезке

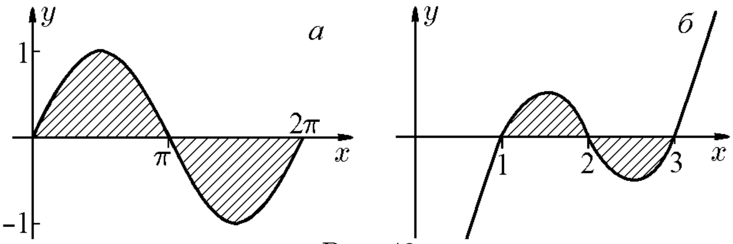


Рис. 48

$[1,2]$ искомая площадь находится над осью Ox, а на отрезке $[2,3]$ под осью Ox, поэтому суммарная площадь будет равна

$$S = \int\limits_1^2 y(x)dx + \left|\int\limits_2^3 y(x)dx\right| = \int\limits_1^2 y(x)dx - \int\limits_2^3 y(x)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)dx - \int\limits_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)dx =$$

$$= \Big(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x\Big)\Big|_1^2 - \Big(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x\Big)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}.$$

$\Diamond$ Два рассмотренных выше примера наглядно показывают, что учет знака подынтегральной функции совершенно необходим для получения требуемого результата.

Пример 14.4. Найти площадь фигур, ограниченных кривыми

$$1)\ (x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2); \quad 2)\ x^3 + y^3 = 3Rxy.$$

Решение. 1) Имеем кривую, симметричную относительно координатных осей и проходящую через начало координат. Кривая называется *лемнискатой Бернулли*, и ее уравнение в полярных координатах имеет более простой вид [20]

$$\rho^2 = R^2 \cos 2\varphi. \tag{14.42}$$

Полярное уравнение (14.42) легко позволяет построить график кривой (рис. 49,a), из которого следует, что четвертая часть площади лемнискаты определяется интегралом (14.33):

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} \rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{R^2}{4}\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{R^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \frac{R^2}{4},$$

откуда $S = R^2$, т.е. площадь, ограниченная лемнискатой (14.42), равна площади квадрата со стороной R.

2) Легко заметить, что замена x на y и y на x не изменит заданного уравнения:

$$x^3 + y^3 = 3Rxy.$$

Это означает, что кривая симметрична относительно прямой $y = x$. Если учесть еще, что кривая проходит через начало координат, то она образует петлю, симметричную относительно биссектрисы I-ой четверти. Такая кривая называется *декартовым листом* [20], и ее уравнение в полярных координатах имеет вид

$$\rho = \frac{3R\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} = \frac{3R\sin 2\varphi}{2(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)}. \tag{14.43}$$

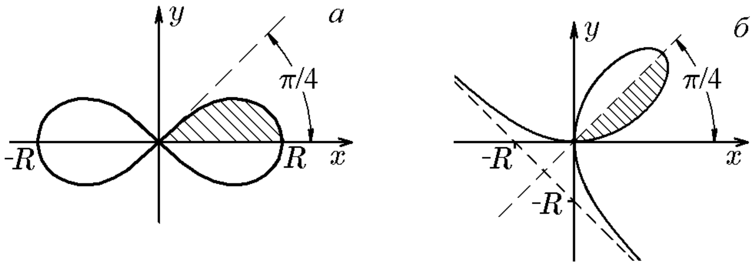


Рис. 49

Уравнение в полярных координатах (14.43) позволяет легко построить график кривой (рис. 49,*б*), из которого следует, что половина площади, ограниченной петлей декартова листа, определится интегралом (14.33):

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\Big(\frac{3R\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\Big)^2 d\varphi = \frac{9R^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi(\operatorname{tg}^3\varphi+1)^2}d\varphi =$$

$$= \Big|\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi = \frac{1}{3}d(\operatorname{tg}^3\varphi+1)\Big| = \frac{3R^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{d(\operatorname{tg}^3\varphi+1)}{(\operatorname{tg}^3\varphi+1)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}R^2\frac{1}{(\operatorname{tg}^3+1)}\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{3}{2}R^2\Big(\frac{1}{2}-1\Big) = \frac{3R^2}{4}.$$

Отсюда $S = 3R^2/2$, т.е. площадь, ограниченная петлей декартова листа, равна полутора площадям квадрата со стороной R.

Пример 14.5. Найти площадь фигур, ограниченных кривыми

$$1)\ \rho = R(1-\cos\varphi);\quad 2)\ \rho = R\sin 2\varphi;\quad 3)\ \rho = R\sin 3\varphi.$$

Решение. 1) Такая кривая называется кардиоидой [20], ее график приведен на рис. 50,*а*. Следуя формуле (14.33), найдем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(1-2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big)d\varphi = \frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big)d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2}\Big(\frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} - 2\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\Big) = \frac{R^2}{2}3\pi = \frac{3\pi R^2}{2}.$$

2) Кривые, определяемые полярным уравнением

$$\rho = R\sin n\varphi, \tag{14.44}$$

называются *розами* (см., например, [20]). Если n — четное число, то кривая имеет $2n$ лепестков, если же n — нечетное число, то кривая имеет n лепестков (рис. 50,*б,в*).

Чтобы найти площадь одного лепестка, положим в (14.44) $\rho = 0$ и решим уравнение $R\sin n\varphi = 0$. Из него следует, что $\sin n\varphi = 0$, а отсюда $n\varphi = k\pi$,

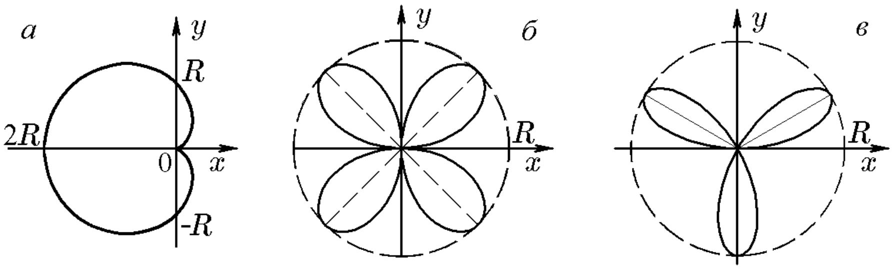


Рис. 50

$k = \overline{1, \infty}$. При $k = 0$ имеем $\varphi = 0$, при $k = 1$ имеем $n\varphi = \pi$, а $\varphi = \pi/n$. Таким образом, угол φ измеряется от 0 до π/n, а площадь одного лепестка найдется как

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/n} R^2 \sin^2 n\varphi\, d\varphi = \frac{R^2}{4}\int\limits_0^{\pi/n}(1 - \cos 2n\varphi)d\varphi = \frac{R^2}{4}\Big(\varphi - \frac{1}{2n}\sin 2n\varphi\Big)\Big|_0^{\pi/n} =$$

$$= \frac{R^2}{4}\Big(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2n}\sin 2n\frac{\pi}{n}\Big) = \frac{\pi R^2}{4n}. \qquad (14.45)$$

Отсюда для четырехлепестковой розы $\rho = R\sin 2\varphi$ площадь одного лепестка $S_1 = \pi R^2/8$, а суммарная площадь $S_4 = 4S_1 = \pi R^2/2$. Соответственно, для трехлепестковой розы $\rho = R\sin 3\varphi$ площадь одного лепестка $S_1 = \pi R^2/12$, а суммарная площадь $S_3 = 3S_1 = \pi R^2/4$.

Пример 14.6. Найти площадь S плоской фигуры D, ограниченной лепестком

$$\varphi = \sin \pi\rho, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1. \qquad (14.46)$$

Решение. При возрастании полярного радиуса ρ от значения $\rho = 0$ до значения $\rho = 1/2$ азимутальный угол φ возрастает от $\varphi_1 = \sin 0 = 0$ до $\varphi_2 = \sin(\pi/2) = 1$. При дальнейшем возрастании ρ от $\rho = 1/2$ до $\rho = 1$ угол φ убывает от $\varphi = \sin(\pi/2) = 1$ до $\varphi = \sin\pi = 0$. Таким образом фигура D имеет вид криволинейного сектора (рис. 51), ограниченного кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, которые неявным образом определяются уравнениями

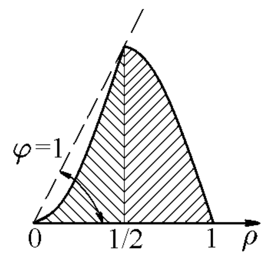


Рис. 51

$$\varphi = \sin\pi\rho,\ 0 \leqslant \rho < \frac{1}{2}; \quad \varphi = \sin\pi\rho,\ \frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1. \qquad (14.47)$$

$\lozenge$ Заметим, что в декартовой системе координат кривая (14.46) задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\sin\pi\rho); \\ y = \rho\sin(\sin\pi\rho), \end{cases} \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

Площадь S, согласно (14.33), равна сумме интегралов

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \rho_1^2(\varphi)d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \rho_2^2(\varphi)d\varphi. \qquad (14.48)$$

Перейдем в (14.48) к интегрированию по φ:

$$d\varphi = \varphi'(\rho)d\rho,$$

и, согласно (14.47), запишем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} \rho^2\varphi'(\rho)d\rho + \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} \rho^2\varphi'(\rho)d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \rho^2\varphi'(\rho)d\rho,$$

а поскольку

$$\varphi'(\rho) = (\sin\pi\rho)' = \pi\cos\pi\rho,$$

то

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \rho^2\pi\cos\pi\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{1} \rho^2\cos\pi\rho\,d\rho = \frac{1}{\pi}.$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 3.16.

Пример 14.7. Найти площадь, ограниченную осью Ox и одной аркой циклоиды

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t),$$

а также площадь, ограниченную астроидой

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\sin^3 t. \tag{14.49}$$

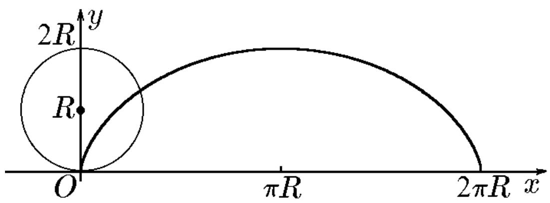


Рис. 52

Решение. Циклоида — кривая, которую описывает точка окружности, катящейся равномерно по оси Ox [20]. Таким образом, одна арка циклоиды (рис. 52) получается при изменении параметра t от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$, при этом координата x изменяется от $x = 0$ до $x = 2\pi R$. Тогда по формуле

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

найдем

$$S = \int\limits_0^{2\pi} R(1 - \cos t)R(1 - \cos t)dt = R^2\int\limits_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2dt =$$

$$= R^2\int\limits_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = R^2\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\Big)dt =$$

$$= R^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{3}{2}dt = 3\pi R^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что определенный интеграл от $\cos t$ и $\cos 2t$ по периоду 2π равен нулю.

Любопытно, что площадь одной арки циклоиды в три раза больше площади катящегося круга.

Астроида (14.49) (рис. 53) симметрична относительно координатных осей [20], поэтому достаточно найти четвертую часть ее площади, т.е. площадь фигуры, лежащей в первом квадранте. Это можно сделать по формуле (14.32).

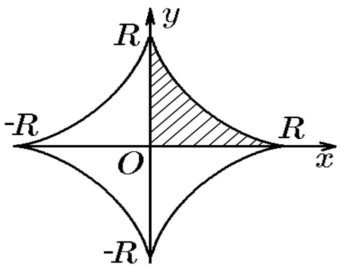


Рис. 53

Учтем, что точке $x = 0$ соответствует параметр $t_1 = \pi/2$, а точке $x = R$ параметр $t_2 = 0$. Тогда

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{\pi/2}^{0} y(t)x'_t(t)dt = \int\limits_{\pi/2}^{0} R\sin^3 t(-3R\cos^2 t\sin t)dt =$$

$$= -3R^2\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^4 t\cos^2 t\,dt = -\frac{3}{4}R^2\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 2t\sin^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{3}{8}R^2\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 2t(1-\cos 2t)dt = -\frac{3}{8}R^2\int\limits_{\pi/2}^{0}(\sin^2 2t - \sin^2 2t\cos 2t)dt =$$

$$= -\frac{3}{8}R^2\left[\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{0}(1-\cos 4t)dt - \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 2t\,d(\sin 2t)\right] =$$

$$= -\frac{3}{8}R^2\left[\frac{1}{2}\Big(t - \frac{\sin 4t}{4}\Big)\Big|_{\pi/2}^{0} - \frac{\sin^3 2t}{6}\Big|_{\pi/2}^{0}\right] = \frac{3\pi R^2}{32}.$$

15. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть на отрезке $[a, b]$ оси Ox в плоскости xOy задана неотрицательная и непрерывная функция $y = f(x)$.) При вращении линии, представляющей график этой функции, вокруг оси Ox мы получим поверхность, называемую *поверхностью вращения* G (рис. 54,a).

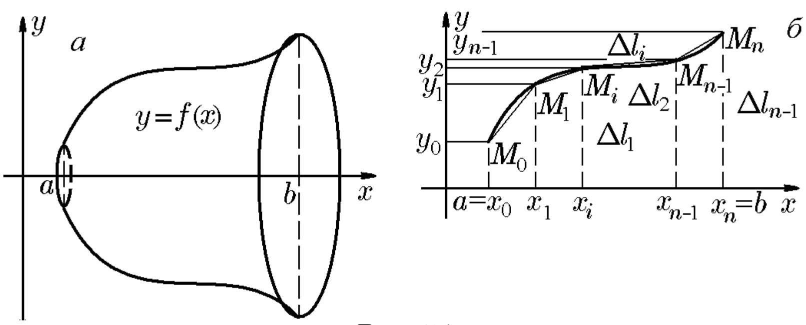


Рис. 54

Рассмотрим задачу о нахождении площади этой поверхности с помощью определенного интеграла, исходя из явного вида функции $y = f(x)$. Для этого, как и ранее, воспользуемся разбиением $\tau_n = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$ отрезка $[a, b]$. Исходя их этого разбиения, построим ломаную L_n с вершинами $M_i(x, f(x_i))$. Пусть Δl_i — длина звена $[M_{i-1}, M_i]$:

$$\Delta l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}. \quad (15.1)$$

При вращении звена $[M_{i-1}, M_1]$ вокруг оси Ox образуется боковая поверхность усеченного конуса площадью

$$\Delta G_i = 2\pi \Delta l_i \frac{y_{i-1} + y_i}{2} = \pi \Delta l_i (y_{i-1} + y_i). \tag{15.2}$$

Тогда площадь поверхности G_n, получаемой при вращении ломаной L_n вокруг оси Ox, найдется суммой

$$G_n = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) \Delta l_i. \tag{15.3}$$

Если существует

$$\lim_{d \to 0} G_n = \lim_{l \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) \Delta l_i = G, \tag{15.4}$$

где $d = d(\tau_n)$ — диаметр разбиения τ_n, то число G называется *площадью поверхности вращения*, т.е. площадью поверхности, образованной при вращении графика функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ вокруг оси Ox.

Лемма 15.1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то предел* (15.4) *существует и равен интегралу*

$$G = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{15.5}$$

Доказательство. Из формул (15.1) и (15.3) имеем

$$G_n = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \tag{15.6}$$

где $y_i = f(x_i)$. По теореме Лагранжа имеем

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i) \Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}. \tag{15.7}$$

С учетом этого формулу (15.6) можно записать так:

$$G_n = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) \sqrt{1 + [f(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i. \tag{15.8}$$

В правой части (15.8) добавим и вычтем интегральную сумму для интеграла (15.5) с разбиением τ_n и выборкой $\xi(\tau_n)$, т.е. сумму

$$S(g, \tau_n, \xi(\tau_n)) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sqrt{1 + [f(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i, \tag{15.9}$$

где $g(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f(x)]^2}$. В силу непрерывности функции $g(x)$ для любой выборки $\xi(\tau_n)$ существует предел, равный

$$\lim_{l \to 0} S(g, \tau_n, \xi(\tau_n)) = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + [f(x)]^2}\, dx,$$

тогда

$$\lim_{l\to 0}[G_n - S(g,\tau_n,\xi(\tau_n))] = G - 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f(x)]^2}\,dx.$$

Поэтому для доказательства формулы (15.5) достаточно показать, что

$$\lim_{l\to 0}[G_n - S(g,\tau_n,\xi(\tau_n))] = 0. \tag{15.10}$$

Расписав эту разность в явном виде:

$$G_n - S(g,\tau_n,\xi(\tau_n)) = \pi\sum_{i=1}^{n}[y_i - y_{i-1} - 2f(\xi_i)]\sqrt{1+[f(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i,$$

и рассуждая, как при доказательстве теорем 13.1 и 13.3, убеждаемся в справедливости (15.10) и, следовательно, в справедливости (15.5).

Следствие 15.1.1. Если кривая вращения задается параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t\in[t_1,t_2],$$

то площадь поверхности вращения найдется по формуле

$$G = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt, \tag{15.11}$$

полученной из (15.5) заменой $x = x(t)$.

Следствие 15.1.2. Если кривая вращения задается полярными уравнениями $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, то площадь поверхности вращения вокруг полярной оси, совпадающей с осью Ox, найдется по формуле

$$G = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi')^2}\,d\varphi. \tag{15.12}$$

Пример 15.1. Найти площадь:
1) сферического пояса высотой h сферы радиуса R;
2) вытянутого эллипсоида вращения;
3) сфероида (сжатого эллипсоида вращения).

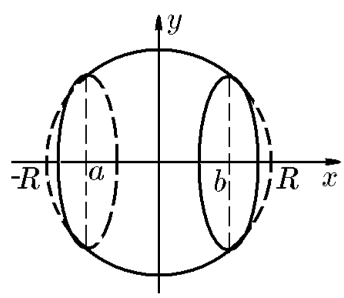


Рис. 55. Сферический пояс

Решение. 1) Сферический пояс высотой h можно получить вращением дуги верхней полуокружности окружности

$$x^2+y^2 = R^2, \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad [a,b]\subset[-R,R], \quad h = b-a, \tag{15.13}$$

вокруг оси Ox (рис. 55).

Чтобы найти площадь поверхности вращения, воспользуемся формулой (15.5):

$$G = 2\pi\int\limits_a^b y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx,$$

которую мы запишем, внеся множитель $y(x)$ под знак квадратного корня, т.е.

$$G = 2\pi \int_a^b \sqrt{y^2 + (yy')^2}\, dx. \tag{15.14}$$

Такая запись удобна тем, что дифференцирование уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ дает $2x + 2yy' = 0$ или

$$yy' = -x.$$

С учетом этого выражение $\sqrt{y^2 + (yy')^2}$ запишется как

$$\sqrt{y^2 + (yy')^2} = \sqrt{R^2 + x^2 - x^2} = R.$$

Подставив это выражение в (15.14), получим

$$G = 2\pi \int_a^b \sqrt{y^2 + (yy')^2}\, dx = 2\pi \int_a^b R\, dx = 2\pi R(b-a) = 2\pi Rh.$$

В частности, площадь поверхности сферы радиуса R ($a = -R$, $b = R$) равна $G = 4\pi R^2$.

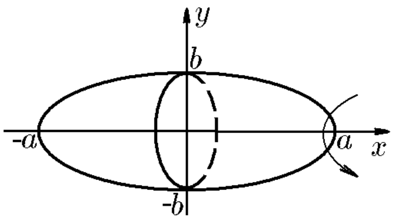


Рис. 56. Вытянутый эллипсоид

2) Поверхность вытянутого эллипсоида можно получить вращением эллипса вокруг его большой оси, которую мы расположим вдоль оси Ox, т.е. вращением кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b, \quad y \geqslant 0, \tag{15.15}$$

вокруг оси Ox (рис. 56).

Чтобы найти площадь поверхности вращения кривой (15.15) вокруг оси Ox, воспользуемся формулой (15.3), записанной в виде (15.14):

$$G = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{y^2 + (yy')^2}\, dx. \tag{15.16}$$

Из уравнения (15.15) мы можем записать два равенства:

первое

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2, \tag{15.17}$$

и второе, полученное дифференцированием (15.15):

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0, \text{ или } yy' = -\frac{b^2}{a^2}x, \tag{15.18}$$

с помощью которых интеграл (15.16) запишется как

$$G = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}x^2}\, dx = 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}\, dx =$$

$$= 2\pi\frac{b}{a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx = 4\pi\frac{b\varepsilon}{a}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2-x^2}\,dx. \tag{15.19}$$

Здесь мы учли четность подынтегральной функции и воспользовались определением эксцентриситета эллипса

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{15.20}$$

с полуосями a и b, причем $a \geqslant b$.

Чтобы вычислить интеграл (15.19), воспользуемся результатом примера 3.18, тогда

$$G = 4\pi\frac{b\varepsilon}{a}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2-x^2}\,dx = 4\pi\frac{b\varepsilon}{a}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2\arcsin\frac{x\varepsilon}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2-x^2}\right]\Bigg|_0^a =$$

$$= 4\pi\frac{b\varepsilon}{a}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2\arcsin\varepsilon+\frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2-a^2}\right] = 2\pi b\left[\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon + a\sqrt{1-\varepsilon^2}\right],$$

а с учетом (15.20)

$$G = 2\pi b\left[b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right]. \tag{15.21}$$

Формула (15.21) задает площадь поверхности вытянутого эллипсоида вращения с полуосями a и b, $a \geqslant b$. Так, например, для эллипсоида с полуосями $a = 5$ и $b = 3$ и, следовательно, эксцентриситетом $\varepsilon = \sqrt{25-9}/5 = 4/5$ по формуле (15.21) получим

$$G = 2\pi\cdot 3\left[3+\frac{5\cdot 5}{4}\arcsin\frac{4}{5}\right] \approx 6\pi[3+6{,}25\cdot 0{,}92] \approx 6\pi[3+5{,}7] = 52{,}5\pi.$$

Для сравнения: площадь поверхности сферы радиуса $R = 3$ равна $G = 4\pi\cdot 3^2 = 36\pi$, а площадь поверхности сферы радиуса $R = 5$ равна $G = 4\pi\cdot 5^2 = 100\pi$, т.е. площадь поверхности такого вытянутого эллипсоида почти в полтора раза больше площади поверхности сферы радиуса $R = 3$ и почти в два раза меньше площади поверхности сферы радиуса $R = 5$.

Заметим, что площадь поверхности сферы радиуса b можно получить из формулы (15.21) предельным переходом при $a \to b$, когда $\varepsilon \to 0$ и $(\arcsin\varepsilon)/\varepsilon \to 1$, тогда

$$G = \lim_{\substack{a\to b\\ \varepsilon\to 0}} 2\pi b\left[b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right] = 2\pi b[b+b] = 4\pi b^2,$$

т.е. приходим к известной формуле площади поверхности сферы радиуса b.

3) Поверхность сжатого эллипсоида можно получить вращением эллипса вокруг его малой оси, которую мы расположим вдоль оси Oy, т.е. вращением кривой (15.15):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b, \quad x \geqslant 0,$$

вокруг оси Oy (рис. 57).

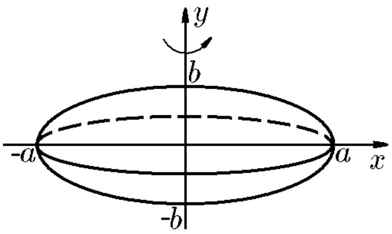


Рис. 57. Сжатый эллипсоид (сфероид)

В этом случае, чтобы найти площадь поверхности вращения кривой (15.15) вокруг оси Oy, воспользуемся формулой (15.14), заменив в ней переменную интегрирования x на y, т.е.

$$G = 2\pi \int_{-b}^{b} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy, \tag{15.22}$$

и вместо уравнений (15.17) и (15.18) воспользуемся уравнениями

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2$$

и

$$xx' = -\frac{a^2}{b^2}y,$$

с помощью которых интеграл (15.22) запишется как

$$G = 2\pi \int_{-b}^{b} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{a^4}{b^4}y^2}\, dy = 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \int_{-b}^{b} \sqrt{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2 + y^2}\, dy =$$

$$= 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \int_{-b}^{b} \sqrt{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 + \varepsilon^2 y^2}\, dy = 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \varepsilon \int_{-b}^{b} \sqrt{\left(\frac{b^2}{a\varepsilon}\right)^2 + y^2}\, dy. \tag{15.23}$$

Здесь по-прежнему ε — эксцентриситет эллипса с полуосями a и b ($a \geqslant b$), определяемый равенством (15.20).

Чтобы вычислить интеграл (15.23), воспользуемся результатом примера 3.18, обозначив $\alpha = (b^2/a\varepsilon)^2$. Тогда

$$G = 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \varepsilon \int_{-b}^{b} \sqrt{y^2 + \alpha}\, dy = 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \varepsilon \frac{1}{2}\left[y\sqrt{y^2 + \alpha} + \alpha \ln|y + \sqrt{y^2 + \alpha}|\right]\Big|_{-b}^{b} =$$

$$= \pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \varepsilon\left[b\sqrt{b^2 + \alpha} + b\sqrt{b^2 + \alpha} + \alpha \ln\left|\frac{b + \sqrt{b^2 + \alpha}}{b - \sqrt{b^2 + \alpha}}\right|\right] =$$

$$= 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \varepsilon\left[b\sqrt{b^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln\left|\frac{b + \sqrt{b^2 + \alpha}}{b - \sqrt{b^2 + \alpha}}\right|\right].$$

Учтя, что

$$\sqrt{b^2 + \alpha} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b^2}{a\varepsilon}\right)^2} = \frac{b}{a\varepsilon}\sqrt{a^2\varepsilon^2 + b^2} = \frac{b}{a\varepsilon}\sqrt{a^2\frac{a^2 - b^2}{a^2} + b^2} = \frac{b}{\varepsilon},$$

можем записать

$$G = 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \varepsilon\left[b\sqrt{b^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln\left|\frac{b + \sqrt{b^2 + \alpha}}{b - \sqrt{b^2 + \alpha}}\right|\right] = 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \varepsilon\left[\frac{b^2}{\varepsilon} + \frac{b^4}{2a^2\varepsilon^2} \ln\left|\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right|\right] =$$

$$= 2\pi a^2\left[1 + \frac{b^4}{2a^2\varepsilon} \ln\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right] = 2\pi a\left[a + \frac{b^2}{2a\varepsilon} \ln\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right], \quad \varepsilon < 1.$$

Таким образом, площадь поверхности сфероида будет определяться формулой

$$G = 2\pi a\left[a + \frac{b^2}{2a\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]. \tag{15.24}$$

Так, например, для сфероида с полуосями $a = 5$ и $b = 3$ и, следовательно, $\varepsilon = \sqrt{25-9}/5 = 4/5$, по формуле (15.24) получим

$$G = 2\pi\cdot 5\left[5 + \frac{9\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 4}\ln\frac{1+4/5}{1-4/5}\right] = 10\pi\left[5 + \frac{9}{8}\ln 9\right] = 10\pi(5 + 2{,}46) \approx 74{,}6\pi.$$

Заметим, что площадь поверхности такого сжатого эллипсоида почти в полтора раза больше площади поверхности вытянутого эллипсоида с теми же полуосями эллипса вращения $a = 5$ и $b = 3$.

Покажем, что площадь поверхности сферы радиуса b также можно получить из формулы (15.24) предельным переходом при $a \to b$, когда $\varepsilon \to 0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}[\ln(1+\varepsilon) - \ln(1-\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}(\varepsilon+\varepsilon) = 1,$$

поэтому

$$G = \lim_{\left(\substack{a\to b\\ \varepsilon\to 0}\right)} 2\pi a\left[a + \frac{b^2}{2a\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] = 2\pi b[b+b] = 4\pi b^2,$$

т.е. приходим к известной формуле площади поверхности сферы радиуса b.

В заключение рассмотрим две кривые, заданные параметрически, и две кривые, заданные полярными координатами. Выше мы нашли площади плоских фигур, ограниченных этими кривыми, теперь найдем площади поверхностей вращения этих кривых.

Пример 15.2. Найти площадь поверхности вращения

1) астроиды;

2) одной арки циклоиды

вокруг оси Ox.

Решение. 1) Для астроиды

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\sin^3 t$$

в примере 13.9 мы нашли ее длину, в примере 14.7 — площадь фигуры, ограниченной этой кривой. В этих примерах мы уже отмечали симметрию астроиды относительно координатных осей (рис. 53), поэтому для нахождения искомой площади поверхности достаточно найти половину площади поверхности, описанной вращением дуги астроиды, лежащей а первом квадранте $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$.

В таком случае по формуле (15.11) имеем

$$\frac{1}{2}G = 2\pi\int\limits_0^{\pi/2} y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся результатом (13.89) из примера 13.9, дающим выражение для корня

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 3R\sin t\cos t,$$

тогда

$$\frac{1}{2}G = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} R\sin^3 t \cdot 3R\sin t\cos t\,dt = 6\pi R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos t\,dt =$$

$$= 6\pi R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t\,d(\sin t) = 6\pi R^2 \frac{\sin^5 t}{5}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{6\pi R^2}{5},$$

откуда

$$G = \frac{12\pi R^2}{5}.$$

2) Для циклоиды

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t)$$

в примере 13.7 мы нашли длину одной арки циклоиды, что соответствует изменению параметра t от $t = 0$ до $t = 2\pi$ (рис. 29), в примере 14.7 — площадь плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды и осью Ox. Теперь нам нужно найти площадь поверхности вращения одной арки циклоиды вокруг оси Ox. Как и выше, воспользуемся формулой (15.11), тогда

$$G = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся результатом примера 13.11, где вычислен корень

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 2R\sin\frac{t}{2}.$$

С учетом этого

$$G = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} R(1 - \cos t)2R\sin\frac{t}{2}\,dt = 4\pi R^2 \int\limits_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi R^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}dt.$$

Сделаем замену переменной: $t/2 = v$, $dt = 2dv$. Тогда

$$G = 16\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} \sin^3 v\,dv = -16\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos^2 v)\,d(\cos v) =$$

$$= -16\pi R^2 \left[\cos v\Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^3 v}{3}\bigg|_0^{\pi}\right] = -16\pi R^2 \left[-2 + \frac{2}{3}\right] = \frac{64\pi R^2}{3}.$$

Пример 15.3. Найти площади поверхностей вращения, образованных вращением кривых, заданных в полярных координатах:

1) кардиоиды;

2) лемнискаты Бернулли

вокруг полярной оси.

Решение. 1) Для кардиоиды

$$\rho = R(1+\cos\varphi)$$

в примере 13.12 (рис. 32,*б*) мы нашли ее длину, в примере 14.5 — площадь плоской фигуры, ограниченной этой кривой. Теперь нам нужно найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кардиоиды при изменении азимутального угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$, вокруг полярной оси. Как и выше, воспользуемся формулой (15.12):

$$G = 2\pi \int\limits_0^\pi \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

и результатом вычислений из примера 13.12 для квадратного корня:

$$\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2} = 2R\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Тогда

$$G = 2\pi\int\limits_0^\pi R(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cdot 2R\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4\pi R^2\int\limits_0^\pi 2\cos^2\frac{\varphi}{2}2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 16\pi R^2\int\limits_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -32\pi R^2\int\limits_0^\pi\cos^4\frac{\varphi}{2}d\Big(\cos\frac{\varphi}{2}\Big) =$$

$$= -32\pi R^2\frac{\cos^5(\varphi/2)}{5}\Big|_0^\pi = -\frac{32}{5}\pi R^2(0-1) = \frac{32}{5}\pi R^2.$$

2) Для лемнискаты Бернулли

$$\rho^2(\varphi) = R^2\cos 2\varphi$$

вычисление длины с помощью интеграла (13.76) невозможно осуществить по формуле Ньютона–Лейбница, поскольку этот интеграл не имеет первообразной, выраженной в элементарных функциях. Интеграл (13.76) для лемнискаты Бернулли относится к классу специальных функций, называемых эллиптическими (см. пример 13.13). Однако вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной лемнискатой, как показано в примере 14.4 (рис. 49,*а*), оказывается возможным в элементарных функциях. В элементарных же функциях можно вычислить и площадь поверхности вращения лемнискаты вокруг оси Ox, т.е. полярной оси. Действительно, учитывая симметрию лемнискаты относительно координатных осей (см. пример 14.4 и рис. 49,*а*), половину площади вращения лемнискаты относительно оси Ox можно найти вращением части дуги лемнискаты, лежащей в первом квадранте, при изменении азимутального угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi/4$, т.е.

$$\frac{1}{2}G = 2\pi\int\limits_0^{\pi/4}\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi.$$

Поскольку

$$\rho = R\sqrt{\cos 2\varphi},\quad \varphi\in\Big[0,\frac{\pi}{4}\Big],$$

и

$$\rho'(\varphi) = -\frac{R\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

то

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} = \sqrt{R^2\cos 2\varphi + R^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = R\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}G = 2\pi\int\limits_0^{\pi/4} R\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi R\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi R^2\int\limits_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= -2\pi R^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} = -2\pi R^2\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\Big) = \pi R^2(2-\sqrt{2}),$$

откуда

$$G = \pi R^2(2-\sqrt{2}).$$

16. Вычисление объемов пространственных тел

16.1. Условия кубируемости и классы кубируемых тел

Выше мы определили объем пространственного тела как предел последовательности объемов вписанных в тело многогранников. Так же как для кривых и плоских фигур, для пространственных тел более детальное рассмотрение вопроса об исчислении их объемов связано с использованием декартовой системы координат и методов аналитической геометрии. Оказывается, что в такой постановке задачи удобнее вместо многогранников воспользоваться клеточными телами, составленными из прямоугольных параллелепипедов. Клеточное тело определим по аналогии с клеточной фигурой.

♦ *Прямоугольным параллелепипедом* называется множество точек, которое в декартовых координатах задается как

$$\Pi = \{(x,y,z)\colon a_1 \leqslant x \leqslant b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2, a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}, \tag{16.1}$$

или множество, получаемое из Π (16.1) удалением всей или части границы множества Π. Число $V = (b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$ будем называть *объемом параллелепипеда* Π независимо от того, принадлежат или не принадлежат множеству Π его граничные точки.

♦ Тело, представляющее собой объединение конечного числа непересекающихся параллелепипедов, будем называть *клеточным. Объемом клеточного тела* будем называть сумму объемов составляющих его параллелепипедов.

Объем клеточного тела обладает общими свойствами объемов пространственных тел: аддитивности, инвариантности, монотонности, и, кроме того, не зависит от способа разбиения его на параллелепипеды.

Так как клеточные тела являются кубируемыми, то произвольное тело Ω будем называть *кубируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные тела $\underline{P}$ и $\overline{P}$ такие, что

$$\underline{P} \subset \Omega \subset \overline{P}, \quad 0 \leqslant V(\overline{P}) - V(\underline{P}) < \varepsilon, \tag{16.2}$$

где $V(\overline{P})$ и $V(\underline{P})$ — объемы тел $\overline{P}$ и $\underline{P}$, соответственно.

Как и в случае плоских фигур, можно показать, что если тело Ω кубируемо, то существует единственное число $V(\Omega)$ такое, что неравенство

$$V(\underline{P}) \leqslant V(\Omega) \leqslant V(\overline{P})$$

выполняется для любых клеточных тел $\overline{P}$ и $\underline{P}$, удовлетворяющих условию $\underline{P} \subset \Omega \subset \overline{P}$, при этом

$$V(\Omega) = \sup V(\underline{P}) = \inf V(\overline{P}). \tag{16.3}$$

♦ Число $V(\Omega)$ (16.3) называется *объемом* V *тела* Ω.

Можно показать, что условие (16.2) является не только необходимым, но и достаточным, т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 16.1. *Для кубируемости тела Ω необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись два кубируемых тела $\underset{\sim}{\Omega}$ и $\tilde{\Omega}$, таких что*

$$\underset{\sim}{\Omega} \subset \Omega \subset \tilde{\Omega}$$

и

$$V(\tilde{\Omega}) - V(\underset{\sim}{\Omega}) < \varepsilon.$$

Теореме 16.1 можно придать наглядную геометрическую интерпретацию, предварительно договорившись, что любая поверхность (замкнутая или нет) имеет нулевой объем, если ее можно заключить в тело со сколь угодно малым объемом: $V(\omega) < \varepsilon$.

С учетом этой договоренности условие кубируемости тела Ω, согласно теореме 16.1, можно переформулировать следующим образом: для того чтобы тело Ω было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы ее граница, т.е. поверхность, ограничивающая тело Ω, имела нулевой объем.

Критерий кубируемости тела в такой формулировке указывает на необходимость выделения классов поверхностей с нулевым объемом.

Лемма 16.1. *Поверхность S обладает нулевым объемом, если она:*

1) *задается непрерывной функцией*

$$z = f(x, y) \tag{16.4}$$

двух переменных в некоторой ограниченной пространственной области Ω;

2) *является гладкой поверхностью, описываемой параметрическими уравнениями*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \tag{16.5}$$

Доказательство этих утверждений полностью аналогично доказательствам утверждений для плоского случая.

Теорема 16.2 (о кубируемых телах). *Тело, ограниченное одной или несколькими гладкими поверхностями, заведомо имеет объем, т.е. кубируемо.*

Доказательство очевидным образом вытекает из теоремы 16.1, леммы 16.1 и свойства аддитивности объема.

Наряду с понятием клеточного тела введем понятие цилиндрического тела. Для этого рассмотрим простой контур L, расположенный в плоскости xOy, ограничивающий плоскую фигуру Q. Рассмотрим множество $\Omega_{\text{ц}}$ точек пространства, которые получаются параллельным сдвигом фигуры Q в положительном направлении оси Oz на расстояние h.

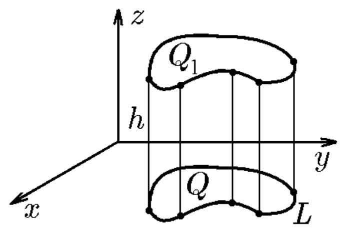


Рис. 58. Цилиндрическое тело $\Omega_{\text{ц}}$

♦ Множество точек $\Omega_{\text{ц}}$, ограниченное плоской фигурой Q, называемой *нижним основанием*, плоской фигурой Q_1, называемой *верхним основанием*, и частью цилиндрической поверхности, называемой *боковой*, с направляющей L (рис. 58), параллельной оси Oz, будем называть *цилиндрическим телом* высотой h и основанием Q.

Цилиндрическое тело, как и параллелепипед, является кубируемым с объемом $V(\Omega_{\text{ц}})$, равным

$$V(\Omega_{\text{ц}}) = S(Q)h, \tag{16.6}$$

где $S(Q)$ — площадь основания Q тела, а h — его высота.

Действительно, плоская фигура Q, ограниченная простым контуром L, является квадрируемой своей площадью $S(Q)$, а отрезок образующей (т.е. прямой) является спрямляемой длиной h; следовательно, сомножители в правой части (16.6) однозначно определены и их произведение является конечной величиной $V(\Omega_{\text{ц}})$. Покажем теперь, что число $V(\Omega_{\text{ц}})$ действительно является объемом цилиндрического тела $\Omega_{\text{ц}}$. Для этого построим два цилиндрических тела $\overline{\Omega}$ и $\underline{\Omega}$ высотой h и основаниями $\overline{Q}$ и $\underline{Q}$ такими, что

$$\underline{Q} \subset Q \subset \overline{Q}. \tag{16.7}$$

Но тогда, во-первых, для трех цилиндрических тел одной высоты h имеем

$$\underline{\Omega} \subset \Omega \subset \overline{\Omega}, \tag{16.8}$$

а, во-вторых, из квадрируемости фигуры Q следует, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда существуют клеточные фигуры $\overline{Q}$, $\underline{Q}$, для которых справедливо неравенство

$$0 \leqslant S(\overline{Q}) - S(\underline{Q}) < \frac{\varepsilon}{h},$$

а, следовательно, и

$$0 \leqslant S(\overline{Q})h - S(\underline{Q})h < \varepsilon. \tag{16.9}$$

Вместе с тем, если для цилиндрических тел $\overline{\Omega}$ и $\underline{\Omega}$ их основания $\overline{Q}$, $\underline{Q}$ являются клеточными фигурами, то тела $\overline{\Omega}$ и $\underline{\Omega}$ будут клеточными, и их можно выбрать в качестве $\overline{P}$ и $\underline{P}$ в (16.2). Объемы клеточных тел легко вычисляются:

$$V(\overline{\Omega}) = V(\overline{P}) = S(\overline{Q})h, \quad V(\underline{\Omega}) = V(\underline{P}) = S(\underline{Q})h. \tag{16.10}$$

Из (16.9) следует

$$0 \leqslant V(\overline{Q}) - V(\underline{Q}) < \varepsilon. \tag{16.11}$$

Таким образом, для цилиндрического тела $\Omega_{\text{ц}}$ выполняются условия кубируемости (16.6). Сам объем $V(\Omega_{\text{ц}})$ найдется из (16.6) с учетом (16.9) формулой

$$V(\Omega_{\text{ц}}) = \sup V(\underline{P}) = \inf V(\overline{P}) = \sup S(\underline{Q})h = \inf S(\overline{Q})h =$$
$$= h \sup S(\underline{Q}) = h \inf S(\overline{Q}) = hS(Q),$$

совпадающей с (16.6).

♦ Тело, являющееся объединением конечного числа цилиндрических тел, будем называть *ступенчатым*.

Ступенчатое тело является кубируемым, если основания цилиндрических тел, составляющих его, квадрируемы, при этом объем ступенчатого тела равен сумме объемов цилиндрических тел, составляющих его.

16.2. Простейшие классы кубируемых тел и формулы вычисления их объемов

Рассмотрим некоторое тело Ω, заключенное между двумя плоскостями, перпендикулярными оси Ox и пересекающими эту ось в точках $x = a$ и $x = b$ (рис. 59).

Обозначим через $Q(a)$ фигуру, получаемую в сечении тела плоскостью $x = a$, через $Q(b)$ фигуру, получаемую в сечении тела плоскостью $x = b$, а через $Q(x)$ фигуру, получаемую в сечении тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через произвольную точку $x \in [a, b]$. Будем считать, что при любом $x \in [a, b]$ фигура $Q(x)$ квадрируема, а ее площадь $S(Q(x))$ (для краткости обозначения — $S(x)$) является непрерывной функцией x на отрезке $[a, b]$. Кроме этого, предположим, что при проектировании любых двух сечений $Q(\alpha)$ и $Q(\beta)$, $\alpha, \beta \in [a, b]$, на плоскость yOz получатся фигуры, одна из которых содержится в другой.

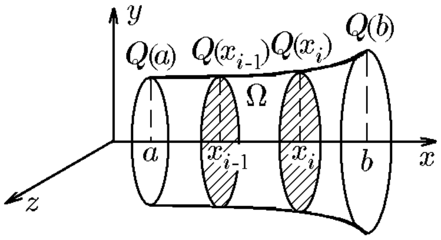


Рис. 59

Теорема 16.3 (об объеме тела с заданными площадями поперечных сечений). *В предположениях, сделанных выше, тело Ω кубируемо, а его объем $V(\Omega)$ вычисляется формулой*

$$V(\Omega) = \int_a^b S(x)dx. \tag{16.12}$$

Доказательство. Как и ранее, воспользуемся разбиением $\tau_n = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$ отрезка $[a, b]$, и пусть m_i и M_i — соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $S(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$. Так как по условию теоремы $S(x)$ — непрерывная функция, то для нее существуют точки $\underline{\xi}_i, \overline{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, в которых $S(\underline{\xi}_i) = m_i$ и $S(\overline{\xi}_i) = M_i$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим через Ω_i часть тела Ω, заключенную между двумя плоскостями, перпендикулярными оси Ox и проходящими через точки x_{i-1} и x_i (рис. 59). Пусть $\underline{\Omega}_i$ и $\overline{\Omega}_i$ — цилиндрические тела высотой Δx_i, построенные на сечениях $Q(\underline{\xi}_i)$ и $Q(\overline{\xi}_i)$ как на основаниях. Тогда $\underline{\Omega}_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega}_i$, а объемы этих тел равны

$$V(\underline{\Omega}_i) = m_i \Delta x_i, \quad V(\overline{\Omega}_i) = M_i \Delta x_i.$$

Если $\underline{\Omega}$ — объединение тел $\underline{\Omega}_i$ ($\underline{\Omega} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \underline{\Omega}_i$), а $\overline{\Omega}$ — объединение тел $\overline{\Omega}_i$ ($\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_i$), то

$$\underline{\Omega} \subset \Omega \subset \overline{\Omega}$$

и

$$\sup V(\underline{\Omega}) = \inf \overline{\Omega} = \int_a^b S(x)dx,$$

то Ω — кубируемое тело, а его объем выражается формулой (16.12), что и требовалось доказать.

Следствие 16.3.1 (объем тела вращения вокруг оси Ox). Тело Ω, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $G = \{a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, является кубируемым, а его объем $V(\Omega)$ выражается формулой

$$V(\Omega) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx = \pi \int\limits_a^b y^2(x)dx. \tag{16.13}$$

Действительно, поскольку для тела вращения площадь поперечного сечения $S(x)$ определяется как площадь круга радиуса $f(x)$ (рис. 60,*а*), т.е.

$$S(x) = \pi f^2(x),$$

то подстановка этого выражения в (16.12) приводит к формуле (16.13).

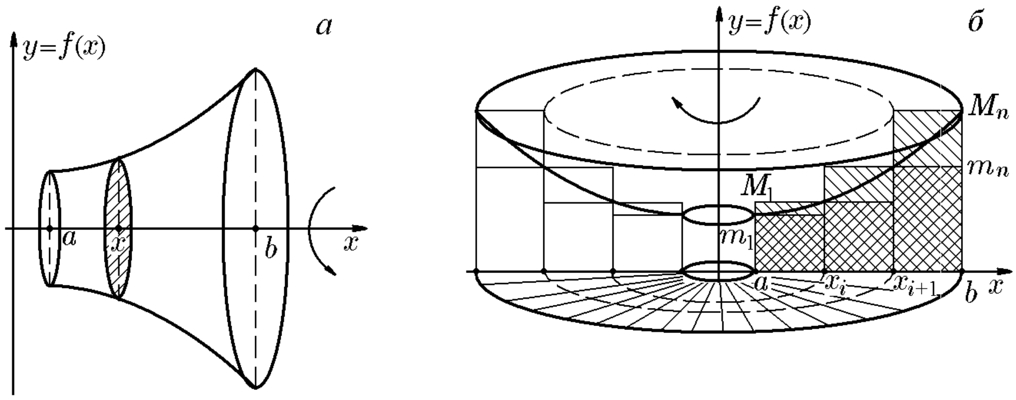


Рис. 60. Вращение вокруг оси Ox (*а*) и вокруг оси Oy (*б*)

Следствие 16.3.2 (объем тела вращения вокруг оси Oy). Тело Ω, образованное вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $(x, y) = \{a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, является кубируемым, а его объем $V(\Omega)$ выражается формулой

$$V(\Omega) = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)dx = 2\pi \int\limits_a^b xy(x)dx. \tag{16.14}$$

Действительно, как и при доказательстве теоремы 16.3, воспользуемся разбиением $\tau_n = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$ отрезка $[a, b]$, и пусть m_i и M_i — соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

На каждом отрезке отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ построим два прямоугольника с основанием Δx_i и высотой m_i и M_i. Первый прямоугольник вписан в криволинейную трапецию с тем же основанием Δx_i, а второй прямоугольник описан вокруг этой трапеции (рис. 60,*б*). При вращении этих фигур вокруг оси Oy мы получим 3 тела вращения. Одно из них будет искомым телом вращения криволинейной трапеции Ω, а два других будут представлять собой ступенчатые тела $\underline{\Omega}(\tau_n)$ и $\overline{\Omega}(\tau_n)$, составленные из кольцевых цилиндров. Первое из них будет вписанным в тело Ω, а другое — описанным вокруг него, т.е. $\underline{\Omega}(\tau_n) \subset \Omega \subset \overline{\Omega}(\tau_n)$. Объемы кольцевых цилиндров равны

$$\begin{aligned} V(\underline{\Omega}(\tau_n)) &= \sum_{i=1}^{n} \pi m_i (x_{i+1}^2 - x_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \pi m_i (x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi m_i (x_{i+1} + x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \pi m_i (x_i + \Delta x_i + x_i)\Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i x_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \pi m_i (\Delta x_i)^2; \end{aligned}$$

аналогично

$$V(\overline{\Omega}(\tau_n)) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi M_i x_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \pi M_i (\Delta x_i)^2.$$

Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 16.3, убеждаемся, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое разбиение τ_n отрезка $[a, b]$, при котором выполняется неравенство

$$V(\overline{\Omega}(\tau_n)) - V(\underline{\Omega}(\tau_n)) < \varepsilon,$$

т.е.

$$\sup V(\underline{\Omega}(\tau_n)) = \inf V(\overline{\Omega}(\tau_n)) = V(\Omega) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Это означает, что тело вращения Ω кубируемо, а его объем выражается формулой (16.14).

Следствие 16.3.3 (объем тела вращения вокруг полярной оси). Тело Ω, образованное вращением криволинейного сектора $(\rho, \varphi) = \{0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi, 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi)\}$ вокруг полярной оси, является кубируемым, а его объем $V(\Omega)$ выражается формулой

$$V(\Omega) = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi. \tag{16.15}$$

Здесь $\rho(\varphi)$ — функция, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$

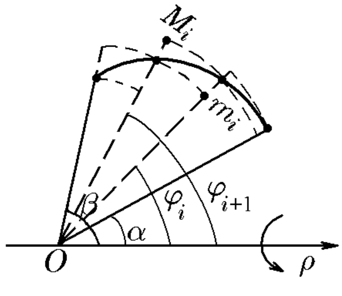


Рис. 61

Действительно, если воспользоваться стандартной процедурой разбиения $\tau_n = \{\varphi_i, i = \overline{0, n}\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ (в данном случае лучами $\varphi = \varphi_i$) и обозначить через m_i и M_i наименьшее и наибольшее значения $\rho(\varphi)$ в растворе угла $\Delta_i = [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ величиной $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$, $i = \overline{1, n}$, то в дополнение к криволинейным секторам мы можем построить круговые секторы с радиусами m_i и M_i, один из которых вписан в криволинейный сектор, а другой описан вокруг него (рис. 61).

При вращении этих секторов вокруг полярной оси мы получим три тела вращения. Одно из них будет искомым телом вращения Ω исходного криволинейного сектора, а два других будут представлять собой ступенчатые тела $\underline{\Omega}(\tau_n)$

и $\overline{\Omega}(\tau_n)$, составленные из шаровых слоев. Первое из них будет вписано в тело Ω, а другое — описано вокруг него, т.е. $\underline{\Omega}(\tau_n) \subset \Omega \subset \overline{\Omega}(\tau_n)$.

Вычислим объемы тел $\underline{\Omega}(\tau_n)$ и $\overline{\Omega}(\tau_n)$, используя известную формулу для объема шарового слоя радиуса R и высотой h:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Поскольку тело $\underline{\Omega}(\tau_n)$ составлено из шаровых слоев радиусами m_i и высотами $h_i = m_i(\cos\varphi_{i-1} - \cos\varphi_i)$, то

$$V(\underline{\Omega}(\tau_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3}\pi m_i^2 m_i(\cos\varphi_{i-1} - \cos\varphi_i) = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^{n} m_i^3 \sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi_i}{2};$$

аналогично для тела

$$V(\overline{\Omega}(\tau_n)) = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=1}^{n} M_i^3 \sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi_i}{2}.$$

Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 16.3, убеждаемся, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое τ_n-разбиение угла $[\alpha, \beta]$, при котором выполняется неравенство

$$V(\overline{\Omega}(\tau_n)) - V(\underline{\Omega}(\tau_n)) = \frac{2}{3}\pi \sum_{i=1}^{n} M_i^3 \sin\varphi_i \Delta\varphi_i - \frac{2}{3}\pi \sum_{i=1}^{n} m_i^3 \sin\varphi_i \Delta\varphi_i < \varepsilon.$$

Здесь учтено, что $\sin(\Delta\varphi_i/2) \sim \Delta\varphi_i/2$ и $\rho(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Это означает, что

$$\sup V(\underline{\Omega}(\tau_n)) = \inf V(\overline{\Omega}(\tau_n)) = V(\Omega) = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi$$

и формула (16.15) справедлива.

Пример 16.1. Вычислить объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Использование симметрии эллипсоида относительно координатных плоскостей $x = y = z = 0$ позволяет найти половину его объема в полупространстве $x \geqslant 0$. Для этого построим сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке $0 \leqslant x \leqslant a$, которым является эллипс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

или

$$\frac{y^2}{\left(b - \sqrt{1 - x^2/a^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c - \sqrt{1 - x^2/a^2}\right)^2} = 1$$

с полуосями

$$b(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c(x) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Тогда площадь поперечного сечения $S(x)$ эллипсоида равна площади эллипса с полуосями $b(x)$, $c(x)$, т.е.

$$S(x) = \pi b(x)c(x) = \pi bc\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big).$$

Зная площадь поперечного сечения как функцию от x, мы можем воспользоваться формулой (16.12):

$$\frac{1}{2}V = \int\limits_0^a \pi bc\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)dx = \pi bc\Big(x - \frac{x^3}{3a^2}\Big)\Big|_0^a = \frac{2\pi abc}{3}$$

или

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Отсюда следует, что объем шара с радиусом R равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример 16.2. Найти объем тела, отсекаемого от прямого кругового цилиндра с плоскостью основания $z = 0$ и радиусом R плоскостью, проходящей через диаметр его основания.

Решение. Имеем тело, ограниченное цилиндрической поверхностью, например

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

и двумя плоскостями: первой — плоскостью основания $z = 0$ и второй — плоскостью $z = y \operatorname{tg} \alpha$, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания $z = 0$ (рис. 62). Искомый объем можно найти двумя способами.

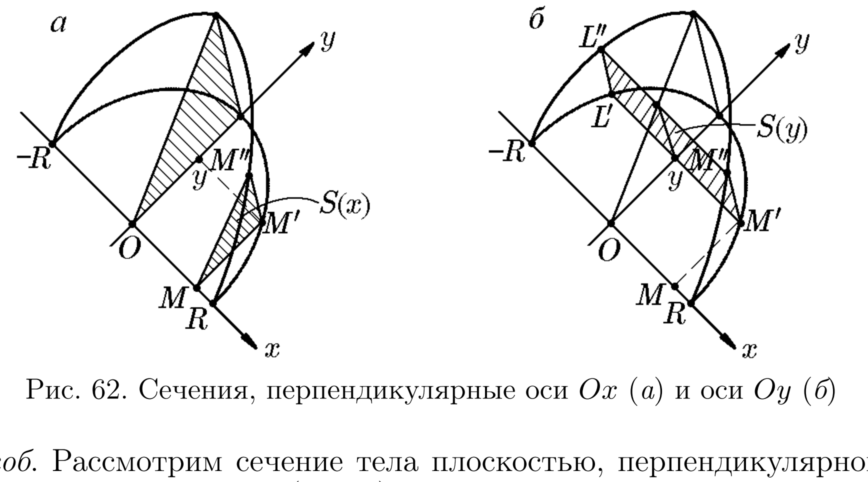


Рис. 62. Сечения, перпендикулярные оси Ox (*а*) и оси Oy (*б*)

1 способ. Рассмотрим сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $M(x, 0, 0)$. Этим сечением, как следует из рис. 62,*а*, будет прямоугольный треугольник $MM'M''$, с катетами $|MM'| = y$ и $|M'M''| =$

$y \operatorname{tg} \alpha$. Тогда площадь поперечного сечения тела $S(x)$ будет равна площади прямоугольного треугольника:

$$S(x) = \frac{1}{2}|MM'| \cdot |M'M''| = \frac{1}{2}y^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

С учетом этого по формуле (16.12) найдем

$$V = \int\limits_{-R}^{R} S(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-R}^{R}(R^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha\, dx = \frac{1}{2}\Big(R^2x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-R}^{R} \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

2 способ. Теперь рассмотрим сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Oy и проходящей через точку $M'(x, y, 0)$. Этим сечением, как следует из рис. 62,*б*, будет прямоугольник $M'M''L''L'$ со сторонами $|M'M''| = y \operatorname{tg} \alpha$ и $|M'L'| = 2x$. Тогда площадь поперечного сечения тела $S(x)$ будет равна площади прямоугольника:

$$S(y) = |M'M''| \cdot |M'L'| = 2xy \operatorname{tg} \alpha = 2y\sqrt{R^2 - y^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

С учетом этого по формуле (16.12) найдем

$$V = \int\limits_{0}^{R} S(y)dy = \int\limits_{0}^{R} 2y\sqrt{R^2 - y^2} \operatorname{tg} \alpha\, dy = -\operatorname{tg} \alpha \int\limits_{0}^{R}(R^2 - y^2)^{1/2}d(R^2 - y^2) =$$
$$= -\frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}\Big|_{0}^{R} \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg} \alpha,$$

т.е. уже полученное выше значение объема V.

Пример 16.3. Сравнить объемы кругового конуса и параболоида вращения высотой h и радиусами основания R.

Решение. 1. Ось конуса направим вдоль оси Ox, совместив вершину конуса с началом системы координат xOy. Тогда сам конус можно получить вращением прямоугольного треугольника OAB вокруг оси Ox (рис. 63,*а*). Катеты этого треугольника равны $OA = h$, $AB = R$, а гипотенуза лежит на образующей конуса, описываемой уравнением

$$y = \frac{R}{h}x. \tag{16.16}$$

С учетом этого по формуле (16.13) найдем

$$V_{\text{к}} = \pi \int\limits_{0}^{h} y^2(x)dx = \pi \int\limits_{0}^{h} \frac{R^2}{h^2}x^2dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{h} = \frac{\pi R^2 h}{3}. \tag{16.17}$$

Полученный результат совпадает с результатом, известным еще из элементарной геометрии.

2. В случае параболоида (рис. 63,*б*) единственное отличие от решения для конуса будет состоять в замене формулы (16.16) для прямой на формулу

$$y = R\sqrt{\frac{x}{h}} \tag{16.18}$$

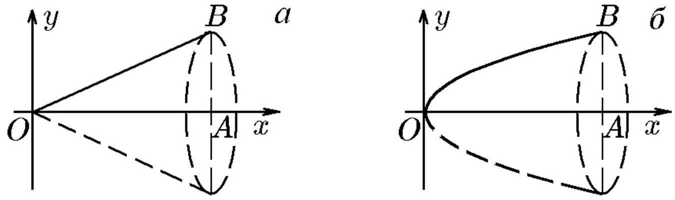


Рис. 63. Конус (*а*) и параболоид вращения (*б*)

для параболы, тогда

$$V_{\text{п}} = \pi \int\limits_0^h y^2(x)dx = \pi \int\limits_0^h R^2 \frac{x}{h} dx = \frac{\pi R^2}{h} \frac{x^2}{2}\Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{2}. \qquad (16.19)$$

Если через $V_{\text{ц}} = \pi R^2 h$ обозначить объем кругового цилиндра радиуса R и высотой h, то объем конуса $V_{\text{к}} = V_{\text{ц}}/3$, объем параболоида $V_{\text{п}} = V_{\text{ц}}/2$, а их отношение

$$\frac{V_{\text{к}}}{V_{\text{п}}} = \frac{V_{\text{ц}}/3}{V_{\text{ц}}/2} = \frac{2}{3}.$$

Пример 16.4. Найти объемы тел вращения вокруг оси Oy плоских фигур, изображенных на рис. рис. 63,*а*,*б*.

Решение. а) Имеем прямоугольный треугольник с катетами $OA = h$, $AB = R$ и гипотенузой, лежащей на прямой (16.16), т.е.

$$y = \frac{R}{h}x,$$

тогда по формуле (16.14) найдем

$$V_1 = 2\pi \int\limits_0^h xy(x)dx = 2\pi \int\limits_0^h \frac{R}{h} x^2 dx = 2\pi \frac{R}{h} \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{2\pi}{3} h^2 R.$$

б) Имеем криволинейную трапецию, ограниченную сверху параболой (16.18), т.е.

$$y = R\sqrt{\frac{x}{h}},$$

тогда по формуле (16.14) найдем

$$V_2 = 2\pi \int\limits_0^h xy(x)dx = 2\pi \int\limits_0^h R\sqrt{\frac{x}{h}} x\, dx = \frac{2\pi R}{\sqrt{h}} \frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^h = \frac{4\pi}{5} h^2 R.$$

Для сравнения с предыдущим примером найдем

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi h^2 R/3}{4\pi h^2 R/5} = \frac{5}{6} > \frac{2}{3}.$$

Пример 16.5. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{2px}$ и $y = 2(x-p)^{3/2}/\sqrt{p}$, $p > 0$.

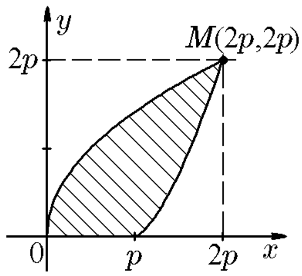


Рис. 64

Решение. Фигура, ограниченная данными кривыми, изображена на рис. 64. Найдем точки пересечения кривых:

$$\sqrt{2px} = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$$

или

$$2p^2x = 4(x-p)^3.$$

Очевидно, что уравнению удовлетворяет значение $x = 2p$, тогда $y = 2p$, т.е. имеем точку пересечения $M(2p, 2p)$. При вращении такой фигуры вокруг оси Ox искомый объем V будет разностью двух объемов: объема V_1, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y_1 = \sqrt{2px}$, и объема V_2, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной полукубической параболой $y_2 = 2(x-p)^{3/2}/\sqrt{p}$, $p \leqslant x \leqslant 2p$.

Используя формулу (16.13), найдем

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^{2p} y_1^2(x)dx - \pi\int_p^{2p} y_2^2(x)dx = \pi\int_0^{2p} 2px\,dx - \pi\int_p^{2p}\frac{4}{p}(x-p)^3dx =$$

$$= 2\pi p\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2p} - \frac{4\pi}{p}\frac{(x-p)^4}{4}\bigg|_p^{2p} = 4\pi p^3 - \pi p^3 = 3\pi p^3.$$

В заключение вычислим объем тел, образованных вращением криволинейных трапеций, ограниченных уже известными кривыми: циклоидой и астроидой, заданными параметрически, и кардиоидой и лемнискатой, заданными полярными координатами.

Пример 16.6. Найти объем тел вращения:
1) одной арки циклоиды $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$;
2) астроиды $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$,
вокруг оси Ox.

Решение. Обе кривые были рассмотрены в примерах 13.7, 13.9, 14.7, 15.2, поэтому, используя их свойства, по формуле (16.13):

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)dx$$

найдем объемы тел вращения:

1) для одной арки циклоиды, положив $dx = R(1-\cos t)dt$ и учтя, что при $x = 0$ $t = 0$, а при $x = 2\pi R$, соответственно, $t = 2\pi$, получим

$$V = \pi\int_0^{2\pi R} y^2(x)dx = \pi\int_0^{2\pi} R^2(1-\cos t)^2R(1-\cos t)dt = \pi R^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt =$$

$$= \pi R^3\Big(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t\Big)\bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2R^3;$$

2) для астроиды, положив $dx = 3R\cos^2 t(-\sin t)dt$ и учтя, что $t = \pi/2$ при $x = 0$ и, соответственно, $t = 0$ при $x = R$, в силу симметрии кривой получим

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^R y^2(x)dx = \pi\int_{\pi/2}^0 R^2\sin^6 t 3R\cos^2 t(-\sin t)dt = 3\pi R^3\int_{\pi/2}^0 \sin^6 t\cos^2 t\,d(\cos t).$$

Сделав замену переменных

$$\cos t = z, \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = 0, \quad t_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 1,$$

запишем

$$\frac{1}{2}V = 3\pi R^3 \int\limits_0^1 (1 - z^2)^3 z^2 dz = 3\pi R^3 \int\limits_0^1 (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8) dz =$$

$$= 3\pi R^3 \Big(\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9}\Big)\Big|_0^1 = 3\pi R^3 \frac{105 - 3\cdot 63 + 3\cdot 45 - 35}{315} = \frac{16}{105}\pi R^3,$$

откуда $V = \dfrac{32}{105}\pi R^3$.

Пример 16.7. Найти объем тел вращения:
1) кардиоиды $\rho = R(1 + \cos\varphi)$;
2) лемнискаты Бернулли $\rho^2 = R^2\cos 2\varphi$,
вокруг полярной оси.

Решение. Обе кривые были рассмотрены в примерах 14.4, 14.5, поэтому, используя результаты этих примеров, по формуле (16.15):

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi$$

найдем объемы тел вращения:

1) для кардиоиды

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_0^\pi R^3 (1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{2\pi}{3} R^3 \int\limits_0^\pi (1 + \cos\varphi)^3 d(1 + \cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} R^3 \frac{(1 + \cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^\pi = -\frac{2\pi}{3} R^3 \cdot \frac{1}{4}[0 - 2^4] = \frac{8\pi}{3} R^3;$$

2) для лемнискаты с учетом ее симметрии относительно оси Oy запишем

$$\frac{1}{2}V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_0^{\pi/4} R^3 \cos^{3/2} 2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi R^3}{3} \int\limits_{\pi/4}^0 (2\cos^2\varphi - 1)^{3/2} d(\cos\varphi)$$

и, сделав замену переменной

$$\sqrt{2}\cos\varphi = t, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \sqrt{2},$$

получим

$$\frac{1}{2}V = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{2}} \int\limits_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{3/2} dt =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{2}}\Big[\frac{t}{4}(t^2-1)^{3/2} - \frac{3}{8}t\sqrt{t^2-1} + \frac{3}{8}\ln(t+\sqrt{t^2-1})\Big]\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{2}}\Big[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\Big],$$

откуда

$$V = \frac{\pi R^3}{3\sqrt{2}}\Big[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\Big].$$

17. Физические приложения определенного интеграла

17.1. Общая схема применения определенного интеграла

Под физическими приложениями будем понимать широкий круг задач не только физики, но и техники, экономики и др. Опираясь на примеры уже изученных геометрических задач, рассмотрим общую схему, описывающую тот путь, по которому в прикладных задачах обычно приходят к определенному интегралу. В подобных задачах, как правило, требуется определить некоторую величину I, связанную с некоторым промежутком $[a,b]$ и обладающую свойством аддитивности.

Свойство аддитивности величины I означает, что если произвольный промежуток $[\alpha,\beta]$ из промежутка $[a,b]$ ($[\alpha,\beta] \subset [a,b]$) представить суммой частичных промежутков $[\alpha,\gamma] \cup [\gamma,\beta]$, то тогда

$$I([\alpha,\beta]) = I([\alpha,\gamma]) + I([\gamma,\beta]). \tag{17.1}$$

Благодаря этому свойству задача о нахождении величины $I([a,b])$ на всем промежутке $[a,b]$ может быть решена, исходя из известного значения величины $I([\alpha,\beta])$ на произвольном промежутке $[\alpha,\beta]$ из $[a,b]$, составлением интегральной суммы и ее вычисления с помощью соответствующего определенного интеграла на отрезке $[a,b]$.

Для пояснения воспользуемся введенным выше τ_n-разбиением отрезка $[a,b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b$$

на элементарные промежутки $[x_{i-1},x_i]$ длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. Исходя из этого τ_n-разбиения, рассмотрим «элемент» $\Delta I_i = I([x_{i-1},x_i])$ некоторой величины I, отвечающей «элементарному промежутку» $[x_{i-1},x_i]$. Далее, исходя уже из условий задачи, для величины ΔI_i стараются найти приближенное выражение вида $\Delta f(x_i)\Delta x_i$, линейное относительно Δx_i, так чтобы оно отличалось от ΔI_i разве лишь на бесконечно малую порядка высшего, чем Δx_i. Другими словами, из бесконечно малого «элемента» ΔI_i выделяют его главную часть

$$\Delta I_i \approx \Delta f(x_i)\Delta x_i. \tag{17.2}$$

Очевидно, что относительная погрешность приближенного равенства (17.2) будет стремиться к нулю вместе с величиной Δx_i.

Так как каждому промежутку $[x_{i-1},x_i]$ отвечает «элементарная часть» ΔI_i величины I, приближенно равная $f(x_i)\Delta x_i$, то вся искомая величина $I([a,b])$ приближенно выразится суммой

$$I([a,b]) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \tag{17.3}$$

Степень точности равенства (17.3) будет тем выше, чем мельче промежутки Δx_i, так что величина $I([a,b])$, очевидно, будет пределом суммы (17.3). Если функция $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ непрерывна, этот предел однозначно определится точными верхней и нижней гранями величины I и может быть вычислен с помощью определенного интеграла

$$I([a,b]) = \sup(\underline{I}) = \inf(\overline{I}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d(\tau_n)\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{17.4}$$

Таким образом, решение задачи, по сути дела, сводится к установлению приближенного равенства (17.2), из которого непосредственно следует окончательный результат (17.4). Причем запись решения задачи в виде определенного интеграла (17.4) вместо обыкновенной суммы весьма существенна. Сумма дает лишь приближенное выражение, поскольку на ней отражаются погрешности отдельных равенств (17.2); предельный переход, с помощью которого из суммы получается интеграл, уничтожает погрешность и приводит к точному результату.

Другими словами, схема решения задачи состоит в том, что после составления выражения для «элементарной части» ΔI_i на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ в нем выделяется главная часть (17.2) путем отбрасывания бесконечно малых высшего порядка по Δx_i, а затем суммирование заменяется интегрированием, в силу чего «просто» получаемый результат (без суммирования и предельного перехода) получается точным.

Впрочем, в этой схеме возможно упрощение, состоящее в том, что вместо приращений Δx_i и ΔI_i используют дифференциалы dx и dI. В этом случае равенство (17.2) заменяется равенством дифференциалов

$$dI = f(x)dx, \tag{17.5}$$

которое и представляет собой главную часть (17.2). Интегрирование этого выражения

$$I([a,b]) = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{17.6}$$

и приводит к формуле (17.4) для величины I на всем отрезке $[a,b]$, т.е. $I([a,b])$.

$\Diamond$ Справедливости ради отметим, что в геометрических приложениях определенного интеграла при вычислении длины кривой, площади плоской фигуры и объема пространственного тела мы действовали несколько иначе. Это объясняется тем, что там наша задача состояла не только в вычислении этих величин, но и в доказательстве их существования с использованием данных ранее фундаментальных определений длины, площади и объема. Все приведенные там формулы можно получить и по указанной схеме. Кроме этого, следует отметить, что при составлении равенств вида (17.5) в физических приложениях мы, по возможности, будем использовать уже известные выражения для скорости изменения исследуемой величины, т.е. характеристики, которые появились при рассмотрении бесконечно малых элементов и представляют собой их главные части.

$\Diamond$ К формуле (17.5), вообще говоря, можно подойти и с другой точки зрения. Если через $I([a,x])$ обозначить переменную часть величины $I([a,b])$, отвечающую за промежуток $[a,x]$ из $[a,b]$, при условии $I([a,a]) = 0$, то

$$dI([a,x]) = f(x)dx.$$

Интегрирование этого выражения и дает формулу (17.6):

$$\int_a^b dI([a,x]) = I([a,b]) - I([a,a]) = I([a,b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

В таком подходе решение задачи, по сути дела, сводится к интегрированию дифференциального равенства (17.5), которое можно назвать дифференциальным уравнением относительно величины $I([a,b])$. Обобщение такого подхода привело к созданию специального, весьма обширного раздела — теории дифференциальных уравнений.

17.2. Некоторые задачи классической механики

17.2.1. Вычисление механических характеристик плоских кривых

В классической механике для материальной точки массы m, расположенной на расстоянии d от некоторой оси, вводятся следующие характеристики этой точки относительно оси:

статический момент

$$M = md$$

и момент инерции

$$I = md^2.$$

Для системы материальных точек с массами $m_1, m_2, ..., m_n$, лежащих в одной плоскости с осью на расстояниях $d_1, d_2, ..., d_n$, эти характеристики определяются как суммы

статический момент

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \tag{17.7}$$

и момент инерции

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2, \tag{17.8}$$

при этом для статического момента (17.7) расстояния точек, лежащих по одну сторону от оси, берутся со знаком плюс, а расстояния по другую сторону — со знаком минус.

Переход от дискретного распределения масс к непрерывному осуществляется с помощью определенного интеграла.

Пусть дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и имеет линейную плотность $\rho = \rho(x)$. Тогда статические моменты этой материальной дуги M_x и M_y относительно координатных осей равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \tag{17.9}$$

а моменты инерции I_x и I_y относительно тех же осей Ox и Oy найдутся по формулам

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \tag{17.10}$$

Для примера рассмотрим вывод формулы для момента M_x. Для этого на дуге кривой $y = f(x)$ выделим элемент $d\mathcal{L}$ кривой, соответствующий точке x (рис. 65). Тогда элемент $\rho(x)d\mathcal{L}$ можно считать материальной точкой, лежащей на расстоянии $y = f(x)$ от оси Ox. Тогда, согласно (17.7), для ее статического момента имеем

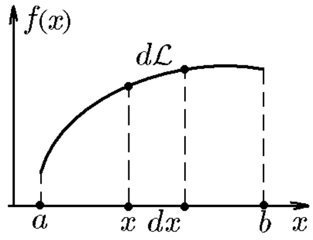


Рис. 65

$$dM_x = y\rho(x)d\mathcal{L} = f(x)\rho(x)d\mathcal{L},$$

где (см. соотношение (13.76))

$$d\mathcal{L} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

можем записать

$$dM_x = \rho(x)f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Просуммировав эти элементарные моменты на всем промежутке $[a, b]$, получим формулу (17.9):

$$M_x = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Аналогично выводятся остальные формулы в (17.9) и (17.10).

Знание статических моментов материальной кривой позволяет легко установить положение ее центра тяжести (или центра масс) $C(\bar{x}, \bar{y})$. Точка $C(\bar{x}, \bar{y})$ обладает тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу μ кривой, то статический момент этой точечной массы относительно любой оси совпадет со статическим моментом кривой относительно этой оси. В частности, если рассмотреть статические моменты кривой относительно координатных осей, то найдем

$$\mu\bar{x} = M_x, \quad \mu\bar{y} = M_y,$$

откуда

$$\bar{x} = \frac{M_y}{\mu}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{\mu}. \tag{17.11}$$

Формулу для массы кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, с линейной плотностью $\rho(x)$

$$\mu = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{17.12}$$

легко получить, следуя рассуждениям при выводе формулы для статического момента M_x.

Таким образом, формулы (17.11) для координат центра тяжести в развернутой форме, т.е. с учетом (17.9) и (17.12) будут иметь вид

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_a^b \rho(x)x\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int\limits_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}. \tag{17.13}$$

Заметим, что в случае постоянной линейной плотности, когда $\rho(x)$ есть константа ρ_0, т.е. $\rho(x) = \rho_0$, формулы (17.13) упрощаются и будут иметь вид

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx} \tag{17.14}$$

независимо от значения величины ρ_0.

Пример 17.1. Для дуги цепной линии $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, с постоянной линейной плотностью ρ_0 найти
1) статические моменты M_x и M_y;
2) моменты инерции I_x и I_y;
3) координаты центра тяжести.

Решение. 1) Статические моменты определяются формулами (17.9), каждая из которых под знаком интеграла содержит множитель

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+[\operatorname{ch}' x]^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x. \tag{17.15}$$

С учетом этого найдем

$$M_x = \int\limits_0^1 \rho_0 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x\, dx = \rho_0 \int\limits_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{\rho_0}{2}\int\limits_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x)dx =$$
$$= \frac{\rho_0}{2}\Big(x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x\Big)\Big|_0^1 = \frac{\rho_0}{4}(2+\operatorname{sh} 2); \tag{17.16}$$

$$M_y = \int\limits_0^1 \rho_0 x \operatorname{ch} x\, dx = \rho_0 \int\limits_0^1 x\, d(\operatorname{sh} x) = \rho_0\Big[x \operatorname{sh} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \operatorname{sh} x\, dx\Big] =$$
$$= \rho_0\Big[\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} x\Big|_0^1\Big] = \rho_0(\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1). \tag{17.17}$$

2) Моменты инерции определяются формулами (17.10). С учетом (17.15) найдем

$$I_x = \int\limits_0^1 \rho_0 \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch} x\, dx = \rho_0 \int\limits_0^1 \operatorname{ch}^3 x\, dx = \rho_0 \int\limits_0^1 (1+\operatorname{sh}^2 x)\operatorname{ch} x\, dx =$$
$$= \rho_0 \int\limits_0^1 (1+\operatorname{sh}^2 x) d(\operatorname{sh} x) = \rho_0\Big[\operatorname{sh} x\Big|_0^1 + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}\Big|_0^1\Big] = \rho_0\Big[\operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1\Big]; \tag{17.18}$$

$$I_y = \int\limits_0^1 \rho_0 x^2 \operatorname{ch} x\, dx = \rho_0 \int\limits_0^1 x^2 d(\operatorname{sh} x) = \rho_0\Big[x^2 \operatorname{sh} x\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 x \operatorname{sh} x\, dx\Big] =$$
$$= \rho_0\Big[\operatorname{sh} 1 - 2\Big(x \operatorname{ch} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \operatorname{ch} x\, dx\Big)\Big] = \rho_0\Big[\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1 + 2\operatorname{sh} x\Big|_0^1\Big] =$$
$$= \rho_0[3\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1]. \tag{17.19}$$

3) Координаты центра тяжести можно найти либо по формулам (17.11), (17.13), либо по формулам (17.14) в силу постоянства линейной плотности цепной линии. Если учесть, что статические моменты M_x и M_y мы уже нашли, то удобнее воспользоваться формулами (17.11), вычислив предварительно массу цепной линии по формуле (17.12) и приняв во внимание равенство (17.15):

$$\mu = \int\limits_0^1 \rho_0 \operatorname{ch} x\, dx = \rho_0 \operatorname{sh} x\Big|_0^1 = \rho_0 \operatorname{sh} 1. \tag{17.20}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{\mu} = \frac{\rho_0(\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1)}{\rho_0 \operatorname{sh} 1} = \frac{\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1}{\operatorname{sh} 1};\\ \bar{y} &= \frac{M_x}{\mu} = \frac{\rho_0(2 + \operatorname{sh} 2)/4}{\rho_0 \operatorname{sh} 1} = \frac{2 + \operatorname{sh} 2}{4 \operatorname{sh} 1}. \end{aligned} \tag{17.21}$$

◊ Из формул (17.21) еще раз убеждаемся, что в случае постоянной линейной плотности координаты центра тяжести не зависят от ее значения.

Пример 17.2. Найти координаты центра тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в верхней полуплоскости и имеющей линейную плотность $\rho(x) = 1$.

Решение. Для верхней полуплоскости $y \geqslant 0$ имеем

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leqslant x \leqslant R.$$

Поскольку

$$\sqrt{1 + [y'(x)]^2} = \sqrt{1 + \Big(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\Big)^2} = \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

а статические моменты

$$M_x = \int\limits_{-R}^{R} y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = R\int\limits_{-R}^{R} dx = 2R^2;$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int\limits_{-R}^{R} x\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \int\limits_{-R}^{R} x\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = -\frac{R}{2}\int\limits_{-R}^{R} \frac{d(R^2 - x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \\ &= -R\sqrt{R^2 - x^2}\Big|_{-R}^{R} = 0, \end{aligned}$$

то

$$\bar{x} = \frac{M_y}{\mu} = 0, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{\mu} = \frac{2R^2}{\mu}.$$

Если теперь учесть, что масса кривой с единичной линейной плотностью численно равна ее длине, то величина μ есть в данном случае ни что иное, как длина половины окружности радиуса R, т.е. $\mu = \pi R$, и тогда

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{2R^2}{\mu} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

Если решение задачи изобразить графически (рис. 66), то из рисунка видно, что центр тяжести расположен на оси Oy, которая является осью симметрии рассматриваемой кривой. Такой результат является следствием более общего утверждения.

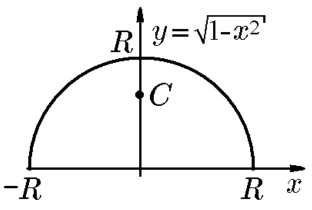


Рис. 66. $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = 2R/\pi$

$\Diamond$ Если рассматриваемая материальная дуга с постоянной линейной плотностью симметрична относительно некоторой прямой, то центр тяжести дуги необходимо лежит на этой прямой.

Исходя из формул (17.14) для координат центра тяжести, можно сформулировать еще одно весьма полезное в приложениях утверждение. Действительно, домножив вторую формулу в (17.14) на 2π, можно записать

$$2\pi\bar{y}\int\limits_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

Но интеграл в левой части этого равенства задает длину $\mathcal{L}$ дуги кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, а интеграл в правой части задает площадь G поверхности вращения этой кривой вокруг оси Ox, т.е.

$$2\pi\bar{y}\mathcal{L} = G. \tag{17.22}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 17.1 (первая теорема Гульдена). *Площадь G поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и ее не пересекающей, равна произведению длины $\mathcal{L}$ этой дуги на длину окружности, описываемой ее центром тяжести $\bar{y}$, т.е. справедлива формула* (17.22).

$\Diamond$ Теорема Гульдена посредством формулы (17.22) связывает координату центра тяжести $\bar{y}$ с площадью поверхности вращения G. Зная одну из них, можно определить другую через длину $\mathcal{L}$ дуги кривой, что весьма полезно в некоторых приложениях классической механики.

Пример 17.3. Найти координаты центра тяжести полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Решение. Вследствие симметрии $\bar{x} = 0$. При вращении полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox получается сфера радиуса R, площадь поверхности которой равна $G = 4\pi R^2$, а длина полуокружности $\mathcal{L} = \pi R$. Согласно теореме Гульдена, имеем

$$2\pi\bar{y}\cdot\pi R = 4\pi R^2.$$

Отсюда $\bar{y} = 2R/\pi$, т.е. центр тяжести C имеет координаты $C(0, 2\pi/R)$, что совпадает с результатом примера 17.2, полученным без использования теоремы Гульдена.

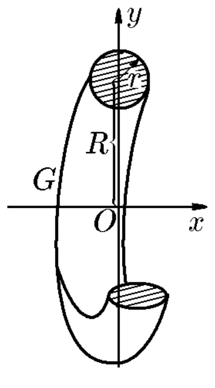


Рис. 67. $\bar{y} = R$

Пример 17.4. Найти площадь поверхности тора с внешним радиусом R и внутренним радиусом $r < R$.

Решение. Поверхность тора с указанными характеристиками можно получить вращением окружности $x^2 + (y-R)^2 = r^2$ вокруг оси Ox (рис. 67). С учетом этого можно считать, что ордината центра тяжести $\bar{y} = R$, а поскольку кривой вращения является окружность радиуса r, то $\mathcal{L} = 2\pi r$, и тогда по формуле (17.22) теоремы Гульдена найдем искомую площадь поверхности вращения, т.е. площадь поверхности тора:

$$G = 2\pi R\mathcal{L} = 2\pi R\cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

17.2.2. Вычисление механических характеристик плоских фигур

Выше механические характеристики (17.7) и (17.8) для дискретного распределения масс мы обобщили с помощью линейной плотности и определенного интеграла на случай плоских кривых. С помощью поверхностной плотности эти же характеристики обобщаются на случай плоских фигур.

Рассмотрим криволинейную трапецию $ABB'A'$ (рис. 68), ограниченную сверху кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Предположим, что по этой фигуре равномерно распределено вещество так, что поверхностная плотность ρ (т.е. масса на единицу площади) постоянна. Без ограничения общности можно считать, что $\rho = 1$, т.е. масса любой части фигуры численно равна ее площади.

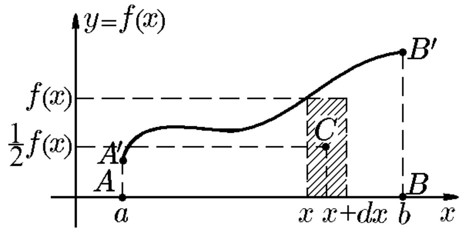


Рис. 68. Центр тяжести C

При сделанных предположениях статические моменты M_x и M_y криволинейной трапеции относительно координатных осей Ox и Oy равны

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx, \quad M_y = \int_a^b xf(x)dx, \tag{17.23}$$

а ее моменты инерции, или квадратичные моменты, относительно тех же осей Ox и Oy равны

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 f(x)dx. \tag{17.24}$$

Ограничимся доказательством формул (17.23) для статических моментов.

Следуя стандартной уже процедуре, в криволинейной трапеции $ABB'A'$ выделим элементарный прямоугольник высотой $f(x)$ и основанием dx (рис. 68). В принятых предположениях масса этого прямоугольника будет численно равна его площади $f(x)dx$. Чтобы определить элементарные моменты dM_x и dM_y, сосредоточим всю массу элементарного прямоугольника в точке C, что, как известно, не изменит значения статических моментов. Очевидно, что точка C будет располагаться в центре элементарного прямоугольника, поэтому ее координаты легко найдутся из геометрических построений на рис. 68. Так, ордината точки C определится как $f(x)/2$, а ее абсцисса будет равна $(x + dx/2)$ Заметим, что последнее выражение можно заменить просто на x, ибо отброшенная величина $dx/2$, умноженная на массу $f(x)dx$ дала бы бесконечно малую высшего порядка. С учетом этого и согласно определению (17.7), имеем

$$dM_x = \frac{1}{2}f(x) \cdot f(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)dx, \quad dM_y = xf(x)dx.$$

Просуммировав, т.е. проинтегрировав эти элементарные моменты в пределах от a до b, придем к формулам (17.23). Аналогично выводятся формулы (17.24).

Как и в случае кривой, по этим статическим моментам рассматриваемой кривой относительно осей координат легко определить теперь и координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ центра тяжести фигуры. Если через S обозначить площадь (а, следовательно, и массу) фигуры, то по основному свойству центра тяжести получим

$$\bar{x} = \frac{M_x}{S} = \frac{\int\limits_a^b xf(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}, \quad \bar{y} = \frac{M_y}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}. \tag{17.25}$$

Здесь мы воспользовались известным представлением площади криволинейной трапеции через определенный интеграл

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

$\Diamond$ Как и в случае кривой, если плоская однородная фигура имеет ось симметрии, то ее центр тяжести необходимо лежит на этой оси.

Умножив правую и левую части второго равенства (17.25) на π, можем записать

$$2\pi\bar{y}S = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Если теперь учесть, что правая часть этого равенства представляет собой объем V тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox, то его можно преобразовать к виду

$$V = 2\pi\bar{y}S. \tag{17.26}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 17.2 (вторая теорема Гульдена). *Объем V тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси равен произведению площади S этой фигуры на длину окружности, описываемой ее центром тяжести, т.е. справедлива формула* (17.26).

Пример 17.5. Найти центр тяжести первого квадранта эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Решение задачи можно найти, во-первых, непосредственно по формулам (17.25), а во-вторых, с помощью второй теоремы Гульдена. Для сравнения рассмотрим оба способа.

I. Вычисление статических моментов по формулам (17.23) для первой четверти $0 \leqslant x \leqslant a$ для функции $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ дает

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_0^a b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)dx = \frac{b^2}{2}\int\limits_0^a \Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)dx = \frac{b^2}{2}\Big(x - \frac{x^3}{3a^2}\Big)\Big|_0^a = \frac{b^2a}{3};$$

$$M_y = \int\limits_0^a xb\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = -\frac{ba^2}{2}\int\limits_0^a \Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)^{1/2} d\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big) = \frac{ba^2}{3}\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{ba^2}{3}.$$

Так как площадь эллипса с полуосями a и b равна $S = \pi ab$, то для четвертой его части имеем $S' = \pi ab/4$, а тогда по формулам (17.25) найдем

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S} = \frac{ba^2/3}{\pi ab/4} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{b^2a/3}{\pi ab/4} = \frac{4b}{3\pi}. \tag{17.27}$$

II. Решение задачи с помощью второй теоремы Гульдена позволяет вообще обойтись без вычисления определенных интегралов, если воспользоваться известной формулой для объема трехосного эллипсоида $V = 4\pi abc/3$. Из этой формулы следует, что эллипсоид вращения вокруг оси Oy имеет объем $V_y = 4\pi a^2b/3$, а вокруг оси Ox, соответственно, $V_x = \pi ab^2/3$. Если учесть, что мы рассматриваем вращение первого квадранта эллипса, то нам потребуются объемы $V'_y = V_y/2 = 2\pi a^2b/3$ и $V'_x = V_x/2 = 2\pi ab^2/3$. Учитывая, что площадь первого квадранта эллипса равна $S' = \pi ab/4$, по формуле (17.26) найдем координаты

$$\bar{x} = \frac{V'_y}{2\pi S'} = \frac{2\pi a^2b/3}{2\pi \cdot \pi ab/4} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \bar{y} = \frac{V'_x}{2\pi S'} = \frac{2\pi ab^2/3}{2\pi \cdot \pi ab/4} = \frac{4b}{3\pi},$$

совпадающие с (17.27).

Пример 17.6. Найти объем тора с внешним радиусом R и внутренним радиусом $r \leqslant R$.

Решение. Объем тора с указанными характеристиками можно получить как объем тела вращения окружности $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ вокруг оси Ox (см пример 17.4 и рис. 67). С учетом этого можно считать, что ордината центра тяжести окружности вращения $\bar{y} = R$, а ее площадь $S = \pi r^2$, и тогда по формуле (17.26) второй теоремы Гульдена найдем

$$V = 2\pi\bar{y}S = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$

Пример 17.7. Найти моменты инерции I_x и I_y параболического сегмента, ограниченного параболой

$$(y - a) = -\frac{1}{a}(x - a)^2.$$

Решение. Заданный сегмент изображен на рис. 69.

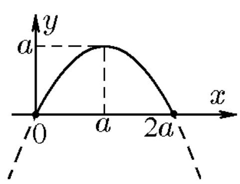


Рис. 69

Поскольку для функции y можем записать

$$y = \frac{2ax - x^2}{a},$$

то по формулам (17.24) найдем

$$I_x = \frac{1}{3a^3}\int_0^{2a}(2ax - x^2)dx = \frac{32}{105}a^4;$$

$$I_y = \int_0^{2a} x^2\Big(2x - \frac{x^2}{a}\Big)dx = \frac{8}{5}a^4.$$

17.2.3. Другие задачи, решаемые с помощью определенного интеграла

Пример 17.8. Вычислить работу, которую необходимо затратить на постройку правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания l и высотой h из материала с удельным весом ρ.

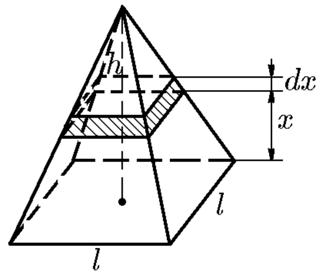


Рис. 70

Решение. Решение задачи состоит в нахождении работы A, затраченной на преодоление силы тяжести. Следуя общей схеме решения, выделим элементарный слой толщиной dx на высоте x от основания пирамиды (рис. 70). В качестве элементарной работы выберем работу, которую необходимо затратить на возведение этого слоя. Она определится как произведение веса dP этого слоя на высоту x, на которую его нужно поднять, т.е.

$$dA = x\,dP. \tag{17.28}$$

В свою очередь, вес dP можно найти как произведение удельного веса материала ρ на элементарный объем dV, равный

$$dV = S(x)dx,$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения пирамиды на высоте x. Ее можно найти, используя тот факт, что площади параллельных сечений в пирамиде относятся как квадраты их расстояний до вершины. Если $S = l^2$ — площадь основания, то

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{(h-x)^2}{h^2},$$

откуда

$$S(x) = S\frac{(h-x)^2}{h^2} = \left(\frac{l}{h}\right)^2 (h-x)^2.$$

Но тогда

$$dV = S(x)dx = \left(\frac{l}{h}\right)^2 (h-x)^2 dx,$$

$$dP = \rho\,dV = \rho\left(\frac{l}{h}\right)^2 (h-x)^2 dx,$$

и в силу (17.28) имеем

$$dA = x\,dP = \rho\left(\frac{l}{h}\right)^2 x(h-x)^2 dx.$$

Суммирование элементарных работ от $x = 0$ до $x = h$ дает искомую работу:

$$A = \int_0^h \rho\left(\frac{l}{h}\right)^2 x(h-x)^2 dx = \rho\left(\frac{l}{h}\right)^2 \int_0^h (h^2x - 2hx^2 + x^3)dx =$$

$$= \rho\left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(h^2\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}hx^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^h = \rho\left(\frac{l}{h}\right)^2 h^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\rho(lh)^2. \tag{17.29}$$

◊ Любопытно получить численную оценку этого результата для одной из величайших пирамид, созданных человечеством. Такой пирамидой является пирамида Хеопса со стороной основания $l = 200$ м и высотой $h = 140$ м. Положив удельный вес камня $\rho = 2{,}5$ т/м^3, найдем

$$A = \frac{1}{12}\cdot 2{,}5\cdot 10^4\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^3}\cdot 4\cdot 10^4\ \text{м}^2\cdot 1{,}96\cdot 10^4\ \text{м}^2 = 1{,}63\cdot 10^{12}\ \text{Дж}.$$

Удивительно, но эта энергия сравнима с энергией толчка при разрушительном землетрясении.

Пример 17.9. Вычислить силу давления жидкости с плотностью ρ на вертикальную перегородку в канале, имеющем форму полукруга радиуса R, диаметр которого находится на поверхности воды.

Решение. Будем исходить из закона Паскаля, утверждающего, что если пластина погружена в жидкость и расположена горизонтально на расстоянии h от поверхности жидкости, то сила давления P на одну из сторон пластины равна

$$P = g\rho hS,$$

где S — площадь пластины, g — ускорение силы тяжести.

Теперь, следуя общей схеме решения, обозначим через $l(x)$ длину горизонтальной прямой, проведенной на расстоянии x от уровня поверхности жидкости (рис. 71). Приняв полоску, содержащуюся между горизонтальными прямыми, отстоящими от уровня жидкости на расстояния x и $x + dx$, за прямоугольник с основанием $l(x)$ и высотой dx, можем приближенно вычислить элементарное давление dP, испытываемое этой полоской, применив закон Паскаля:

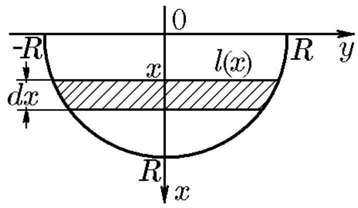


Рис. 71

$$dP = g\rho x l(x) dx.$$

Величину $l(x)$ можно установить из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$, описывающего форму канала. Из рис. 71 следует, что $l(x) = 2y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, тогда

$$dP = 2g\rho x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Суммирование элементарных давлений от $x = 0$ до $x = R$ дает искомую силу давления

$$P = \int\limits_0^R 2g\rho x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2g\rho \int\limits_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx =$$

$$= -g\rho \int\limits_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) = -\frac{2}{3} g\rho (R^2 - x^2)^{3/2}\Big|_0^R = \frac{2}{3} g\rho R^3. \qquad (17.30)$$

$\Diamond$ Заметим, что из формулы (17.30) следует, что увеличение радиуса канала, например, в 10 раз увеличивает силу давления уже в 1000 раз. Такое предупреждение является весьма важным в практической реализации рассматриваемой модели.

Пример 17.10. Вычислить кинетическую энергию однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если заданы радиус R, высота h и плотность ρ.

Решение. Кинетическая энергия E тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, равна

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2, \qquad (17.31)$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения.

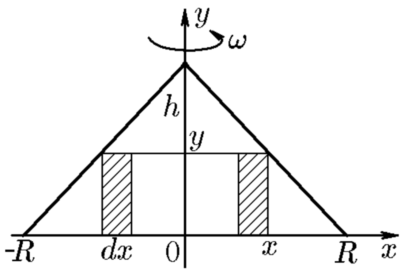


Рис. 72

Следуя общей схеме решения, из кругового конуса выделим полый цилиндр с внешним радиусом x, толщиной dx и высотой y (рис. 72), обладающий элементарным объемом

$$dV = y\pi[x^2 - (x - dx)^2] = 2\pi yx\,dx.$$

Здесь мы отбросили бесконечно малую $\pi y(dx)^2$ второго порядка по отношению к dx. Масса этого полого цилиндра с удельной плотностью ρ будет равна

$$dm = \rho\,dV = 2\pi\rho yx\,dx.$$

Величину y в зависимости от x можно найти из уравнения прямой, описывающей образующую кругового конуса. Действительно, рис. 72 позволяет записать уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{x}{R} + \frac{y}{h} = 1,$$

откуда

$$y = h\Big(1 - \frac{x}{R}\Big)$$

и, следовательно,

$$dm = 2\pi\rho h\Big(1 - \frac{x}{R}\Big)x\,dx.$$

Поскольку элементарный момент инерции полого цилиндра равен

$$dI = x^2 dm,$$

или

$$dI = 2\pi\rho h\Big(1 - \frac{x}{R}\Big)x^3 dx,$$

то суммирование элементарных моментов инерции от $x = 0$ до $x = R$ дает

$$I = \int\limits_0^R 2\pi\rho h\Big(1 - \frac{x}{R}\Big)x^3 dx = 2\pi\rho h\Big(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5R}\Big)\Big|_0^R = \frac{1}{10}\pi\rho h R^4.$$

С учетом этого из (17.31) следует

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{20}\pi\rho h\omega^2 R^4.$$

18. Приложения определенного интеграла к экономическим задачам

Приложение определенного интеграла к вычислению площадей фигур, объемов и поверхностей тел, к решению различных физических задач, стало стандартной частью математического анализа [21, 22, 33, 49]. Оказывается также, что развитый в 1 и 2 главах математический аппарат позволяет проводить моделирование и исследование некоторых процессов в экономике. Приведем ряд примеров, иллюстрирующих приложение определенного интеграла к решению экономических задач.

Предельные величины

В экономическом анализе часто возникает задача: нужно оценить, на какую величину возрастет результат, если увеличатся затраты, и наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся. В таких задачах речь идет о приросте переменных величин. Для решения подобного рода задач нужно находить предел отношения приращений рассматриваемых величин (предельный анализ в экономике). В предельном анализе рассматриваются такие величины, как предельный доход, предельные издержки, предельная склонность к потреблению и т. д. Предельные функции могут быть получены из соответствующих экономических функций посредством дифференцирования. Действительно, пусть произведено x единиц однородной продукции. Пусть известна функциональная зависимость совокупных издержек производства V от объема продукции x: $V = V(x)$. Предположим, что количество продукции увеличилось на Δx. Тогда количеству продукции $x+\Delta x$ соответствуют издержки производства $V(x + \Delta x)$, приращению количества продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции, равное $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$. Производная функции издержек производства определяется стандартным образом:

$$v(x) = V'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}. \tag{18.1}$$

Величина $v(x)$ (18.1) называется *предельными издержками производства.* Экономический смысл этой формулы следующий: предельные издержки производства — это дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции. Аналогично определяются предельная выручка, предельный доход и другие предельные величины.

В курсе микроэкономики часто приходится решать обратную задачу, т.е. находить экономические функции по их известным предельным величинам (или производным), т.е. искать саму функцию $F(x)$, зная только $f(x)$. Поскольку функция $F(x)$ является первообразной функции $F'(x) = f(x)$, то нахождение $F(x)$ связано с интегрированием функции $f(x)$: $\int f(x)dx = F(x) + C$. Таким образом, чтобы найти экономическую функцию по ее предельной, необходимо проинтегрировать предельную функцию.

Издержки производства. Дополнительная прибыль

Издержки производства — это расходы, денежные траты, которые необходимо осуществить для создания единицы товара, а предельные издержки характеризуют дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пусть $V(x)$ будет функцией общих издержек на производство x единиц продукции, $v = V'(x)$ — функция предельных издержек. Тогда определенный интеграл

$$\int_a^b v(x)\, dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a) \tag{18.2}$$

равняется изменению общих издержек при росте количества произведенной продукции от a до b единиц.

Отсюда вытекает важное следствие.

Изменение производственных издержек при росте произведенной продукции от a до b единиц равняется площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции предельных издержек $v(x) = V'(x)$ отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Аналогично, если $d(x) = D'(x)$ и $p(x) = P'(x)$ — функции предельных дохода и прибыли при росте реализации произведенной продукции от a до b единиц вычисляется по формулам

$$\int_a^b d(x)\,dx = D(b) - D(a); \tag{18.3}$$

$$\int_a^b p(x)\,dx = P(b) - P(a). \tag{18.4}$$

Пример 18.1. Функция предельных издержек фирмы (в рублях) имеет вид $v(x) = 30{,}2 - 0{,}02x$. Найти рост общих затрат, когда производство возрастет с 500 до 1500 единиц.

Решение. По формуле (18.2) рост общих затрат будет:

$$\int_{500}^{1500} v(x)dx = \int_{500}^{1500} (30{,}2 - 0{,}02x)\,dx = \left(30{,}2x - \frac{0{,}02x^2}{2}\right)\Big|_{500}^{1500} =$$
$$= 30{,}2(1500 - 500) - 0{,}01(1500 + 500)(1500 - 500) = 30200 - 20000 = 10200.$$

Итак, затраты возрастут на 10200 рублей.

Пример 18.2. Задана функция предельных издержек в условных единица (у.е.) $v(x) = 2x^2 - 2x + 90$. Найти издержки на изготовление 15 ед. товара. Определить функцию издержек $V = V(x)$ если издержки производства первой единицы товара равны 50.

Решение. При помощи интегрирования находим издержки на изготовления 15 ед. товара:

$$V(x) = \int_1^{15} (2x^2 - 2x + 90)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 90x\right)\Big|_1^{15} \approx 3435 \text{ у.е.}$$

Функцию издержек найдем интегрированием:

$$V(x) = \int_1^x f(x)dx + 50.$$

Учтем условие $V(1) = 50$. Следовательно,

$$V(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 90x - \frac{119}{3}.$$

Текущие издержки

Общую сумму V текущих издержек обращения и капиталовложений, сводимых к текущим затратам, можно определить по формуле

$$V = \int_0^\infty v(t)dt. \tag{18.5}$$

Пример 18.3. Определить общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет вид $v(t) = 10/t + 1^2$.

Решение. По формуле (18.5) найдем

$$V = \int_0^\infty \frac{10}{(t+1)^2}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{10dt}{(t+1)^2} = 10\lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\Big]\Big|_0^b = 10.$$

Пример 18.4. Найти среднее значение издержек $v(x) = 3x^2 - 6x + 9$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от 0 до 3 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

Решение. По определению, число

$$f(\xi) = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Тогда

$$v(\xi) = \frac{1}{3}\int_0^3 (3x^2 - 6x + 9)dx = \frac{1}{3}(27 - 27 + 27) = 9,$$

т.е. среднее значение издержек равно 9. Определим, при каком объеме издержки принимают это значение. Для этого решим уравнение

$$3x^2 - 6x + 9 = 9, \quad 3x^2 - 6x = 0.$$

Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Поскольку объем продукции не может быть нулевой величиной, то $x = 2$.

Пример 18.5. Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией $v(t) = 2t + 1$.

Решение. Найдем

$$V = \int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 (2t+1)dt = (t^2 + t)\Big|_0^3 = 9 + 3 = 12.$$

Максимизация прибыли во времени

Пусть $V(t)$, $D(t)$ и $P(t)$ — общие издержки, доход и прибыль, которые изменяются за время t. Тогда $P(t) = D(t) - V(t)$, или $p(t) = d(t) - v(t)$, $p(t) = P'(t)$, $d(t) = D'(t)$, $v(t) = V'(t)$.

Общая прибыль может быть максимальной, в частности, тогда, когда $P'(t) = 0$ или $D'(t) = V'(t)$. Другими словами, когда скорости изменения дохода и затрат равны.

Общую прибыль за время t_1 можно найти по формуле

$$P(t_1) = \int\limits_0^{t_1} p(t)dt = \int\limits_0^{t_1} [d(t) - v(t)]\, dt.$$

Пример 18.6. Скорости изменения затрат и дохода предприятия после начала его деятельности определялись формулами

$$v(t) = V'(t) = 10 + t^{2/3}, \quad d(t) = D'(t) = 26 - t^{2/3},$$

где V и D измеряются в миллионах у.е., а t – годах. Определить, как долго предприятие было прибыльным, и найти общую прибыль, которая была получена за это время.

Решение. Оптимальное для предприятия время t_1 получим из условия $D'(t) = V'(t)$:

$$10 + t^{2/3} = 26 - t^{2/3};$$
$$2t^{2/3} = 16 \Rightarrow t^{2/3} = 8 \Rightarrow t = \sqrt[3]{8^2} = 4.$$

Итак, предприятие было прибыльным 4 года, за это время было получена прибыль

$$P = \int\limits_0^4 [d(t) - v(t)]dt = \int\limits_0^4 [(26 - t^{2/3}) - (10 + t^{2/3})]\, dt =$$
$$= \int\limits_0^4 (-2t^{2/3} + 16)dt = \left(-2t^{2/3} \cdot \frac{3}{5} + 16t\right)\Big|_0^4 = \left(-\frac{6}{5}\sqrt[3]{t^5} + 16t\right)\Big|_0^4 =$$
$$-\frac{6}{5}\sqrt[3]{4^5} + 16 \cdot 4 \approx 64 - \frac{6}{5} \cdot 10 \approx 64 - 12 \approx 52 \text{ (у.е.)}.$$

Капитал и чистые инвестиции

Инвестиции — это затраты, направляемые на увеличение или восполнение капитала.

Во многих случаях как синоним инвестиций употребляется термин «валовое накопление». В России принято делить инвестиции на три части: инвестиции в финансовые активы (финансовые вложения), например в ценные бумаги, уставный капитал, займы; инвестиции в запасы материальных оборотных средств (в основном это сырье, не до конца изготовленная продукция и еще не проданная готовая продукция); инвестиции в основной капитал, т.е. в машины, оборудование, здания, сооружения, или, говоря по-другому, в тот реальный капитал, который служит более года. Последний вид инвестиций называют *капитальными вложениями* (*капиталовложениями*) или *валовым накоплением основного капитала*.

В свою очередь, эти капиталовложения включают затраты как на возмещение, так и на прирост основного капитала. *Амортизация* — это инвестиционные расходы, которые направляются на возмещение износившихся машин и оборудования, на восполнение отслуживших свои сроки зданий и сооружений.

Чистые инвестиции — это ресурсы для строительства новых предприятий, создания нового оборудования, новых транспортных средств и др. Они могут быть получены как разница между валовыми инвестициями и средствами, израсходованными на возмещение износа и потерь. Иначе говоря, валовые инвестиции минус амортизация дают величину чистых инвестиций.

Таким образом, за единицу времени капитал увеличивается на величину чистых инвестиций. Обозначим капитал как функцию от времени $K(t)$, а чистые инвестиции через $I(t)$, тогда $I(t) = \dfrac{d}{dt}K(t)$, т.е. производная от капитала по времени t.

Часто требуется найти приращение капитала за период времени от t_1 до t_2, т.е. величину $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$. Так как функция $K(t)$ является первообразной для функции $I(t)$, получаем:

$$\Delta K = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)dt = K(t_2) - K(t_1). \tag{18.6}$$

Пример 18.7. Заданы чистые инвестиции функцией $I(t) = 300\sqrt{t}$ (у.е.). Требуется определить приращение капитала за 4 года.

Решение. Применив формулу (18.6), получим

$$\Delta K = \int\limits_0^4 300\sqrt{t}\,dt = 300\Big(\frac{2}{3}t^{3/2}\Big)\Big|_0^4 = \frac{300\cdot 2}{3}\cdot 8 = 1600 \text{ у.е.}$$

Пример 18.8. Функция чистых инвестиций $I(t) = 300\sqrt[3]{t}$ (у.е.) Сколько потребуется лет, чтобы приращение капитала составило 3600 у.е.

Решение. Так как приращение капитала $\Delta K = 3600$, то, согласно формуле (18.6), за время T:

$$\Delta K = 3600 = \int\limits_0^T 300\sqrt[3]{t}\,dt = \frac{3}{4}\cdot 300\sqrt[3]{t^4}\Big|_0^T = 225\sqrt[3]{T^4}.$$

Решим получившееся уравнение: $3600 = 225\sqrt[3]{T^4}$, $T^{4/3} = 16$,

$$T = (16)^{3/4} = 8.$$

Приращение капитала ΔK будет составлять 3600 у.е. через 8 лет.

Выпуск оборудования при постоянном темпе роста

Производство оборудования некоторого вида характеризуется темпом роста его выпуска

$$K = \frac{1}{y}\frac{\Delta y}{\Delta t},$$

где Δy — прирост выпуска этого оборудования за промежуток времени Δt, а y — объем его производства за единицу времени на момент времени t. Для того чтобы найти общее количество оборудования, произведенного к моменту времени t, положив, что K — известная постоянная величина, единицей времени является год, а в начальный момент времени $t = 0$ уровень ежегодного производства оборудования составлял y_0. Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, предположив, что он существует. Пусть $y(t)$ является непрерывной функцией, тогда по определению производной получим

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{y(t)} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)} = [\ln y(t)]'.$$

Предположив, что темп роста постоянен, проинтегрируем последнее равенство от 0 до t:

$$Kt\Big|_0^t = Kt = [\ln y(t)]\Big|_0^t, \quad Kt = \ln\Big(\frac{y(t)}{y_0}\Big), \quad y(t) = y_0 e^{Kt}.$$

Тогда суммарное количество оборудования, выпущенного за промежуток времени T, находится по формуле

$$Y(T) = \int_0^T y(t)dt = \int_0^T y_0 e^{Kt} dt = \frac{y_0}{K}(e^{KT} - 1). \tag{18.7}$$

Пример 18.9. Найти общее количество произведенного оборудования за 3 года, если $K = 5\%$ ежегодного роста, а $y_0 = 10$ (у.е.).

Решение. Воспользуемся формулой (18.7), тогда

$$Y(3) = \int_0^3 10e^{0{,}05t} dt = \frac{10 \cdot 100}{5} e^{0{,}05t}\Big|_0^3 = 200(e^{0{,}15} - 1) = 32{,}37 \text{ (у.е.)}.$$

Объем продукции

Использование определенного интеграла в экономике основано на том, что любой меняющийся социально-экономический процесс может быть интерпретирован как скачкообразный, скачки которого в ряде задач можно считать малыми, а сам процесс в некотором приближении непрерывным.

Пусть функция $q = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции Q, произведенный за промежуток времени $[0, T]$. Проведем разбиение τ_n отрезка $[0, T]$ на промежутки времени точками $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_n = T$. Пусть $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, а $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta t_i$ — диаметр разбиения. Выберем на каждом отрезке $[t_i, t_{i-1}]$ произвольную точку ξ_i. Тогда объем продукции ΔQ_i, произведенной за промежуток времени $[t_i, t_{i-1}]$ с постоянной производительностью $f(\xi_i)$, имеет вид $\Delta Q_i = f(\xi_i)\Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим $\widetilde{Q}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$. При $d \to 0$ и $n \to \infty$ получим объем выпускаемой продукции за промежуток времени $[0, T]$:

$$Q = \lim_{d\to 0} \widetilde{Q}_n = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = \int\limits_0^T f(t)dt. \qquad (18.8)$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция $f(t)$ интегрируема, и определенный интеграл является пределом последовательности интегральных сумм и не зависит от выбора разбиений τ_n и точек ξ_i. Таким образом, с экономической точки зрения определенный интеграл выражает объем произведенной продукции при известной функции производительности труда.

В частности, если $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от (времени) t, то объем продукции за времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой

$$V = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (18.9)$$

Пример 18.10. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = 3/(t+1) + 5$.

Решение. Воспользуемся формулой (18.9):

$$V = \int\limits_2^3 \Big[\frac{3}{t+1} + 5\Big]dt = [\ln(t+1)^3 + 5t]\Big|_2^3 = 3\ln\frac{4}{3} + 5.$$

Пример 18.11. Найти дневную выработку за восьмичасовой рабочий день, если производительность труда в течение дня менялась по формуле $f(t) = p_0[-0{,}2t^2 + 1{,}4t + 4]$, где t — время в часах, p_0 — объем продукции, выпускаемой в час.

Решение. В рассматриваемой задаче производительность труда в течение рабочего дня меняется непрерывно на отрезке $[0, 8]$. Тогда дневную выработку V можно найти по формуле (18.9):

$$V = \int\limits_0^8 [p_0[-0{,}2t^2 + 1{,}4t + 4]dt = p_0\Big[-\frac{0{,}2t^3}{3} + 0{,}7t^2 + 4t\Big]\Big|_0^8 =$$
$$= p_0\Big[-0{,}2\frac{8^3}{3} + 0{,}7\cdot 8^2 + 4\cdot 8\Big] \approx 42{,}67p_0.$$

Рассмотрим другие примеры определения объема продукции с помощью интегралов.

Производственная функция — это математическое выражение, показывающее зависимость объема производства от количества используемого труда и капитала. Наиболее известной производственной функцией является функция Кобба–Дугласа $g(t) = AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)$, где A, α, β — неотрицательные константы, K — объем фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении (скажем число станков), L — объем трудовых ресурсов (число рабочих дней, число человеко-дней), $g(t)$ — выпуск продукции в стоимостном, либо в натуральном выражении.

Если в функции Кобба–Дугласа считать, что затраты труда линейно зависят от времени, а затраты капитала неизменны, то функция Кобба–Дугласа примет вид

$$g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}.$$

Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит

$$Q = \int\limits_0^T g(t)dt = \int\limits_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}dt. \tag{18.10}$$

Пример 18.12. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба–Дугласа имеет вид $g(t) = (t+1)e^{2t}$.

Решение. По формуле (18.10) объем Q произведенной продукции равен

$$Q = \int\limits_0^4 (t+1)e^{2t}dt = \frac{1}{3}\Big[t + 1 - \frac{1}{2}\Big]e^{2t}\Big|_0^4 = \frac{9}{4}e^8 - \frac{1}{4} \approx 6707.$$

Здесь мы воспользовались результатами примера 3.16.

Степень неравенства в распределении дохода в обществе

Одной из важнейших проблем в социальных и экономических науках является проблема измерения социального неравенства. Наиболее распространена следующая методика изучения: 1) по какому-либо критерию (имущество, количество земли, и т.п.) вся совокупность людей делится на богатые, средние и бедные группы; 2) определяется доля каждой группы; 3) если преобладают «середняки», а крайние группы по численности одинаковы, то социальная совокупность более или менее однородна, если же какая-то из крайних групп преобладает, то налицо расслоение общества.

Рассмотрим один из подходов к исследованию распределения богатства в обществе, основанный на так называемой «кривой Джини». Пусть функция $f(x)$ указывает, какая x-я часть самых бедных людей общества владеет $f(x)$-ой частью всего общественного богатства. График функции $f(x)$ называется *кривой Лоренца* или *Джини* и описывает зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривая OBA, см. рис. 73). При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую — биссектрису OA. Чем больше площадь заштрихованной части, тем более неравномерно распределено богатство в обществе. Площадь фигуры OAB между биссектрисой OA и кривой Лоренца, отнесенная к площади треугольника OAC (рис. 73), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения и называется *коэффициентом неравномерности распределения доходов*, или *коэффициентом Джини*

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\triangle OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\triangle OAC}}. \tag{18.11}$$

При коэффициенте $k = 0$ — полное равенство в доходах населения, при $k \leqslant 0{,}3$ — слабое неравенство, при $0{,}3 < k \leqslant 0{,}7$ — значительное неравенство, при $0{,}7 < k \leqslant 1$ — сильное неравенство доходов населения.

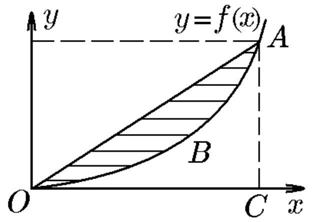


Рис. 73

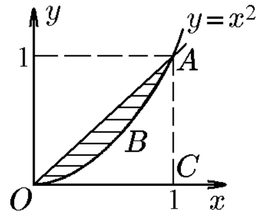


Рис. 74

Пример 18.13. Найти коэффициент Джини распределения богатства в обществе, если функция $f(x) = x^3$.

Решение. Нетрудно заметить (см. рис. 74), что

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}, \quad S_{OBAC} = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4},$$

тогда для коэффициента Джини, согласно (18.11), получим

$$k = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\triangle OAC}} = 1 - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 18.14. По данным исследований распределения доходов в одной из стран кривая Лоренца OBA может быть описана уравнением $y = f(x) = xe^{x-1}$, где x — доля населения, y — доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение. Поскольку (см. пример 18.13)

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}, \quad S_{OBAC} = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xe^{x-1}dx = \frac{1}{e},$$

то для коэффициента Джини, согласно (18.11), получим

$$k = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\triangle OAC}} = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}74.$$

Высокое значение k $(0{,}74 > 0{,}7)$ показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

Дисконтированная стоимость денежного потока

Ценность денежных средств изменяется со временем. Так, 100 рублей, полученные через пять лет, имеют иную (в большинстве случаев, меньшую) ценность, чем 100 рублей, которые имеются в наличии сегодня. Имеющиеся в наличии денежные средства можно инвестировать в банковский депозит или любой другой инвестиционный инструмент, что обеспечит процентный доход. То есть, 100 руб., которые есть сегодня, могут дать 100 руб. плюс процентный доход через пять лет. Если теперь рассмотреть обратную задачу: определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t лет при годовом удельном проценте p, называется *дисконтированием.* Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений. Если вложить K руб. на t лет под p процентов годовых, то через год сумма будет $K(1+i)$, через 2 года $K(1+2i)$, а через t лет $K(1+it)$; здесь и везде далее i — это *удельная норма процента* или *процентная ставка*, выраженная в долях от единицы ($i = 0{,}01p$). Множитель $(1 + i)$ называется *множителем Лоренца.*

Пусть K_t — конечная сумма, полученная за t лет, K — дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной суммой.* Если проценты простые, то $K_t = K(1+it)$ и $K = K_t/(1+it)$. В случае сложных процентов $K_t = K(1+i)^t$ и потому $K = K_t/(1+i)^t$.

Последнюю формулу можно записать для любого начального момента времени

$$K_{t_0} = \frac{K_t}{(1+i)^{t-t_0}}. \tag{18.12}$$

Рассмотрим задачу дисконтирования денежного потока, то есть вложение денег будет не единовременным (будем вкладывать деньги, например, раз в год в течение всего рассматриваемого периода). Допустим вначале, что для каждого дискретного момента времени $t = \overline{1,\infty}$ задана величина денежного потока $R(t)$. Если удельную норму процента обозначить через i, то дисконтированную стоимость каждой из величин $R(1)$, $R(2)$, $R(3)$, ... найдем по формуле (18.12):

$$K(1) = \frac{R(1)}{(1+i)^1}, \quad K(2) = \frac{R(2)}{(1+i)^2}, \quad K(3) = \frac{R(3)}{(1+i)^3}, \ldots$$

Тогда дисконтированную стоимость денежного потока найдем суммированием этих величин

$$K_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{R(t)}{(1+i)^t}. \tag{18.13}$$

Здесь n — общее число периодов времени.

На практике в большинстве случаев применяются дискретные проценты, то есть проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, квартал и т.д.). Обозначим годовую ставку сложных процентов через i, а число периодов начисления процентов в году через m. Тогда каждый раз проценты начисляются по ставке i/m. Ставка i/m называется *начальной.*

Тогда согласно (18.13) запишем

$$K = \frac{K_t}{(1+i/m)^{mt}}. \tag{18.14}$$

Чем больше число m, тем меньше промежуток времени между моментами начисления процентов.

Рассмотрим предельный случай, когда проценты начисляются непрерывно. Разобьем рассматриваемый отрезок времени $[0;T]$ на m частей. Тогда в каждый промежуток времени удельная процентная ставка будет составлять i/m. Устремим $m \to \infty$ и рассмотрим поведение знаменателя формулы (18.14):

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(1+i/m)^{tm}} = \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-tm} = e^{it}. \tag{18.15}$$

Тогда $K_t = Ke^{it}$. Предположим далее, что деньги поступают не разово, в начальный момент времени $t = 0$, а постоянно и образуют денежный поток, который выражается непрерывной функцией $f(t)$. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капиталовложений (долгосрочные, не менее чем на 4 года, денежные вложения или имущественные вклады). Тогда с учетом (18.12) и (18.15) дисконтированная стоимость денежных потоков в момент времени t составит

$$K(t) = f(t)e^{-it}.$$

Заменив в формуле (18.13) суммирование интегрированием, получим дисконтированную стоимость денежного потока через T лет при непрерывных процентах:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt. \qquad (18.16)$$

Пример 18.15. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке $p = 8\%$, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили $a = 10$ млрд. руб., а ожидаемый прирост капитала $b = 2$ млрд. руб.

Решение. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = a+bt = 10 + 2t$, а удельная процентная ставка $i = 0{,}08$. Тогда по формуле (18.16) для дисконтированной суммы капиталовложений с учетом результатов примера 3.16 запишем

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt = \int_0^3 (10 + 2t)e^{-0{,}08t}dt = \frac{1}{(-0{,}08)}\Big[2t + 10 - \frac{2}{(-0{,}08)}\Big]e^{-0{,}08t}\Big|_0^3 \approx$$
$$\approx 34{,}4 \text{ млрд. руб.}$$

Таким образом, для получения одинаковой наращенной суммы через 3 года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млрд. руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 34,4 млрд. руб. при той же, начисляемой непрерывно процентной ставке.

Рассмотрим предельный случай: денежный поток не прекращается никогда, например при получении ренты от земельного участка. Если i — удельная процентная ставка, а $f(t)$ — соответствующая земельная рента, то дисконтированная стоимость земельного участка определится выражением

$$K = \int_0^\infty f(t)e^{-it}dt. \qquad (18.17)$$

Интеграл (18.17) — интеграл с бесконечным пределм — называется *несобственным.* Такие интегралы будут подробно рассмотрены в следующей главе.

Пример 18.16. Пусть рента, получаемая от сдачи в аренду земельного участка, составила $f(t) = 5e^{-0{,}5t}$ млн. руб./год, приведенная процентная ставка $i = 0{,}1$. Определить дисконтированную стоимость участка.

Решение. Согласно (18.17), запишем

$$K = \int_0^\infty 5e^{-0{,}5t}e^{-0{,}it}dt = 5\int_0^\infty 5e^{-0{,}6t}dt = 5\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-0{,}6t}dt =$$
$$= 5\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-0{,}6t}}{-0{,}6}\Big|_0^b = \frac{5}{0{,}8} = 8{,}33 \text{ млн. руб.}$$

Среднее время изготовления изделия

Средние значения экономических величин оказываются полезными для анализа экономических процессов. По своему смыслу среднее значение есть интегральная характеристика поведения величины «в целом», на всем промежутке. Отметим, что среднее значение является нулевым начальным моментом соответствующей величины, а совокупность всех моментов полностью ее характеризует (см., например, [32]).

В качестве примера рассмотрим среднее время изготовления изделия.

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время $t_{\text{ср}}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{18.18}$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, то часто она имеет вид $t = ax^{-b}$, где a — затраты времени на первое изделие, b — показатель производственного процесса.

Пример 18.17. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 196$ изделий, если затраты времени на первое изделие $a = 600$ мин., показатель производственного процесса $b = 0{,}5$.

Решение. Из формулы (18.18) получим (мин.)

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{196 - 100} \int\limits_{100}^{196} 600x^{-1/2}dx = \frac{600}{96} 2x^{1/2}\Big|_{100}^{196} = 50 \text{ мин.}$$

Потребительский излишек

Следующий пример, иллюстрирующий приложения интегрального исчисления к экономике, связан с понятиями излишка потребителя CS (Consumer's Surplus) и излишка производителя PS (Producer's Surplus).

Количество товара, которое покупатели приобретут на рынке, зависит от цены на этот товар. Обозначим, через P цену единицы товара, а через Q — количество купленного товара. Соотношение между ценой P и количеством купленного товара Q называется *функцией*, или *законом спроса*. График $P = f(Q)$ этой функции называется *кривой спроса*. Количество товара Q, которое производители выставляют на продажу, также зависит от цены P на этот товар. Соотношение между ценой и количеством товара, выставленного на продажу, называется *функцией*, или *законом предложения*. График $Q = \varphi(P)$ или $P = g(Q)$ этой функции называется *кривой предложения*. Здесь $g(Q) = \varphi^{-1}(P)$.

Точка пересечения кривых спроса и предложения (Q_0, P_0) называется *точкой рыночного равновесия* (рис. 76). Соответственно P_0 называется *равновесной ценой*, а Q_0 — *равновесным количеством* (*объемом продаж*). В точке равновесия спрос соответствует предложению, то есть весь произведенный товар раскупается, и все желающие купить данный товар имеют возможность сделать это.

Рассмотрим отклонение рыночной цены P от равновесной P_0. Если рыночная цена P превышает равновесную, т.е. $P > P_0$, то количество товара, соответствующее предложению, больше количества товара, отвечающего спросу, то есть предложение превышает спрос, следовательно, производитель вынужден уменьшать цену на продукцию. Это явление известно как «давление рынка». Теперь предположим, что рыночная цена меньше равновесной цены, то есть $P < P_0$. В этом случае спрос на товар превышает предложение. В этой ситуации производители товара повышают цену на товар, и рыночная цена опять стремится к равновесной цене.

Предположим теперь, что товар в количестве Q не сразу весь попадает на рынок, а выбрасывается небольшими партиями, равными ΔQ. Именно такое допущение вместе с предположением о непрерывности функции спроса и предложения является основным при выводе формулы для расчета потребительского излишка. Данное допущение вполне оправдано, потому что такая схема реализации товара довольно распространена на практике и вытекает из цели продавца поддерживать цену на товар как можно выше. Графически эта ситуация представлена на рис. 75.

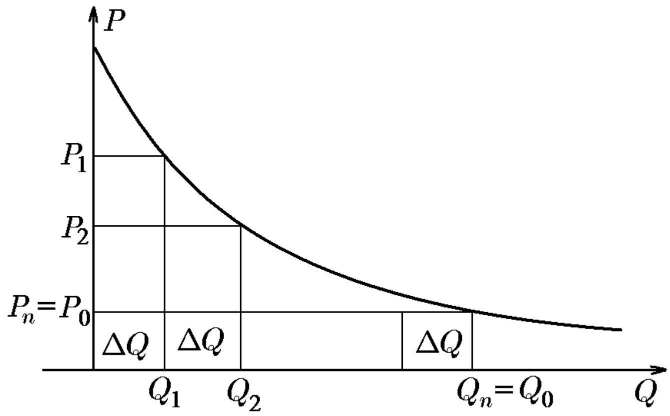


Рис. 75

Таким образом, мы получим, что суммарные затраты потребителей при покупке товара мелкими партиями ΔQ на все количество товара Q_0, согласно рис. 75, будут следующими:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} P_j \Delta Q = \sum_{j=1}^{n} f(Q_j)\Delta Q. \qquad (18.19)$$

Из рисунка 75 также хорошо видно, что общие затраты потребителей численно равны S_n — сумме площадей прямоугольников, а она, в свою очередь, при $\Delta Q \to 0$ стремится к площади криволинейной трапеции

$$S = \lim_{\Delta Q \to 0} S_n = \int\limits_0^{Q^*} f(Q)dQ. \qquad (18.20)$$

Таким образом, суммарные затраты потребителей при продаже товара партиями ΔQ, когда эти партии становятся сколько угодно малыми, будут равны определенному интегралу (18.20).

Потребительский излишек (*добавочная выгода потребителя*) при покупке данного товара — это превышение общей стоимости, которую потребитель готов уплатить за все единицы товара, над его реальными расходами на их приобретение. По определению принимается, что излишек потребителя — это разность между предполагаемыми затратами потребителей и реальными затратами в условиях рынка, равными P_0Q_0. Если обозначить добавочную выгоду для потребителя через CS, получим

$$CS = \int_0^{Q^*} f(Q)dQ - P_0Q_0. \tag{18.21}$$

Графически CS — площадь фигуры P_0CB, изображенной на рис. 76.

Рассмотрим еще одно понятие рыночной экономики — добавочную выгоду, или излишек производителя. *Излишек производителя* (*добавочная выгода производителя*) — разность между той денежной суммой, за которую он был готов продать товар, и реальными доходами за реализованный товар. Построим кривую предложения некоторого товара $P = g(Q)$.

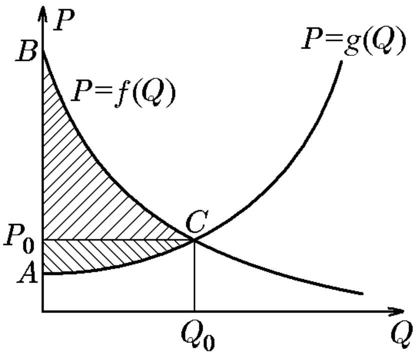


Рис. 76. $P = f(Q)$ — кривая спроса; $P = g(Q)$ — кривая предложения

Точно так же как некоторые потребители, благодаря действию рыночных сил, получают возможность приобрести товар по цене ниже той, которую они были готовы заплатить, так и производители иногда получают возможность поставить товар на рынок по более высокой цене, чем планировали. Кривая предложения дает различные цены, по которым производители готовы поставлять соответствующее количество товаров. Так, по цене P_0 будет поставлено количество товара Q_0. Предположив, что весь товар Q_0 будет реализован по цене P_0, легко найти доход: $R = P_0Q_0$. С другой стороны, количество товара, меньше чем Q_0, производители поставляли бы, согласно кривой предложения, по более низкой, чем P_0, цене. Добавочная выгода производителя, обозначаемая PS и численно равная площади фигуры ACP_0 (рис. 76), вычисляется по формуле

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)dQ. \tag{18.22}$$

Пример 18.18. Пусть кривая предложения имеет вид $P = f(Q) = 6 + 8Q^3$, а точка равновесия достигается при количестве товара $Q = Q_0 = 2$. Требуется определить добавочную выгоду производителя PS.

Решение. Из кривой предложения находим равновесную цену P_0: $P_0 = f(Q_0) = 6+8\cdot2^3 = 70$. Подставив полученное значение в формулу (18.22) для добавочной выгоды производителя, получим

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ = 70\cdot2 - \int_0^{2}(6+8Q^3)dQ = 140 - (6Q+2Q^4)\Big|_0^2 = 96.$$

Пример 18.19. Известны законы спроса и предложения: $P = 24 - Q^2$, $S = 8+6Q$. Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если было установлено рыночное равновесие.

Решение. Найдем точку рыночного равновесия из равенства $P = S$: $24-Q^2 = 8 + 6Q$ или $Q^2 + 6Q - 16 = 0$. Откуда $Q_1 = 2$, $Q_2 = -8/3$. Так как по условию задачи Q – количество товара, то $Q \geqslant 0$. Следовательно, $Q_0 = 2$. При $Q_0 = 2$

равновесная цена составит $P_0 = (2) = 24 - 4 = 20$, тогда доход на весь товар составит $P_0Q_0 = 20 \cdot 2 = 40$.

Зная формулу выгоды потребителя (18.21) и формулу выгоды производителя (18.22), получим

$$CS = \int\limits_0^2 (24 - Q^2)dQ - 40 = 24Q - \frac{Q^3}{3}\Big|_0^2 - 40 \approx 45{,}33 - 40 \approx 5{,}33;$$

$$PS = 40 - \int\limits_0^2 (8 + 6Q)dQ = 40 - (8Q + 3Q^2)\Big|_0^2 = 40 - (16 + 12) = 12.$$

Пример 18.20. Известны законы спроса и предложения: $P = 116 - Q^2$, $S = \frac{5}{3}Q + 20$. Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если было установлено рыночное равновесие.

Решение. Найдем точку рыночного равновесия из равенства $P = S$:

$$116 - Q^2 = \frac{5}{3}Q + 20 \Leftrightarrow 3Q^2 + 5Q - 288 = 0,$$

откуда $Q_1 = 9$, $Q_2 = -32/3$.

Так как по условию задачи Q — количество товара, то $Q \geqslant 0$. Следовательно, $Q_0 = 9$. При $Q_0 = 9$ равновесная цена составит $P_0 = P(9) = 116 - 9^2 = 35$, тогда доход на весь товар составит $P_0 \cdot Q_0 = 35 \cdot 9 = 315$. Зная формулу выгоды потребителя (18.21) и формулу выгоды производителя (18.22), получим

$$CS = \int\limits_0^9 (116 - Q^2)dQ - 315 = \Big(116Q - \frac{Q^3}{3}\Big)\Big|_0^9 - 315 = 486;$$

$$PS = 315 - \int\limits_0^9 \Big(\frac{5}{3}Q + 20\Big)dQ = 315 - \Big(\frac{5}{3}\frac{Q^2}{2} + 20Q\Big)\Big|_0^9 = 315 - \frac{5}{6} \cdot 81 - 180 = 67{,}5.$$

$\Diamond$ Отметим, что рассмотренные выше примеры описывают сильно идеализированные ситуации. Более адекватные математические модели экономических процессов требуют привлечения более продвинутого математического аппарата, связанного с уравнениями в частных производных, теорией случайных процессов, математической статистикой и т.д. Тем не менее, использованный материал показывает возможность, пусть на качественном уровне, математического моделирования экономических задач, поскольку сущность математического описания состоит в замене сложного исследуемого объекта его образом — математической моделью — и последующем ее изучении и совершенствовании. Работа не с самим объектом, а с его моделью, позволяет быстро с существенным снижением затрат оценить направление движения, необходимое для достижения заданной цели.

ГЛАВА 4

Несобственные интегралы

Выше мы достаточно подробно изучили свойства и способы вычисления определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

на конечном промежутке $[a, b]$ и ограниченной на нем функции $f(x)$. Здесь мы рассмотрим возможные обобщения понятия интеграла, во-первых, на случай бесконечного промежутка и, во-вторых, на случай, когда подынтегральная функция является неограниченной на промежутке интегрирования. Начнем рассмотрение с интеграла, определенного на бесконечном промежутке интегрирования.

19. Несобственные интегралы I-го рода

Начнем с небольшого примера. Рассмотрим три функции:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = \sin 2x, \tag{19.1}$$

непрерывные, а следовательно, и ограниченные на любом конечном промежутке $[a, b]$. Интегрирование этих функций на промежутке $[a, b]$ с помощью формулы Ньютона–Лейбница дает

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_a^b = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a; \\ I_2 &= \int\limits_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a; \\ I_3 &= \int\limits_a^b \sin 2x\,dx = \int\limits_a^b 2\sin x\cos x\,dx = 2\int\limits_a^b \sin x\,d(\sin x) = \sin^2 x\Big|_a^b = \sin^2 b - \sin^2 a. \end{aligned} \tag{19.2}$$

Интегралы (19.2) зачастую называют *собственными*. Зафиксируем в них нижний предел, а верхний предел b устремим к $+\infty$ (т.е. $b \to +\infty$). Непосредственное использование формулы Ньютона–Лейбница в этом случае оказывается невозможным, поэтому единственным возможным выходом здесь является предельный переход в равенствах (19.2) при $b \to +\infty$, т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{b\to+\infty} I_1 &= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a; \\ \lim_{b\to+\infty} I_2 &= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b e^x dx = \lim_{b\to+\infty}(e^b - e^a) = +\infty; \end{aligned} \tag{19.3}$$

$$\lim_{b\to+\infty} I_3 = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \sin 2x\,dx = \lim_{b\to+\infty}(\sin^2 b - \sin^2 a) \Rightarrow \text{ не существует.}$$

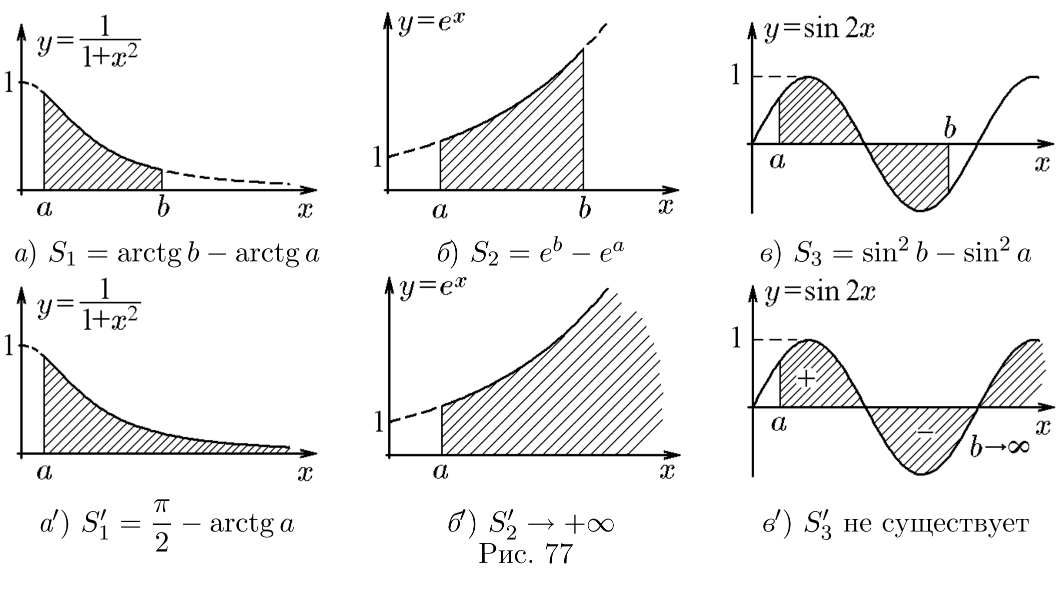
Если ввести символ $\int\limits_a^{+\infty}$, то с его помощью интегралы (19.3) можно записать как

$$\begin{aligned}
&\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a;\\
&\int\limits_a^{+\infty} e^x dx = +\infty; \qquad\qquad (19.4)\\
&\int\limits_a^{+\infty}\sin 2x\,dx \Rightarrow \text{ не существует.}
\end{aligned}$$

Интегралы на бесконечном промежутке интегрирования (19.4), в отличие от интегралов (19.2), называются *несобственными*, и как следует из (19.4), результат такого интегрирования может быть конечным числом, как для функции $f_1(x)$, бесконечностью, как для функции $f_2(x)$, или вообще не иметь смысла (или не существовать), как для функции $f_3(x)$.

Геометрически собственные интегралы (19.2) представляют собой площадь криволинейной трапеции с конечным основанием $l = b - a$ и ограниченной по высоте значением $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (рис. 77,*а*–*в*). Эта интерпретация применима и к несобственным интегралам (19.4): их можно отождествлять с площадью криволинейной трапеции с основанием бесконечной длины: $x \in [a, +\infty[$. Такая интерпретация, как видно из рис. 77, имеет смысл только для функции $f_1(x)$ (рис. 77,a'), когда несобственный интеграл является конечным числом, в противном случае такая интерпретация смысла не имеет (рис. 77,$б'$,$в'$).

Введем следующие определения.



а) $S_1 = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a$ *б*) $S_2 = e^b - e^a$ *в*) $S_3 = \sin^2 b - \sin^2 a$

а$'$) $S_1' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a$ *б*$'$) $S_2' \to +\infty$ *в*$'$) S_3' не существует

Рис. 77

♦ Если функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$, где a — заданное число, и интегрируема на любом конечной промежутке $[a, b]$, то величина

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \tag{19.5}$$

называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на бесконечном промежутке $[a, +\infty[$, или *несобственным интегралом I-го рода*

♦ Для вычисления несобственного интеграла (19.5) формула Ньютона–Лейбница заменяется правилом предельного перехода

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a), \tag{19.6}$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

♦ Если существует конечный предел (19.6), равный S, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой в несобственном смысле*, а сам несобственный интеграл называют *сходящимся к этому числу* S:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = S. \tag{19.7}$$

В противном случае несобственный интеграл (19.6) называется *расходящимся.*

♢ Для расходящихся интегралов предел (19.6) либо бесконечно большая величина, либо не существует:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{cases}\infty, \\ \text{не существует.}\end{cases} \tag{19.8}$$

♦ Несобственный интеграл на бесконечном промежутке $]-\infty, b]$ определяется аналогично:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a), \tag{19.9}$$

с сохранением той же терминологии.

Пример 19.1. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx; \quad J_2 = \int\limits_{-\infty}^{b} e^x dx, \quad J_3 = \int\limits_{-\infty}^{b} \sin 2x\, dx.$$

Решение. Следуя определению (19.9), найдем

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^b = \operatorname{arctg} b - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a =$$

$$= \operatorname{arctg} b - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{arctg} b + \frac{\pi}{2};$$

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{b} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^b = e^b - \lim_{a\to-\infty} e^a = e^b; \tag{19.10}$$

$$J_3 = \int\limits_{-\infty}^{b} \sin 2x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} \sin 2x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \sin^2 x\Big|_a^b =$$

$$= \sin^2 b - \lim_{a\to-\infty} \sin^2 a \text{ не существует.}$$

Как следует из (19.10), первые два несобственных интеграла сходятся и равны

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} b + \frac{\pi}{2}; \qquad J_2 = \int\limits_{-\infty}^{b} e^x dx = e^b, \tag{19.11}$$

а третий интеграл

$$J_3 = \int\limits_{-\infty}^{b} \sin 2x\, dx$$

расходится.

$\Diamond$ Если несобственные интегралы (19.11) сравнить с несобственными интегралами I_1, I_2, I_3 (19.4), то можно отметить, что функция e^x является интегрируемой в несобственном смысле на промежутке $]-\infty, b]$ и не является таковой на промежутке $[a, +\infty[$; функция $1/(1+x^2)$ является интегрируемой на любом промежутке $]-\infty, b]$ и $[a, +\infty[$, а функция $\sin 2x$ неинтегрируема в несобственном смысле на обоих промежутках $]-\infty, b]$ и $[a, +\infty[$.

Пример 19.2. Показать, что сходимость несобственных интегралов

$$I = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx, \quad J = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx \tag{19.12}$$

равносильна сходимости несобственных интегралов

$$\bar{I} = \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad \bar{J} = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx,$$

где c – любая точка из промежутка $]a, +\infty[$ для I и промежутка $]-\infty, b[$ для J.

Решение. Сходимость несобственных интегралов I, J (19.12), как следует из формул (19.6) и (19.9), определяется существованием пределов

$$\lim_{a\to+\infty} F(a), \quad \lim_{b\to-\infty} F(b). \tag{19.13}$$

Если пределы (19.13) существуют, то соответствующие несобственные интегралы сходятся, в противном случае они расходятся. Теперь, следуя определению (19.6) и свойству аддитивности, имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\Big(\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx\Big) =$$

$$= \int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \bar I.$$

Первый интеграл в правой части этого равенства существует и конечен, а сходимость несобственного интеграла

$$\bar I = \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(c)] = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(c),$$

$b < c < \infty$, как и сходимость интеграла I, определяется существованием предела

$$\lim_{b\to+\infty} F(b),$$

что и является выражением равносильности сходимости несобственных интегралов I и $\bar I$.

Аналогично для несобственных интегралов J (19.9) и интеграла

$$\bar J = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx = F(c) - \lim_{a\to-\infty} F(a), \quad b < c < \infty.$$

Их сходимость определяется существованием одного и того же предела

$$\lim_{a\to-\infty} F(a),$$

что и является выражением равносильности их сходимости.

Односторонние несобственные интегралы (19.6) и (19.9) на полубесконечных промежутках $]-\infty, b]$ и $[a,+\infty[$ можно обобщить на двусторонний несобственный интеграл на бесконечном промежутке $]-\infty,+\infty[$, т.е. на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

♦ Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,b]$ действительной оси $\mathbb{R}$, то несобственный интеграл на промежутке $]-\infty,+\infty[$ определяется как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{19.14}$$

♢ Определение предполагает сохранение всей терминологии, введенной выше, с тем лишь отличием, что для сходящегося интеграла предел (19.14) не должен зависеть от того, каким способом a и b стремятся, соответственно, к $-\infty$ и $+\infty$. Другими словами, интеграл (19.14) сходится тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$J = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx, \quad I = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx,$$

где $c \in \mathbb{R}$, и при этом несобственный интеграл (19.14), по определению, равен $S = J + I$, т.е.

$$S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{19.15}$$

независимо от выбора точки c.

Пример 19.3. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$G_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx; \quad G_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx, \quad G_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin 2x\, dx.$$

Решение. Следуя представлению несобственного интеграла в виде (19.15), имеем

$$G_i = J_i + I_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Все фигурирующие здесь односторонние несобственные интегралы J_i, I_i найдены ранее. Их значения задают формулы (19.4) и (19.10). Исходя из них и выбрав точку c равной нулю, т.е. $c = 0$, придем к следующим результатам.

Так как

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2},$$

то интеграл G_1 сходится и равен

$$G_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = J_1 + I_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Так как

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = 1, \quad I_2 = \int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx = +\infty,$$

то интеграл G_2 расходится, поскольку

$$G_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = J_2 + I_2 \to 1 + \infty \to +\infty.$$

И, наконец, так как оба интеграла

$$J_3 = \int\limits_{-\infty}^{0} \sin 2x\, dx, \quad I_3 = \int\limits_{0}^{+\infty} \sin 2x\, dx$$

расходятся, то интеграл

$$G_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin 2x\, dx = J_3 + I_3$$

тоже расходится, поскольку соответствующие пределы не существуют.

Пример 19.4. Показать, что несобственный интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \quad a > 0,$$

расходится при $\alpha \leqslant 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

Решение. Функция $1/x^\alpha$ непрерывна на любом отрезке $[a, b]$ при условии $a > 0$.

I. Пусть $\alpha = 1$, тогда несобственный интеграл $I(1)$ расходится, поскольку

$$I(1) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty.$$

II. Пусть $\alpha < 1$, тогда несобственный интеграл $I(\alpha < 1)$ также расходится, поскольку

$$I(\alpha < 1) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = +\infty.$$

III. Пусть $\alpha > 1$, тогда несобственный интеграл $I(\alpha > 1)$ сходится и равен

$$I(\alpha > 1) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

Все три соотношения можно выразить одной формулой

$$I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, & \text{сходится при } \alpha > 1; \\ +\infty, & \text{расходится при } \alpha \leqslant 1. \end{cases} \tag{19.16}$$

Пример 19.5. Показать, что несобственный интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^\alpha}, \quad a > c,$$

расходится при $\alpha \leqslant 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

Решение. Сходимость данного несобственного интеграла, записанного в виде

$$I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^\alpha} = \int\limits_a^{+\infty} \frac{d(x-c)}{(x-c)^\alpha},$$

согласно результатам примера 19.2, равносильна сходимости интеграла (19.16), т.е. расходится при $\alpha \leqslant 1$ и сходится при $\alpha > 1$, что и требовалось показать.

Пример 19.6. Показать, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} q^x dx, \quad q > 0,$$

сходится при $0 < q < 1$ и расходится при $q \geqslant 1$.

Решение. Функция q^x непрерывна на любом отрезке $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на нем:

$$\int\limits_a^b q^x dx = \frac{q^x}{\ln q}\Big|_a^b = \frac{1}{\ln q}(q^b - q^a),$$

если $q \neq 1$.

Положив здесь $q \neq 1$ и следуя правилу вычисления несобственных интегралов, найдем

$$\int\limits_a^{+\infty} q^x dx = \frac{1}{\ln q} \lim_{b\to+\infty}(q^b - q^a).$$

Если учесть, что

$$\lim_{b\to+\infty}(q^b - q^a) = \begin{cases} +\infty & \text{при } q > 1, \\ -q^a & \text{при } 0 < q < 1 \end{cases},$$

то несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} q^x dx = \begin{cases} -\dfrac{q^a}{\ln q}, & \text{сходится при } 0 < q < 1; \\ +\infty, & \text{расходится при } q > 1. \end{cases}$$

20. Свойства несобственных интегралов 1-го рода

Поскольку рассмотрение свойств несобственных интегралов имеет смысл только при условии их сходимости, то мы начнем с возможности обобщения формулы Ньютона–Лейбница на случай сходящихся несобственных интегралов 1-го рода.

Свойство 1 (обобщенные формулы Ньютона–Лейбница). Если функция $f(x)$ непрерывна на любом конечном промежутке $[a, b] \in \mathbb{R}$ и если $F(x)$ — ее первообразная, то несобственные интегралы

$$J = \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx, \quad I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \quad G = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{20.1}$$

сходятся тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$\lim_{a\to-\infty} F(x) = F(-\infty), \quad \lim_{b\to+\infty} F(x) = F(+\infty), \tag{20.2}$$

причем справедливы следующие обобщенные формулы Ньютона–Лейбница для несобственных интегралов 1-го рода:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty), \quad \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty). \tag{20.3}$$

Действительно, так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ при любом a или b, или в любых a и b справедлива формула

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Отсюда, используя нужный или оба предела (20.2), придем к формуле (20.3).

Для краткости изложения остальные свойства мы сформулируем на примере несобственного интеграла

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Эти свойства распространяются и на интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

если не будет оговорено противное.

Свойство 2 (линейность). Если сходятся несобственные интегралы от функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на промежутке $[a, +\infty[$, то при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ сходится и несобственный интеграл от функции $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ на том же промежутке, причем

$$\int\limits_{a}^{+\infty} [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \lambda_1 \int\limits_{a}^{+\infty} f_1(x)dx + \lambda_2 \int\limits_{a}^{+\infty} f_2(x)dx. \tag{20.4}$$

Действительно, для любого $b \in [a, +\infty[$ в силу свойств определенного интеграла справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{b} [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \lambda_1 \int\limits_{a}^{b} f_1(x)dx + \lambda_2 \int\limits_{a}^{b} f_2(x)dx,$$

правая часть которого имеет по условию конечный предел при $b \to +\infty$, откуда и следует существование предела при $b \to +\infty$ в левой части и справедлива формула (20.4).

Свойство 3 (замена переменной). Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b[$ для любого $b > a$, а функция $x = \varphi(y)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \beta[$, строго возрастает и удовлетворяет условиям $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = +\infty$, то справедливо соотношение

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{20.5}$$

при условии сходимости хотя бы одного из интегралов (20.5). Формула (20.5) назвается *формулой замены переменной* в несобственном интеграле.

Действительно, пусть $\tau \in [\alpha, \beta[$, $\varphi(\tau) = b$. Тогда $\varphi(\tau) \to +\infty$ при $\tau \to \beta$. Применив формулу (11.20) теоремы 11.5 о замене переменной для определенного интеграла, можно записать

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{20.6}$$

Так как функция $x = \varphi(t)$ строго возрастает и непрерывна на $[\alpha, \beta[$, то обратная функция строго возрастает и непрерывна на $[a, b[$. Поэтому если существует конечный предел при $\tau \to \beta$ в правой части равенства (20.6), то существует конечный предел при $b \to +\infty$ в левой части (и наоборот), и при этом справедлива формула (20.5).

Отметим, что формула (20.5) остается справедливой для случая $\alpha > \beta$ для убывающей функции $\varphi(t)$.

Свойство 4 (интегрирование по частям). Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ определены на промежутке $[a, b[$ и имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$ для любого $b > a$. Если существует предел

$$\lim_{b\to+\infty} u(b)v(b) = u(+\infty)v(+\infty) \tag{20.7}$$

и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx \tag{20.8}$$

сходится, то и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx \tag{20.9}$$

сходится и справедливо соотношение

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx, \tag{20.10}$$

которое называется *формулой интегрирования по частям.*

Действительно, так как функции $u'(x)$, $v'(x)$ непрерывны на $[a, b]$ при любом $b > a$, справедлива формула (11.41) теоремы 11.6:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{20.11}$$

Правая часть равенства (20.11) в силу условий (20.7) и (20.8) имеет при $b \to +\infty$ конечный предел, равный правой части формулы (20.10). Следовательно, существует конечный предел и левой части (20.11), т.е. сходится интеграл (20.9) и справедлива формула (20.10).

Заметим, что при наличии конечного предела (20.7) интегралы (20.8) и (20.9) сходятся или расходятся одновременно.

Свойство 5 (сравнение несобственных интегралов). Если сходятся интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$$

и для всех $x \in [a, +\infty[$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant g(x),$$

то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx. \tag{20.12}$$

Неравенство (20.12) очевидным образом следует из неравенства

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$$

путем предельного перехода.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих эти свойства.

Пример 20.1. Вычислить несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4(1+x^2)}, \; J_1 = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4(1+x^2)}, \quad I_2 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x-1)^{20}}, \; J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^2dx}{(x-1)^{20}}.$$

Решение. 1. При вычислении интеграла I_1 воспользуемся результатами примера 6.5, тогда

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \int\limits_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\Big)dx.$$

В свою очередь, свойство линейности для несобственных интегралов (20.4) позволяет записать

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} + \operatorname{arctg} x\Big|_1^{+\infty}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},$$

то

$$I_1=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4(1+x^2)}=\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{1}{3}+1+\operatorname{arctg}1\Big)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\approx 0{,}12.$$

2. Чтобы вычислить интеграл J_1, проведем замену

$$x=-t,\quad dx=-dt,\quad x_1=-\infty,\ t_1=+\infty;\quad x_2=-1,\ t_2=1,$$

тогда

$$J_1=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^4(1+x^2)}=-\int\limits_{+\infty}^{1}\frac{dt}{t^4(1+t^2)}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t^4(1+t^2)}=I_1=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}.$$

3. Чтобы вычислить интеграл I_2, проведем замену

$$x-1=t,\quad x=t+1,\quad x_1=2,\ t_1=1;\quad x_2=+\infty,\ t_2=+\infty,$$

тогда

$$I_2=\int\limits_2^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x-1)^{20}}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{(t+1)^2dt}{t^{20}}=\int\limits_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{t^{18}}+\frac{2}{t^{19}}+\frac{1}{t^{20}}\Big)dt=F(t)\Big|_1^{+\infty},$$

где

$$F(t)=-\Big(\frac{1}{17t^{17}}+\frac{2}{18t^{18}}+\frac{1}{19t^{19}}\Big).$$

Поскольку

$$F(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}F(t)=0,\quad F(1)=-\Big(\frac{1}{17}+\frac{1}{9}+\frac{1}{19}\Big)=-\frac{647}{2907},$$

то

$$I_2=\int\limits_2^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x-1)^{20}}=F(t)\Big|_1^{+\infty}=F(+\infty)-F(1)=\frac{647}{2907}.$$

4. Чтобы вычислить интеграл J_2, проведем замену

$$x-1=-t,\quad x=1-t,\quad dx=-dt,\quad x_1=0,\ t_1=1;\quad x_2=-\infty,\ t_2=+\infty,$$

тогда

$$J_2=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x^2dx}{(x-1)^{20}}=-\int\limits_{+\infty}^{1}\frac{(1-t)^2dt}{(-t)^{20}}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1-2t+t^2}{t^{20}}dt=$$

$$=\int\limits_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{t^{18}}-\frac{2}{t^{19}}+\frac{1}{t^{20}}\Big)dt=F(t)\Big|_1^{+\infty},$$

где
$$F(t) = -\Big(\frac{1}{17t^{17}} - \frac{1}{9t^{18}} + \frac{1}{19t^{19}}\Big).$$
Поскольку
$$F(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} F(t) = 0, \quad F(1) = -\Big(\frac{1}{17} - \frac{1}{9} + \frac{1}{19}\Big) = -\frac{1}{2907},$$
то
$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^2dx}{(x-1)^{20}} = F(t)\Big|_1^{+\infty} = F(+\infty) - F(1) = \frac{1}{2907}.$$

Пример 20.2. Вычислить несобственные интегралы

1) $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad J_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad G_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}};$

2) $I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx, \quad J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx, \quad G_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

Решение. 1. Заменой переменной
$$x = \operatorname{tg} t, \quad t = \operatorname{arctg} x, \quad x^2+1 = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$
промежутки интегрирования по переменной x: $]+\infty, 0]$, $]-\infty, 0]$ переходят в промежутки интегрирования по переменной t: $[\pi/2, 0]$, $]-\pi/2, 0]$, соответственно, а интеграл
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$
сводится к табличному
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \cos t\, dt = F(t)$$
с первообразной
$$F(t) = \sin t,$$
для которой
$$F\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad F\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -1, \quad F(0) = \sin 0 = 1.$$
Таким образом, несобственные интегралы такой заменой сводятся к собственным
$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t\, dt = F(t)\Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1;$$
$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int\limits_{-\pi/2}^{0} \cos t\, dt = F(t)\Big|_{-\pi/2}^{0} = 0 - (-1) = 1,$$

а поскольку

$$G_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = J_1 + I_1,$$

то

$$G_1 = J_1 + I_1 = 1 + 1 = 2.$$

Заметим, что, учитывая четность подынтегральной функции $1/(x^2+1)^{3/2}$, значение интеграла J_1 можно получить заменой переменной $x = -t$ в интеграле I_1, в результате которой получается заведомо предсказуемое равенство $J_1 = I_1$.

2. Для интеграла I_2 заменой переменной

$$x - \frac{1}{x} = t, \quad \Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)dx = dt$$

промежуток интегрирования $[0, +\infty[$ по переменной x переходит в промежуток интегрирования $]-\infty, +\infty[$ по переменной t, а интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{(1+1/x^2)dx}{(x-1/x)^2+2}$$

сводится к табличному

$$\int \frac{(1+1/x^2)dx}{(x-1/x)^2+2} = \int \frac{dt}{t^2+2} = F(t)$$

с первообразной

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}},$$

для которой

$$F(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad F(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$I_2 = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = F(-\infty) - F(+\infty) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \Big(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Приняв во внимание четность подынтегральной функции $(x^2+1)/(x^4+1)$, имеем

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

а поскольку

$$G_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = J_2 + I_2,$$

то

$$G_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = J_2 + I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi.$$

Пример 20.3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ I_1 = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx, \quad J_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx, \quad G_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx;$$

$$2)\ J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} x^3e^{-x^2}dx; \quad 3)\ I_3 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx,\ \alpha > 0.$$

Решение. 1. Для интеграла

$$\int xe^{-x}dx$$

воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx =$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}. \tag{20.13}$$

С учетом этого для несобственного интеграла I_1 можем записать

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty},$$

а поскольку

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0, \quad (x+1)e^{-x}\Big|_0 = 1,$$

то

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -(0-1) = 1.$$

Для интеграла J_1 с учетом (20.13) найдем

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_{-\infty}^{0},$$

а поскольку

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x} = -\infty, \quad (x+1)e^{-x}\Big|_0 = 1,$$

то

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_{-\infty}^{0} = -(1+\infty) = -\infty.$$

Это означает, что интеграл J_1 расходится, т.е. функция xe^{-x} на промежутке $]-\infty, 0[$ не интегрируема в несобственным смысле.

Так как

$$G_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx + \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx = J_1 + I_1,$$

а интеграл J_1 расходится, то расходится и интеграл G_1.

Признак равносильности несобственных интегралов, рассмотренный в примере 19.2, позволяет утверждать, что сходимость интеграла I_1 и расходимость интеграла J_1 означают сходимость интеграла

$$I = \int\limits_{c}^{+\infty} xe^{-x}dx$$

и расходимость интеграла

$$J = \int\limits_{-\infty}^{c} xe^{-x}dx$$

для любого конечного $c \in \mathbb{R}$.

2. Для интеграла

$$\int x^3 e^{-x^2}dx$$

воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int x^3 e^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = xe^{-x^2}dx & v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} \end{vmatrix} = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}.$$

С учетом этого несобственный интеграл J_2 можно записать как

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} x^3 e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{0},$$

а поскольку

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0,$$

$$-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2},$$

то

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} x^3 e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{2}.$$

3. Интеграл

$$\int e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx$$

циклический и вычислен в примере 3.21, где показано, что

$$\int e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha x} + C.$$

С учетом этого несобственный интеграл I_3 можно записать

$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty},$$

а поскольку

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x} = 0, \quad \frac{\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x} \Big|_{x=0} = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

то

$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx = 0 - \Big(-\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\Big) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

21. Признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода

До сих пор вопрос о сходимости несобственных интегралов разрешался путем их вычисления. Ниже мы рассмотрим некоторые косвенные признаки, позволяющие судить о сходимости несобственных интегралов, не обращаясь к их вычислению. Для краткости изложения все формулировки мы приведем на примере интеграла

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x) dx, \tag{21.1}$$

поскольку заменой переменной $x = -t$ к нему можно свести несобственные интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x) dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

21.1. Сходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций. Признаки сравнения

Теорема 21.1. *Если для всех $x \geqslant a$ выполняется неравенство*

$$f(x) \geqslant 0, \tag{21.2}$$

то для сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx \tag{21.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция

$$F(b) = \int\limits_a^{b} f(x) dx \tag{21.4}$$

была ограничена сверху при $b > a$.

Доказательство. Согласно определению, ограниченность функции (21.4) означает, что существует постоянная M такая, что для всех $b > a$ справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant M, \tag{21.5}$$

а поскольку из (21.2) и свойств определенного интеграла (10.90) (свойство 10) следует, что для любых чмсел b_1, b_2, таких что $a < b_1 < b_2 < +\infty$ справедливо неравенство

$$F(b_2) - F(b_1) = \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqslant 0,$$

то функция $F(b)$ является монотонно неубывающей.

Таким образом, если выполняется условие (21.3), то в силу теоремы о пределе монотонно возрастающей ограниченной функции существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty),$$

означающий, что интеграл (21.4) сходится.

Обратно: если интеграл (21.4) сходится, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = \int_a^{+\infty} f(x)dx = J,$$

то по теореме о пределе монотонной функции следует, что

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

т.е. выполняется условие ограниченности (21.3), что и требовалось доказать.

Теорема 21.2 (первый признак сравнения). *Если для всех $x \geqslant a$ выполняется неравенство*

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x), \tag{21.6}$$

то из сходимости интеграла

$$I_2 = \int_a^{+\infty} f_2(x)dx$$

следует сходимость интеграла

$$I_1 = \int_a^{+\infty} f_1(x)dx,$$

а из расходимости интеграла I_1 следует расходимость интеграла I_2.

Утверждение 21.2 называется *первым,* или *общим признаком сравнения.*

Доказательство. Из условия (21.6) и правил оценки определенных интегралов следует, что

$$\int_a^b f_1(x)dx \leqslant \int_a^b f_2(x)dx \text{ для всех } b \geqslant a. \tag{21.7}$$

Если сходится интеграл I_2, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f_2(x)dx = I_2,$$

то из (21.7) следует, что для любого $b \geqslant a$ выполняется неравенство

$$I_1 = \int_a^b f_1(x)dx \leqslant I_2.$$

Таким образом, для неотрицательной функции $f_1(x)$ выполняется условие ограниченности (21.5) и, согласно теореме 21.1 интеграл I_1 сходится.

Если исходить из расходимости интеграла I_1, то интеграл I_2 тоже должен расходиться, поскольку при сходящемся интеграле I_2, сходился бы, по доказанному выше, и интеграл I_1, что противоречит исходному предположению.

Следствие 21.2.1. Теорема 21.2 остается справедливой и в том случае, если условие (21.6) выполняется хоты бы при некотором $c \geqslant a$.

Это утверждение является очевидным, если исходить из равносильности сходимости несобственных интегралов (пример 19.2)

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad \bar{I} = \int_c^{+\infty} f_1(x)dx, \quad c \geqslant a. \tag{21.8}$$

Теорема 21.3 (второй признак сравнения). *Если при всех $x \geqslant a$ выполняются неравенства*

$$f_1(x) > 0, \quad f_2(x) > 0 \tag{21.9}$$

и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = k, \quad 0 \leqslant k < +\infty, \tag{21.10}$$

то для несобственных интегралов

$$I_1 = \int_a^{+\infty} f_1(x)dx, \quad I_2 = \int_a^{+\infty} f_2(x)dx \tag{21.11}$$

при $k < +\infty$ из сходимости I_2 следует сходимость I_1, а при $k > 0$ из расходимости I_2 следует расходимость I_1.

Утверждение 21.3 называется *вторым,* или *предельным признаком сравнения.*

Доказательство. Если выполняются условия (21.9) и (21.10), то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x > \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - k\right| < \varepsilon.$$

Положив здесь $\varepsilon = k/2$, найдем число $\delta(k/2) = c$ такое, что

$$\frac{k}{2} < \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \frac{3k}{2}, \quad x \in [c, +\infty[, \quad 0 \leqslant c < +\infty, \tag{21.12}$$

Неравенство (21.12) в силу условия $f_2(x) > 0$ равносильно другому:

$$\frac{k}{2}f_2(x) < f_1(x) < \frac{3k}{2}f_2(x), \quad x \in [c, +\infty[. \tag{21.13}$$

Согласно условию равносильности сходимости несобственных интегралов (пример 19.2), интегралы I_1 и I_2 (21.11) сходятся тогда, когда сходятся интегралы $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ (21.8) и наоборот.

Если сходится интеграл I_2, а значит, и интеграл $\bar{I}_2$, то из правой части неравенства (21.13) при $k < +\infty$, согласно теореме 21.2, следует сходимость интеграла $\bar{I}_1$, а это равносильно сходимости интеграла I_1.

Если расходится интеграл I_2, а значит, и интеграл $\bar{I}_2$, то из левой части неравенства (21.13) при $k > 0$, согласно той же теореме 21.2, следует расходимость интеграла $\bar{I}_1$, а это равносильно расходимости интеграла I_1.

Следствие 21.3.1. Если предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = k$$

подчиняется строгим неравенствам

$$0 < k < +\infty, \tag{21.14}$$

т.е. справедлива асимптотическая оценка

$$f_1(x) \sim kf_2(x), \quad x \to +\infty, \tag{21.15}$$

то интегралы I_1 и I_2 сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, как уже отмечалось, при $k < +\infty$ из сходимости I_2 следует сходимость I_1, но если это условие дополнить неравенством $k > 0$, то из левой части неравенства (21.13) из сходимости I_1 будет следовать сходимость I_2. Вместе с этим выше уже показано, что при $k > 0$ из расходимости I_2 следует расходимость I_1, но если это условие дополнить требованием $k < +\infty$, то из правой части неравенства (21.13) из расходимости I_1 будет следовать расходимость I_2.

Таким образом, интегралы I_1 и I_2 сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 21.3.2. Теорема 21.3 и следствие 21.3.1 справедливы, если условия (21.9) выполняются хотя бы при некотором $c \geqslant a$.

Это очевидным образом вытекает из условия равносильности сходимости несобственных интегралов I и $\bar{I}$ (21.8).

Выбрав для исследуемых функций $f_1(x)$ конкретную функцию $f_2(x)$, можно получить частные признаки сравнения для определения сходимости несобственных интегралов

$$I_2 = \int\limits_a^{+\infty} f_2(x)dx.$$

Практическое значение имеет сравнение с функцией $f_2(x) = 1/x^\alpha$ (пример 19.4), которая для $a > 0$ на промежутке $[a, +\infty[$ интегрируема при $\alpha > 1$ и неинтегрируема при $\alpha < 1$ в несобственном смысле. На таком сравнении построены два признака Коши, вытекающие из общего и предельного признаков сравнения.

Теорема 21.4 (общий признак Коши). *Если при* $x \geqslant c \geqslant a > 0$ *неотрицательную функцию* $f(x)$ *можно представить в виде*

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

то несобственный интеграл

$$I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha} dx$$

сходится при $\alpha > 1$ *и* $0 < g(x) \leqslant G < +\infty$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$ *и* $g(x) \geqslant G > 0$.

Доказательство очевидным образом вытекает из первого признака сравнения при выборе $f_1(x) = g(x)$ и $f_2(x) = G/x^\alpha$.

Теорема 21.5 (предельный признак Коши). *Если неотрицательная функция* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *является бесконечно малой порядка* $\alpha > 0$ *относительно бесконечно малой* $1/x$, *т.е.*

$$f(x) \sim \frac{h}{x^\alpha}, \quad x \to +\infty, \quad 0 < h < \infty,$$

то несобственный интеграл

$$I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$$

сходится при $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

Доказательство очевидным образом вытекает из второго признака сравнения при выборе $f_1(x) = f(x)$ и $f_2(x) = 1/x^\alpha$.

Предельный признак Коши является наиболее простым и удобным при исследовании на сходимость. Действительно, если установлено, что подынтегральная функция является бесконечно малой при $x \to +\infty$, то решение задачи в этом случае сводится к выделению главной части этой функции, вид которой и дает ответ на вопрос о сходимости несобственного интеграла.

Пример 21.1. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}; \quad I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x};$$

$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5+1}}; \quad I_4 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{2+\sqrt[3]{x}}dx.$$

Решение. Все подынтегральные функции непрерывны, ограничены и неотрицательны на указанных интервалах интегрирования. Вместе с этим они являются бесконечно малыми при $x \to +\infty$. Выделив в подынтегральных функциях главную часть и воспользовавшись предельным признаком Коши, найдем эти интегралы.

1. Интеграл

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$$

сходится, так как

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} \sim \frac{1}{x^{7/6}}, \ x \to +\infty, \ \text{т.е.}\ \alpha = \frac{7}{6} > 1.$$

2. Интеграл

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$$

расходится, так как

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\cos^2 x} \sim \frac{1}{x^{1/2}}, \ x \to +\infty, \ \text{т.е.}\ \alpha = \frac{1}{2} < 1.$$

3. Интеграл

$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5+1}}$$

расходится, так как

$$\frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5+1}} \sim \frac{3}{2}\frac{1}{x}, \ x \to +\infty, \ \text{т.е.}\ \alpha = 1.$$

4. Интеграл

$$I_4 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{2+\sqrt[3]{x}}dx$$

сходится, так как $\sin(1/x) \sim 1/x$, $x \to \infty$, и, следовательно,

$$\frac{\sin(1/x)}{2+\sqrt[3]{x}} \sim \frac{1}{x^{4/3}}, \ x \to +\infty, \ \text{т.е.}\ \alpha = \frac{4}{3} > 1.$$

Пример 21.2. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_a^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx, \text{ где } Q_m(x),\ P_n(x) \text{ — некоторые полиномы;}$$

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}; \quad I_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{5x^4+2x^2+3}; \quad I_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+2x^2+e^x}.$$

Решение. 1. Подынтегральная функция интеграла I_1 будет ограниченной на промежутке интегрирования $[a, +\infty[$ только при отсутствии вещественных нулей полинома $P_n(x)$ в этом промежутке. Исходя из этого предположения и свойств рациональных дробей $Q_m(x)/P_n(x)$ отметим, что существует $x = c \geqslant a$, начиная с которого дробь имеет постоянный знак, равный $\mathrm{sign}(q_m/p_n)$, где q_m, p_n — коэффициенты полиномов при их старших степенях. Вынеся знак $\mathrm{sign}(q_m/p_n)$ за знак интеграла, получим положительную подынтегральную функцию, которая при $x \to +\infty$ имеет асимптотическую оценку

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = O\Big(\frac{1}{x^{n-m}}\Big),\ x \to +\infty,$$

в силу которой интеграл I_1, согласно общему признаку Коши, будет сходиться при $n - m > 1$ и расходиться при $n - m \leqslant 1$.

2. Интеграл I_2 является частным случаем интеграла I_1 при $Q_0(x) = 1$ и $P_2(x) = x^2+2x+2$, т.е. $m = 0$, $n = 2$. Учитывая, что полином $P_2(x) = x^2+2x+2 = (x+1)^2 + 1$ вещественных нулей вообще не имеет, по разности $n - m = 2 - 0 = 2 > 1$ заключаем, что интеграл I_2 сходится.

Впрочем, сходимость этого интеграла легко устанавливается непосредственным вычислением:

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \mathrm{arctg}(x+1)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Интеграл I_3 представим суммой несобственных интегралов

$$I_3 = \underline{I}_3 + \overline{I}_3,$$

где

$$\underline{I}_3 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{5x^4+2x^2+3}, \quad \overline{I}_3 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{5x^4+2x^2+3}.$$

Начнем с интеграла $\overline{I}_3$, который представляет собой частный случай интеграла I_1 при $Q_0(x) = 1$ и $P_4(x) = 5x^4 + 2x^2 + 3$, т.е. $m = 0$, $n = 4$. Полином $P_4(x)$ как сумма трех положительных слагаемых вещественных нулей не имеет на всей числовой оси $\mathbb{R}$, поэтому разность $n - m = 4 - 0 = 4 > 1$ означает сходимость интеграла $\overline{I}_3$. Так как полином $P_4(x) = 5x^4+2x^2+3$ является четной функцией, то

$$\underline{I}_3 = \overline{I}_3.$$

Так как оба интеграла $\underline{I}_3$ и $\overline{I}_3$ сходятся, то сходится и интеграл I_3, равный

$$I_3 = \underline{I}_3 + \overline{I}_3.$$

4. Подынтегральная функция интеграла I_4 положительно определена на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Исследуемый интеграл I_4 представим суммой

$$I_4 = \underline{I}_4 + \overline{I}_4,$$

где

$$\underline{I}_4 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1 + 2x^2 + e^x}, \quad \overline{I}_4 = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + 2x^2 + e^x}.$$

Начнем с интеграла $\underline{I}_4$, подынтегральная функция которого при $x \to -\infty$ имеет асимптотическую оценку

$$\frac{1}{1 + 2x^2 + e^x} \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \to -\infty,$$

в силу чего, согласно любому из признаков Коши, интеграл $\underline{I}_4$ сходится.

В свою очередь, подынтегральная функция интеграла $\overline{I}_4$ при $x \to +\infty$ имеет асимптотическую оценку

$$\frac{1}{1 + 2x^2 + e^x} \sim \frac{1}{e^x}, \quad x \to +\infty.$$

При такой оценке вместо признаков Коши следует использовать, например, второй признак сравнения, вычислив предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1/(1 + 2x^2 + e^x)}{1/e^x} = k = 1.$$

Поскольку $0 < k = 1 < +\infty$, то сходимость интеграла $\overline{I}_4$ определяется сходимостью интеграла

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx.$$

Сходимость этого интеграла легко устанавливается либо вычислением:

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1,$$

либо использованием эталонного сходящегося несобственного интеграла (пример 19.6):

$$\int\limits_{0}^{+\infty} q^x dx, \ \text{при } 0 < q < 1, \tag{21.16}$$

поскольку $1/e = q < 1$. И тот, и другой способ указывают на сходимость интеграла I, а следовательно, и сходимость $\overline{I}_4$. Так как интеграл I_4 представляет собой сумму сходящихся интегралов $\underline{I}_4$ и $\overline{I}_4$, то он сходится на всей числовой оси $]-\infty, +\infty[$.

Отметим, что мы впервые воспользовались сходящимся интегралом (21.16). Рассмотрим более подробно его применение при исследовании несобственных интегралов на сходимость.

Пример 21.3. Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{5^x - 3^x}{7^x + x^2} \cos^2 x\, dx; \quad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{-\pi} \frac{5^x - 3^x}{7^x x^2 + 2^x} dx; \quad I_3 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{2^x}{3^x(x^2 + \cos^2 x)} dx.$$

Решение. 1. Подынтегральная функция интеграла I_1 неотрицательна на промежутке интегрирования $0, +\infty[$, а поскольку

$$\frac{5^x - 3^x}{7^x + x^2} \cos^2 x \leqslant \frac{5^x - 3^x}{7^x + x^2} \leqslant \frac{5^x - 3^x}{7^x} \sim \Big(\frac{5}{7}\Big)^x, \quad x \to +\infty,$$

т.е. $q = 5/7 < 1$, поэтому интеграл I_1 сходится.

2. Заменой $x = -t$ интеграл I_2 приводится к виду

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{-\pi} \frac{5^x - 3^x}{7^x x^2 + 2^x} dx = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{5^{-t} - 3^{-t}}{7^{-t} t^2 + 2^{-t}} dt = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{3^{-t}[(5/3)^{-t} + 1]}{2^{-t}[(7/2)^{-t} + 1]} dt =$$
$$= \int\limits_{\pi}^{+\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^t \frac{(3/5)^t + 1}{(2/7)^t + 1} dt.$$

Положительно определенная подынтегральная функция при $t \to +\infty$ имеет асимптотическую оценку

$$\Big(\frac{2}{3}\Big)^t \frac{1 + (3/5)^t}{1 + (2/7)^t} \sim \Big(\frac{2}{3}\Big)^t, \quad t \to +\infty, \text{ т.е. } q = \frac{2}{3} < 1,$$

следовательно, интеграл I_2 сходится.

3. Функция

$$\frac{2^x}{3^x(x^2 + \cos^2 x)} < \Big(\frac{2}{3}\Big)^x, \quad x \to +\infty, \quad q = \frac{2}{3} < 1,$$

поэтому интеграл I_3 сходится.

Пример 21.4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} (e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2}) dx; \quad I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x - e^{-x}}\Big) \frac{1}{x^2} dx.$$

Решение. 1. Подынтегральная функция интеграла I_1 не определена в точке $x = 0$, но поскольку

$$\lim_{x \to 0} (e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2}) = 0,$$

то, доопределив ее в точке $x = 0$ нулевым значением, получим непрерывную на $[0, +\infty[$ функцию, обладающую на $+\infty$ асимптотической оценкой

$$e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2} = (e^{-a^2/x^2} - 1) - (e^{-b^2/x^2} - 1) \sim \frac{b^2 - a^2}{x^2}, \quad x \to +\infty,$$

в силу которой, согласно предельному признаку Коши, интеграл I_1 сходится.

2. Подынтегральная функция интеграла I_2 не определена в точке $x = 0$, но поскольку предел

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x - e^{-x}}\Big)\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2(e^x - e^{-x})x^2},$$

с помощью асимптотических равенств

$$e^x - 1 \sim x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},\ x \to 0; \quad e^{-x} - 1 \sim -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6},\ x \to 0;$$

$$e^x - e^{-x} \sim (e^x - 1) - (e^{-x} - 1) \sim 2x + \frac{x^3}{3},\ x \to 0;$$

$$e^x - e^{-x} - 2x \sim \frac{x^3}{3},\ x \to 0,$$

легко вычисляется и равен

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x - e^{-x}}\Big)\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/3}{2x^2(2x)} = \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3} = \frac{1}{12},$$

то, доопределив ее в точке $x = 0$ значением $1/12$, получим непрерывную функцию, обладающую на $+\infty$ асимптотической оценкой

$$\Big(\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x - e^{-x}}\Big)\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x^2},\ x \to +\infty,$$

в силу которой, согласно предельному признаку Коши, интеграл I_2 сходится.

Пример 21.5. Доказать, что интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}dx$$

сходится при всех $\alpha \geqslant 0$, а интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$$

— при всех $\alpha > 1$. Найти их значения при целых α.

Решение. 1. Подынтегральная функция интеграла I_1 будет ограниченной при $\alpha \geqslant 0$. Воспользуемся общим признаком сравнения и, выбрав в качестве эталона функцию $1/x^\beta$, $\beta > 1$, найдем

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha/e^x}{1/x^\beta} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\alpha+\beta}}{e^x} = 0$$

при любых $\alpha \geqslant 0$ и $\beta > 1$. Так как $\beta > 1$, то интеграл I_1 сходится.

Найдем значения I_1 при целых α, т.е. $\alpha = n \geqslant 0$. Обозначив

$$I_1(n) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^n}{e^x}dx,$$

с помощью интегрирования по частям найдем

$$I_1(n)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^n}{e^x}dx=\begin{vmatrix} u=x^n, & du=nx^{n-1}dx\\ dv=\dfrac{dx}{e^x}, & v=-\dfrac{1}{e^x}\end{vmatrix}=-\frac{x^n}{e^x}\Big|_0^{+\infty}+n\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{e^x}dx=$$

$$=nI_1(n-1)=n(n-1)I_1(n-2)=\ldots=n(n-1)(n-2)\cdots1\cdot I_1(0)=$$

$$=n!\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx=n!(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=n!.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!.$$

$\Diamond$ Интеграл I_1 представляет собой частное значение гамма-функции $\Gamma(n+1)=n!$, которое будет рассмотрено ниже.

2. Чтобы определить сходимость интеграла I_2, также воспользуемся вторым признаком сравнения, выбрав в качестве эталона ту же функцию $1/x^\beta$, $\beta>1$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(1+x)]/x^\alpha}{1/x^\beta}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha-\beta}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+x)(\alpha-\beta)x^{\alpha-\beta-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\alpha-\beta)x^{\alpha-\beta}}=0$$

при условии $\alpha-\beta>0$. Это означает, что при $\alpha>\beta>1$ интеграл I_2 сходится.

Найдем значения I_2 при целых α, т.е. $\alpha=n\geqslant2$. Проведя интегрирование по частям:

$$I_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx=\begin{vmatrix} u=\ln(1+x), & du=\dfrac{dx}{1+x}\\ dv=x^{-n}dx, & v=\dfrac{1}{1-n}x^{1-n}=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\ln(1+x)}{(n-1)x^{n-1}}\Big|_1^{+\infty}+\frac{1}{n-1}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\ln2+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^{n-1}}\right]=\frac{1}{n-1}[\ln2+J],$$

где

$$J=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^{n-1}}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1+x-x}{(1+x)x^{n-1}}dx=\int\limits_1^{+\infty}\Big[\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{(1+x)x^{n-2}}\Big]dx.$$

Продолжив разложение дроби подобным образом, получим

$$J=\int\limits_1^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^0}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^1}{x^{n-2}}+\frac{(-1)^2}{x^{n-3}}+\ldots+\frac{(-1)^{n-3}}{x^2}+\frac{(-1)^{n-2}}{x}+\frac{(-1)^{n-1}}{1+x}\Big]dx=$$

$$= \int\limits_1^{+\infty} \Big[(-1)^0 x^{1-n} + (-1)^1 x^{2-n} + (-1)^2 x^{3-n} + \ldots + (-1)^{n-3} x^{-2} + (-1)^{n-2} x^{-1} +$$

$$+ (-1)^{n-1}(1+x)^{-1}\Big] dx =$$

$$= \Big[\frac{(-1)^0 x^{2-n}}{2-n} + \frac{(-1)^1 x^{3-n}}{3-n} + \frac{(-1)^2 x^{4-n}}{4-n} + \ldots + \frac{(-1)^{n-4} x^{-2}}{-2} + \frac{(-1)^{n-3} x^{-1}}{-1} +$$

$$+ (-1)^{n-2} \ln \frac{x}{1+x}\Big]\Big|_1^{+\infty} =$$

$$= -\Big[\frac{(-1)^0}{2-n} + \frac{(-1)^1}{3-n} + \frac{(-1)^2}{4-n} + \ldots + \frac{(-1)^{n-4}}{-2} + \frac{(-1)^{n-3}}{-1} + (-1)^{n-2} \ln \frac{1}{2}\Big] =$$

$$= \frac{(-1)^0}{n-2} + \frac{(-1)^1}{n-3} + \frac{(-1)^2}{n-4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-4}}{2} + \frac{(-1)^{n-3}}{1} + (-1)^{n-2} \ln 2,$$

откуда

$$I_2 = \frac{1}{n-1}\Big[\ln 2 + \frac{(-1)^0}{n-2} + \frac{(-1)^1}{n-3} + \frac{(-1)^2}{n-4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n-4}}{2} + \frac{(-1)^{n-3}}{1} + (-1)^{n-2} \ln 2\Big] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big\{[1 + (-1)^n] \ln 2 + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^{n-2}}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{-1}}{n-3} + \frac{(-1)^{-2}}{n-2}\Big\}.$$

Пример 21.6. Показать, что интеграл

$$I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$$

при

$$\begin{aligned} &1)\ \alpha > 1 \text{ сходится;} \\ &2)\ \alpha = 1 \text{ и } \begin{cases} \beta > 1 \text{ сходится,} \\ \beta \leqslant 1 \text{ расходится;} \end{cases} \\ &3)\ \alpha < 1 \text{ расходится.} \end{aligned} \qquad (21.17)$$

Решение. 1. Пусть $\alpha > 1$, тогда можно записать $\alpha = 1 + 2\delta$, где $\delta > 0$. С учетом этого

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1+\delta}} \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x}.$$

так как, согласно свойствам непрерывных функций,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} = 0$$

при $\delta > 0$ и любом β, то существует число $c > 2$ такое, что

$$0 < \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} < 1$$

при всех $x \geqslant c$. Поэтому

$$0 < \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1+\delta}} \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} < \frac{1}{x^{1+\delta}}$$

для всех $x \geqslant c$, и из сходимости интеграла

$$\int\limits_{c}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta}}, \quad \delta > 0,$$

согласно теореме сравнения следует сходимость интеграла I при любом β.

2. Пусть $\alpha = 1$, тогда

$$I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\beta} x} = \left| \begin{array}{c} t = \ln x, \ dt = \dfrac{dx}{x}; \\ x_1 = 2, \ t_1 = \ln 2; \\ x_2 = +\infty, \ t_2 = +\infty \end{array} \right| = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta}}.$$

Последний интеграл сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leqslant 1$ (см. пример 19.4), что и требовалось доказать.

3. Пусть $\alpha < 1$, тогда можно записать $\alpha = 1 - 2\delta$, где $\delta > 0$. С учетом этого

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} = \frac{1}{x^{1-\delta}} \frac{x^{\delta}}{\ln^{\beta} x}.$$

так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\delta}}{\ln^{\beta} x} = +\infty$$

при $\delta > 0$, то существует число $c > 2$ такое, что

$$\frac{x^{\delta}}{\ln^{\beta} x} > 1$$

при $x \geqslant c > 2$. Поэтому

$$\frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} = \frac{1}{x^{1-\delta}} \frac{x^{\delta}}{\ln^{\beta} x} > \frac{1}{x^{1-\delta}}$$

для всех $x \geqslant c$, и из расходимости интеграла

$$\int\limits_{c}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\delta}}, \quad \delta > 0,$$

согласно теореме сравнения, следует расходимость интеграла I при любом β.

Таким образом, утверждение (21.17) доказано и может быть использовано в качестве эталона при исследовании на сходимость других несобственных интегралов.

Пример 21.7. Найти объем и площадь боковой поверхности тела вращения, получаемого вращением части гиперболы $xy = 1$, $x \geqslant 1$, вокруг оси Ox.

Решение. Конечная часть тела (рис. 78), отвечающая изменению x от 1 до $b > 1$, имеет объем

$$V_b = \pi \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^2}$$

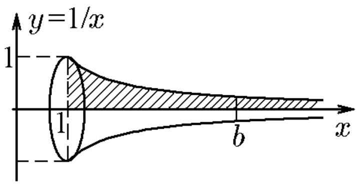


Рис. 78

и площадь боковой поверхности

$$S_b = 2\pi \int\limits_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx.$$

За объем V и площадь боковой поверхности S всего простирающегося в бесконечность тела принимается предел этих величин, т.е.

$$\begin{aligned} V &= \lim_{b\to+\infty} \pi \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \pi \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi\Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_1^{+\infty} = \pi; \\ S &= \lim_{b\to+\infty} 2\pi \int\limits_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx = 2\pi \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx = +\infty. \end{aligned} \qquad (21.18)$$

Поскольку для всех $x > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} > \frac{1}{x},$$

а интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \qquad (21.19)$$

расходится (см. пример 19.4), то, согласно первому признаку сравнения, из расходимости интеграла (21.19) вытекает и расходимость интеграла

$$S = 2\pi \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx = +\infty.$$

Соотношения (21.18) означают, что объем тела конечен и равен π, а площадь боковой поверхности имеет бесконечное значение.

Пример 21.8. Определить, с какой силой материальная бесконечная прямая с постоянной линейной плотностью ρ притягивает материальную точку массой m, находящуюся на расстоянии l от этой прямой.

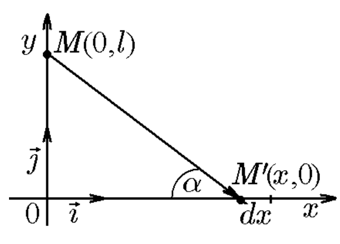


Рис. 79

Решение. Выберем систему координат xOy так, чтобы материальная прямая совпадала с осью Ox, а материальная точка M находилась на оси Oy на расстоянии l от начала координат (рис. 79). Выделим на оси Ox в точке M' с абсциссой x элемент длины dx. Этот элемент, согласно закону всемирного тяготения, действует на точку M с силой

$$d\vec{F} = \frac{\gamma m\rho\,dx}{l^2+x^2}\vec{e}(M,M'),$$

где $\vec{e}(M,M')$ — единичный вектор, направленный из точки M в точку M', а γ — гравитационная постоянная.

Компоненты вектора $d\vec{F} = (dF_x, dF_y)$, очевидно, равны

$$dF_x = \frac{\gamma m\rho\, dx}{l^2 + x^2}\cos\alpha = \frac{\gamma m\rho\, dx}{l^2 + x^2}\,\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \gamma m\rho\frac{x\, dx}{(l^2 + x^2)^{3/2}},$$

$$dF_y = \frac{\gamma m\rho\, dx}{l^2 + x^2}(-\sin\alpha) = -\frac{\gamma m\rho\, dx}{l^2 + x^2}\,\frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}} = -\gamma m\rho l\frac{dx}{(l^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Чтобы определить силу притяжения всей материальной прямой, необходимо вычислить суммарное воздействие сил $d\vec{F}$, т.е. проинтегрировать полученное выражение в пределах $]-\infty, +\infty[$:

$$\vec{F} = \vec{\imath}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dF_x + \vec{\jmath}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dF_y.$$

Интегралы легко вычисляются:

$$F_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\gamma m\rho\frac{x\, dx}{(l^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\gamma m\rho}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(l^2 + x^2)^{-3/2}d(l^2 + x^2) =$$

$$= \frac{\gamma m\rho}{2}\frac{(l^2 + x^2)^{-1/2}}{-1/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\gamma m\rho\frac{1}{\sqrt{l^2 + x^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

$$F_y = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\gamma m\rho l\frac{dx}{(l^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\gamma m\rho l}{l^2}\,\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2\gamma m\rho}{l}.$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 20.2. Таким образом, сила притяжения равна

$$\vec{F} = \vec{\imath}\cdot 0 + \vec{\jmath}\Big(-\frac{2\gamma m\rho}{l}\Big) = -\vec{\jmath}\frac{2\gamma m\rho}{l}.$$

21.2. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов I-го рода. Абсолютная и условная сходимость

Признаки сравнения и следствия из них были сформулированы для неотрицательных подынтегральных функций. Отказ от этого требования приводит к еще одному признаку сходимости в самых общих предположениях.

Теорема 21.6 (критерий сходимости Коши). *Для сходимости несобственного интеграла*

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{21.20}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши: для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $A(\varepsilon) > a$ *такое, что при всех* $a', b' \in]A(\varepsilon), +\infty[$ *выполняется неравенство*

$$\Big|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx\Big| < \varepsilon, \tag{21.21}$$

что в символьной записи имеет вид

$$\forall\varepsilon > 0 \exists A(\varepsilon) > a : \forall a', b' \in]A(\varepsilon), +\infty[\Rightarrow \left|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

В противном случае интеграл I расходится.

Доказательство. Сходимость интеграла

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx, \quad b \geqslant a, \tag{21.22}$$

означает существование конечного предела функции $F(b)$ (21.22) при $b \to +\infty$, а этот предел будет существовать тогда и только тогда, когда функция $F(b)$ будет удовлетворять условиям критерия Коши для существования предела функции, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\overline{A}(\varepsilon) > a$ такое, что при всех $a', b' \in]\overline{A}(\varepsilon), +\infty[$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx\right| < \varepsilon, \tag{21.23}$$

или в символьной записи

$$\forall\varepsilon > 0 \exists \overline{A}(\varepsilon) > a : \forall a', b' \in]\overline{A}(\varepsilon), +\infty[\Rightarrow \left|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Из формулы (21.22) в силу свойств определенного интеграла следует, что

$$F(a') - F(b') = \int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx.$$

Поэтому условие (21.23), являясь необходимым и достаточным для сходимости интеграла I (21.20), выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие (21.21), если взять $\overline{A}(\varepsilon) = A(\varepsilon)$.

Если условие (21.21) не выполняется, то не выполняется и условие (21.23). Это означает, что функция $F(b)$ при $b \to +\infty$ предела не имеет, а, значит, интеграл I (21.20) расходится, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 21.9. Показать, что несобственные интегралы

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx, \quad J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx \tag{21.24}$$

при $\alpha > 1$ сходятся, а
при $\alpha \leqslant 1$ расходятся.

Решение. При $\alpha > 1$ интеграл I сходится в силу неравенства

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}.$$

Пусть теперь $\alpha \leqslant 1$. В этом случае достаточно показать, что вместо условия (21.21) выполняется противоположное ему условие: найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $A > a$ существуют $a', b' \in]A, +\infty[$, при которых выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx\right| \geqslant \varepsilon_0. \tag{21.25}$$

В символьной записи это условие имеет вид

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall A > a \exists a', b' \in]A, +\infty[: \left|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Для $A > 1$ выберем число $n \in \mathbb{N}$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\pi n > A$, и возьмем $a' = \pi n$, $b' = 2\pi n$, тогда

$$\left|\int\limits_{a'}^{b'} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx\right| = \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx \geqslant \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x}dx \geqslant \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{4\pi n}\pi n = \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

Таким образом, условие (21.25) выполняется, и поэтому при $\alpha \leqslant 1$ интеграл (21.24) расходится.

Доказательство для второго интеграла аналогично, если равенство $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ заменить равенством $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$

Критерий Коши формулирует условие сходимости несобственных интегралов в самых общих предположениях. Возможно, поэтому на практике его использование достаточно ограничено в силу специфических затруднений, возникающих в каждом конкретном случае при реализации цепочки следствий (21.21).

Подобные затруднения зачастую заставляют пользоваться признаками сравнения не для самой знакопеременной функции, а для ее модуля. В связи с этим следует установить, как соотносится сходимость несобственного интеграла от знакопеременной функции со сходимостью интеграла от ее модуля. Для выяснения этого вопроса введем следующую градацию сходимости несобственных интегралов.

♦ Сходящийся несобственный интеграл

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{21.26}$$

называется *сходящимся абсолютно*, если сходится интеграл

$$\overline{I} = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{21.27}$$

Сама функция $f(x)$ в этом случае называется *абсолютно интегрируемой в несобственном смысле* на промежутке $[a,+\infty[$.

♦ Сходящийся несобственный интеграл I (21.26) называется *сходящимся условно*, если интеграл (21.27) расходится. Сама функция $f(x)$ в этом случае называется *условно интегрируемой в несобственном смысле* на промежутке $[a,+\infty[$.

◊ Эти определения, как и ранее, без всяких ограничений распространяются на интегралы вида

$$J=\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx,\quad G=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx.$$

Теорема 21.7. *Если несобственный интеграл* $\overline{I}$ (21.27) *сходится, а функция* $f(x)$ *интегрируема на любом интервале* $[a,b]$*, где* $b>a$*, то интеграл* (21.26) *также сходится и выполняется неравенство*

$$\Bigl|\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx\Bigr|\leqslant\int\limits_{a}^{+\infty}|f(x)|\,dx.\tag{21.28}$$

Доказательство. Согласно критерию Коши, из сходимости интеграла $\overline{I}$ (21.27) следует выполнение условий (21.21), т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $A(\varepsilon)>a$ такое, что при всех $a',b'\in]A(\varepsilon),+\infty[$ выполняется неравенство

$$\Bigl|\int\limits_{a'}^{b'}|f(x)|\,dx\Bigr|<\varepsilon,\tag{21.29}$$

что в символьной записи имеет вид

$$\forall\varepsilon>0\exists A(\varepsilon)>a:\forall a',b'\in]A(\varepsilon),+\infty[\Rightarrow\Bigl|\int\limits_{a'}^{b'}|f(x)|\,dx\Bigr|<\varepsilon.$$

Вместе с этим, по определению несобственного интеграла I, функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $]a',b'[$, но тогда, согласно свойствам определенных интегралов, на этом промежутке интегрируема и функция $|f(x)|$, и справедливо неравенство

$$\Bigl|\int\limits_{a'}^{b'}f(x)dx\Bigr|\leqslant\Bigl|\int\limits_{a'}^{b'}|f(x)|\,dx\Bigr|.\tag{21.30}$$

Отсюда в силу (21.29) получим

$$\Bigl|\int\limits_{a'}^{b'}f(x)dx\Bigr|<\varepsilon.$$

Это означает, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию (21.21) критерия Коши, и, следовательно, интеграл I (21.26) существует.

Теперь докажем справедливость неравенства (21.28). Для этого воспользуемся неравенством (21.30), которое при $a < b$ имеет вид

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{21.31}$$

В силу сходимости интегралов I и $\overline{I}$ существует предел при $b \to +\infty$ левой и правой частей (21.31), поэтому предельный переход в (21.31) при $b \to +\infty$ и приводит к неравенству (21.28).

$\Diamond$ Коротко теорему 21.7 можно сформулировать так: *абсолютно сходящийся интеграл сходится, т.е. сходимость интеграла* $\overline{I} = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *влечет за собой сходимость интеграла* $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Следует, однако, отметить, что из расходимости интеграла $\overline{I}$, вообще говоря, не следует расходимость интеграла I, как и из сходимости I не следует сходимость $\overline{I}$, подтверждением чего и являются условно сходящиеся интегралы.

В связи с этим справедливы следующие утверждения.

Следствие 21.7.1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[a, +\infty[$, а функция $g(x)$ ограничена, то и их произведение $f(x)g(x)$ будет функцией, абсолютно интегрируемой на промежутке $[a, +\infty[$.

Действительно, так как функция $g(x)$ ограничена, то существует постоянная L такая, что для всех $x \in [a, +\infty[$ справедливо $|g(x)| \leqslant L$. Тогда из оценки

$$|f(x)g(x)| = |f(x)\,|g(x)| \leqslant |f(x)|L$$

очевидным образом вытекает справедливость этого утверждения.

Следствие 21.7.2. Интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]dx,$$

где $g(x)$ — абсолютно интегрируемая на промежутке $[a, +\infty[$ функция, либо одновременно сходятся абсолютно, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно расходятся.

$\Diamond$ Другими словами, добавление под знаком интеграла абсолютно интегрируемой функции не влияет ни на сходимость исходного интеграла, ни на характер сходимости: абсолютной или условной.

Справедливость этого утверждения вытекает из последовательного использования оценок

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|; \quad |f(x)| \leqslant |f(x) + g(x)| + |g(x)|.$$

Пример 21.10. Показать, что несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \tag{21.32}$$

при $\alpha > 1$ сходится абсолютно;
при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится условно;
при $\alpha \leqslant 0$ расходится.

Решение. 1. Пусть $\alpha > 1$. Так как для всех $x \geqslant 1$

$$\Big|\frac{\sin x}{x^\alpha}\Big| = \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha},\ x \to +\infty, \quad \alpha > 1,$$

то в силу второго признака Коши интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$$

сходится, т.е. интеграл (21.32) сходится абсолютно (откуда следует сходимость самого интеграла (21.32) в силу теоремы 21.7).

2. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. Интегрирование по частям в (21.32) дает

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \left| \begin{matrix} u = \dfrac{1}{x^\alpha}, & du = -\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} dx \\ dv = \sin x\, dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{\alpha} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx = $$
$$= \cos 1 - \frac{1}{\alpha} J,$$

где

$$J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Этот интеграл сходится абсолютно в силу оценок

$$\Big|\frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\Big| = \frac{|\cos x|}{x^{\alpha+1}} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}},\ x \to +\infty,$$

поэтому и интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \cos 1 - \frac{1}{\alpha} J$$

сходится.

Исследуем теперь интеграл (21.32) на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx. \tag{21.33}$$

В предыдущем примере 21.9 было показано, что интеграл (21.24):

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$$

при $\alpha \leqslant 1$ расходится. Так как $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$, то из расходимости интеграла (21.24), согласно признаку сравнения, следует расходимость интеграла (21.33).

Таким образом, при $0 < \alpha \leqslant 1$ интеграл (21.32) сходится условно.

3. Пусть $\alpha \leqslant 0$. В этом случае воспользуемся теоремой 21.6 — критерием Коши. Следуя рассуждением примера 21.9, для $A > 0$ выберем число $n \in \mathbb{N}$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\pi n > A$, и возьмем $a' = 2\pi n + \pi/6$, $b' = 2\pi n + 5\pi/6$. Тогда при любых $x \in]a', b'[$ выполняется неравенство $\sin x \geqslant 1/2$. Вместе с тем при $x \geqslant 1$ и $\alpha < 0$ выполняется еще одно неравенство: $1/x^\alpha \geqslant 1$. С учетом всех этих неравенств придем к оценке

$$\left| \int\limits_{a'}^{b'} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \int\limits_{2\pi n + \pi/6}^{2\pi n + 5\pi/6} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{2\pi n + \pi/6}^{2\pi n + 5\pi/6} dx = \frac{\pi}{3},$$

а это означает, что существуют $\varepsilon = \pi/3$ и $a', b' \in [a, +\infty[$, для которых при $\alpha \leqslant 0$

$$\left| \int\limits_{a'}^{b'} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| > \varepsilon.$$

Следовательно, исходный интеграл также расходится, что и требовалось доказать.

Для интеграла I_2 доказательство аналогично.

Пример 21.11. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx; \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx; \quad I_3 = \int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} \cos \gamma x \, dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Решение. 1. Подынтегральную функцию интеграла I_1 можно представить произведением

$$f(x) = \frac{1}{\beta^2 + x^2}, \quad g(x) = \cos \alpha x.$$

Так как функция $f(x) = |f(x)|$ на промежутке $]0, +\infty[$ абсолютно интегрируема (см. (21.32)), а функция $g(x)$ ограничена на этом промежутке: $|g(x)| < 1$, то в силу следствия 21.7.1 интеграл I_1 сходится абсолютно как интеграл от произведения абсолютно интегрируемой функции на ограниченную.

2. Аналогично устанавливается абсолютная сходимость интеграла I_2 как интеграла от произведения абсолютно интегрируемой функции

$$f(x) = |f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim \frac{1}{x^{3/2}}, \ x \to +\infty,$$

на ограниченную функцию $\sin \sqrt{x}$.

3. Как и выше, интеграл I_3 сходится абсолютно как интеграл от произведения абсолютно интегрируемой функции $f(x) = |f(x)| = x^\alpha e^{-\beta x}$ (пример 21.5) на ограниченную функцию $\cos\gamma x$.

$\Diamond$ Рассмотренные признаки позволяют установить лишь сходимость или расходимость интеграла от модуля знакопеременной функции, но в последнем случае ничего не говорят о сходимости (условной) исходного интеграла. Поэтому мы рассмотрим еще два признака сходимости несобственных интегралов I-го рода.

21.3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов I-го рода

Здесь мы будем исследовать на сходимость интегралы, подынтегральную функцию которых можно представить как произведение функций $f(x)$ и $g(x)$, т.е. интегралы

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx. \tag{21.34}$$

Теорема 21.8 (признак сходимости Дирихле). *Если в интеграле I (21.34) функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке $[a, b]$, причем первообразная функции $f(x)$ — функция $F(x)$:*

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{21.35}$$

ограничена на промежутке $[a, +\infty[$, а дифференцируемая функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0, \tag{21.36}$$

то интеграл I (21.34) сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши для доказательства утверждения. Теорема будет доказана, если показать, что на промежутке $[a, +\infty[$ произведение функций $f(x)g(x)$ удовлетворяет условиям (21.21) критерия Коши. Прежде, однако, мы уточним два условия теоремы: ограниченность функции (21.35) означает, что существует число $M > 0$ такое, что для всех $b \in [a, +\infty[$ справедливо неравенство $|F(b)| \leqslant M$, или в символьной записи

$$\exists M > 0 : \forall b \in [a, +\infty[\Rightarrow |F(b)| \leqslant M; \tag{21.37}$$

а монотонное стремление к нулю функции $g(x)$ при $x \to +\infty$ означает постоянство знака ее производной $g'(x)$ на всем промежутке $[a, +\infty[$, а также что для всех $\varepsilon > 0$ существует такое $A(\varepsilon) > a$, что для всех $x \in [A(\varepsilon), +\infty[$ справедливо неравенство $|g(x)| < \varepsilon$, или в символьной форме

$$\forall\varepsilon > 0 \exists A(\varepsilon) > a : \forall x \in [A(\varepsilon), +\infty[\Rightarrow |g(x)| < \varepsilon. \tag{21.38}$$

Запишем определенный интеграл на промежутке $b' > a' > a$:

$$\int\limits_{a'}^{b'} f(x)g(x)dx,$$

в котором мы проведем однократное интегрирование по частям:

$$\int\limits_{a'}^{b'} f(x)g(x)dx = \begin{vmatrix} u = g(x), & du = g'(x)dx \\ dv = f(x)dx, & v = F(x) \end{vmatrix} = g(x)F(x)\Big|_{a'}^{b'} - \int\limits_{a'}^{b'} F(x)g'(x)dx. \tag{21.39}$$

Из условия (21.37) и знакопостоянства $g'(x)$ следует

$$|F(x)g(x)|\Big|_{a'}^{b'} \leqslant M[|g(b')| + |g(a')|] \tag{21.40}$$

и

$$\left|\int\limits_{a'}^{b'} F(x)g'(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{a'}^{b'} |g'(x)|dx\right| = M|g(b') - g(a')| \leqslant M[|g(b')| + |g(a')|]. \tag{21.41}$$

Поэтому из равенства (21.39) в силу оценок (21.40), (21.41) придем к неравенству

$$\left|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)g'(x)dx\right| \leqslant 2M[|g(b')| + |g(a')|], \tag{21.42}$$

из которого для $a', b' \in [A(\varepsilon), +\infty[$ в силу (21.38) при выборе $\varepsilon = \bar{\varepsilon}/4M$ следует, что

$$\left|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)g'(x)dx\right| < 2M\Big(\frac{\bar{\varepsilon}}{2M} + \frac{\bar{\varepsilon}}{2M}\Big) = \bar{\varepsilon}, \tag{21.43}$$

т.е. произведение функций $f(x)g(x)$ на промежутке $[a, +\infty[$ удовлетворяет условию (21.21) критерия Коши, т.е. интеграл (21.34) сходится.

Так как в признаке Дирихле фигурируют две функции, то, перераспределив требования к ним, его можно сформулировать в другом виде.

Следствие 21.8.1 (признак Абеля). Если в интеграле (21.34) функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty[$ и интеграл от нее

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx \tag{21.44}$$

сходится хотя бы условно, а функция $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a, +\infty[$, то и интеграл (21.34) сходится.

Действительно, по теореме о пределе монотонной функции существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} |g(x)| = |g(+\infty| < +\infty,$$

тогда функция $g_1(x) = g(x) - g(+\infty)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty} [g(x) - g(+\infty)] = 0.$$

Из сходимости интеграла (21.44) следует, что функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную, но тогда, согласно признаку Дирихле, интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx$$

сходится. Поскольку интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(+\infty)dx = g(+\infty)\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

также сходится, то сумма сходящихся интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(+\infty)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)[g_1(x)+g(+\infty)]dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

также сходится, т.е. сходится интеграл (21.34).

Пример 21.12. Исследовать на сходимость

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx, \quad I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx, \quad I_3 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

Решение. Предварительно заметим, что, согласно результатам примера 21.10, интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$$

при любом $a > 0$ сходятся условно, а интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$$

сходится по признаку Дирихле, поскольку для любых $b > a > 0$ интеграл

$$\int\limits_a^{b} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_a^b = e^{-a} - e^{-b} < e^a$$

ограничен, а функция $1/x$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Переход от промежутка интегрирования $[a, +\infty[$, $a > 0$, к промежутку $[0, +\infty[$ затруднен тем, что все три функции в точке $x = 0$ не определены. Однако в силу того, что существует предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то, доопределив функцию $\sin x/x$ в точке $x = 0$ значением, равным пределу, т.е. единице, получим непрерывную функцию, условно интегрируемую на промежутке $[0, +\infty[$, т.е. интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится условно.

Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty,$$

то функции $\cos x/x$, e^{-x}/x на промежутке $[0, +\infty[$ относятся к неограниченным функциям, интегралы от которых мы рассмотрим ниже.

Таким образом, интеграл

$$I_1 = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится условно, интеграл

$$I_2 = \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

сходится условно при любом $a > 0$, а интеграл

$$I_3 = \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

от положительной функции сходится при любом $a > 0$.

Здесь будет удобно заметить, что в свое время мы отмечали, что для неопределенных интегралов

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \ x > 0; \quad \int \frac{e^{x}}{x} dx, \ x < 0, \tag{21.45}$$

не существуют первообразные, которые могут быть выражены через элементарные функции. Исходя из этого, можно с помощью несобственных интегралов ввести функции

$$\begin{aligned} &\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{si}(x), \quad \mathrm{si}(x) = -\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \\ &\mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx, \quad x > 0; \\ &\mathrm{Ei}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{x}}{x} dx, \quad x < 0, \end{aligned} \tag{21.46}$$

называемые *интегральным синусом*, *интегральным косинусом* и *интегральной показательной функцией* и представляющие собой первообразные интегралов (21.45). Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$[\mathrm{Si}(x)]' = \frac{\sin x}{x}, \quad [\mathrm{Ci}(x)]' = \frac{\cos x}{x}, \quad [\mathrm{Ei}(x)]' = \frac{e^x}{x}. \tag{21.47}$$

Действительно, используя формулу (11.13) для дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, найдем, например, для

$$[\mathrm{Ci}(x)]' = \Big(-\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx\Big)' = \Big(-\int\limits_x^{1} \frac{\cos x}{x}dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx\Big)' =$$

$$= -\Big(-\int\limits_x^{1} \frac{\cos x}{x}dx\Big)' = -\Big(-\frac{\cos x}{x}\Big) = \frac{\cos x}{x}.$$

Графики на рис. 80,*а,б* наглядно иллюстрируют соотношения (21.46), (21.47). На интервалах возрастания функций $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$ их производные $\sin x/x$ и $\cos x/x$ положительны, на интервалах убывания отрицательны, а в точках экстремумов производные обращаются в нуль. То же относится и к графику $\mathrm{Ei}(x)$ и e^{-x}/x (рис. 80,*в*).

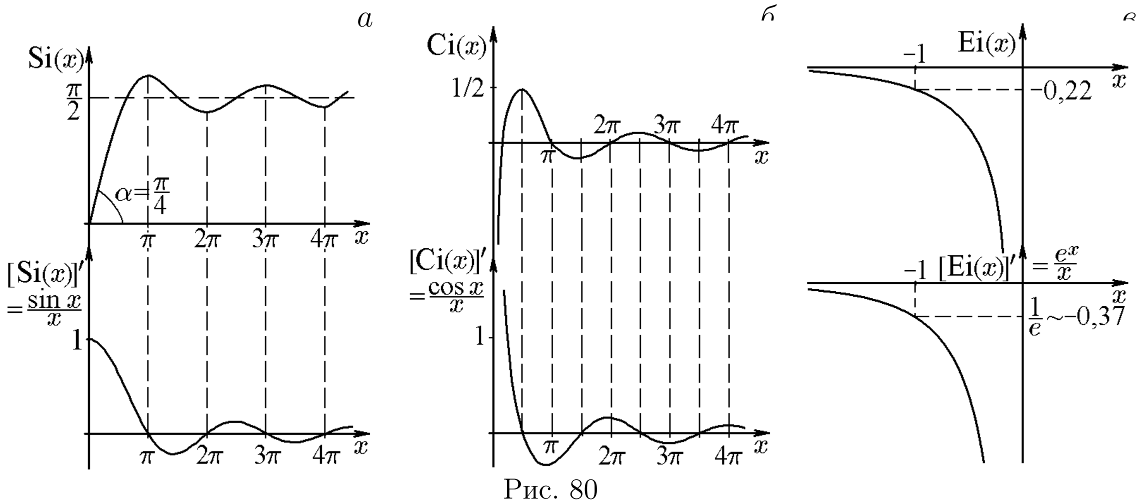


Рис. 80

◊ Выбором подходящей замены переменной функции (21.46) могут быть приведены к виду, наиболее удобному для решения конкретной задачи.

Пример 21.13. Показать, что из сходимости интеграла

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

не следует, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Решение. Утверждение будет доказано, если привести примеры, для которых оно справедливо. Рассмотрим, например, интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \sin x^2 dx.$$

Проведя в нем замену $x^2 = t$, получим

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt.$$

Этот интеграл, согласно результатам примера 21.10, сходится условно, однако подынтегральная функция $\sin x^2$ при $x \to +\infty$ предела не имеет.

Простейшие представления о сходимости числовых рядов позволяют в качестве примера рассмотреть еще один интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^{[x^2]} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}. \tag{21.48}$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа. Из равенства (21.48) следует, что интеграл I сходится, так как, согласно признаку Лейбница, сходится знакочередующийся ряд, однако функция $(-1)^{[x^2]}$ не стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Из самой формулировки признаков Дирихле и Абеля, а также из простейших примеров, рассмотренных выше, очевидно, что эти признаки чаще всего применяются для исследования на сходимость интегралов вида

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) \sin x\, dx; \qquad \int\limits_a^{+\infty} f(x) \cos x\, dx. \tag{21.49}$$

Такие интегралы зачастую удобнее сначала исследовать на сходимость, а затем на абсолютную сходимость, т.е. сходимость интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)| dx. \tag{21.50}$$

♢ При таком исследовании зачастую оказываются полезными оценки

$$\begin{aligned} |f(x)\sin x| &\geqslant |f(x)| \sin^2 x = \frac{f(x)}{2}(1 - \cos 2x), \\ |f(x)\cos x| &\geqslant |f(x)| \cos^2 x = \frac{f(x)}{2}(1 + \cos 2x). \end{aligned} \tag{21.51}$$

♢ Отметим, что при доказательстве признаков Дирихле и Абеля существенной являлась монотонность сомножителя $g(x)$. Иногда ошибочно считают, что достаточно исходить из оценки

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Однако следует ясно понимать, что из этой оценки следует только равенство

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

но никоим образом не монотонность $g(x)$.

Приведем несколько примеров использования признаков Дирихле и Абеля.

Пример 21.14. Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{a^2+x^2}, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x(1+e^{-x})},$$
$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty} (e^x+x)\cos(e^{2x})dx, \quad I_4 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\sin x)\ln x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Решение. 1. Исходя из общего подхода, следовало бы начать с анализа абсолютной сходимости данного интеграла, но так как

$$\left|\frac{x\cos x}{a^2+x^2}\right| \leqslant \left|\frac{x}{a^2+x^2}\right| \sim \frac{1}{x}, \quad x \to +\infty,$$

то эта простейшая оценка не дает возможности утверждать, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{x\cos x}{a^2+x^2}\right| dx$$

сходится. Поэтому в данном случае проще начать с проверки выполнения условий Дирихле. Действительно, функция

$$F(b) = \int\limits_0^b \cos x\,dx = \sin b \leqslant 1$$

ограничена на промежутке $[0,+\infty[$, а функция

$$g(x) = \frac{x}{a^2+x^2}$$

для всех $x \geqslant a$ монотонно стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^2+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Таким образом, в силу признака Дирихле интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{a^2+x^2}$$

сходится.

Для исследования абсолютной сходимости I_1 применим оценку (21.51), тогда для всех $x \in [0, +\infty[$

$$\left|\frac{x\cos x}{a^2+x^2}\right| \geqslant \frac{x\cos^2 x}{a^2+x^2} = \frac{x}{2(a^2+x^2)}(1+\cos 2x).$$

Соответственно,

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{x\cos x}{a^2+x^2}\right|dx \geqslant \frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{a^2+x^2}dx + \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos 2x}{a^2+x^2}dx\right\}.$$

Первый интеграл в фигурных скобках

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{a^2+x^2}dx$$

расходится по предельному признаку Коши, поскольку ограниченная функция $x/(a^2+x^2)$ при $x \to +\infty$ является бесконечно малой с оценкой

$$\frac{x}{a^2+x^2} \sim \frac{1}{x}, \quad x \to +\infty.$$

Второй интеграл в фигурных скобках

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos 2x\,dx}{a^2+x^2}$$

сходится по признаку Дирихле, как и интеграл I_1. Таким образом, интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{x\cos x}{a^2+x^2}\right|dx$$

расходится, т.е. исследуемый интеграл I_1 сходится условно.

2. Чтобы установить сходимость интеграла I_2, подынтегральную функцию представим произведением

$$\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Положив

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}},$$

можем утверждать, что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

сходится условно, согласно результатам примера 21.10, а функция $g(x)$ монотонно возрастает и ограничена для всех $x \geqslant 1$, т.е.

$$\frac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1,$$

поскольку
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1.$$
Это означает, что по признаку Абеля интеграл
$$I_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+e^{-x})}dx$$
сходится.

Для исследования I_2 на абсолютную сходимость применим оценку (21.51), тогда для всех $x\in[1,+\infty[$
$$\Bigl|\frac{\sin x}{x(1+e^{-x})}\Bigr|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x(1+e^{-x})}=\frac{1}{2x(1+e^{-x})}(1-\cos 2x).$$
Соответственно,
$$\int\limits_1^{+\infty}\Bigl|\frac{\sin x}{x(1+e^{-x})}\Bigr|dx\geqslant\frac{1}{2}\Bigl\{\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+e^{-x})}dx-\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x(1+e^{-x})}dx\Bigr\}.$$
Первый интеграл в фигурных скобках
$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+e^{-x})}$$
расходится по предельному признаку Коши, поскольку ограниченная функция $1/[x(1+e^{-x})]$ при $x\to+\infty$ является бесконечно малой с оценкой
$$\frac{1}{x(1+e^{-x})}\sim\frac{1}{x},\quad x\to+\infty.$$
Второй интеграл в фигурных скобках
$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{x(1+e^{-x})}$$
сходится по признаку Дирихле, как и интеграл I_2. Таким образом, интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty}\Bigl|\frac{\sin x}{x(1+e^{-x})}dx\Bigr|$$
расходится, т.е. исследуемый интеграл I_2 сходится условно.

3. Так как для интеграла
$$I_3=\int\limits_0^{+\infty}(e^x+x)\cos(e^{2x})dx$$

вспомогательный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} (e^x + x)dx$$

расходится, то проще начать с проверки признаков Дирихле. Для этого в интеграле I_3 сделаем замену

$$e^{2x} = t, \quad x = \frac{1}{2}\ln t, \quad dx = \frac{dt}{t}; \quad x_1 = 0,\ t_1 = 1; \quad x_2 = +\infty,\ t_2 = +\infty,$$

согласно которой

$$I_3 = \int\limits_0^{+\infty} (e^x + x)\cos(e^{2x})dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt + \frac{1}{4}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\cos t\,dt.$$

Оба интеграла в правой части этого равенства сходятся по признаку Дирихле, так как функция $\cos t$, чем мы неоднократно пользовались, имеет ограниченную первообразную

$$\Big|\int\limits_a^b \cos t\,dt\Big| \leqslant 2,$$

а функции

$$\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \frac{\ln t}{t}$$

монотонно стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

Для исследования I_3 на абсолютную сходимость применим оценку (21.51), тогда для всех $t \in [1, +\infty[$

$$\Big|\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t}\Big)\cos t\Big| = \Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t}\Big)|\cos t| \geqslant \frac{1}{\sqrt{t}}\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2\sqrt{t}},$$

и, соответственно,

$$\int\limits_1^{+\infty} \Big|\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t}\Big)\cos t\Big|dt \geqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\cos 2t}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\Big\{\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}dt\Big\}.$$

Согласно результатам примеров 19.4 и 21.10, первый интеграл расходится, а второй сходится условно; следовательно, интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \Big|\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t}\Big)\cos t\Big|dt$$

расходится. Таким образом, интеграл I_3 сходится условно.

4. Для интеграла

$$I_4 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\sin x)\ln x}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

как уже отмечалось, функция

$$F(b) = \int\limits_1^b \sin x\,dx = \cos 1 - \cos b \leqslant 2$$

ограничена на $[1, +\infty[$, а неравенство

$$\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x+1/x}}$$

показывает, что функция

$$g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$$

стремится к нулю при $x \to +\infty$, но ничего не говорит о монотонности $g(x)$. Для проверки монотонности функции $g(x)$ найдем

$$g'(x) = \frac{1 - x^2(\ln x - 1)}{x(x^2+1)^{3/2}}.$$

Из требования $\ln x - 1 > 1$, т.е. $x > e^2$, вытекает, что

$$g'(x) = \frac{1 - x^2(\ln x - 1)}{x(x^2+1)^{3/2}} < 0.$$

Это означает, что функция $g(x)$ монотонна на промежутке $[e^2, +\infty[$. Таким образом, все условия признака Дирихле выполнены, и, следовательно, интеграл I_4 сходится.

Из соотношений (21.51) для всех $x \in [1, +\infty[$

$$\Big|\frac{(\sin x)\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\Big| \geqslant \frac{(\sin^2 x)\ln x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\ln x}{2\sqrt{1+x^2}}(1 - \cos 2x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{(\cos 2x)\ln x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

следует, что

$$\int\limits_1^{+\infty} \Big|\frac{(\sin x)\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\Big| dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\cos 2x)\ln x}{2\sqrt{1+x^2}}. \qquad (21.52)$$

Для исследования сходимости интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (21.53)$$

в качестве эталонного интеграла выберем расходящийся интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \qquad (21.54)$$

и воспользуемся предельным признаком сравнения. Поскольку предел

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)/\sqrt{1+x^2}}{(\ln x)/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

является конечной величиной, отличной от нуля, то из расходимости интеграла (21.54) следует расходимость (21.53). Второй интеграл в (21.52) сходится, как и сам интеграл I_4; следовательно, интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{(\sin x)\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right| dx$$

расходится, а это означает, что интеграл I_4 сходится условно.

Пример 21.15. Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2 - x)dx, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\sin x - \cos x}{x^2}\cos x\, dx,$$

$$I_3 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}dx, \ \alpha > 0.$$

Решение. 1. Для исследования интеграла I_1 на сходимость воспользуемся заменой $t = x^2 - x$. Функция $t = x^2 - x$ монотонна на промежутке $[1/2, +\infty[$ оси Ox, но обратная функция

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + t}$$

на промежутке $[-1/4, +\infty[$ оси t имеет неограниченную производную

$$x'_t = \frac{1}{2\sqrt{1/4 + t}}.$$

Поскольку непрерывность производной x'_t является необходимым условием замены переменной в несобственном интеграле (свойство 3), то заявленную замену сделаем в интеграле

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2 - x)dx, \tag{21.55}$$

так как на промежутке $[1, +\infty[$ оси Ox все условия замены переменной выполнены. А поскольку функция $\sin(x^2 - x)$ непрерывна на промежутке $[0, 1]$, а следовательно, и интегрируема на нем, то сходимость интеграла I_1 равносильна сходимости интеграла (21.55), который в переменной t будет иметь вид

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2 - x)dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{1+4t}}dt. \tag{21.56}$$

Интегралы такого вида нам уже неоднократно встречались. Их сходимость очевидна в силу ограниченности при любом b интеграла

$$\left|\int_0^b \sin t\,dt\right| \leqslant 2$$

и монотонного убывания к нулю при $x \to +\infty$ функции

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Для исследования интеграла (21.56) на абсолютную сходимость воспользуемся оценкой (21.51) для всех $x \in [0, +\infty[$:

$$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{1+4t}}\right| \geqslant \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1+4t}} = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}(1-\cos 2t)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{\sqrt{1+4t}}\right|dt \geqslant \frac{1}{2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{1+4t}}dt - \int_0^{+\infty}\frac{\cos 2t}{\sqrt{1+4t}}dt\right\}. \tag{21.57}$$

Первый интеграл в (21.57) расходится в силу предельного признака Коши, так как функция $1/\sqrt{1+4t}$ ограничена на промежутке интегрирования и является при $t \to +\infty$ бесконечно малой с оценкой

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}} \sim \frac{1}{2t^{1/2}}, \quad t \to +\infty.$$

Второй же интеграл в (21.57) сходится, как и интеграл (21.56); следовательно, интеграл (21.57) расходится, а это означает, что интегралы (21.55) и (21.56) сходятся условно. Но тогда и интеграл I_1 сходится условно.

2. В интеграле

$$I_2 = \int_1^{+\infty}\frac{x\sin x - \cos x}{x^2}\cos x\,dx$$

первообразная

$$F(b) = \int_1^{+\infty}\cos x\,dx = \cos b - \cos 1$$

ограничена на $[1, +\infty[$. Оценка же

$$\left|\frac{x\sin x - \cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{|x\sin x|}{x^2} + \frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

показывает, что функция

$$g(x) = \frac{x\sin x - \cos x}{x^2}$$

стремится к нулю при $x \to +\infty$, но, что совершенно очевидно, не является монотонной. Таким образом, представление подынтегральной функции в виде произведения

$$\frac{x\sin x - \cos x}{x^2}\cos x$$

не дает возможности использовать признак Дирихле. В данном случае более удобным оказывается заменить представление в виде произведения представлением в виде разности, т.е.

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\sin x - \cos x}{x^2}\cos x\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \Big(\frac{x\sin x\cos x}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\Big)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2}dx.$$

Из результатов примеров 21.9 и 21.10 следует, что первый интеграл сходится условно, а второй абсолютно. Следовательно, интеграл I_2 сходится условно.

3. Для интеграла

$$I_3 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}dx,\ \alpha > 0,$$

воспользуемся тождеством

$$\frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + \sin x)},$$

тогда

$$I_3 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx - \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + \sin x)}dx.$$

Первый интеграл, согласно результатам примера 21.10, сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и условно при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Для второго интеграла

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + \sin x)}dx \tag{21.58}$$

воспользуемся оценкой

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + 1)} < \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + \sin x)} \leqslant \frac{1}{x^\alpha(x^\alpha - 1)}.$$

Интеграл от выражения справа

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(x^\alpha - 1)},$$

а с ним и интеграл (21.58), сходится при $\alpha > 1/2$. Интеграл от выражения слева

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha + 1)}dx,$$

а с ним и интеграл (21.58), расходится при $\alpha \leqslant 1/2$. Окончательно: исследуемый интеграл I_3 сходится при $\alpha > 1/2$ и расходится при $\alpha \leqslant 1/2$.

♢ Особое внимание обратим на частный случай при $\alpha = 1/2$, соответствующий расходящемуся интегралу

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}dx. \tag{21.59}$$

Если к этому интегралу попытаться применить признак Дирихле, то мы заметим, что интеграл от функции $\sin x$ ограничен, а функция

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sin x}$$

стремится к нулю при $x \to +\infty$, но не монотонно. Нарушено лишь требование монотонности функции $g(x)$, и предложенный интеграл (21.59) оказывается расходящимся.

21.4. Главное значение несобственных интегралов 1-го рода

Двусторонний несобственный интеграл от ограниченных функций, согласно (19.14), определяется двойным пределом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)dx \tag{21.60}$$

при независимом стремлении a и b к бесконечности. Если такой предел существует, интеграл (21.60) сходится, в противном случае расходится. Для расходящихся интегралов понятие сходимости можно доопределить, заменив двойной предел (21.60) простым пределом и положив $a = -b$, т.е.

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)dx. \tag{21.61}$$

♦ Несобственный интеграл называют *сходящимся в смысле главного значения*, или просто *главным значением несобственного интеграла* 1-го рода и обозначают

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)dx, \tag{21.62}$$

если предел (21.61) существует. V.p. является сокращением от французского *Valeur principale* — главное значение.

Из определения (21.62) следует:
а) для нечетных функций $f(-x) = -f(x)$

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0; \tag{21.63}$$

б) для четных функций $f(-x) = f(x)$

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx. \tag{21.64}$$

Формулы (21.63) и (21.64) очевидным образом вытекают из свойств определенных интегралов от нечетных и четных функций на симметричном промежутке интегрирования $]-b, b[$:

$$\int\limits_{-b}^{b} f(x)dx = 0,\ f(-x) = -f(x); \quad \int\limits_{-b}^{b} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{b} f(x)dx; \quad f(-x) = f(x).$$

Таким образом, главное значение несобственных интегралов от нечетных функций всегда равно нулю, а главное значение несобственных интегралов от четных функций определяется односторонним несобственным интегралом

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Если этот интеграл сходится, то сходится и двусторонний интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Для четной функции главное значение несобственного интеграла существует лишь вместе с самим несобственным интегралом и, естественно, равно ему:

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx,$$

Исходя из этого и приняв во внимание, что любую функцию $f(x)$, интегрируемую на любом конечном симметричном промежутке, можно представить суммой двух функций

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x): \tag{21.65}$$

четной

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{21.66}$$

и нечетной

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \tag{21.67}$$

можно утверждать, что главное значение несобственного интеграла от любой функции $f(x)$ определяется равенством

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x)+\psi(x)]dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx \tag{21.68}$$

при условии, что односторонний несобственный интеграл в правой части (21.68) сходится, а четная функция $\varphi(x)$ определяется формулой (21.66).

Пример 21.16. Найти главные значения несобственных интегралов

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx; \quad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x-\sin x}{1+x^2}dx; \quad I_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x dx;$$

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^3}{(1+x^2)^2}dx; \quad I_5 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-x+x^2+\sin x}{1+x^4}dx; \quad I_6 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-x}{1+x^4}dx.$$

Решение. 1. Главное значение интеграла I_1 в силу нечетности функции $\sin x$ определяется формулой (21.63):

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx = 0, \tag{21.69}$$

хотя сам интеграл I_1 расходится, поскольку предел

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_{a}^{b}\sin x\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\Big(-\cos x\Big|_a^b\Big) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}(\cos a-\cos b) \tag{21.70}$$

при независимом стремлении a и b к бесконечности не существует.

Если предел (21.70), согласно определению главного значения, рассматривать при условии $a=-b$, т.е.

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty}(\cos b-\cos b) = 0,$$

то придем к тому же результату (21.69), вытекающему из (21.63).

2. Для интеграла

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x-\sin x}{1+x^2}dx,$$

выделив четную

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

и нечетную

$$\psi(x) = \frac{x-\sin x}{1+x^2}$$

части подынтегральной функции

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

согласно (21.63), (21.64), найдем главное значение

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + x - \sin x}{1 + x^2} dx = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = 2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

3. Для интеграла

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx,$$

выделив четную

$$\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

и нечетную

$$\psi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

части подынтегральной функции

$$f(x) = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x),$$

согласно (21.63), (21.64), найдем главное значение

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{ch} x \, dx = 2 \lim_{b \to +\infty} \operatorname{sh} x \Big|_0^{+\infty} = 2 \lim_{b \to +\infty} \operatorname{sh} b = +\infty.$$

Это означает, что интеграл I_3 расходится в смысле главного значения, т.е. его не имеет.

4. Для интеграла

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + x^3}{(1 + x^2)^2} dx,$$

выделив четную

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

и нечетную

$$\psi(x) = \frac{x^3}{(1 + x^2)^2}$$

части подынтегральной функции

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

согласно (21.63), (21.64), найдем главное значение

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + x^3}{(1 + x^2)^2} dx = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx = \int\limits_0^{+\infty} \Big[\frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Big]dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} + \frac{x}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

5. Для интеграла

$$I_5 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x+x^2+\sin x}{1+x^4}dx,$$

выделив четную

$$\varphi(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

и нечетную

$$\psi(x) = \frac{\sin x - x}{1+x^4}$$

части подынтегральной функции

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

согласно (21.63), (21.64), найдем

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x+x^2+\sin x}{1+x^4}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = 2J_1, \qquad (21.71)$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx. \qquad (21.72)$$

В интеграле (21.72) проведем замену переменной

$$\begin{gathered} x - \frac{1}{x} = t, \quad \Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)dx = dt; \\ x_1 = 0,\ t_1 = -\infty; \quad x_2 = +\infty,\ t_2 = +\infty. \end{gathered} \qquad (21.73)$$

Замена (21.73) является корректной, поскольку обратная функция $x = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4})$ монотонна и непрерывно дифференцируема.

Примем во внимание, что

$$\Big(x - \frac{1}{x}\Big)^2 = t^2 \ \text{ или } \ x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2,$$

и с учетом (21.73) можем записать

$$J_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\cdot 2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$J_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{21.74}$$

Подставив (21.74) в (21.71), найдем главное значение

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x+x^2+\sin x}{1+x^4}dx = 2\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi.$$

6. Для интеграла

$$I_6 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x}{1+x^4}dx,$$

выделив четную

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

и нечетную

$$\psi(x) = -\frac{x}{1+x^4}$$

части подынтегральной функции

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

согласно (21.63), (21.64), найдем

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x}{1+x^4}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = 2\overline{I}_6, \tag{21.75}$$

где

$$\overline{I}_6 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx. \tag{21.76}$$

Первообразную для $\overline{I}_6$ можно получить, разложив подынтегральную правильную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(x^4+2x^2+1)-2x^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2} =$$
$$= \frac{A_1x+B_1}{(x^2+1)-\sqrt{2}x} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)+\sqrt{2}x}.$$

Однако ввиду громоздкости нахождения коэффициентов A_i, B_i и последующего интегрирования поступим иначе.

Рассмотрим интеграл

$$G = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4},$$

который заменой

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt; \quad x_1 = 0, \ t_1 = +\infty; \quad x_2 = +\infty, \ t_2 = 0$$

можно представить в виде

$$G = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \int\limits_{+\infty}^{0} \frac{(1/t^2)(-1/t^2)dt}{1+1/t^4} = -\int\limits_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+t^4}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx,$$

т.е.

$$G = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}. \tag{21.77}$$

С другой стороны, интеграл G с помощью тождественных преобразований можно представить еще в одном виде:

$$G = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1-1}{1+x^4}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{1+x^4}dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx. \tag{21.78}$$

Тогда из (21.77) и (21.78) получим равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{1+x^4}dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx,$$

из которого следует

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{1+x^4}dx,$$

но это означает, что в силу (21.74) и (21.76) справедливо соотношение

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = \overline{I}_6 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}J_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

или

$$\overline{I}_6 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Подставив это значение в (21.75), получим главное значение

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x}{1+x^4}dx = 2\overline{I}_6 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

22. Несобственные интегралы 2-го рода

Данный раздел посвящен определенным интегралам от функций $f(x)$, заданных на конечном промежутке $[a,b]$, но не ограниченных на этом промежутке. Интеграл от неограниченной функции на конечном промежутке $[a,b]$ так же, как и интеграл от ограниченной функции на неограниченном промежутке интегрирования, не может быть определен с помощью сумм Римана или Дарбу, подразумевающих ограниченность функций на промежутках разбиения интервала интегрирования. Рассмотрим возможное обобщение понятия определенного интеграла, а следовательно, и возможность применения формулы Ньютона–Лейбница в этом случае.

Как и для несобственных интегралов 1-го рода, начнем с двух простых примеров. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}. \tag{22.1}$$

Эти функции непрерывны на промежутке $[0,1[$, но не ограничены на нем. Однако при любом $b \in [0,1[$ функции (22.1) интегрируемы на отрезке $[0,b] \subset [0,1[$, причем

$$I_1(b) = \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^b = \arcsin b - \arcsin 0 = \arcsin b;$$

$$I_2(b) = \int\limits_0^b \frac{dx}{1-x} = -\int\limits_0^b \frac{d(1-x)}{1-x} = -\ln|1-x|\Big|_0^b = -\ln(1-b) + \ln 1 = \ln\frac{1}{1-b}. \tag{22.2}$$

Если от промежутка интегрирования $[0,b]$ перейти к промежутку $[0,1[$, то непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница, как уже отмечалось, в этом случае оказывается невозможным, и поэтому рассмотрим предельный переход в формулах (22.1) при $b \to 1-0$, т.е.

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{b\to 1-0} I_1(b) = \lim_{b\to 1-0}\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1-0}\arcsin b = \frac{\pi}{2};\\ I_2 &= \lim_{b\to 1-0} I_2(b) = \lim_{b\to 1-0}\int\limits_0^b \frac{dx}{1-x} = \lim_{b\to 1-0}\ln\frac{1}{1-b} = +\infty. \end{aligned} \tag{22.3}$$

Если для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, не ограниченных на промежутке $[0,1[$, ввести символ $\int\limits_0^1$, то с его помощью равенства (22.2) можно записать как

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1-0}\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2};\\ I_2 &= \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{b\to 1-0}\int\limits_0^b \frac{dx}{1-x} = +\infty. \end{aligned} \tag{22.4}$$

Интегралы (22.4) для функций, не ограниченных на промежутке интегрирования, в отличие от интегралов (22.2), называют *несобственными интегралами*, и, как следует из (22.4), результатом такого несобственного интегрирования может быть конечное число, как для функции $f_1(x)$, так и бесконечность, как для функции $f_2(x)$.

С геометрической точки зрения, собственные интегралы (22.2) представляют собой площадь криволинейных трапеций с основанием $[0, b]$, равную $S_1 = \arcsin b$ и $S_2 = \ln[1/(1-b)]$ (рис. 81,*а*,*б*).

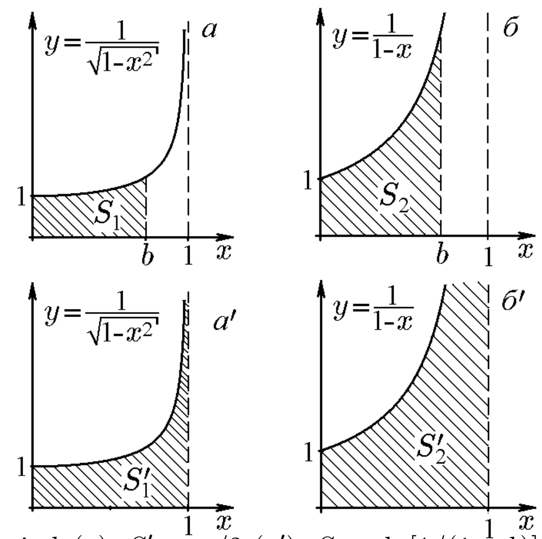


Рис. 81. $S_1 = \arcsin b$ (*а*); $S_1' = \pi/2$ (*а*′); $S_2 = \ln[1/(1-b)]$ (*б*); $S_2' = +\infty$ (*б*′)

По аналогии с собственными интегралами несобственные интегралы (22.4) можно отождествить с площадями криволинейных трапеций с основанием $[0, 1[$ и неограниченными высотами. Такая интерпретация, как видно из рис. 81,*а*′,*б*′, имеет смысл только для функции $f_1(x)$ (рис. 81,*а*′), когда несобственный интеграл задает конечную площадь $S_1' = \pi/2$. Для функции $f_2(x)$ такая интерпретация смысла не имеет, поскольку $S_2' = +\infty$.

Обобщением этих примеров и определенного интеграла Римана является введение следующих определений.

♦ Точку b, в окрестности $]b-\delta, b[$ которой функция $f(x)$ является неограниченной при любом $\delta > 0$, будем называть *особой* (или *правой особой*) *точкой* функции $f(x)$.

♦ Если функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a, b[$, интегрируема на отрезке $[a, x']$ при любом $x' \in [a, b[$, где b — особая точка функции $f(x)$, то символ

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{22.5}$$

называют *несобственным интегралом от неограниченной функции* $f(x)$, или *несобственным интегралом с правой особой точкой промежутка интегрирования* $[a, b[$, или *несобственным интегралом 2-го рода.*

◊ Для вычисления несобственных интегралов (22.5) формула Ньютона–Лейбница дополняется предельным переходом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{x'\to b-0}\int\limits_a^{x'} f(x)dx = \lim_{x'\to b-0} F(x') - F(a), \tag{22.6}$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

$\lozenge$ Формулу (22.6) с помощью положительной величины $\delta' > 0$ иногда удобнее использовать в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta'\to 0}\int\limits_a^{b-\delta'} f(x)dx = \lim_{\delta'\to 0} F(b-\delta') - F(a). \qquad (22.6')$$

$\blacklozenge$ Если существует конечный предел (22.6) или (22.6$'$), равный S, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой в несобственном смысле* на промежутке $[a, b[$ с правой особой точкой, а сам несобственный интеграл — *сходящимся* к этому числу S:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{x'\to b-0}\int\limits_a^{x'} f(x)dx = \lim_{\delta'\to 0}\int\limits_a^{b-\delta'} f(x)dx = S. \qquad (22.7)$$

В противном случае несобственный интеграл (22.6) называется *расходящимся*.

$\lozenge$ Определение несобственного интеграла (22.6) на промежутке $[a, b[$ является содержательным только в том случае, если точка b является особой точкой (правой) функции $f(x)$ В самом деле, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, x']$ при любом $x' \in [a, b[$ и ограничена на $[a, b[$, то, доопределив эту функцию в точке b, получим функцию, которая будет интегрируема на отрезке $[a, b]$. При этом интеграл от доопределенной функции равен пределу (22.6) и не зависит от значения функции в точке b.

Пример 22.1. Показать, что точка $x = 1$ является особой точкой функций (22.1):

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Решение. Напомним, что функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $X \subset D(f(x))$, если существует $c > 0$ такое, что для всех $x \in X$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant c$, что в символьной форме запишется как

$$\exists c > 0 : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leqslant c. \qquad (22.8)$$

Определение неограниченности функции $f(x)$ на X является отрицанием определения (22.8): для любого $c > 0$ существует $x_c \in X$, такое что справедливо неравенство $|f(x_c)| \geqslant c$, что в символьной форме запишется как

$$\forall c > 0 : \exists x_c \in X \Rightarrow |f(x_c)| \geqslant c. \qquad (22.9)$$

В нашем случае роль множества X играет промежуток $]1-\delta, 1[$, где $0 < \delta < 1$. При любом $c > 1/2$ для функции $f_1(x)$ можно указать точку $x_c = \sqrt{1 - 1/4c^2} \in\,]1-\delta, 1[$, для которой выполняется условие (22.9):

$$|f_1(x_c)| = \frac{1}{\sqrt{1-x_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-1/4c^2)}} = 2c > c;$$

для функции $f_2(x)$ можно указать другую точку $x_c = 1 - 1/2c \in]1-\delta, 1[$, для которой тоже выполняется условие (22.9):

$$|f_2(x_c)| = \Big|\frac{1}{1-(1-1/2c)}\Big| = 2c > c.$$

Таким образом, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не ограничены в промежутке $]1-\delta, 1[$, т.е. точка $x=1$ является особой точкой функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Заметим, что в точке $x=1$ функции $1/\sqrt{1-x^2}$ и $1/(1-x)$ обращаются в бесконечность, т.е. при $x \to 1$ эти функции стремятся к бесконечности.

Связь несобственных интегралов 1-го и 2-го родов иллюстрирует следующий пример.

Пример 22.2. Несобственные интегралы 2-го рода

$$I_1(x) = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad I_2(x) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1-x}dx$$

выразить через несобственные интегралы 1-го рода.

Решение. Эти несобственные интегралы 2-го рода были вычислены выше, и результаты этого интегрирования представлены формулами (22.4): интеграл I_1 сходится к значению $\pi/2$, а интеграл I_2 расходится. Геометрически эти результаты проиллюстрированы на рис. 81,*а*,*б* площадями криволинейных трапеций.

1. Заменой

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$
$$x_1 = 0,\ t_1 = 1; \quad x_2 = 1,\ t_2 = +\infty; \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{t^2+1}{2t}$$

интеграл I_1 приводится к виду

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{t^2+1}{2t}\,\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{2dt}{t^2+1}.$$

2. Заменой

$$x = 1 - \frac{1}{t}, \quad dx = \frac{dt}{t^2}, \quad t = \frac{1}{1-x}, \quad x_1 = 0,\ t_1 = 1; \quad x_2 = 1,\ t_2 = +\infty,$$

интеграл I_2 приводится к виду

$$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = \int\limits_1^{+\infty} t\frac{dt}{t^2} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t}.$$

Итак, данные интегралы 2-го рода приводятся к интегралам 1-го рода следующим образом:

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{2dx}{x^2+1}; \tag{22.10}$$

$$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}. \tag{22.11}$$

Исходя из признаков сравнения несобственных интегралов 1-го рода, можно утверждать, что I_1 сходится, а I_2 расходится. Сходящийся интеграл I_1 легко вычисляется:

$$2\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = 2\operatorname{arctg} x\Big|_1^{+\infty} = 2\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Также легко убедиться в расходимости интеграла I_2:

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Аналитические равенства несобственных интегралов (22.10), (22.11) можно дополнить их геометрической интерпретацией — равновеликими криволинейными трапециями (рис. 82).

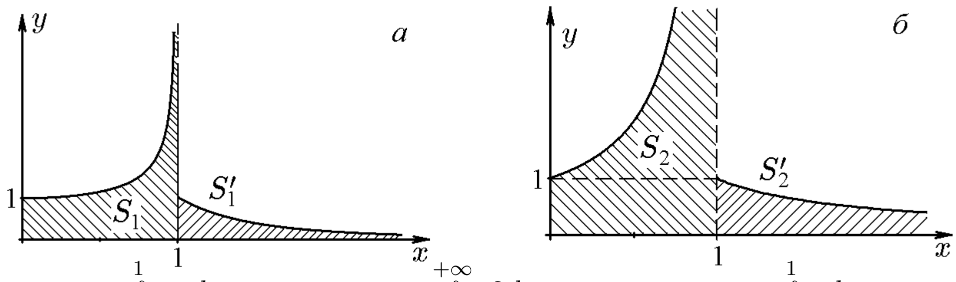


Рис. 82. $S_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$, $S_1' = \int\limits_1^{+\infty}\frac{2dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ (a); $S_2 = \int\limits_0^1\frac{dz}{1-x} = +\infty$, $S_2' = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = +\infty$ ($б$)

По аналогии с правой особой точкой $x = b$ функции $f(x)$ на промежутке $[a, b[$ вводится левая особая точка $x = a$ функции $f(x)$ на промежутке $]a, b]$ в предположении, что функция $f(x)$ является неограниченной в интервале $]a, a + \delta[$ при любом $\delta > 0$. С учетом этого можно определить еще один тип несобственных интегралов.

♦ Если функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a, b]$, интегрируема на отрезке $[x'', b]$ при любом $x'' \in]a, b]$, где a — особая точка функции $f(x)$, то символ

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{22.12}$$

называют *несобственным интегралом от неограниченной функции* $f(x)$, или *несобственным интегралом с левой особой точкой промежутка интегрирования* $]a, b[$, или *несобственным интегралом 2-го рода.* Для вычисления несобственных интегралов (22.12) используется предельный переход

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{x''\to a+0}\int\limits_{x''}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x''\to a+0} F(x'') \tag{22.13}$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta''\to 0} \int\limits_{a+\delta''}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{\delta''\to 0} F(a+\delta''). \qquad (22.14)$$

Если существует конечный предел (22.13), (22.14), то функция $f(x)$ называется *интегрируемой в несобственном смысле на промежутке* $]a, b[$ *с левой особой точкой*, а сам несобственный интеграл — *сходящимся к этому пределу*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{x''\to a+0} \int\limits_{x''}^b f(x)dx = \lim_{\delta''\to 0} \int\limits_{a+\delta''}^b f(x)dx. \qquad (22.15)$$

В противном случае несобственный интеграл (22.15) называется *расходящимся*.

Пример 22.3. Показать, что несобственный интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{т.е. сходится при } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{т.е. расходится при } \alpha \geqslant 1. \end{cases} \qquad (22.16)$$

Решение. Это утверждение можно доказать посредством вычисления несобственного интеграла 2-го рода или преобразованием его к несобственному интегралу первого рода и воспользоваться известными для этого случая условиями сходимости. В первом случае, обозначив

$$F(x'') = \int\limits_{x''}^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad (22.17)$$

найдем

$$F(x'') = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}[1-(x'')^{1-\alpha}] & \alpha \neq 1, \\ -\ln x'' & \alpha = 1, \end{cases}$$

поэтому при $\alpha < 1$ существует конечный предел

$$\lim_{x''\to +0} F(x'') = \frac{1}{1-\alpha},$$

а при $\alpha \geqslant 1$ предел обращается в бесконечность:

$$\lim_{x''\to +0} F(x'') = +\infty.$$

Таким образом, интеграл (22.17) сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Во втором случае заменой переменной

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}; \quad x_1 = 0,\ t_1 = +\infty; \quad x_2 = 1,\ t_2 = 1,$$

исходный интеграл преобразуется к несобственному интегралу 1-го рода

$$I_1(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \int\limits_{+\infty}^1 \frac{-dt/t^2}{(1/t)^\alpha} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{-\alpha+2}}.$$

Этот несобственный интеграл 1-го рода, согласно результатам примера 19.4, сходится при $2-\alpha > 1$, т.е. при $\alpha < 1$, и расходится при $2-\alpha \leqslant 1$, т.е. при $\alpha \geqslant 1$, что и требовалось доказать.

Пример 22.4. Показать, что интегралы

$$I_a = \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad I_b = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad b > a,$$

сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$.

Решение. 1. Интеграл I_a заменой

$$x - a = t, \quad dx = dt; \quad x_1 = a,\ t_1 = 0; \quad x_2 = b,\ t_2 = b - a,$$

приводится к виду

$$I_a = \int\limits_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha}, \quad b - a > 0. \tag{22.18}$$

2. Интеграл I_b заменой

$$b - x = t, \quad -dx = dt; \quad x_1 = a,\ t_1 = b - a; \quad x_2 = b,\ t_2 = 0,$$

приводится к виду

$$I_b = \int\limits_{b-a}^0 \frac{-dt}{t^\alpha} = \int\limits_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha}, \quad b - a > 0. \tag{22.19}$$

Согласно результатам предыдущего примера, интегралы (22.18), (22.19) сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$, что и требовалось доказать.

Пример 22.5. Показать, что сходимость несобственного интеграла

$$I_a = \int\limits_a^b f(x)dx, \quad b > a,$$

с левой особой точкой $x = a$ равносильна сходимости аналогичного интеграла

$$\overline{I}_a = \int\limits_a^c f(x)dx$$

при любом $c \in]a, b[$, а сходимость несобственного интеграла

$$I_b = \int\limits_a^b f(x)dx, \quad b > a,$$

с правой особой точкой $x = b$ равносильна сходимости аналогичного интеграла

$$\overline{I}_b = \int\limits_c^b f(x)dx$$

при любом $c \in]a, b[$.

Решение. Выбрав из промежутка $]a, b[$ произвольную точку $c \in]a, b[$, можем записать

$$
\begin{aligned}
I_a &= \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \overline{I}_a + \int\limits_c^b f(x)dx, \\
I_b &= \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \overline{I}_b.
\end{aligned}
\qquad (22.20)
$$

Поскольку интегралы

$$\int\limits_c^b f(x)dx, \qquad \int\limits_a^c f(x)dx$$

из правой части равенств (22.20) не имеют особых точек, т.е. являются конечными величинами, то из сходимости I_a следует сходимость $\overline{I}_a$ и наоборот. В свою очередь, из сходимости I_b следует сходимость $\overline{I}_b$ и наоборот, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь несобственные интегралы от функций $f(x)$, у которых на промежутке интегрирования $]a, b[$ обе точки $x = a$ и $x = b$ являются особыми.

♦ Если функция $f(x)$ определена на конечном интервале $]a, b[$ и интегрируема на отрезке $[x'', x']$ при любых x'', x' таких, что $a < x'' \leqslant x' < b$, где a и b — особые точки функции $f(x)$, то сходящийся несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $]a, b[$ с двумя особыми точками определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{x' \to b-0 \\ x'' \to a+0}} \int\limits_{x''}^{x'} f(x)dx \qquad (22.21)$$

при условии, что предел в правой части (22.21) существует и конечен.

Как и выше, формулу (22.21) с помощью положительных $\delta' > 0$ и $\delta'' > 0$ иногда удобнее использовать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta' \to 0 \\ \delta'' \to 0}} \int\limits_{a+\delta''}^{b-\delta'} f(x)dx. \qquad (22.22)$$

И, наконец, рассмотрим еще один тип несобственных интегралов 2-го рода, когда особая точка $x = c$ является внутренней точкой промежутка интегрирования $]a, b[$, т.е. $c \in]a, b[$.

♦ Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, за исключением особой точки $c \in]a, b[$, и интегрируема на отрезках $[a, x'']$ и $[x', b]$ при любых x'', x' таких, что $a \leqslant x'' < c < x' \leqslant b$, где a и b, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ с особой точкой $c \in]a, b[$ определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{x'' \to c-0} \int\limits_a^{x''} f(x)dx + \lim_{x' \to c+0} \int\limits_{x'}^b f(x)dx \qquad (22.23)$$

при условии, что оба предела в правой части (22.23) существуют и конечны. В этом случае интеграл (22.23) называют *сходящимся* и пишут

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \qquad (22.24)$$

♢ Согласно формуле (22.24), несобственный интеграл с внутренней особой точкой можно рассматривать как сумму двух отдельных несобственных интегралов с правой и левой особыми точками интервалов интегрирования $[a, c[$ и $]c, b]$, вычисление которых возможно по формулам (22.6), (22.6′) и (22.21), (22.22) или (22.23).

Обобщением всех рассмотренных выше типов несобственных интегралов 2-го рода является случай, когда для функции особыми точками являются концевые точки интервала интегрирования и дополнительно существует конечное число внутренних особых точек.

♦ Если функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $]a, b[$, за исключением особых точек x_k, $k = \overline{0, m}$, где

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b,$$

то несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке интегрирования $]a, b[$ понимается как сумма несобственных интегралов по промежуткам $]x_{k-1}, x_k[$, $k = \overline{1, m}$, и считается сходящимся в том и только том случае, когда сходятся несобственные интегралы по всем промежуткам $]x_{k-1}, x_k[$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^m \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \tag{22.25}$$

Пример 22.6. Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int\limits_1^e \frac{dx}{x \ln x}, \quad I_2 = \int\limits_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad I_3 = \int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2},$$

$$I_4 = \int\limits_{-2}^2 \frac{2x\,dx}{x^2-1}, \quad I_5 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}, \quad I_6 = \int\limits_0^1 D(x)dx,$$

где $D(x)$ — функция Дирихле.

Решение. 1. Для интеграла

$$I_1 = \int\limits_1^e \frac{dx}{x \ln x}$$

точка $x = 1$ является левой особой точкой, поскольку

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x \ln x} = +\infty.$$

Тогда, следуя формуле (22.15), найдем

$$I_1 = \int\limits_1^e \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{x'' \to 1+0} \int\limits_{x''}^e \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{x'' \to 1+0} \int\limits_{x''}^e \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x'' \to 1+0} \ln(\ln x)\Big|_{x''}^e =$$
$$= \lim_{x'' \to 1+0} [0 - \ln(\ln x'')] = +\infty,$$

откуда следует, что интеграл I_1 расходится.

2. Для интеграла

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

имеем две концевые особые точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, поскольку

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Тогда, следуя формуле (22.21), найдем

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\substack{x'\to 1-0\\ x''\to -1+0}} \int\limits_{x''}^{x'} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\substack{x'\to 1-0\\ x''\to -1+0}} \int\limits_{x''}^{x'} \arcsin x\, d(\arcsin x) =$$
$$= \lim_{\substack{x'\to 1-0\\ x''\to -1+0}} \frac{(\arcsin x)^2}{2}\Big|_{x''}^{x'} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x'\to 1-0\\ x''\to -1+0}} [(\arcsin x')^2 - (\arcsin x'')^2] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)^2\Big] = 0,$$

откуда следует, что интеграл I_2 сходится к нулю.

3. Для интеграла

$$I_3 = \int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$$

точка $x = 1$ является внутренней особой точкой, поскольку

$$\lim_{x\to 1\mp 0} \frac{1}{1-x^2} = \pm\infty.$$

Тогда, следуя формуле (22.23), исходный интеграл представим суммой двух несобственных интегралов с краевыми особыми точками:

$$I_3 = \int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{1-x^2} = J_1 + J_2. \tag{22.26}$$

Для сходимости интеграла I_3, по определению, необходима сходимость обоих несобственных интегралов J_1 и J_2. Начнем с интеграла J_1:

$$J_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{x'\to 1-0} \int\limits_0^{x'} \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{x'\to 1-0} \frac{1}{2} \ln\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big|\Big|_0^{x'} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x'\to 1-0} \Big[\ln\Big|\frac{1+x'}{1-x'}\Big| - \ln 1\Big] = \frac{1}{2} \lim_{x'\to 1-0} \ln\Big|\frac{1+x'}{1-x'}\Big| = +\infty.$$

Так как интеграл J_1 расходится, то независимо от поведения интеграла J_2 исходный интеграл I_3 также расходится.

$\Diamond$ Обратим внимание на то, что если проигнорировать наличие особой точки $x = 1$, а исходить только из того, что первообразная

$$F(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big|$$

определена в точках $x = 0$: $F(0) = 0$, и $x = 2$: $F(2) = (\ln 3)/2$, то формальное использование формулы Ньютона–Лейбница дает неверный результат:

$$I_3 = \int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|_0^2 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3,$$

тогда как на самом деле интеграл I_3 расходится.

4. Для интеграла

$$I_4 = \int\limits_{-2}^2 \frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

существуют две внутренние особые точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, поскольку

$$\lim_{x\to\pm 1}\left|\frac{2x}{x^2-1}\right| = +\infty.$$

Тогда, следуя формуле (22.25), исходный интеграл представим суммой трех несобственных интегралов с краевыми особыми точками:

$$I_4 = \int\limits_{-2}^2 \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x\,dx}{x^2-1} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2x\,dx}{x^2-1} + \int\limits_{1}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Для сходимости интеграла I_4, по определению, необходима сходимость всех трех несобственных интегралов: J_1, J_2 и J_3.

Начнем с интеграла J_1:

$$J_1 = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \lim_{x'\to -1-0}\int\limits_{-2}^{x'} \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x'\to -1-0} \ln\left|x^2-1\right|\Big|_{-2}^{x'} =$$
$$= \lim_{x'\to -1-0}\left\{\ln\left[(x')^2-1\right] - \ln 3\right\} = +\infty.$$

Так как интеграл J_1 расходится, то независимо от поведения интегралов J_2 и J_3 исходный интеграл I_4 также расходится.

5. Для интеграла

$$I_5 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

точка $x = 1$ является левой особой точкой, поскольку

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = +\infty.$$

Тогда, следуя формуле (22.15), найдем

$$I_5 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-(x+1)^2}} = \int\limits_1^2 \frac{1/2x^2}{\sqrt{1-[(x+1)/2x]^2}}dx =$$

$$= -\int\limits_1^2 \frac{[2x-2(x+1)]/4x^2}{\sqrt{1-[(x+1)/2x]^2}}dx = -\int\limits_1^2 \frac{d((x+1)/2x)}{\sqrt{1-[(x+1)/2x]^2}}dx =$$

$$= \lim_{x''\to 1+0}\Big(-\arcsin\frac{x+1}{2x}\Big|_{x''}^2\Big) = \lim_{x''\to 1+0}\Big(-\arcsin\frac{3}{4}+\arcsin\frac{x''+1}{2x''}\Big) = \frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4},$$

что означает, что интеграл I_5 сходится.

6. В интеграле

$$I_6 = \int\limits_0^1 D(x)dx$$

функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррациональное;} \\ 1, & x \text{ — рациональное} \end{cases}$$

не интегрируема в смысле Римана ни на каком отрезке $[x'', x'] \subset [0,1]$. Следовательно, функция $D(x)$ не интегрируема и в несобственном смысле на указанном промежутке.

Пример 22.7. Показать, что несобственный интеграл 2-го рода

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \quad b > a,$$

где функция $f(x)$ с особой точкой $x = b$ непрерывна на $[a, b[$, можно представить несобственным интегралом 1-го рода

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{1/(b-a)}^{+\infty} f\Big(b-\frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{t^2}. \tag{22.27}$$

Решение. Согласно определению (22.6′), для интеграла I и $\delta > 0$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx. \tag{22.28}$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b-\delta]$, то она интегрируема на этом промежутке и заменой

$$x = b-\frac{1}{t}, \quad dx = \frac{dt}{t^2}, \quad t = \frac{1}{b-x}; \quad x_1 = a,\ t_1 = \frac{1}{b-a}; \quad x_2 = b-\delta,\ t_2 = \frac{1}{\delta},$$

интеграл (22.28) можно записать в виде

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{1/(b-a)}^{1/\delta} f\Big(b-\frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{t^2}. \tag{22.29}$$

Если интеграл I сходится, то существует предел (22.28), а в силу равенства (22.29) и предел

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{1/(b-a)}^{1/\delta} f\Big(b-\frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{t^2},$$

т.е. определен несобственный интеграл 1-го рода:

$$\int\limits_{1/(b-a)}^{+\infty} f\Big(b-\frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{t^2}=\lim_{\left(\substack{\delta\to 0\\ 1/\delta\to+\infty}\right)}\int\limits_{1/(b-a)}^{1/\delta} f\Big(b-\frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{t^2}. \tag{22.30}$$

Таким образом, показано, что несобственный интеграл 2-го рода можно представить несобственным интегралом 1-го рода.

$\Diamond$ Формула (22.27) представляет собой общий случай связи интегралов 1-го и 2-го рода. Выше (см. пример 22.3) эта связь была проиллюстрирована для конкретных подынтегральных функций.

22.1. Свойства несобственных интегралов 2-го рода

Принимая во внимание, что любой несобственный интеграл 2-го рода можно представить суммой несобственных интегралов с одной краевой особой точкой, все формулировки мы приведем на примере несобственного интеграла

$$I=\int\limits_a^b f(x)dx \tag{22.31}$$

с правой особой точкой $x=b$. Переформулировка для других случаев трудностей не представляет.

Ниже мы сформулируем основные свойства несобственных интегралов 2-го рода. Доказательства этих свойств в силу соотношения (22.28) непосредственно следуют из доказательств аналогичных утверждений для несобственных интегралов 1-го рода.

Свойство 1 (обобщение формулы Ньютона–Лейбница). Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b[$ и если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то несобственный интеграл (22.31) сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел

$$\lim_{x'\to b-0}F(x')=F(b-0)=F(b),$$

причем справедлива следующая обобщенная формула Ньютона–Лейбница:

$$I=\int\limits_a^b f(x)dx=F(b-0)-F(a)=F(b)-F(a). \tag{22.32}$$

$\Diamond$ Заменив в (22.32) $b\to x$, $f(x)\to F'(x)$, можем записать

$$F(x)=F(a)+\int\limits_a^x F'(x)dx. \tag{22.33}$$

Таким образом, по указанной производной $F'(x)$ восстанавливается первообразная функция $F(x)$, если только производная интегрируема, хотя бы и в несобственном смысле.

Свойство 2 (линейности). Если сходятся несобственные интегралы от функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на промежутке $[a, b[$, то при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ сходится интеграл от функции $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ на том же промежутке и выполняется равенство

$$\int\limits_a^b [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \int\limits_a^b \lambda_1 f_1(x)dx + \int\limits_a^b \lambda_2 f_2(x)dx. \tag{22.34}$$

Свойство 3 (замена переменной). Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b[$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \beta[$, строго возрастает и удовлетворяет условиям $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t) = b$, то справедлива формула замены переменной

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{22.35}$$

при условии, что хотя бы один из интегралов в (22.35) сходится.

$\lozenge$ Формула (22.35) остается справедливой и в случае, когда $\alpha > \beta$, если $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $]\beta, \alpha[$, строго убывает, причем

$$a = \lim_{t\to\alpha-0} \varphi(t), \quad b = \lim_{t\to\beta+0} \varphi(t).$$

При этом по аналогии с интегралом Римана, по определению, полагают, что

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt = -\int\limits_\beta^\alpha f(t)dt$$

при $\alpha > \beta$, если интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt$ сходится.

Свойство 4 (интегрирование по частям). Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ определены на промежутке $[a, b[$, имеют непрерывные производные на отрезке $[a, x']$ для любого $x' \in]a, b[$. Если существует конечный предел

$$\lim_{x'\to b-0} [u(x')v(x')] = u(b-0)v(b-0) = uv\Big|_{x'=b-0} \tag{22.36}$$

и интеграл

$$\int\limits_a^b v'(x)u(x)dx$$

сходится, то и интеграл

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx$$

сходится, и справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{b-0} - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{22.37}$$

◊ Отметим, что при наличии конечного предела (22.36) интегралы

$$\int\limits_a^b v(x)u'(x)dx, \qquad \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Свойство 5 (сравнения сходящихся интегралов). Если сходятся интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b g(x)dx$$

и для всех $x \in [a, b[$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant g(x),$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{22.38}$$

Пример 22.8. Вычислить или установить расходимость интегралов

$$I_1 = \int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}, \quad I_2 = \int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad I_3 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

$$I_4 = \int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}, \quad I_5 = \int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}, \quad I_6 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x(1-x)},$$

$$I_7 = \int\limits_0^1 \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{x(1-x)}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})}, \quad I_8 = \int\limits_0^1 \ln x\, dx.$$

Решение. 1. Для интеграла I_1 точка $x = 1$ является левой особой точкой, поскольку

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = +\infty.$$

Заменой переменной с помощью монотонной непрерывно дифференцируемой функции

$$x = e^t, \quad dx = e^t dt, \quad t = \ln x; \quad x_1 = 1,\ t_1 = 0;\ x_2 = e^2,\ t_2 = 2,$$

интеграл I_1 приводится к несобственному интегралу вида

$$I_1 = \int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int\limits_0^2 \frac{e^t dt}{e^t\sqrt{t}} = \int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}}dt,$$

вычисление которого, согласно (22.32), дает

$$I_1 = \int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{t}\Big|_{+0}^{2} = 2\sqrt{2},$$

т.е. интеграл I_1 сходится.

2. Для интеграла I_2 точка $x = 2$ является правой особой точкой, поскольку

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty.$$

Для вычисления I_2 воспользуемся однократным интегрированием по частям:

$$I_2 = \int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2x\,dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}, & v = -\sqrt{4-x^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^2\sqrt{4-x^2}\Big|_0^{2-0} + \int\limits_0^2 2x(4-x^2)^{1/2}dx = 0 - \int\limits_0^2 (4-x^3)^{1/2}d(4-x^2) =$$

$$= -\frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2}\Big|_0^{2-0} = -\frac{2}{3}(0-8) = \frac{16}{3},$$

т.е. интеграл I_2 сходится.

3. Для интеграла

$$I_3 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ являются особыми. С помощью тождественных преобразований

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2}},$$

и следуя формуле (22.32), найдем

$$I_3 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2}} = \int\limits_0^1 \frac{d\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x - 1/2}{1/2}\Big|_{+0}^{1-0} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

т.е. интеграл I_3 сходится.

4. Для интеграла

$$I_4 = \int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$$

точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$ являются особыми. По аналогии с предыдущим примером найдем

$$I_4 = \int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}} = \int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \arcsin(x-3)\Big|_{2+0}^{4-0} =$$
$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

т.е. интеграл I_4 сходится.

5. Для интеграла

$$I_5 = \int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$$

точка $x = 1/3$ является особой. Заменой переменной

$$x = \frac{1}{3\cos t}, \quad dx = \frac{\sin t}{3\cos^2 t}dt, \quad t = \arcsin\frac{1}{3x};$$
$$x_1 = \frac{1}{3},\ t_1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{2}{3},\ t_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

несобственный интеграл I_5 сводится к собственному:

$$I_5 = \int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{\dfrac{\sin t}{3\cos^2 t}dt}{\dfrac{1}{3\cos t}\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t} - 1}} = \int\limits_0^{\pi/3} dt = t\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3},$$

т.е. интеграл I_5 сходится.

6. Для интеграла

$$I_6 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x(1-x)}$$

точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ являются особыми. В силу свойства аддитивности несобственный интеграл I_6 можно представить суммой несобственных интегралов с одной концевой особой точкой:

$$I_6 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x(1-x)} + \int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{x(1-x)} = J_1 + J_2.$$

Интеграл I_6 будет сходиться, если будут сходиться оба интеграла J_1 и J_2. Учитывая очевидное равенство

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},$$

интеграл J_1 можем записать

$$J_1 = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x(1-x)} = \int\limits_0^{1/2} \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\Big)dx = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x} - \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} =$$

$$= \ln x\Big|_0^{1/2} - \ln(1-x)\Big|_0^{1/2} = \ln\frac{1}{2} - \ln(+0) - \ln\frac{1}{2} + \ln 1 = +\infty.$$

Так как интеграл J_1 расходится, то независимо от поведения интеграла J_2 интеграл I_6 также будет расходиться.

7. Для интеграла

$$I_7 = \int\limits_0^1 \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{x(1-x)}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})}$$

точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ являются двумя концевыми особыми точками. С помощью тождественных преобразований

$$\frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})} = \frac{(1-x)-x}{\sqrt{x(1-x)}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})} =$$
$$= \frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad (22.39)$$

интеграл I_7 с двумя концевыми точками с учетом (22.39) можно представить суммой несобственных интегралов с одной концевой особой точкой

$$I_7 = \int\limits_0^1 \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{x(1-x)}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})} = \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\Big)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int\limits_0^1 \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} =$$
$$= 2\sqrt{x}\Big|_{+0}^1 + 2\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-0} = 2 - 0 + 2(0-1) = 0,$$

т.е. интеграл I_7 сходится.

8. Чтобы вычислить интеграл I_8, можно воспользоваться либо результатом примера 3.13, из которого следует

$$\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C,$$

и тогда

$$\int\limits_0^1 \ln x\, dx = x(\ln x - 1)\Big|_0^1 = -1,$$

поскольку

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x} = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big) = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to+0} x = 0,$$

либо формулой (3.57) интегрирования по частям, и тогда

$$\int\limits_0^1 \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 dx = 0 - x\Big|_0^1 = -1,$$

как и выше.

Пример 22.9. Вычислить предел

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Решение. Чтобы вычислить предел, можем записать

$$\begin{aligned}\ln S &= \lim_{n\to\infty} \ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n)-\ln n\Big] = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big[\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n - n\ln n\big] = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big[(\ln 1-\ln n)+(\ln 2-\ln n)+\ldots+(\ln n-\ln n)\big] = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\Big].\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что выражение в квадратных скобках представляет собой сумму значений функции $f(x)=\ln x$ в точках $x_1=1/n$, $x_2=2/n$, ..., $x_n=n/n=1$, делящих отрезок $[0,1]$ на n равных частей длиной $\Delta x_i = 1/n$. Такое разбиение позволяет рассматривать предел $\ln S$ как предел интегральной суммы функции $f(x)=\ln x$ с выборкой $\xi_i = x_i = i/n$, $i=\overline{1,n}$, т.е.

$$\begin{aligned}\ln S &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\Big] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\ln\frac{i}{n}\Big)\frac{1}{n} = \int_0^1 \ln x\,dx.\end{aligned}$$

Этот интеграл, согласно результату предыдущего примера, существует и, следовательно, не зависит от разбиения и выборки при составлении интегральной суммы, но тогда

$$\int_0^1 \ln x\,dx = -1,$$

как и в предыдущем примере.

Пример 22.10. Вычислить или установить расходимость интегралов

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx.$$

Решение. Для интеграла I_1 особой точкой является точка $x=0$, для интеграла I_2 особая точка $x=\pi/2$. Заменой

$$x=\frac{\pi}{2}-t,\ dx=-dt,\ t=\frac{\pi}{2}-x,\quad \cos x=\sin t;\quad x_1=0,\ t_1=\frac{\pi}{2};\quad x_2=\frac{\pi}{2},\ t_2=0,$$

интеграл I_2 приводится к виду

$$I_2=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx = \int_{\pi/2}^{0}\ln(\sin t)(-dt) = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)dt = \Big|t\to x\Big| = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx,$$

из которого следует равенство
$$I_2 = I_1. \tag{22.40}$$

С другой стороны, сумму интегралов I_1 и I_2, используя свойство логарифмов, можно представить как

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 &= \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx + \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} [\ln(\sin x) + \ln(\cos x)]dx = \\ &= \int\limits_0^{\pi/2} \ln[\sin x \cos x]dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2}dx = \int\limits_0^{\pi/2} [\ln(\sin 2x) - \ln 2]dx = \\ &= \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)dx - \ln 2 \int\limits_0^{\pi/2} dx = J - \frac{\pi}{2}\ln 2,\end{aligned} \tag{22.41}$$

где интеграл
$$J = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)dx$$

заменой
$$2x = t, \quad x = \frac{t}{2}, \quad dx = \frac{dt}{2}; \quad x_1 = 0,\ t_1 = 0; \quad x_2 = \frac{\pi}{2},\ t_2 = \pi,$$

преобразуется к виду
$$J = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln(\sin t)dt = \frac{1}{2}\Bigg[\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t)dt\Bigg]$$

или
$$J = \frac{1}{2}\Bigg[\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)dx\Bigg],$$

если t заменить на x.

Но тогда
$$J = \frac{1}{2}\Bigg[I_1 + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)dx\Bigg], \tag{22.42}$$

а интеграл в квадратных скобках (22.42) еще одной заменой
$$\pi - x = z,\ x = \pi - z,\ dx = -dz,\ \sin x = \sin z, \quad x_1 = \frac{\pi}{2},\ z_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \pi,\ z = 0,$$

сведется к интегралу I_1, поскольку
$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)dx = \int\limits_{\pi/2}^{0} \ln(\sin z)(-dz) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin z)dz = I_1.$$

Это означает, что формула (22.42) будет иметь вид

$$J = \frac{1}{2}[I_1 + I_1] = I_1.$$

Подстановка $J = I_1$ в (22.41) дает

$$I_1 + I_2 = I_1 - \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

откуда

$$I_2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

а поскольку в силу (22.40)

$$I_1 = I_2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

то оба интеграла I_1 и I_2 сходятся и равны между собой.

23. Признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода

Рассмотрим признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода, позволяющие ответить на вопрос о сходимости (расходимости) таких интегралов без их непосредственного вычисления. Все формулировки приведем на примере несобственного интеграла с правой краевой особой точкой $x = b$:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Обобщение на несобственные интегралы 2-го рода с особыми точками других типов не представляет затруднений.

Доказательства признаков сходимости для несобственных интегралов 2-го рода дословно повторяют доказательства соответствующих признаков сходимости несобственных интегралов 1-го рода. Поэтому здесь мы повторно сформулируем только те из свойств, которые непосредственно являются практическим руководством при исследовании интегралов 2-го рода на сходимость.

Кроме этого, отметим, что, как уже было указано, при необходимости интеграл 2-го рода можно представить интегралом 1-го рода и воспользоваться уже известными для него признаками сходимости.

Здесь мы оговоримся, что для краткости изложения введем одно дополнительное определение.

$\lozenge$ Будем говорить, что функция $f(x)$ локально слева (справа) в точке x_0 обладает некоторым свойством, если существует такая левая (правая) полуокрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ обладает этим свойством.

Например, выражение «функция $f(x)$ монотонна локально слева в точке x_0» означает, что $f(x)$ монотонна на некотором промежутке $]c, x_0[$.

Очевидно, что если функция $f(x)$ не ограничена локально слева в точке x_0, то $f(x)$ не ограничена на некотором промежутке $]c, x_0[$, а точка x_0 будет ни чем иным, как особой точкой функции $f(x)$.

23.1. Сходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций. Признаки сравнения

Теорема 23.1. *Если на промежутке $[a, b[$ функция $f(x)$ неотрицательна и не ограничена локально слева в точке $x = b$, то для сходимости несобственного интеграла*

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx, \quad a < b,$$

(*с правой концевой особой точкой*) *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$F(x') = \int\limits_a^{x'} f(x)dx, \quad x' \in [a, b[,$$

была ограничена сверху.

Теорема 23.2 (первый признак сравнения). *Если на промежутке $[a, b[$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют неравенствам*

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x)$$

локально слева в особой точке $x = b$, то из сходимости интеграла

$$I_2 = \int\limits_a^b f_2(x)dx$$

следует сходимость интеграла

$$I_1 = \int\limits_a^b f_1(x)dx,$$

а из расходимости интеграла I_1 следует расходимость интеграла I_2.

Утверждение 23.2 называется *первым*, или *общим* признаком сравнения.

Теорема 23.3 (второй признак сравнения). *Если на промежутке $[a, b[$ функция $f_1(x)$ неотрицательна, а функция $f_2(x)$ неотрицательна локально слева в точке b и существует предел*

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = k, \quad 0 \leqslant k \leqslant +\infty, \tag{23.1}$$

то для несобственных интегралов с правой особой точкой

$$I_1 = \int\limits_a^b f_1(x)dx, \quad I_2 = \int\limits_a^b f_2(x)dx$$

при $k < +\infty$ из сходимости интеграла I_2 следует сходимость интеграла I_1, а при $k > 0$ из расходимости интеграла I_2 следует расходимость интеграла I_1. Если же предел k удовлетворяет строгим неравенствам $0 < k < +\infty$, т.е. справедливо асимптотическое равенство

$$f_1(x) \sim kf_2(x), \quad x \to b - 0, \tag{23.2}$$

то интегралы I_1 и I_2 сходятся или расходятся одновременно.

Утверждение 23.3 называется *вторым*, или *предельным* признаком сравнения.

Применение признаков сравнения для анализа несобственных интегралов 2-го рода упрощается, если использовать «эталонные» функции, сходимость или расходимость соответствующего интеграла для которых установлена. Для анализа интегралов с правой краевой особой точкой такой «эталонной» функцией является $f_2(x) = 1/(b-x)^\alpha$, для которой интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \tag{23.3}$$

как показано в примере 22.4, сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

На сравнении с функцией $f_2(x) = 1/(b-x)^\alpha$ и построены два признака Коши, непосредственно следующие из признаков сравнения, но более удобные в практических приложениях.

Теорема 23.4 (общий признак Коши). *Если при достаточно близких к b значениях x функция $f(x)$ имеет вид*

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

то несобственный интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и $0 < g(x) \leqslant G < +\infty$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$ и $g(x) \geqslant G > 0$.

Теорема 23.5 (предельный признак Коши). *Если при $x \to b-0$ функция $f(x)$ является бесконечно большой порядка $\alpha > 0$ по сравнению с бесконечно большой $1/(b-x)$, т.е.*

$$f(x) \sim \frac{h}{(b-x)^\alpha}, \quad x \to b-0, \quad h \neq 0,$$

то несобственный интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Пример 23.1. Исследовать на сходимость следующие интегралы:

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}; \quad I_2 = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^4})}{e^x - 1}dx; \quad I_3 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x};$$

$$I_4 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}; \quad I_5 = \int\limits_0^1 \frac{\ln x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Решение. Все подынтегральные функции на интервале интегрирования неотрицательны, поэтому применимы признаки сравнения.

1. Для интеграла

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

особой точкой является $x = 1$, при стремлении к которой подынтегральная функция является бесконечно большой величиной. Выделив главную часть, запишем

$$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^3}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{(1-x)^{1/2}}, \quad x \to 1-0.$$

Порядок бесконечно большой величины $\alpha = 1/2 < 1$ означает сходимость интеграла I_1.

2. Для интеграла

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^4})}{e^x - 1} dx$$

особой точкой является $x = 0$, при стремлении к которой числитель и знаменатель являются бесконечно малыми величинами. Раскрыв эту неопределенность:

$$\frac{\ln(1+x^{4/5})}{e^x - 1} \sim \frac{x^{4/5}}{x} = \frac{1}{x^{1/5}}, \quad x \to +0,$$

получим бесконечно большую величину порядка $\alpha = 1/5 < 1$, что означает сходимость интеграла I_2.

3. Для интеграла

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$$

особой точкой является $x = 0$, при стремлении к которой подынтегральная функция является бесконечно большой величиной. Выделим главную часть:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x - x} = \frac{\cos x}{\sin x - x\cos x} \sim \frac{1 - x^2/2}{x - x^3/6 - x(1-x^2/2)} \sim \frac{3}{x^3}, \quad x \to +0.$$

Порядок бесконечно большой величины $\alpha = 3 > 1$ означает, что интеграл I_3 расходится.

4. Для интеграла

$$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$$

особой точкой является $x = 0$, при стремлении к которой подынтегральная функция является бесконечно большой величиной. Выделив главную часть, получим

$$\frac{1}{e^x - \cos x} = \frac{1}{(e^x - 1) - (\cos x - 1)} \sim \frac{1}{x + x^2/2} \sim \frac{1}{x}, \quad x \to +0.$$

Порядок бесконечно большой величины $\alpha = 1$ означает, что интеграл I_4 расходится.

5. Для интеграла I_5 особой точкой является только точка $x = 0$, поскольку при $x \to 1-0$ подынтегральная функция стремится к нулю:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\ln[1-(1-x)]}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 1-0} \sqrt{1-x} = 0.$$

Выбрав теперь в качестве эталона сходящийся интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

и воспользовавшись вторым признаком сравнения, найдем

$$\lim_{x\to +0} \frac{(\ln x)/\sqrt{1-x^2}}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +0} \frac{1/x}{-1/2x^{3/2}} = -2 \lim_{x\to +0} \sqrt{x} = 0.$$

Это означает, что интеграл I_5 сходится.

Сходимость интеграла I_5 можно установить, вычислив его с помощью замены

$$x = \sin t, \quad dx = \cos t\, dt; \quad x_1 = 0,\ t_1 = 0; \quad x_2 = 1,\ t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$I_5 = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin t)}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\, dt = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 22.10, согласно которому

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Пример 23.2. Период T колебаний математического маятника определяется несобственным интегралом

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2)}}, \tag{23.4}$$

где g — ускорение свободного падения; L — длина математического маятника, а φ_0 — начальный угол отклонения маятника от вершины (рис. 83,a). Показать, что интеграл (23.4) сходится при $0 < \varphi_0 < \pi$.

Решение. Подынтегральная функция имеет особую точку φ_0, в бесконечно малой окрестности которой справедлива оценка

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\varphi_0)/2 - (1-\cos\varphi)/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} =$$

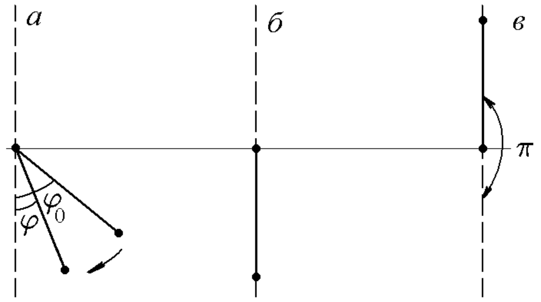


Рис. 83

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2[\sin(\varphi_0+\varphi)/2][\sin(\varphi_0-\varphi)/2]}} \sim \sqrt{\frac{2}{\sin\varphi_0}}\frac{1}{(\varphi_0-\varphi)^{1/2}}, \quad \varphi\to\varphi_0-0,$$

поэтому в силу предельного признака Коши ($\alpha = 1/2 < 1$) интеграл (23.4) сходится, т.е. период колебаний математического маятника является конечной величиной.

Если рассматривать математический маятник как невесомый стержень, один конец которого закреплен в шарнире без трения, а второй — с закрепленной на нем точечной массой — свободен, то можно говорить и о начальных углах $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$. При этих значениях φ_0 маятник качаться вообще не будет, поскольку в первом случае ($\varphi_0 = 0$) он находится в устойчивом равновесии, а во втором ($\varphi_0 = \pi$) в неустойчивом равновесии (рис. 83,*б,в*). Показательно, что при $\varphi_0 \to +0$ период $T \to 0$, а при $\varphi_0 \to \pi - 0$ период $T \to +\infty$. Последнее означает, что по мере приближения начального положения маятника к состоянию неустойчивого равновесия период его колебаний неограниченно растет.

Пример 23.3. Исследовать на сходимость в зависимости от параметров α и β несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^\alpha dx; \quad I_2 = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \Big(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\Big)^\alpha dx; \quad I_3 = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx;$$

$$I_4 = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha|\ln x|^\beta}; \quad I_5 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^\alpha|\ln x|^\beta}; \quad I_6 = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha|\ln x|^\beta}.$$

Решение. 1. Для интеграла

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^\alpha dx = \int\limits_0^{\pi/2} \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)^\alpha dx,$$

если $\alpha > 0$, то особой точкой является $x = \pi/2$, в окрестности которой подынтегральная функция является бесконечно большой порядка α:

$$\Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)^\alpha = \Big(\frac{\sin x}{\sin(\pi/2 - x)}\Big)^\alpha \sim \frac{1}{(\pi/2-x)^\alpha}, \quad x \to \frac{\pi}{2} - 0.$$

В силу предельного признака Коши интеграл I_1 будет сходиться при $\alpha < 1$, т.е. в итоге при $0 < \alpha < 1$.

Если же $\alpha < 0$, то особой точкой будет $x = 0$, в окрестности которой подынтегральная функция является бесконечно большой порядка $-\alpha$:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{-\alpha} \sim \frac{1}{x^{-\alpha}}, \quad x \to +0.$$

В силу предельного признака Коши интеграл I_1 будет сходиться при $-\alpha < 1$ или $\alpha > -1$, т.е. в итоге при $-1 < \alpha < 0$.

Объединив оба случая, заключаем, что интеграл I_1 будет сходиться при $|\alpha| < 1$ и расходиться при $|\alpha| \geqslant 1$.

2. Для интеграла

$$I_2 = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^{\alpha} dx = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}\right)^{\alpha} dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\sin(\pi/4 - x)}{\sin(\pi/4 + x)}\right)^{\alpha} dx,$$

если $\alpha > 0$, то особой точкой является $x = -\pi/4$, в окрестности которой подынтегральная функция является бесконечно большой порядка α:

$$\left(\frac{\sin(\pi/4 - x)}{\sin(\pi/4 + x)}\right)^{\alpha} \sim \frac{1}{(\pi/4 + x)^{\alpha}}, \quad x \to -\frac{\pi}{4} + 0.$$

В силу предельного признака Коши интеграл I_2 будет сходиться при $\alpha < 1$, т.е. в итоге при $0 < \alpha < 1$.

Если же $\alpha < 0$, то особой будет точка $x = \pi/4$, в окрестности которой подынтегральная функция является бесконечно большой порядка $-\alpha$:

$$\left(\frac{\sin(\pi/4 - x)}{\sin(\pi/4 + x)}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\sin(\pi/4 + x)}{\sin(\pi/4 - x)}\right)^{-\alpha} \sim \frac{1}{(\pi/4 + x)^{-\alpha}}, \quad x \to \frac{\pi}{4} - 0.$$

В силу предельного признака Коши интеграл I_2 будет сходиться при $-\alpha < 1$ или $\alpha > -1$, т.е. в итоге при $-1 < \alpha < 0$.

Объединив оба случая, заключаем, что интеграл I_2 будет сходиться при $|\alpha| < 1$ и расходиться при $|\alpha| \geqslant 1$.

3. Интеграл I_3 представим суммой

$$I_3 = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \int\limits_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx + \int\limits_{1/2}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим последовательно интегралы J_1 и J_2. При $\alpha \geqslant 1$ интеграл

$$J_1 = \int\limits_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \tag{23.5}$$

сходится в собственном смысле.

При $\alpha < 1$ особой точкой интеграла J_1 (23.5) является $x = 0$, в окрестности которой справедлива асимптотическая оценка

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x^{1-\alpha}} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}}, \quad x \to +0,$$

из которой в силу предельного признака Коши следует, что интеграл J_1 будет сходиться при выполнении условия $1 - \alpha < 1$ или $\alpha > 0$, т.е. в итоге при $0 < \alpha < 1$. Объединение двух неравенств $\alpha \geqslant 1$ и $0 < \alpha < 1$ дает для сходимости J_1 условие $\alpha > 0$.

Аналогично для интеграла J_2 находим условие $\beta > 0$. таким образом, интеграл I_3 будет сходиться только при условии $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

4. Для исследования интеграла

$$I_4 = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$$

на сходимость перейдем от несобственного интеграла 2-го рода к несобственному интегралу 1-го рода путем замены переменной:

$$\ln x = t, \quad x = e^t, \quad dx = e^t dt;$$
$$x_1 = 0,\ t_1 = -\infty; \quad x_2 = \frac{1}{2},\ t_2 = \ln\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$I_4 = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \int\limits_{-\infty}^{\ln(1/2)} \frac{e^t dt}{e^{\alpha t}|t|^\beta} = \int\limits_{-\infty}^{\ln(1/2)} \frac{dt}{e^{(\alpha-1)t}|t|^\beta}.$$

Полученный несобственный интеграл 1-го рода еще одной заменой переменной:

$$t = -z,\ dt = -dz; \quad t_1 = -\infty,\ z_1 = +\infty, \quad t_2 = \ln\frac{1}{2},\ z_2 = \ln 2,$$

приведем к более удобному виду:

$$I_4 = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = -\int\limits_{+\infty}^{\ln 2} \frac{dz}{e^{(1-\alpha)z} z^\beta} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dz}{e^{(1-\alpha)z} z^\beta}.$$

Теперь, следуя предельному признаку сравнения несобственных интегралов 1-го рода, заключаем, что интеграл I_4 будет сходиться при $\alpha < 1$ и любом β, а также при $\alpha = 1$ и $\beta > 1$. Таким образом, интеграл I_4 сходится при

$$\begin{aligned} &\alpha < 1 \text{ и любом } \beta \\ \text{и} \quad &\alpha = 1 \text{ и } \beta > 1. \end{aligned} \tag{23.6}$$

5. Для интеграла

$$I_5 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$$

его подынтегральная функция в окрестности точки $x = 1$ имеет асимптотическую оценку

$$\frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \frac{1}{x^\alpha |\ln(1-(1-x))|^\beta} \approx \frac{1}{|1-x|^\beta} = \frac{1}{(1-x)^\beta}, \quad x \to 1-0,$$

из которой в силу предельного признака Коши следует, что интеграл I_5 будет сходиться при

$$\text{любых } \alpha \text{ и } \beta < 1. \tag{23.7}$$

6. Представив интеграл I_6 суммой

$$I_6 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} + \int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = I_4 + I_5,$$

видим, что условием его сходимости является пересечение условий сходимости интегралов I_4 и I_5, т.е. условий (23.6) и (23.7). Их пересечением являются неравенства

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1. \tag{23.8}$$

Стало быть, интеграл I_6 сходится при выполнении условий (23.8).

23.2. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов 2-го рода. Абсолютная и условная сходимость

Мы уже отмечали, что для исследования несобственных интегралов 1-го рода на сходимость наряду с признаками сравнения удобно использовать критерий Коши, который дает необходимое и достаточное условия сходимости. Отметим также, что в признаках сравнения есть условия как сходимости, так и расходимости несобственных интегралов 2-го рода от функции $f(x)$. Однако, во-первых, эти условия справедливы для функций, сохраняющих знак в окрестности особой точки, а во-вторых, они являются достаточными.

Для несобственного интеграла с особой точкой $x = b$

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx, \tag{23.9}$$

справедлива следующая теорема.

Теорема 23.6 (критерий сходимости Коши). *Для сходимости несобственного интеграла I (23.9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши: для всех $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) \in]a, b[$, такое что при всех $x'', x' \in]\delta(\varepsilon), b[$ справедливо неравенство*

$$\left| \int\limits_{x''}^{x'} f(x)dx \right| < \varepsilon. \tag{23.10}$$

Доказательство теоремы 23.6 дословно повторяет доказательство теоремы 21.6.

$\Diamond$ Условие Коши (23.10) легко переформулировать для несобственных интегралов с левой краевой особой точкой $x = a$ или для интегралов с внутренней особой точкой $c \in]a, b[$.

♦ Сходящийся несобственный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{23.11}$$

называется *сходящимся абсолютно*, если сходится интеграл

$$\overline{I} = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{23.12}$$

Сама функция $f(x)$ в этом случае называется *абсолютно интегрируемой в несобственном смысле на промежутке* $]a, b[$.

♦ Сходящийся несобственный интеграл I (23.11) называется *сходящимся условно*, если интеграл $\overline{I}$ (23.12) расходится. Сама функция $f(x)$ в этом случае называется *условно интегрируемой в несобственном смысле на промежутке* $]a, b[$.

Теорема 23.7. *Если несобственный интеграл $\overline{I}$ (23.12) сходится, а функция $f(x)$ интегрируема на любом промежутке $[a, b]$, то интеграл I (23.11) также сходится и выполняется условие*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx. \tag{23.13}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 21.7.

Следствие 23.7.1. Если на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, а функция $g(x)$ ограничена, то и их произведение $f(x)g(x)$ будет функцией, абсолютно интегрируемой на этом промежутке.

Следствие 23.7.2. Несобственные интегралы

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b [f(x) + g(x)]dx,$$

где $g(x)$ — абсолютно интегрируемая на промежутке $[a, b[$ функция, либо одновременно сходятся абсолютно, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно расходятся.

♢ Другими словами, добавление под знак интеграла абсолютно интегрируемой функции не влияет ни на сходимость исходного интеграла, ни на характер сходимости: абсолютной или условной.

Пример 23.4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$I_1 = \int_0^1 (\cos\pi x)(\ln x)dx; \quad I_2 = \int_0^2 \frac{(1-x)x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad I_3 = \int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}}dx;$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/4} \sin\Big(\frac{1}{\cos x}\Big)\frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad I_5 = \int_0^{\pi} \frac{1 + 2\cos x}{\sqrt{\pi - x}}dx; \quad I_6 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx.$$

Решение. 1. Интеграл

$$I_1 = \int_0^1 (\cos \pi x)(\ln x) dx$$

исследуем на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость интеграл

$$\overline{I}_1 = \int_0^1 |(\cos \pi x)(\ln x)| dx. \tag{23.14}$$

Для этого воспользуемся неравенством

$$|(\cos \pi x)(\ln x)| < |\ln x|$$

и результатом примера 22.8, из которого следует сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^1 |\ln x| dx = -\int_0^1 \ln x \, dx = 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 23.7 интеграл (23.14) сходится, а, следовательно, сходится абсолютно исходный интеграл I_1, причем справедлива оценка (23.13):

$$|I_1| = \left|\int_0^1 (\cos \pi x)(\ln x) dx\right| \leqslant \int_0^1 |(\cos \pi x)(\ln x)| dx \leqslant \int_0^1 |\ln x| dx = 1.$$

2. Интеграл

$$I_2 = \int_0^2 \frac{(1-x)x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

исследуем на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость интеграл

$$\overline{I}_2 = \int_0^2 \left|\frac{(1-x)x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right| dx. \tag{23.15}$$

Для этого воспользуемся неравенством

$$\left|\frac{(1-x)x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right| = \frac{|1-x|x^3}{\sqrt{4-x^2}} \leqslant \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}$$

поскольку

$$|1-x| \leqslant 1 \text{ для } x \in [0,2],$$

и результатом примера 22.8, из которого следует сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{16}{3}.$$

Следовательно, интеграл (23.15) сходится, а значит, сходится абсолютно исходный интеграл I_2, причем справедлива оценка (23.13):

$$|I_2| = \Big|\int\limits_0^2 \frac{(1-x)x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}\Big| \leqslant \int\limits_0^2 \Big|\frac{(1-x)x^3}{\sqrt{4-x^2}}\Big|dx \leqslant \int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{16}{3}.$$

3. Интеграл

$$I_3 = \int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}}dx$$

исследуем на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\overline{I}_3 = \int\limits_0^1 \Big|\frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}}\Big|dx. \tag{23.16}$$

Для этого воспользуемся неравенством

$$\Big|\frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}}\Big| = \frac{|\cos(1/x)|}{x^{1/3}} \leqslant \frac{1}{x^{1/3}}$$

и вычислим простой несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, интеграл (23.16) сходится, а значит, сходится абсолютно исходный интеграл I_3, причем справедлива оценка

$$|I_3| = \Big|\int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}}dx\Big| \leqslant \int\limits_0^1 \Big|\frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}}\Big|dx \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}.$$

4. Интеграл

$$I_4 = \int\limits_0^{\pi/4} \sin\Big(\frac{1}{\cos x}\Big)\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

исследуем на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\overline{I}_4 = \int\limits_0^{\pi/4} \Big|\sin\Big(\frac{1}{\cos x}\Big)\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|dx. \tag{23.17}$$

Для этого воспользуемся неравенством

$$\Big|\sin\Big(\frac{1}{\cos x}\Big)\frac{1}{\sqrt{x}}\Big| = \frac{|\sin(1/\cos x)|}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x^{1/2}}$$

и вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^{1/2}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{\pi}.$$

Следовательно, интеграл (23.17) сходится, а значит, сходится абсолютно исходный интеграл I_4, причем справедлива оценка

$$|I_4| = \Big|\int\limits_0^{\pi/4} \sin\Big(\frac{1}{\cos x}\Big)\frac{dx}{\sqrt{x}}\Big| \leqslant \int\limits_0^{\pi/4} \Big|\sin\Big(\frac{1}{\cos x}\Big)\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^{1/2}} = \sqrt{\pi}.$$

5. Так как несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\pi - x}} = -\int\limits_0^{\pi} \frac{d(\pi - x)}{(\pi - x)^{1/2}}dx = -2\sqrt{\pi - x}\Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{\pi}$$

сходится, то в силу неравенства

$$\Big|\frac{1 + 2\cos x}{\sqrt{\pi - x}}\Big| \leqslant \frac{3}{\sqrt{\pi - x}}$$

сходится интеграл

$$\overline{I}_5 = \int\limits_0^{\pi} \Big|\frac{1 + 2\cos x}{\sqrt{\pi - x}}\Big|dx$$

и, следовательно, абсолютно сходится интеграл I_5, причем справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_0^{\pi} \frac{1 + 2\cos x}{\sqrt{\pi - x}}dx\Big| \leqslant \int\limits_0^{\pi} \Big|\frac{1 + 2\cos x}{\sqrt{\pi - x}}\Big|dx \leqslant 3\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\pi - x}} = 6\sqrt{\pi}.$$

6. Интеграл

$$I_6 = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$$

с особой точкой $x = 0$ исследуем на абсолютную сходимость, т.е. сходимость интеграла

$$\overline{I}_6 = \int\limits_0^{\pi/2} |\ln(\sin x)|dx. \tag{23.18}$$

Сходимость этого интеграла можно установить, во-первых, с помощью предельного признака Коши, выбрав эталонную функцию $g(x) = 1/x^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\lim_{x\to+0} \frac{|\ln(\sin x)|}{1/x^{\alpha}} = \lim_{x\to+0} \Big(\frac{x}{\sin x}\Big)^{\alpha} \sin^{\alpha} x|\ln(\sin x)| = \lim_{x\to+0} \sin^{\alpha} x|\ln(\sin x)| = 0. \tag{23.19}$$

Здесь мы воспользовались правилом Лопиталя. Равенство предела нулю означает, что из сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

вытекает (см. пример 19.4) сходимость интеграла (23.18), а следовательно, и абсолютная сходимость интеграла I_6.

♢ Заметим, что из асимптотического равенства $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$, вообще говоря, не следует асимптотическое равенство $h(f(x)) \sim h(g(x))$, $x \to a$. Последнее утверждение в каждом конкретном случае требует обоснования.

Во-вторых, сходимость интеграла (23.18) можно установить однократным интегрированием по частям:

$$\int\limits_0^{\pi/2} |\ln(\sin x)| dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \begin{vmatrix} u = \ln(\sin x) & du = \operatorname{ctg} x\, dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[x \ln(\sin x)\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x} dx \right] = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} \cos x\, dx,$$

в результате которого приходим к собственному интегралу на конечном промежутке $[0, \pi/2]$ от непрерывной и ограниченной функции $(x/\sin x)\cos x$, поскольку $\sin x \sim x$, $x \to +0$. Это означает, что интеграл (23.18) сходится.

И, наконец, сходимость интеграла (23.18) можно установить, воспользовавшись результатом примера 22.10, согласно которому

$$I_6 = \int\limits_0^{\pi/2} |\ln(\sin x)| dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\Big(-\frac{\pi}{2} \ln 2\Big) = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

23.3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов 2-го рода

Здесь мы по аналогии с несобственными интегралами 1-го рода рассмотрим сходимость несобственных интегралов 2-го рода, которые можно представить произведением функций $f(x)$ и $g(x)$. Все формулировки мы приведем на примере несобственного интеграла

$$J = \int\limits_a^b f(x) g(x) dx \tag{23.20}$$

с правой особой точкой $x = b$.

Теорема 23.8 (признак Дирихле). *Если в интеграле J (23.20) функция $f(x)$ интегрируема на любом промежутке $[a, x']$, причем функция $F(x')$ — первообразная $f(x)$:*

$$F(x') = \int\limits_a^{x'} f(x) dx \tag{23.21}$$

ограничена на промежутке $[a, b[$*, а функция* $g(x)$ *локально монотонна слева в особой точке* $x = b$ *и*

$$\lim_{x \to b-0} g(x) = 0, \tag{23.22}$$

то интеграл J (23.20) *сходится.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 21.8 для несобственных интегралов 1-го рода.

Следствие 23.8.1 (признак Абеля). Если интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \tag{23.23}$$

для функции $f(x)$ из интеграла (23.20) сходится хотя бы условно, а функция $g(x)$ локально монотонна слева в особой точке $x = b$ и ограничена на промежутке $[a, b[$, то и интеграл (23.20) сходится.

В признаке Абеля условие (23.21) из признака Дирихле несколько усилено, зато условие (23.22) заметно ослаблено. Такое различие в каждом конкретном примере позволяет выбирать наиболее удобный из признаков сходимости.

Подводя итог рассмотрению признаков сходимости, имеющих формальные различия в формулировках, обратим внимание на следующее обстоятельство. Для функций, локально сохраняющих знак в соответствующей полуокрестности особой точки, сходимость несобственного интеграла эквивалентна абсолютной сходимости. Таким образом, признаки сравнения говорят, по сути дела, об абсолютной сходимости несобственного интеграла. Но в формулировке признаков Абеля и Дирихле ограничений на знак подынтегральной функции нет, так что они могут применяться как к интегралу от функции, локально сохраняющих знак в левой полуокрестности точки b, так и к интегралу от функции, не обладающей этим свойством. На практике признаки Дирихле и Абеля используются преимущественно для установления сходимости, чаще всего условной, интегралов от функций, не являющихся знакопостоянными в левой полуокрестности особой точки.

Все сказанное справедливо для несобственных интегралов с левой особой точкой, а в итоге и с внутренней особой точкой интервала интегрирования.

При исследовании сходимости несобственных интегралов 2-го рода вида

$$\int_a^b f(x)\sin(\varphi(x))dx, \quad \int_a^b f(x)\cos(\varphi(x))dx, \tag{23.24}$$

где $\varphi(x)$ — локально монотонна слева в особой точке b и $\varphi(x) \to +\infty$ при $x \to b - 0$, возможна замена

$$\varphi(x) = t, \tag{23.25}$$

которая интегралы (23.24) переводит к рассмотренным выше несобственным интегралам 1-го рода

$$\int_{\bar a}^{+\infty} \bar f(t)\sin t\, dt, \quad \int_{\bar a}^{+\infty} \bar f(t)\cos t\, dt, \tag{23.26}$$

исследуемых с помощью признаков Дирихле и Абеля.

Пример 23.5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x^3}}dx; \quad I_2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\Big(\frac{1}{x} + e^{1/x}\Big)\cos(e^{2/x})dx; \quad I_3 = \int\limits_0^2 \frac{(1-x)x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Решение. 1. В интеграле

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x^{3/2}}dx$$

подынтегральная функция имеет особую точку $x = 0$. Поскольку простейшая оценка

$$\Big|\frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x^3}}\Big| \leqslant \frac{1}{x^{3/2}}, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1$$

не позволяет сделать вывод о сходимости (абсолютной) данного интеграла, то можно воспользоваться признаком Дирихле. Для этого интеграл I_1 представим в виде

$$I_1 = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx,$$

где

$$f(x) = \frac{\cos(1/x)}{x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Так как особой точкой подынтегральной функции является левый конец промежутка интегрирования, то условия признака Дирихле (теорема 23.8) симметрично изменятся. Легко проверить, что функция

$$F(x'') = \int\limits_{x''}^1 f(x)dx = \int\limits_{x''}^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx = -\int\limits_{x''}^1 \cos\frac{1}{x}d\Big(\frac{1}{x}\Big) = -\sin\frac{1}{x}\Big|_{x''}^1 = \sin\frac{1}{x''} - \sin 1$$

ограничена на промежутке $]0,1]$, поскольку

$$\Big|\sin\frac{1}{x''} - \sin 1\Big| \leqslant 2.$$

Вместе с этим функция $g(x) = \sqrt{x}$ монотонна на $]0,1]$ и

$$\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+0}\sqrt{x} = 0.$$

Следовательно, интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x^3}}dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\sqrt{x}dx$$

сходится.

Для исследования на абсолютную сходимость воспользуемся оценкой

$$\Big|\frac{\cos(1/x)}{x^{3/2}}\Big| \geqslant \frac{\cos^2(1/x)}{x^{3/2}} = \frac{1+\cos(2/x)}{2x^{3/2}},$$

в силу которой интеграл

$$\int_0^1 \left|\frac{\cos(1/x)}{x^{3/2}}\right| dx \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\frac{1}{x^{3/2}} + \frac{\cos(2/x)}{x^{3/2}}\Big] dx = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)$$

расходится, поскольку расходится интеграл

$$J_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}} dx, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1.$$

Таким образом, интеграл I_1 сходится условно.

2. В интеграле

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\Big(\frac{1}{x} + e^{1/x}\Big)\cos(e^{2/x}) dx$$

подынтегральная функция имеет особую точку $x = 0$. Поскольку простейшая оценка

$$\Big|\frac{1}{x^2}\Big(\frac{1}{x} + e^{1/x}\Big)\cos(e^{2/x})\Big| \leqslant \frac{1}{x^2}\Big(\frac{1}{x} + e^{1/x}\Big), \quad x \in]0, 1],$$

не позволяет сделать вывод о сходимости (абсолютной) данного интеграла I_2 в силу расходимости интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\Big(\frac{1}{x} + e^{1/x}\Big) dx,$$

воспользуемся признаком Дирихле. Для этого интеграл I_2 представим в виде

$$I_1 = \int_0^1 f(x)g(x) dx,$$

где

$$f(x) = \cos(e^{2/x})e^{2/x}\frac{1}{x^2}, \quad g(x) = e^{-2/x}\Big(\frac{1}{x} + e^{1/x}\Big).$$

Легко проверить, что функция

$$F(x'') = \int_{x''}^1 f(x) dx = \int_{x''}^1 \cos(e^{2/x})e^{2/x}\frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_{x''}^1 \cos(e^{2/x}) d(e^{2/x}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(e^{2/x})\Big|_{x''}^1 = \frac{1}{2}[\sin e^2 - \sin(e^{2/x''})]$$

ограничена на промежутке $]0, 1]$, поскольку

$$\Big|\frac{1}{2}[\sin e^2 - \sin(e^{2/x''})]\Big| \leqslant 1.$$

Вместе с этим функция $g(x) = e^{-2/x}(1/x + e^{1/x})$ монотонно убывает к нулю при $x \to +0$:

$$\lim_{x \to +0} e^{-2/x}\Big(\frac{1}{x} + e^{1/x}\Big) = 0.$$

Следовательно, интеграл I_2, согласно признаку Дирихле, сходится.

Для исследования на абсолютную сходимость воспользуемся оценкой

$$\left|\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+e^{1/x}\right)\cos(e^{2/x})\right| \geqslant \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+e^{1/x}\right)\cos^2(e^{2/x}) = \frac{1}{2x^2}\left(\frac{1}{x}+e^{1/x}\right)[1+\cos(2e^{2/x})],$$

в силу которой интеграл

$$\int\limits_0^1 \left|\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+e^{1/x}\right)\cos(e^{2/x})\right|dx \geqslant \int\limits_0^1 \frac{1}{2x^2}\left(\frac{1}{x}+e^{1/x}\right)[1+\cos(2e^{2/x})]dx$$

расходится, поскольку расходится интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{2x^3}dx, \quad \alpha = 3 > 1.$$

Таким образом, интеграл I_2 сходится условно.

3. В примере 23.4 была установлена сходимость интеграла

$$\overline{I}_3 = \int\limits_0^2 \left|\frac{(1-x)x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right|dx,$$

из которой следует абсолютная сходимость интеграла

$$I_3 = \int\limits_0^2 \frac{(1-x)x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx.$$

Покажем, что сходимость интеграла I_3 легко устанавливается с помощью признака Абеля (следствие 23.8.1). Действительно, запишем интеграл I_3 в виде

$$I_3 = \int\limits_0^2 f(x)g(x)dx,$$

положив

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}, \quad g(x) = 1-x.$$

Поскольку, согласно результату примера 22.8, интеграл

$$\int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{16}{3}$$

сходится, а функция $g(x) = 1-x$ на промежутке $[0, 2[$ монотонна и ограничена, то в силу признака Абеля интеграл I_3 сходится.

23.4. Главное значение несобственных интегралов 2-го рода

Как и в случае несобственных интегралов 1-го рода, для интегралов 2-го рода тоже можно ввести понятие главного значения. Допустим, что в промежутке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет одну внутреннюю особую точку $x = c \in]a,b[$ и интегрируема в каждой его части, не содержащей c. Тогда согласно определению, под несобственным интегралом от a до b понимается равенство

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}}\Big[\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta'}^b f(x)dx\Big], \quad (23.27)$$

причем предел должен существовать при независимом предельном переходе по δ и δ', т.е. при независимом стремлении величин δ и δ' к нулю. В тех случаях, когда предел (23.27) не существует, оказывается полезным рассмотреть предел того же выражения, если δ и δ' стремятся к нулю, оставаясь равными, т.е. $\delta = \delta'$.

♦ *Главным значением несобственного интеграла* I (в смысле Коши) называют предел

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\Big[\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx\Big]. \quad (23.28)$$

◊ Если интеграл (23.27) существует как несобственный, то он, очевидно, существует и в смысле главного значения. Обратное же, вообще говоря, неверно. Если функция $f(x)$ на промежутке интегрирования имеет несколько внутренних особых точек, то главное значение интеграла будет определяться суммой главных значений в каждой точке отдельно.

Пример 23.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^3 \frac{dx}{x-1}; \quad I_2 = \int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^n},\ n = \overline{2,\infty};$$

$$I_3 = \int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-3x+2}; \quad I_4 = \int\limits_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \quad I_5 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1/2-\sin x}.$$

В случае расходимости соответствующего интеграла исследовать его на сходимость в смысле главного значения.

Решение. Если несобственный интеграл сходится, то он сходится и смысле главного значения, поэтому будем начинать с исследования заданных интегралов на сходимость.

1. Для интеграла I_1 точка $x = 1$ является внутренней особой точкой. В этом случае, по определению (23.27),

$$I_1 = \int\limits_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}}\Big[\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{x-1} + \int\limits_{1+\delta'}^3 \frac{dx}{x-1}\Big] =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}}\Big[\ln(1-x)\Big|_0^{1-\delta} + \ln(x-1)\Big|_{1+\delta'}^3\Big] = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}}\Big[\ln 2 - \ln\frac{\delta}{\delta'}\Big]. \quad (23.29)$$

Полученное выражение не имеет определенного предела, если δ и δ' стремятся к нулю независимо друг от друга. Это означает, что несобственный интеграл I_1 расходится. Для исследования этого интеграла на сходимость в смысле главного значения положим $\delta = \delta'$. Тогда из (23.29) получим выражение

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\delta\to 0}\Big[\ln 2 - \ln\frac{\delta}{\delta}\Big] = \ln 2,$$

не зависящее от δ. Это означает, что главное значение расходящегося несобственного интеграла I_1 существует и равно

$$\text{V.p.}\int\limits_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln 2.$$

2. Как и для интеграла I_1, следуя определению (23.27), найдем

$$I_2 = \int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^n} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^n} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-1)^n} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}}\Big[\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{(x-1)^n} + \int\limits_{1+\delta'}^3 \frac{dx}{(x-1)^n}\Big] =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}}\Big[\frac{(x-1)^{1-n}}{1-n}\Big|_0^{1-\delta} + \frac{(x-1)^{1-n}}{1-n}\Big|_{1+\delta'}^3\Big] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}}\Big[\frac{1}{(-1)^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{\delta^{n-1}} + \frac{1}{(\delta')^{n-1}}\Big]. \tag{23.30}$$

Предел (23.30) при четном n имеет бесконечное значение, а при нечетном n вовсе не существует. И то и другое означает, что несобственный интеграл I_2 расходится. Для исследования этого интеграла на сходимость в смысле главного значения положим $\delta = \delta'$. Тогда из (23.30) получим выражение

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^n} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-1)^n} = \frac{1}{n-1}\lim_{\delta\to 0}\Big[\frac{1}{(-1)^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} + [(-1)^n + 1]\frac{1}{\delta^{n-1}}\Big],$$

которое при четном n имеет бесконечное значение, а при нечетном n сводится к числу

$$\frac{1}{n-1}\Big(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big).$$

Это означает, что при четном n главного значения интеграла I_2 не существует, а при нечетном n главное значение несобственного интеграла I_2 существует и равно

$$\text{V.p.}\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^n} = \frac{1}{n-1}\Big(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big), \quad n \text{ — нечетное.}$$

3. Интеграл

$$I_3 = \int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-3x+2}$$

имеет две внутренние особые точки: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, поэтому, согласно определению,

$$I_3 = \int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0, \gamma\to 0\\ \delta'\to 0, \gamma'\to 0}} \left\{ \int\limits_0^{1-\delta} \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\Big) dx + \int\limits_{1+\delta'}^{2-\gamma} \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\Big) dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{2+\gamma'}^3 \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\Big) dx \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0, \gamma\to 0\\ \delta'\to 0, \gamma'\to 0}} \left\{ \ln\Big|\frac{x-2}{x-1}\Big|\,\Big|_0^{1-\delta} + \ln\Big|\frac{x-2}{x-1}\Big|\,\Big|_{1+\delta'}^{2-\gamma} + \ln\Big|\frac{x-2}{x-1}\Big|\,\Big|_{2+\gamma'}^{3} \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0, \gamma\to 0\\ \delta'\to 0, \gamma'\to 0}} \left\{ \ln\frac{1+\delta}{\delta} - \ln 2 + \ln\frac{\gamma}{1-\gamma} + \ln\frac{1-\delta'}{\delta} + \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\gamma'}{1+\gamma'} \right\}. \qquad (23.31)$$

Данное выражение не имеет определенного предела, если $\delta, \delta', \gamma, \gamma'$ стремятся к нулю независимо друг от друга, а это означает, что несобственный интеграл I_3 расходится. Для исследования этого интеграла на сходимость в смысле главного значения положим $\delta = \delta'$ и $\gamma = \gamma'$. Тогда из (23.31) получим выражение

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \gamma\to 0}} \left\{ -2\ln 2 + \ln\frac{1+\delta}{1-\delta} + \ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right\} = -2\ln 2.$$

Последний предел существует независимо от способов стремления δ и γ к нулю. Это означает, что главное значение расходящегося несобственного интеграла I_3 существует и равно

$$\text{V.p.} \int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = -2\ln 2.$$

4. Как и выше, следуя определению (23.27), для интеграла I_4 получим

$$I_4 = \int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^{1/3}} + \int\limits_0^2 \frac{dx}{x^{1/3}} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \Big[\int\limits_{-1}^{\delta} x^{-1/3} dx + \int\limits_{\delta'}^{2} x^{-1/3} dx \Big] =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \Big[\frac{3}{2} x^{2/3}\Big|_1^{\delta} + \frac{3}{2} x^{2/3}\Big|_{\delta'}^{2} \Big] = \frac{3}{2} \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} [\sqrt[3]{4} - 1 + \delta^{2/3} - (\delta')^{2/3}] = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4} - 1).$$

Это означает, что несобственный интеграл I_4 сходится, следовательно, он сходится и в смысле главного значения.

5. Интеграл I_5 имеет одну внутреннюю особую точку $x = \pi/6$, в которой $\sin(\pi/6) = 1/2$. Следуя определению (23.27) и воспользовавшись результатом примера 3.6:

$$\int \frac{dx}{1/2 - \sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\Big|\frac{\sin(\pi/6) - \sin x}{1 - \cos(x - \pi/6)}\Big| + C,$$

имеем

$$I_5 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1/2 - \sin x} = \int\limits_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sin(\pi/6) - \sin x} + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(\pi/6) - \sin x} =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \Bigg[\int\limits_0^{\pi/6-\delta} \frac{dx}{\sin(\pi/6) - \sin x} + \int\limits_{\pi/6+\delta'}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(\pi/6) - \sin x}\Bigg] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \Bigg[\ln\Big|\frac{\sin(\pi/6) - \sin x}{1-\cos(x-\pi/6)}\Big|\Big|_0^{\pi/6-\delta} + \ln\Big|\frac{\sin(\pi/6) - \sin x}{1-\cos(x-\pi/6)}\Big|\Big|_{\pi/6+\delta'}^{\pi/2}\Bigg] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \Bigg[\ln \frac{\Big(1-\sin\dfrac{\pi}{6}\Big)\Big(1-\cos\dfrac{\pi}{3}\Big)}{\Big(1-\cos\dfrac{\pi}{3}\Big)\sin\dfrac{\pi}{6}} + \ln\Bigg|\frac{\sin\dfrac{\pi}{6} - \sin\Big(\dfrac{\pi}{6}-\delta\Big)}{1-\cos\delta}\Bigg| -$$

$$- \ln\Bigg|\frac{\sin\dfrac{\pi}{6} - \sin\Big(\dfrac{\pi}{6}+\delta'\Big)}{1-\cos\delta'}\Bigg|\Bigg]. \tag{23.32}$$

Здесь мы воспользовались результатами примеров 3.6 и 8.2. Это выражение не имеет определенного предела, если δ и δ' стремятся к нулю независимо друг от друга, поскольку

$$A = \lim_{\delta\to 0} \ln\Bigg|\frac{\sin\dfrac{\pi}{6} - \sin\Big(\dfrac{\pi}{6}-\delta\Big)}{1-\cos\delta}\Bigg| = \lim_{\delta\to 0} \ln\Bigg|\frac{2\sin\dfrac{\delta}{2}\cos\Big(\dfrac{\pi}{3}-\delta\Big)}{1-\cos\delta}\Bigg| =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \ln\Bigg|\frac{2\delta\cos\Big(\dfrac{\pi}{3}-\delta\Big)}{\delta^2}\Bigg| = \infty;$$

$$B = \lim_{\delta'\to 0} \ln\Bigg|\frac{\sin\dfrac{\pi}{6} - \sin\Big(\dfrac{\pi}{6}+\delta'\Big)}{1-\cos(\delta')}\Bigg| = \lim_{\delta'\to 0} \ln\Bigg|\frac{2\delta'\cos\Big(\dfrac{\pi}{3}+\delta'\Big)}{1-\cos(\delta')}\Bigg| =$$

$$= \lim_{\delta'\to 0} \ln\Bigg|\frac{2\delta'\cos\Big(\dfrac{\pi}{3}+\delta'\Big)}{(\delta')^2}\Bigg| = \infty$$

и, следовательно, разность $A - B$ в (23.32) не определена:

$$A - B = (\infty - \infty) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \ln\Big|\frac{\delta'\cos(\pi/3-\delta)}{\delta\cos(\pi/3-\delta')}\Big| = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \ln\frac{\delta'}{\delta}.$$

Это означает, что несобственный интеграл I_5 расходится. Для исследования этого интеграла на сходимость в смысле главного значения положим $\delta = \delta'$. Тогда из (23.32) получим выражение

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{\delta\to 0}\Bigg[\ln\frac{\dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}} + \ln\Bigg|\frac{\sin\dfrac{\pi}{6} - \sin\Big(\dfrac{\pi}{6}-\delta\Big)}{\sin\dfrac{\pi}{6} - \sin\Big(\dfrac{\pi}{6}+\delta\Big)}\Bigg|\Bigg] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{\delta\to 0}\Bigg[\ln(2-\sqrt{3}) + \ln\Bigg|\frac{2\sin\dfrac{\delta}{2}\cos\Big(\dfrac{\pi}{3}-\delta\Big)}{2\sin\dfrac{\delta}{2}\cos\Big(\dfrac{\pi}{3}+\delta\Big)}\Bigg|\Bigg] = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln(2-\sqrt{3}).$$

Это означает, что главное значение несобственного интеграла I_5 существует и равно

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1/2-\sin x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln(2-\sqrt{3}).$$

Заметим, что из всех несобственных интегралов примера 23.6 лишь интеграл I_4 является сходящимся:

$$I_4=\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1).$$

Можно проверить, что это же значение дает непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница

$$\overline{I}_4=\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-1}^{2}=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1),$$

хотя в данном случае эта формула неприменима. Такое совпадение объясняется тем, что вертикальная асимптота $x=0$ графика функции $y=1/\sqrt[3]{x}$ является его осью симметрии (рис. 84,*а*), и, следовательно, совпадение значений I_4 и $\overline{I}_4$ легко объясняется геометрически.

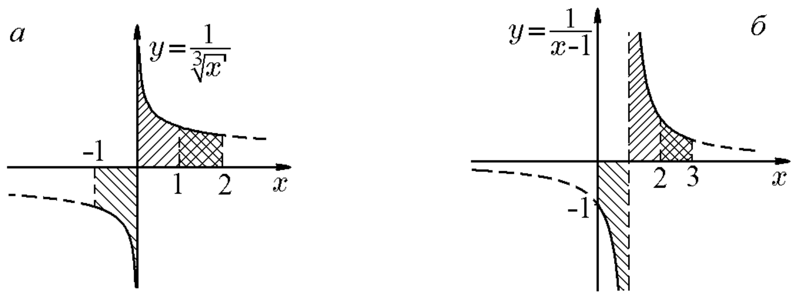


Рис. 84

Это замечание оказывается справедливым и для расходящегося интеграла I_1, сходящегося, однако, в смысле главного значения:

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_0^{3}\frac{dx}{x-1}=\ln 2.$$

Легко проверить, что это же значение дает собственный интеграл

$$\overline{I}_1=\int\limits_2^{3}\frac{dx}{x-1}=\ln(x-1)\Big|_2^3=\ln 2.$$

В этом случае вертикальная асимптота $x=1$ графика функции $y=1/(x-1)$ является его осью симметрии (рис. 84,*б*), и I_1 и $\overline{I}_1$ совпадают, поскольку главное значение интеграла I_1 существует.

Заметим, что существование главного значения расходящегося несобственного интеграла в некоторых случаях можно установить, не прибегая к его вычислению. Рассмотрим следующий пример.

Пример 23.7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и обращается в нуль в одной лишь точке $x=c$ внутри этого промежутка, т.е. $f(c)=0$, $a<c<b$. Если в точке $x=c$ существуют производные $f'(c)$ и $f''(c)$, причем $f'(c)\neq 0$, то несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)} \tag{23.33}$$

сходится в смысле главного значения.

Решение. Функцию $f(x)$ в окрестности точки $x=c$ можно представить формулой Тейлора в форме Пеано:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+f''(c)\frac{(x-c)^2}{2}+o((x-c)^2).$$

Поскольку, по условию задачи, $f(c)=0$, то

$$f(x)=f'(c)(x-c)+f''(c)\frac{(x-c)^2}{2}+o((x-c)^2). \tag{23.34}$$

Это означает, что для дроби $1/f(x)$ при $x\to c$ справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{1}{f(x)}\sim\frac{1}{f'(c)(x-c)},\quad x\to c, \tag{23.35}$$

из которой следует, что интеграл (23.33) расходится. Покажем, что этот же интеграл сходится в смысле главного значения.

Исходя из асимптотической оценки (23.35), положим

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f'(c)(x-c)}+g(x). \tag{23.36}$$

Эта функция для $x\neq c$ непрерывна на $[a,b]$, а вблизи тоски $x=c$, согласно (23.34), может быть представлена как

$$\frac{1}{f'(c)(x-c)+f''(c)\dfrac{(x-c)^2}{2}+o((x-c)^2)}\approx\frac{1}{f'(c)(x-c)}+g(x),$$

откуда

$$g(x)=\frac{-\Big[f''(c)\dfrac{(x-c)^2}{2}+o((x-c)^2)\Big]}{(x-c)f'(c)\Big[f'(c)(x-c)+f''(c)\dfrac{(x-c)^2}{2}+o((x-c)^2)\Big]}.$$

Функция $g(x)$ вблизи точки $x=c$ остается ограниченной и, следовательно, интегрируема даже в собственном смысле. Вместе с этим интеграл от функции $1/[f'(c)(x-c)]$ существует в смысле главного значения (см. пример 23.6). Это означает, что главное значение интеграла (23.33) существует, причем

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b\frac{dx}{f(x)}=\text{V.p.}\int\limits_a^b\frac{dx}{f(c)(x-c)}+\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Рассмотренный пример позволяет достаточно просто установить сходимость в смысле главного значения, например, интеграла I_5 из примера 23.6. Действительно, функция $f(x) = 1/2 - \sin x$ на промежутке $[a, b]$ непрерывна и обращается в нуль в одной точке $c = \pi/6$, при этом существуют производные $f'(x) = -\cos x$, $f''(x) = \sin x$, равные $f'(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, $f''(\pi/6) = 1/2$. Следовательно, интеграл

$$I_5 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1/2 - \sin x}$$

в смысле главного значения сходится.

Еще одним примером может служить определение важной неэлементарной функции, называемой *интегральным логарифмом*:

$$\mathrm{Li}(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}. \tag{23.37}$$

Особенность такого определения состоит в том, что при $0 < x < 1$ интеграл (23.37) сходится, а при $x > 1$ интеграл (23.37) понимается в смысле главного значения:

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{V.p.} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}, \quad x > 1, \tag{23.38}$$

существование которого обеспечивают условия из примера 23.7. Действительно, функция $f(t) = \ln t$ непрерывна на промежутке $]0, x[$ и обращается в нуль в единственной точке $t = 1$, при этом существуют производные $f'(t) = (\ln t)' = 1/t$, $f''(t) = (1/t)' = -1/t^2$, равные $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$. Это означает, что интеграл (23.38) существует (рис. 85).

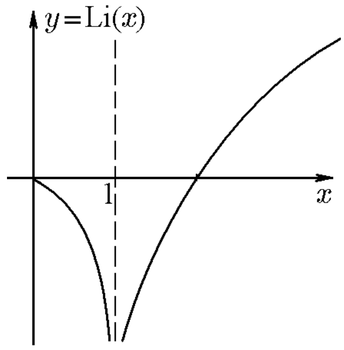


Рис. 85

Наряду с условиями из примера 23.7 существуют и другие условия, гарантирующие существование главного значения несобственного интеграла 2-го рода. Одним из таких условий является условие Липшица (Липшица–Гельдера), регламентирующее поведение приращения функции $f(x)$ на некотором промежутке.

♦ Если для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих промежутку $[a, b]$, приращение функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant k|x_2 - x_1|^\alpha, \tag{23.39}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$ и k — некоторая постоянная, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α на отрезке $[a, b]$ и пишут $f(x) \in Lip(\alpha)$.

Пример 23.8. Показать, что если функция $f(x)$ в несобственном интеграле

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x - c} dx, \quad a < c < b, \tag{23.40}$$

на отрезке $[c + \delta, c - \delta]$, $\delta > 0$, удовлетворяет условию Липшица (23.39), т.е. $f(x) \in Lip(\alpha)$, а в остальной части промежутка $]a, b[$ является непрерывной или даже только интегрируемой, то интеграл (23.40) существует в смысле главного значения, равного

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-c}dx = \int\limits_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx + f(c)\ln\frac{b-c}{c-a}. \qquad (23.41)$$

Решение. Интеграл (23.40) с помощью тождественных преобразований представим в виде

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-c}dx = \text{V.p.}\Big[\int\limits_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx + f(c)\int\limits_a^b \frac{1}{x-c}dx\Big]. \qquad (23.42)$$

В свою очередь, первый интеграл в правой части (23.42) представим суммой

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx = \int\limits_a^{c-\delta} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx + \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx + \int\limits_{c+\delta}^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx, \qquad (23.43)$$

в которой первый и третий интегралы существуют, так как являются собственными. Для исследования сходимости второго интеграла

$$\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx \qquad (23.44)$$

воспользуемся условием (23.39):

$$\Big|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\Big| \leqslant \frac{k}{|x-c|^{1-\alpha}},$$

из которого вытекает абсолютная сходимость интеграла (23.44), а следовательно, и существование интеграла (23.43).

Второй интеграл в правой части (23.42), согласно результату в примере 23.6, сходится в смысле главного значения и равен

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Таким образом, правая часть формулы (23.42) приводится к виду

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-c}dx = \int\limits_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx + f(c)\ln\frac{b-c}{c-a},$$

заявленному формулой (23.41).

Применение формулы (23.41) проиллюстрируем примером.

Пример 23.9. Вычислить

$$\text{V.p.}\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx. \qquad (23.45)$$

Решение. Этот интеграл можно рассматривать как частный случай интеграла (23.41), в котором функция $f(x) = \sqrt{x}$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1/2$, т.е. $\sqrt{x} \in Lip(1/2)$ на промежутке $[0, +\infty[$. В этом легко убедиться, исходя из очевидного неравенства

$$x_2 \leqslant x_2 + 2\sqrt{x_1(x_2 - x_1)} \tag{23.46}$$

с помощью тождественных преобразований

$$x_2 \leqslant x_1 + (x_2 - x_1) + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2 - x_1} = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 - x_1})^2,$$

откуда

$$x_2 \leqslant (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 - x_1})^2$$

или

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2 - x_1}.$$

Далее, приняв во внимание, что особой точкой интеграла (23.46) является точка $c = 1$ и, следовательно, $f(c) = \sqrt{1} = 1$, то по формуле (23.42) можем записать

$$\text{V.p.} \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} dx + 1 \cdot \ln\frac{2-1}{1-0} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}. \tag{23.47}$$

Интеграл в правой части (23.47) является собственным и заменой $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $t\sqrt{x}$ сводится к интегралу от рациональной дроби:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{2t\,dt}{t+1} = 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} \Big(1 - \frac{1}{t+1}\Big) dt =$$

$$= 2\Big[t\Big|_0^{\sqrt{2}} - \ln(1+t)\Big|_0^{\sqrt{2}}\Big] = 2[\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]. \tag{23.48}$$

Подставив (23.48) в (23.47), найдем главное значение интеграла (23.46):

$$\text{V.p.} \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = 2[\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})]. \tag{23.49}$$

До сих пор сходимость в смысле главного значения мы использовали для несобственных интегралов, имеющих только внутренние особые точки. Рассмотрим пример нахождения главного значение интеграла, имеющего как внутреннюю, так и концевую особую точки.

Пример 23.10. Исследовать на сходимость

$$I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}. \tag{23.50}$$

Решение. Интеграл (23.50) имеет две особые точки: концевую $x_1 = 0$ и внутреннюю $x_2 = 1$. Асимптотические оценки подынтегральной функции в этих точках имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} \sim -\frac{1}{\sqrt{x}}, \ x \to +0; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} \sim \frac{1}{x-1}, \ x \to 1; \quad \alpha_2 = 1.\end{gathered} \tag{23.51}$$

Из первой оценки следует, что в концевой особой точке $x_1 = 0$ функция имеет интегрируемую в несобственном смысле особенность, а из второй — что во внутренней особой точке $x_2 = 1$ функция имеет особенность, не интегрируемую в несобственном смысле. Это означает, что несобственный интеграл I (23.50) расходится.

Для исследования этого интеграла на сходимость в смысле главного значения воспользуемся асимптотическими оценками (23.51) и возможностью разложения функции на два слагаемых

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} = \frac{1-x+x}{\sqrt{x}(x-1)} = -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x-1},$$

первое из которых имеет только интегрируемую особенность в точке $x_1 = 0$, а второе — только неинтегрируемую особенность в точке $x_2 = 1$. Такая особенность подынтегральной функции допускает возможность вычисления интеграла (23.50) только относительно внутренней точки $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned}\text{V.p.}\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} &= \text{V.p.}\Big[-\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx\Big] = \text{V.p.}\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx - \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \text{V.p.}\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx - 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что интеграл в правой части этого равенства вычислен в предыдущем примере и, согласно (23.49), равен

$$\text{V.p.}\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

Тогда окончательно получим

$$\text{V.p.}\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} = -2\ln(1+\sqrt{2}).$$

24. Несобственные интегралы 3-го рода. Смешанные примеры

Обобщением несобственных интегралов 1-го и 2-го рода можно считать несобственные интегралы на бесконечных промежутках $]-\infty, a[$, $]b, +\infty[$ или $]-$

$\infty, +\infty[$ интегрирования, т.е.

$$\underline{I} = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \overline{I} = \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx \quad I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \tag{24.1}$$

подынтегральные функции которых могут иметь внутренние особые точки c_i, $i = \overline{1, n}$, причем точки a и b также могут быть концевыми особыми точками функции $f(x)$.

♦ Несобственные интегралы (24.1) принято называть *несобственными интегралами 3-го рода*.

В дополнение к внутренним особым точкам c_i, $i = \overline{1, n}$, точки $x = -\infty$ и $x = +\infty$ договоримся также считать концевыми особыми точками c_0 и c_{n+1} соответственно. Такая договоренность определить вычисление интегралов 3-го рода (24.1) следующим образом. Интервал интегрирования разобьем на промежутки с одной концевой особой точкой. Такое разбиение в предположении, что функция $f(x)$ является интегрируемой в промежутках вне особых точек, позволяет представить интегралы 3-го рода (24.1) суммой интегралов 1-го и 2-го рода. Например, интеграл I представится суммой

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \int\limits_{c_i}^{p_i} f(x)dx + \int\limits_{p_i}^{c_{i+1}} f(x)dx \right\}, \tag{24.2}$$

здесь суммирование подразумевается по всем промежуткам, содержащим одну концевую особую точку, а p_i — некоторая точка, расположенная между двумя соседними особыми точками. Если все интегралы 1-го и 2-го рода суммы (24.2) будут сходиться, то будет сходиться и несобственный интеграл 3-го рода.

В случае сходимости интеграла (24.2) результат интегрирования не будет зависеть от выбора точек p_i, поскольку точки p_i выбираются из интервалов интегрируемости функции $f(x)$.

Для расходящихся интегралов 3-го рода также можно ввести понятие сходимости в смысле главного значения. Главное значение интеграла 3-го рода можно определить как главное значение суммы интегралов 1-го и 2-го рода, составляющих его. Например, для интеграла I (24.2) оно найдется как

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \text{V.p.} \sum_{i=0}^{n+1} \left[\int\limits_{c_i}^{p_i} f(x)dx + \int\limits_{p_i}^{c_{i+1}} f(x)dx \right], \tag{24.3}$$

при этом разбиение интервала интегрирования в (24.3) при необходимости можно изменить таким образом, чтобы некоторые особые точки c_i были внутренними точками интервалов интегрирования нового разбиения.

В тех случаях, когда несобственный интеграл 3-го рода существует, то он, очевидно, совпадает со своим главным значением.

Сказанное выше проиллюстрирует конкретными примерами.

Пример 24.1. Исследовать на сходимость

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - c_1|^{\alpha_1} \cdots |x - c_k|^{\alpha_k}}, \quad -\infty < c_1 < c_2 ... < c_k < +\infty. \tag{24.4}$$

Решение. Имеем интеграл 3-го рода с особыми точками

$$-\infty < c_1 < c_2 ... < c_k < +\infty,$$

для которого, согласно определению (24.2) и введя для сокращения записи обозначение

$$f(x) = \frac{1}{|x - c_1|^{\alpha_1} \cdots |x - c_k|^{\alpha_k}}, \tag{24.5}$$

можем записать

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{p_0} f(x)dx + \int\limits_{p_0}^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{p_1} f(x)dx + ... + \int\limits_{c_n}^{p_{n+1}} f(x)dx + \int\limits_{p_{n+1}}^{+\infty} f(x)dx.$$

Первый и последний интегралы этой суммы сходятся тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k > 1.$$

Слагаемые этой суммы, состоящие из пары интегралов

$$\int\limits_{p_i}^{c_i} f(x)dx + \int\limits_{c_i}^{p_{i+1}} f(x)dx,$$

сходятся тогда и только тогда, когда $\alpha_i < 1$, $i = \overline{1, k}$.

Таким образом, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - c_1|^{\alpha_1} \cdots |x - c_k|^{\alpha_k}}$$

сходится тогда и только тогда, когда выполняются одновременно условия

$$\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1, ..., \alpha_k < 1; \quad \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k > 1. \tag{24.6}$$

Очевидно, что интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - c|^{\alpha}},$$

получающийся из (24.4) при $n = 1$, не сходится ни при каком α. При любом α расходятся и оба интеграла

$$\underline{I} = \int\limits_{-\infty}^{c} \frac{dx}{|x - c|^{\alpha}}, \quad \overline{I} = \int\limits_{c}^{+\infty} \frac{dx}{|x - c|^{\alpha}}.$$

Пример 24.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы

$$1)\ I_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x - c_1)^{n_1} \cdots (x - c_k)^{n_k}},\ n_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, k}; \quad 2)\ J = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Расходящиеся интегралы исследовать на сходимость в смысле главного значения.

Решение. 1) Исследование интеграла I на абсолютную сходимость приводит к интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-c_1|^{n_1}\cdots|x-c_k|^{n_k}},$$

который расходится в силу условий (24.6) и $n_i \in \mathbb{N}$, $i=\overline{1,k}$.

Исследование интеграла I на условную сходимость начнем с частного случая $k=1$, т.е. интеграла

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^n}. \tag{24.7}$$

В свою очередь, при $n=1$, следуя правилу вычисления интегралов 3-го рода (24.2), с $\delta'>0$ и $\delta''>0$:

$$I_{11} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-c} = \lim_{\begin{pmatrix}\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty\\ \delta'\to0\\ \delta''\to0}\end{pmatrix}} \left\{ \int\limits_{a}^{c-\delta'} \frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\delta''}^{b} \frac{dx}{x-c} \right\} =$$

$$= \lim_{\begin{pmatrix}\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty\\ \delta'\to0\\ \delta''\to0}\end{pmatrix}} \left[\ln|x-c|\Big|_{a}^{c-\delta'} + \ln|x-c|\Big|_{c+\delta''}^{b} \right] = \lim_{\begin{pmatrix}\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty\\ \delta'\to0\\ \delta''\to0}\end{pmatrix}} \ln\frac{\delta'(b-c)}{\delta''(c-a)}, \tag{24.8}$$

приходим к выражению, не имеющему предела при независимом стремлении параметров a, b, δ', δ'' к указанным значениям и означающему, что интеграл I_1 расходится.

При $n \geqslant 2$ для интеграла

$$I_{1n} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^n}$$

получим выражение

$$I_{1n} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^n} = \lim_{\begin{pmatrix}\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty\\ \delta'\to0\\ \delta''\to0}\end{pmatrix}} \frac{1}{1-n}\Big\{ \ln(x-c)^{1-n}\Big|_{a}^{c-\delta'} + \ln(x-c)^{1-n}\Big|_{c+\delta''}^{b} =$$

$$= \lim_{\begin{pmatrix}\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty\\ \delta'\to0\\ \delta''\to0}\end{pmatrix}} \frac{1}{1-n}\big\{ (-\delta')^{1-n} - (a-c)^{1-n} + (b-c)^{1-n} - (\delta'')^{1-n} \big\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} \lim_{\substack{\delta'\to0\\ \delta''\to0}} \Big[\frac{1}{(\delta'')^{n-1}} - \frac{1}{(\delta')^{n-1}} \Big], \tag{24.9}$$

также не имеющее предела при независимом стремлении δ', δ'' к нулю и означающему, что интеграл I_{1n} расходится.

Интегралы I_{11} и I_{1n} расходятся. Исследуем их сходимость в смысле главного значения. Найдем значение предела (24.8), положив $a=-b$, $\delta'=\delta''$. Тогда

$$\text{V.p.}I_{11} = \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ \delta'\to0}} \ln\frac{\delta'(b-c)}{\delta''(c-a)} = \ln 1 = 0. \tag{24.10}$$

В свою очередь, положив в пределе (24.9) $\delta' = \delta''$, найдем

$$\text{V.p.}I_{1n} = \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1}\lim_{\delta'\to 0}\Big[\frac{1}{(\delta')^{n-1}} - \frac{1}{(-\delta')^{n-1}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{n-1}[1+(-1)^n]\lim_{\delta'\to 0}\frac{1}{(\delta')^{n-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{для четных } n, \\ 0 & \text{для нечетных } n. \end{cases} \tag{24.11}$$

Формулы (24.10) и (24.11) можно объединить в одну для всех $n \geqslant 1$:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{для четных } n, \\ 0 & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Таким образом, расходящийся при любых n несобственный интеграл I_1 (24.7) при нечетных n сходится в смысле главного значения, причем

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^n} = 0, \quad n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}. \tag{24.12}$$

Возвратившись к интегралу I_k, заметим, что разложение его подынтегральной функции на простейшие дроби приводит интеграл I_k к сумме интегралов вида I_{1n}, сходимость которых и определяет сходимость интеграла I_k.

2) Интеграл J представим суммой

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int\limits_0^{3} \frac{dx}{x^2-3x+2} + \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \underline{J} + \overline{J},$$

в которой интеграл

$$\underline{J} = \int\limits_0^{3} \frac{dx}{x^2-3x+2},$$

как показано в примере 23.6, расходится. Это означает, что интеграл J также расходится, несмотря на то, что интеграл

$$\overline{J} = \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int\limits_3^{+\infty} \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\Big)dx = \ln\Big|\frac{x-2}{x-1}\Big|\,\Big|_3^{+\infty} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 \tag{24.13}$$

сходится.

Чтобы вычислить главное значение J, т.е.

$$\text{V.p.}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \text{V.p.}(\underline{J} + \overline{J}) = \text{V.p.}\underline{J} + \text{V.p.}\overline{J} =$$

$$= \text{V.p.}\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x^2-3x+2} + \text{V.p.}\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2},$$

воспользуемся результатом примера 23.6, согласно которому

$$\text{V.p.}\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-3x+2} = -2\ln 2,$$

и сходимостью интеграла $\overline{J}$ (24.13), в силу которой

$$\text{V.p.}\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln 2.$$

Таким образом, расходящийся несобственный интеграл J сходится в смысле главного значения, причем

$$\text{V.p.}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = -2\ln 2 + \ln 2 = -\ln 2.$$

Пример 24.3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx,$$

если

$$1)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+x^9}};\quad 2)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}};\quad 3)\ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}.$$

Решение. Имеем интегралы 3-го рода с одной конечной особой точкой $x_1 = 0$ и другой бесконечно удаленной точкой $x_2 = +\infty$. Следуя (24.2), представим исходный интеграл суммой

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \tag{24.14}$$

и рассмотрим сходимость каждого интеграла суммы (24.14).

Используя признаки сравнения Коши и асимптотические оценки при $x \to +0$:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4+x^9}} \sim \dfrac{1}{x^{4/3}},\ x \to +0,\ \alpha = \dfrac{4}{3} > 1;$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}} \sim \dfrac{1}{x^{1/2}},\ \ x \to +0,\ \alpha = \dfrac{1}{2} < 1;$

3) $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\right| \sim \dfrac{1}{x^{1/2}},\ \ x \to +0,\ \alpha = \dfrac{1}{2} < 1;$

и $x \to +\infty$:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4+x^9}} \sim \dfrac{1}{x^3},\ x \to +\infty,\ \alpha = 3 > 1;$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}} \sim \dfrac{1}{x^3},\ x \to +\infty,\ \alpha = \dfrac{3}{2} > 1;$

3) $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \dfrac{1}{x^{5/2}},\ x \to +\infty,\ \alpha = \dfrac{5}{2} > 1,$

заключаем, что

1) интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x^9}}$ расходится;

2) интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ сходится;

3) интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^3+x^5}}$ сходится абсолютно.

Пример 24.4. Доказать справедливость формул Фруллани:

а) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = [f(+0)-f(+\infty)]\ln\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha>0, \quad \beta>0, \tag{24.15}$$

при условии, что функция $f(x)$ определена и непрерывна для $x \geqslant 0$ и существует конечный предел
$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x); \tag{24.16}$$

б) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = f(+0)\ln\frac{\beta}{\alpha}, \tag{24.17}$$

если функция $f(x)$ не имеет конечного предела (24.16), но существует интеграл
$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx, \quad a>0, \tag{24.18}$$

и

в) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx = -f(+\infty)\ln\frac{\beta}{\alpha}, \tag{24.19}$$

если нарушена непрерывность функции $f(x)$ при $x=0$, но существует интеграл
$$\int\limits_0^{b} f(x)dx, \quad b<+\infty. \tag{24.20}$$

Решение. а) Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $x \geqslant 0$, то для любых $a, b, a', b' \in [0, +\infty[$ справедливо интегральное равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx = \int\limits_a^{a'} f(x)dx - \int\limits_b^{b'} f(x)dx. \tag{24.21}$$

Действительно, непрерывность функции $f(x)$ гарантирует существование всех интегралов равенства (24.21), причем если

$$F'(x) = f(x),$$

то левую часть равенства (24.21) можно представить в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx = F(x)\Big|_a^b - F(x)\Big|_{a'}^{b'} = F(b) - F(a) - F(b') + F(a') =$$

$$= F(a') - F(a) - [F(b') - F(b)] = F(x)\Big|_a^{a'} - F(x)\Big|_b^{b'} = \int\limits_a^{a'} f(x)dx - \int\limits_b^{b'} f(x)dx,$$

подтверждающем равенство (24.21).

Теперь, следуя определению несобственного интеграла 3-го рода (24.1), для интеграла (24.15) имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to+0}} \int\limits_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx =$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to+0}} \left[\int\limits_a^b \frac{f(\alpha x)}{x} dx - \int\limits_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx\right] = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to+0}} \left[\int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(z)}{z} dz - \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(z)}{z} dz\right].$$

Использование равенства (24.21) позволяет этот предел записать в следующем виде:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to+0}} \left[\int\limits_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(z)}{z} dz - \int\limits_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(z)}{z} dz\right]. \tag{24.22}$$

Применив к каждому из двух последних интегралов следствие 10.6.1 1-ой теоремы о среднем 10.6, получим

$$\int\limits_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(z)}{z} dz = f(z_1) \int\limits_{\alpha a}^{\beta a} \frac{dz}{z} = f(z_1) \ln\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha a \leqslant z_1 \leqslant \beta a, \tag{24.23}$$

и аналогично

$$\int\limits_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(z)}{z} dz = f(z_2) \int\limits_{\alpha b}^{\beta b} \frac{dz}{z} = f(z_2) \ln\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha b \leqslant z_2 \leqslant \beta b. \tag{24.24}$$

Так как $z_1 \to +0$ при $a \to +0$, а $z_2 \to +\infty$ при $b \to +\infty$, то из (24.22) с учетом (24.23) и (24.24) получим равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to+0}} [f(z_1) - f(z_2)] \ln\frac{\beta}{\alpha} = [f(+0) - f(+\infty)] \ln\frac{\beta}{\alpha},$$

совпадающее с заявленным (24.15).

б) В тех случаях, когда $f(x)$ не имеет конечного предела при $x \to +\infty$, но существует интеграл (24.18), заменив в приведенном рассуждении предел b сразу на $+\infty$, придем, взамен (24.15), к (24.17).

в) Аналогично, если нарушена непрерывность функции $f(x)$, но существует интеграл (24.20), то вместо (24.15), получим (24.19). Заметим, что случай в) приводится к случаю б) подстановкой $x = 1/t$.

Пример 24.5. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx; \quad I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \ln \frac{5 + 2e^{-2x}}{5 + 2e^{-3x}} \frac{dx}{x}; \quad I_3 = \int\limits_0^{1} \frac{x^3(x^2 - 1)}{\ln x} dx;$$

$$I_4 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 5x \sin x}{x} dx; \quad I_5 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^2} dx; \quad I_6 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(e^{-2x} - e^{-3x})^2}{x^2} dx.$$

Решение. 1. Для интеграла Фруллани

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx$$

имеем $f(x) = e^{-x}$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $f(0) = 1$, $f(+\infty) = 0$, откуда по формуле (24.15) найдем

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \frac{3}{2}.$$

2. Интеграл I_2 простейшим преобразованием

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \ln \frac{5 + 2e^{-2x}}{5 + 2e^{-3x}} \frac{dx}{x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(5 + 2e^{-2x}) - \ln(5 + 2e^{-3x})}{x} dx$$

свелся к интегралу Фруллани с функцией $f(x) = \ln(5 + 2e^{-x})$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $f(0) = \ln 7$, $f(+\infty) = \ln 5$, откуда по формуле (24.15) найдем

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \ln \frac{5 + 2e^{-2x}}{5 + 2e^{-3x}} \frac{dx}{x} = [\ln 7 - \ln 5] \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{7}{5} \ln \frac{3}{2}.$$

3. Интеграл I_3 заменой переменной

$$x = e^{-t},\ dx = -e^{-t} dt,\ \ln x = -t; \quad x_1 = 0,\ t_1 = +\infty;\ x_2 = 1,\ t_2 = 0,$$

сводится к интегралу Фруллани:

$$I_3 = \int\limits_0^{1} \frac{x^3(x^2 - 1)}{\ln x} dx = \int\limits_{+\infty}^{0} \frac{e^{-5t} - e^{-3t}}{-t} (-e^{-t}) dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-4t} - e^{-6t}}{t} dt$$

с функцией $f(t) = e^{-t}$, $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $f(0) = 1$, $f(+\infty) = 0$, который, согласно формуле (24.15) (см. пример 24.4), равен

$$I_3 = \int\limits_0^1 \frac{x^3(x^2-1)}{\ln x}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-4t}-e^{-6t}}{t}dt = (1-0)\ln\frac{6}{4} = \ln\frac{3}{2}.$$

4. Интеграл I_4 с помощью известного тригонометрического равенства преобразуется к интегралу Фруллани:

$$I_4 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 5x \sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x}dx$$

с функцией $f(x) = \cos x$, $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $f(0) = 1$. Поскольку в данном случае предел

$$\lim_{x\to+\infty} \cos x$$

не существует, но интеграл

$$\int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx, \quad \delta > 0,$$

согласно результатам примера 21.10, сходится, то по формуле (24.17) найдем

$$I_4 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 5x \sin x}{x}dx = \frac{1}{2}f(0)\ln\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \ln\frac{6}{4} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

5. Интеграл I_5 после однократного интегрирования по частям

$$I_5 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = \sin 3x - 3\sin x & du = 3(\cos 3x - \cos x)dx \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} & v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{\sin 3x - 3\sin x}{x}\Bigg|_{+0}^{+\infty} + 3\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos x}{x}dx = 3\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos x}{x}dx$$

свелся к интегралу Фруллани, который аналогичен интегралу I_4 для функции $f(x) = \cos x$, только здесь $\alpha = 3$, $\beta = 1$, поэтому

$$I_5 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^2}dx = 3\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos x}{x}dx = 3\cdot 1\cdot \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{1}{27}.$$

6. Интеграл I_6 после однократного интегрирования по частям

$$I_6 = \int\limits_0^{+\infty} (e^{-2x} - e^{-3x})^2 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = (e^{-2x} - e^{-3x})^2 & du = 2(e^{-2x} - e^{-3x})(-2e^{-2x} + 3e^{-3x})dx \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} & v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{(e^{-2x} - e^{-3x})^2}{x}\Bigg|_0^{+\infty} + 2\left[-2\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-4x} - e^{-5x}}{x}dx + 3\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-5x} - e^{-6x}}{x}dx\right] =$$

$$= -4\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-4x} - e^{-5x}}{x} dx + 6\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-5x} - e^{-6x}}{x} dx$$

свелся к интегралу Фруллани, который аналогичен интегралу I_1 для функции $f(x) = e^{-x}$, поэтому

$$I_6 = \int\limits_0^{+\infty} (e^{-2x} - e^{-3x})^2 \frac{dx}{x^2} = -4\ln\frac{5}{4} + 6\ln\frac{6}{5} = 2\Big(2\ln\frac{5}{4} + 3\ln\frac{6}{5}\Big).$$

Наряду с интегралами Фруллани рассмотрим достаточно часто встречающиеся несобственные интегралы вида

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x} dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \tag{24.25}$$

Если интегралы (24.25) сходятся, то сам факт их сходимости можно дополнить вычислением их значений по формулам

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(x) dx \tag{24.26}$$

при условии, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$f(x+\pi) = f(x) \text{ и } f(\pi - x) = f(x). \tag{24.27}$$

Корректный вывод равенства (24.26) впервые был предложен Лобачевским. Он основан на разложении функции $1/\sin x$ на простые дроби в виде функционального ряда ([50], т. 2). Использование рядов, вообще говоря, выходит за рамки данного курса, поэтому, не останавливаясь на самом выводе формул (24.26), рассмотрим несколько примеров их применения, воспользовавшись обозначением

$$\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha = 0; \\ -1, & \alpha < 0. \end{cases} \tag{24.28}$$

Пример 24.6. Используя формулы Лобачевского (24.26), доказать справедливость соотношений

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} \pi/2, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha = 0; \\ -\pi/2, & \alpha < 0 \end{cases} \tag{24.29}$$

и

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\, dx = \frac{\pi}{4}[1 + \operatorname{sign}(\alpha - \beta)] = \begin{cases} \pi/2, & \alpha > \beta; \\ \pi/4, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha < \beta, \end{cases} \tag{24.30}$$

если $\alpha, \beta > 0$.

Решение. 1. При $\alpha \neq 0$ интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin|\alpha|x}{x}dx$$

простой заменой $|\alpha|x = y$ сводится к интегралу

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin|\alpha|x}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y/|\alpha|}d\Big(\frac{y}{|\alpha|}\Big) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}dy,$$

представляющему частный случай интеграла (24.26) с функцией $f(x) = 1$, удовлетворяющей условиям (24.27), поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin|\alpha|x}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty} 1\cdot\frac{\sin y}{y}dy = \int\limits_0^{\pi/2} 1\,dy = \frac{\pi}{2}$$

или

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin|\alpha|x}{x}dx = \frac{\pi}{2}. \tag{24.31}$$

Здесь мы учли доказанную в примере 21.10 сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}dy,$$

необходимую для применения формулы Лобачевского.

Используя нечетность функции $\sin x$, из (24.31) найдем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(-|\alpha|x)}{x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin|\alpha|x}{x}dx = -\frac{\pi}{2}. \tag{24.32}$$

Поскольку $\sin\alpha x = 0$ при $\alpha = 0$, то оба случая $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$ с помощью (24.31) и (24.32) можно объединить одной формулой

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \left\{\begin{array}{rl} \pi/2, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha = 0; \\ -\pi/2, & \alpha < 0 \end{array}\right\} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha,$$

совпадающей с (24.29).

2. В интеграле $I(\alpha,\beta)$ четность $\cos x$ и нечетность $\sin x$ позволяют величины α и β всегда выбрать заведомо положительными, а известное тригонометрическое равенство

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

позволяет записать этот интеграл в виде

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \sin\alpha x\cos\beta x\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x]\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}[I(\alpha+\beta) + I(\alpha-\beta)].$$

Теперь, воспользовавшись формулой (24.29), имеем

$$I(\alpha+\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha+\beta > 0,$$

$$I(\alpha-\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\alpha-\beta),$$

откуда для интеграла

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \sin\alpha x\cos\beta x\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}[I(\alpha+\beta) + I(\alpha-\beta)] = \frac{\pi}{4}[1+\operatorname{sign}(\alpha-\beta)]$$

получим представление, совпадающее с (24.30).

$\Diamond$ Интегралы $I(\alpha)$ (24.29) и $I(\alpha,\beta)$ (24.30) иногда называют *разрывными множителями Дирихле*.

Пример 24.7. Используя разрывный множитель Дирихле, доказать справедливость соотношений для положительных α и β:

$$J(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\beta x}{x}dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\beta, & \alpha \geqslant \beta; \\ \dfrac{\pi}{2}\alpha, & \alpha \leqslant \beta; \end{cases} \tag{24.33}$$

$$J = \int\limits_0^{+\infty} (\sin\alpha x - \sin\beta x)^2\frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}|\alpha-\beta|. \tag{24.34}$$

Решение. 1. Однократное интегрирование по частям дает для интеграла $J(\alpha,\beta)$

$$J(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \sin\alpha x\sin\beta x\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \sin\alpha x\sin\beta x, & du = (\alpha\cos\alpha x\sin\beta x + \beta\sin\alpha x\cos\beta x)dx \\ dv = -\dfrac{dx}{x^2}, & v = -\dfrac{1}{x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} (\alpha\cos\alpha x\sin\beta x + \beta\sin\alpha x\cos\beta x)\frac{dx}{x} =$$

$$= \beta I(\alpha,\beta) + \alpha I(\beta,\alpha).$$

Приняв во внимание разрывный множитель Дирихле (24.30), это равенство можно записать в виде

$$J(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{4}\big\{\beta[1+\operatorname{sign}(\alpha-\beta)] + \alpha[1+\operatorname{sign}(\beta-\alpha)]\big\} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\big\{(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)\operatorname{sign}(\alpha-\beta)\big\} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\beta, & \alpha \geqslant \beta; \\ \dfrac{\pi}{2}\alpha, & \alpha \leqslant \beta, \end{cases}$$

совпадающее с (24.33).

2. Тождественные преобразования позволяют интеграл J свести к сумме интегралов:

$$J = \int\limits_0^{+\infty} (\sin\alpha x - \sin\beta x)^2 \frac{dx}{x^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2\alpha x}{x^2}dx - 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2\beta x}{x^2}dx =$$
$$= J(\alpha,\alpha) - 2J(\alpha,\beta) + J(\beta,\beta),$$

для каждого из которых можно воспользоваться равенством (24.33), тогда

$$J = \int\limits_0^{+\infty} (\sin\alpha x - \sin\beta x)^2 \frac{dx}{x^2} = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta) - \pi\beta = \dfrac{\pi}{2}(\alpha-\beta), & \alpha \geqslant \beta \\ \dfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta) - \pi\alpha = \dfrac{\pi}{2}(\beta-\alpha), & \alpha \leqslant \beta \end{matrix} \right\} = \frac{\pi}{2}|\alpha-\beta|,$$

т.е. приходим к (24.34).

Задания для самоконтроля

Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Первообразная на отрезке и интервале. Теоремы о первообразных. Неопределенный интеграл, его свойства
2. Таблица основных формул интегрирования. Возможность записи первообразных в различных формах. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции
3. Методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Подведение под знак дифференциала. Наиболее распространенные варианты подведения под знак дифференциала. Внесение под знак дифференциала $|x|$
4. Методы интегрирования. Общий вид соотношения, являющегося основой метода замены переменных. Интегрирование методом подстановки и замены переменных
5. Методы интегрирования. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Обобщенная формула интегрирования по частям
6. Комбинирование методов интегрирования по частям и методов замены переменной
7. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен, методом выделения полного квадрата. Интегрирование по частям функций, содержащих полиномы как множители
8. Повторное интегрирование по частям и циклические интегралы, схема образования цикла
9. Разложение полиномов на множители. Вещественные и комплексные корни, учет кратности корней. Общий вид разложения
10. Рациональные дроби, выделение целой части. Простейшие рациональные дроби и их классификация
11. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Вещественные и комплексные корни, учет кратности корней. Общий вид разложения
12. Интегрирование правильных рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов. Различные способы нахождения коэффициентов
13. Интегрирование простейших иррациональностей. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей
14. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера. Геометрический смысл подстановков Эйлера
15. Интегрирование выражений, содержащих квадратичные иррациональности с помощью подстановки Абеля и другие способы*
16. Интегрирование по частям с помощью рекуррентных соотношений и метода неопределенных коэффициентов
17. Интегрирование дифференциального бинома. Подстановки Чебышева. Эллиптические интегралы
18. Возможности использования рекуррентных соотношений при интегрировании дифференциальных биномов*
19. Вычисление интегралов от тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка и другие рекомендации
20. Интегрирование выражений, содержащих гиперболические функции. Универсальная и логарифмическая подстановки и другие рекомендации
21. Интегрирование функций, содержащих разрывы первого рода и другие интегралы специальных видов*
22. Физические и геометрические интерпретации неопределенного интеграла
23. Определенный интеграл. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла
24. Определенный интеграл. Разбиение отрезка и выборка разбиения. Составление интегральной суммы. Определение интеграла Римана по Коши и Гейне
25. Суммы Дарбу и их основные свойства
26. Формулировка условий существования определенного интеграла в терминах сумм Дарбу

27. Теоремы, определяющие классы интегрируемых функций. Простейшие примеры вычисления определенных интегралов с помощью интегральных сумм
28. Интегральная сумма, альтернативная интегральной сумме Римана, на примере быстро колеблющихся функций
29. Однородные свойства определенных интегралов
30. Аддитивные свойства определенных интегралов и оценки определенных интегралов
31. Первая интегральная теорема о среднем. Неравенство Коши–Буняковского
32. Вторая интегральная теорема о среднем
33. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом
34. Связь определенного и неопределенного интегралов. Теорема Ньютона–Лейбница
35. Замена переменной в определенном интеграле
36. Интегрирование по частям в определенном интеграле
37. Измеряемость геометрических объектов. Определение ломаных, многоугольников и многогранников с помощью точных граней. Три основных свойства измеряемых объектов
38. Вектор-функция скалярного аргумента. Предел, непрерывность и производная
39. Простые, параметризуемые и гладкие кривые
40. Достаточные условия спрямляемости кривой. Производная и дифференциал переменной длины дуги. Вычисление длины кривой интегрированием модуля вектор-функции
41. Вычисление длины дуги в декартовой и полярной системах координат, а также кривой, заданной параметрически. Простые примеры
42. Условия квадрируемости и классы квадрируемых плоских фигур
43. Вычисление площадей плоских фигур. Площадь криволинейной трапеции. Площадь криволинейного сектора.
44. Вычисление площади поверхности вращения в декартовой и полярной системах координат
45. Параллелепипед и цилиндрическое тело. Условия кубируемости и классы кубируемых тел
46. Вычисление объемов пространственных тел: объем тела с заданными площадями поперечных сечений, объем тел вращения
47. Общая схема применения определенного интеграла. Построение интегральных сумм с помощью приращений
48. Физические приложения определенного интеграла. Вычисление механических характеристик плоских кривых
49. Масса материальной кривой, ее центр тяжести (центр масс) и моменты инерции. Первая теорема Гульдена. Работа переменной силы
50. Вычисление механических характеристик плоских фигур: статические моменты и моменты инерции, центр тяжести (масс). Вторая теорема Гульдена
51. Несобственные интегралы первого рода на полубесконечных и бесконечных промежутках интегрирования. Простейшие (эталонные) виды несобственных интегралов первого рода
52. Свойства несобственных интегралов первого рода. Корректность замены переменной и интегрирование по частям для несобственных интегралов первого рода
53. Условия сходимости несобственных интегралов первого рода от неотрицательных функций. Первый и второй признаки сравнения
54. Теоремы о признаках сравнения Коши (общем и предельном) для несобственных интегралов первого рода
55. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов первого рода
56. Несобственные интегралы первого рода в смысле главного значения
57. Несобственные интегралы второго рода

58. Особые точки (правая, левая, внутренняя) подынтегральных функций интегралов 2-го рода. Свойства несобственных интегралов второго рода: корректность замены переменной, интегрирование по частям и связь с несобственными интегралами первого рода
59. Признаки сравнения для установления сходимости несобственных интегралов второго рода
60. Эталонные несобственные интегралы второго рода. Теоремы о признаках сравнения Коши (общем и предельном) для несобственных интегралов второго рода
61. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов второго рода. Абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля
62. Несобственные интегралы второго рода в смысле главного значения
63. Несобственные интегралы третьего рода. Формула Фруллани. Формулы Лобачевского

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Найти интегралы

1) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^4}}$ 2) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$ 3) $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$

4) $\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$ 5) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$ 6) $\int \sin(2x+3)dx$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-1)}$ 8) $\int \frac{3x-4}{x^2-4}dx$ 9) $\int \operatorname{ctg}^2 2x\,dx$

10) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^6}}$ 11) $\int x^2\cos 3x\,dx$ 12) $\int \cos(\ln x)dx$

13) $\int x\ln^2 x\,dx$ 14) $\int xe^{-x/2}dx$ 15) $\int \arcsin x\,dx$

16) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$ 17) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$ 18) $\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-x+1}dx$

19) $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$ 20) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$ 21) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}dx$

22) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 23) $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)}$ 24) $\int \frac{(x-8)dx}{x(x-2)^2}$

25) $\int \frac{(x^3-6)dx}{(x^2+2)(x^3+4)}$ 26) $\int \frac{x^4dx}{x^2-1}$ 27) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$

28) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 29) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$ 30) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx$

31) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$ 32) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x-3}$ 33) $\int \cos^4 x\sin^5 x\,dx$

34) $\int \sin 3x\cos 10x\,dx$ 35) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}$ 36) $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$

37) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$ 38) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ 39) $\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$

40) $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}dx$

1.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^1 x^3\operatorname{tg}(1-x^4)dx;\quad 2)\ \int\limits_{\pi/4}^3 (3x-x^2)\sin 2x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{\sqrt{2}/2}\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

1.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{\sin 2x}{2+\cos 2x},\ x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right];\quad 2)\ [x]x^3,\ x\in[1{,}3;15{,}2].$$

1.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_3^4\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}};\quad 2)\ \int\limits_0^2 e^{x^2-x}dx.$$

1.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{1-x^5}}dx,\quad 2)\ \int\limits_4^{\infty} \frac{1}{(x-1)x(x+3)}dx,\quad 3)\ \int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}},$$

$$4)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x^{1/3})dx}{x^{2/3}},\quad 5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{2+3e^{-x}}{2+3e^{-2x}}dx.$$

1.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{\infty} \sqrt{\ln\frac{x+3}{x}}\,\frac{dx}{x},\quad 2)\ \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1-x^2}dx,\qquad 3)\ \int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx,\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{1} x\cos(x^4)dx.$$

1.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \ x=5(t-\sin t),\ y=5(1-\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant \pi;$$
$$2)\ \ y^2=(x+1)^3,\ 0\leqslant x\leqslant 3;\quad 3)\ \ \rho=4+4\sin\varphi.$$

1.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ x^2+y^2=4x,\ y^2\leqslant 2x;\quad 2)\ \rho=2R\cos 3\varphi,\ \rho\leqslant R;$$
$$3)\ x=t^2,\ y=\arcsin t,\ x=1,\ |t|\leqslant 1.$$

1.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt[3]{y-1}$, $y=1$, $x=1$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

1.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y^2=4x,\quad z=0,\quad z=4-x.$$

1.11. Горизонтальный цилиндрический бак длиной 2 м и радиусом основания 0,5 м заполнен водой. Найти минимальную работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из бака.

1.12. Найти статистические моменты M_x и M_y кривой $\rho=2\sqrt{3}cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

1.13. Вычислить площадь веретенообразной поверхности, образованной вращением одной арки синусоиды $y=\sin x$ вокруг оси абсцисс.

1.14. Найти общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет вид $f(t)=\dfrac{4}{(t+1)^{3/2}}$.

1.15. Определить дисконтированный доход за 4 года при процентной ставке 7 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 3 млн. руб. в год.

Вариант № 2

2.1. Найти интегралы

$$1)\ \int\frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}\qquad 2)\ \int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx\qquad 3)\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{5+x^6}}$$

$$4)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\qquad 5)\ \int\cos^3 x\sin 2x\,dx\qquad 6)\ \int\frac{x\,dx}{1+x^4}$$

$$7)\ \int e^{\operatorname{tg}2x}\frac{dx}{\cos^2 2x}\qquad 8)\ \int\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx\qquad 9)\ \int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$$

$$10)\ \int\sin(3x-5)dx\qquad 11)\ \int x^2e^{-x}dx\qquad 12)\ \int\ln(4x^2+1)dx$$

13) $\int x\cos 2x\,dx$ 14) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$ 15) $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ 17) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ 18) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$

19) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 20) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 21) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$

22) $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^2(x-2)}$ 23) $\int \frac{x^2dx}{(x^2+4)(x^2-4)}$ 24) $\int \frac{x^5dx}{x^3-1}$

25) $\int \frac{x^3dx}{x^2+x+1/2}$ 26) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}dx$ 27) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$

28) $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$ 29) $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx$ 30) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$

31) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx$ 32) $\int (3+\cos 2x)\sin^2 x\,dx$ 33) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

34) $\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{2}dx$ 35) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$ 36) $\int \cos x\cos 3x\,dx$

37) $\int \cos^4 2x\,dx$ 38) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$ 39) $\int \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$

40) $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$

2.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^1 \frac{x^7dx}{1+x^8};\quad 2)\ \int_0^{2\pi}(3x^2+5)\cos 2x\,dx;\quad 3)\ \int_0^1\frac{x^4dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

2.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=x\sqrt{x^2+1},\ x\in[0,3];\quad 2)\ y=\frac{[x]}{x^4},\ x\in[2{,}4;25{,}3].$$

2.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}dx,\quad 2)\ \int_{-1}^1 e^{-x^2}dx.$$

2.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^xdx}{(2+e^x)^2},\quad 2)\ \int_1^{\infty}\frac{dx}{x[(\ln x)^2+9]},\quad 3)\ \int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx,$$

$$4)\ \int_4^{\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx,\quad 5)\ \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}2x-\operatorname{arctg}3x}{x}dx,\quad 6)\ \int_0^{+\infty}\Big(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\Big)\frac{dx}{x}.$$

2.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int_1^{+\infty}\cos\frac{\pi x}{2x+1}dx,\quad 2)\ \int_0^1\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx,\quad 3)\ \int_1^{\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}dx,\quad 4)\ \int_1^{+\infty}x\sin(x^4)dx.$$

2.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2;$$
$$2)\ y = cos^3 t, \quad x = \sin^3 t, \quad 3)\ \rho = \sin^4\frac{\varphi}{2}.$$

2.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y = x - x^2\sqrt{x},\ y = 0; \quad 2)\ \rho = 1 + \cos 2\varphi;$$
$$3)\ y = R(1 - \cos t),\ x = R(1 - \sin t),\ x = 0,\ y = 2R.$$

2.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $(y-1)^2 = x$, $y = 2$, $x = 0$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

2.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1, \quad z = 2, \quad z = -1.$$

2.11. Найти кинетическую энергию однородного стержня массой M и длиной L, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через один из его концов.

2.12. Найти координаты центра масс однородной цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}(x - a)$, $|x| < a$.

2.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y^2 = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3/2$, вокруг оси Ox.

2.14. Определить скорость оттока рабочей силы, если: $f(t)L(T - t) = 3t + 2\sqrt{t}$, $f(t) = 0{,}75$, $t_0 = 0$, $T = 16$.

2.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 5 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 30 млн. руб., а ожидаемая прибыль 3 млн. руб. в год.

Вариант № 3

3.1. Найти интегралы

1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x(2\,\mathrm{tg}\,x + 1)}$ 3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}^3\, x}{1 + x^2}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\arccos x}$ 5) $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{1 + 3\sin x}$ 6) $\displaystyle\int \sqrt[6]{5 - 6x}\, dx$

7) $\displaystyle\int \frac{1 - 2\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$ 8) $\displaystyle\int e^{x^5} x^4 dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^4}}$

10) $\displaystyle\int \cos(a - bx)dx$ 11) $\displaystyle\int x\cos^2 x\, dx$ 12) $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$

13) $\displaystyle\int x^3 \sin x^2 dx$ 14) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}dx$ 15) $\displaystyle\int e^x \sin 3x\, dx$

16) $\displaystyle\int \frac{(2x - 8)dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$ 17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ 18) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^2 - 4x + 5}$

19) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}dx$ 20) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}$ 21) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 - \sqrt[3]{x}}$

22) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4 + x} + 2}$ 23) $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 12}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)}dx$ 24) $\displaystyle\int \frac{(3x + 2)dx}{x(x + 1)^3}$

25) $\displaystyle\int \frac{(3x - 7)dx}{(x^2 + 4)(x + 1)}$ 26) $\displaystyle\int \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{(x - 2)^2}dx$ 27) $\displaystyle\int \frac{x^5 dx}{x^3 + 1}$

28) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}dx$ 29) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x}dx$ 30) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

31) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[4]{\sin x}}$ 32) $\displaystyle\int \sin^3 2x\cos^2 2x\,dx$ 33) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x-5\cos x+4}$

34) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^4 2x\,dx$ 35) $\displaystyle\int \frac{dx}{5\cos^2 x-1}$ 36) $\displaystyle\int \sin x\sin 5x\,dx$

37) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$ 38) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{b^2+\cos^2 x}dx$ 39) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx$

40) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x}$

3.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx;\quad 2)\ \int\limits_0^{\pi}(9x^2+9x+11)\cos 3x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{2}\sqrt{4-x^2}dx.$$

3.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{4x}{2x^2+3x-2},\ x\in[1,3];\quad 2)\ y=\frac{[x]}{x},\ x\in[1{,}5;8{,}2].$$

3.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\arcsin(x^2)dx;\quad 2)\ \int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx.$$

3.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_1^3\frac{dx}{x[(\ln x)^2-1]},\quad 2)\ \int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx,\quad 3)\ \int\limits_0^1\frac{1}{\sin x}dx,\quad 4)\ \int\limits_4^{\infty}\frac{x}{2^{3x}}dx$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^1\frac{x^2-x^5}{\ln x}dx.$$

3.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{3\sin^2(x^4)-2}{x}dx,\quad 2)\ \int\limits_0^1\frac{3}{\sqrt{1-x^4}}dx,\quad 3)\ \int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}dx,\quad 4)\ \int\limits_0^{+\infty}\ln\Big(\frac{x+2}{x+1}\Big)\frac{dx}{x}.$$

3.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2},\quad 1\leqslant x\leqslant 2;$$
$$2)\ y=3(t-\cos t),\ x=3\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi;\quad 3)\ \rho=3-3\sin\varphi.$$

3.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ x^2=4y,\ y=\frac{3}{x^2+4};\quad 2)\ \rho=5\sin 3\varphi;\quad 3)\ x=t^2-4,\ y=t^3-4t.$$

3.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x\cos x$, $y=0$, $x\in[0;3\pi/2]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

3.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \leqslant \frac{1}{2}.$$

3.11. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического котла радиуса $R = 10$ м.

3.12. Найти координаты центра масс однородной дуги кривой $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$.

3.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 4x$ вокруг оси абсцисс, от вершины до точки с абсциссой $x = 3$.

3.14. Найти среднее время, которое затрачено на освоение выпуска одного изделия в период освоения от 10 до 20 изделий, если затрата времени на одно изделие $a = 200$ мин., показатель производственного процесса $b = 0{,}5$.

3.15. Определить дисконтированный доход за 10 лет при процентной ставке 2 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 3 млн. руб., а ожидаемая прибыль 1 млн. руб. в год.

Вариант № 4

4.1. Найти интегралы

1) $\int (3-2x)^4 dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+3x}}$ 3) $\int \frac{e^{2x}dx}{1+3e^{2x}}$

4) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$ 5) $\int e^{1/x}\frac{dx}{x^2}$ 6) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-1}}$

7) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$ 8) $\int e^x \operatorname{ctg} e^x dx$ 9) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx$

10) $\int \frac{dx}{9x^3+4}$ 11) $\int xe^{-2x}dx$ 12) $\int x \arccos x\,dx$

13) $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$ 14) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$ 15) $\int e^{3x}\sin x\,dx$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-2}}$ 17) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ 18) $\int \frac{3x-2}{x^2-6x+10}dx$

19) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 20) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$ 21) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

22) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$ 23) $\int \frac{5x^3+2x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$ 24) $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$

25) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$ 26) $\int \frac{x^4dx}{x^2+4}$ 27) $\int \frac{3x^2-1}{4x^2-4x+17}dx$

28) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$ 29) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ 30) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$

31) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ 32) $\int \sin^7 x\,dx$ 33) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

34) $\int \operatorname{tg}^4 x\sec^4 x\,dx$ 35) $\int \frac{dx}{5+4\sin 2x}$ 36) $\int \sin 4x\sin 6x\,dx$

37) $\int \sin^4 2x\,dx$ 38) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$ 39) $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}dx$

40) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

4.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+1}};\quad 2)\ \int\limits_0^{2\pi}(3-7x^2)\cos 2x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx.$$

4.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ x\in[0,a];\quad 2)\ y=[x^2],\ x\in[\sqrt{2{,}3};\sqrt{34{,}2}].$$

4.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{7-2\cos x},\quad 2)\ \int\limits_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx.$$

4.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x[(\ln x)^2+9]},\quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x},\quad 3)\ \int\limits_0^1\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{1-x^5}}dx,$$

$$4)\ \int\limits_2^{\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx,\quad 5)\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 3x-\sin 5x}{x}dx,\quad 6)\ \int\limits_2^{+\infty}(e^{-x}-e^{4x})^2\frac{dx}{x^2}.$$

4.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^3\frac{x\,dx}{\cos x},\quad 2)\ \int\limits_3^4\frac{x}{(4-x)^2}dx,\quad 3)\ \int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)\sqrt{x}}dx,\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x\sin(e^{4x})dx.$$

4.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \rho=\cos^4(\varphi/4);\quad 2)\ x=4\cos t,\ y=-4(t+\sin t),\ -\pi\leqslant t\leqslant\pi;$$
$$3)\ y=-\ln(\cos x),\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}.$$

4.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ 4y=8x-x^2,\ 4y=x+6;\quad 2)\ \rho=5-4\sin\varphi;$$
$$3)\ x=3\cos t,\ y=8\sin t,\ y\geqslant 4.$$

4.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x\sin x$, $y=0$, $x\in[0,2\pi]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

4.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2=a^2.$$

4.11. Растяжение пружины пропорционально приложенной силе. Найти работу, затрачиваемую на растяжение пружины на 0,1 м, если сила 10 Н растягивает ее на 0,02 м.

4.12. Найти моменты инерции I_x и I_y кривой арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

4.13. Найти координаты центра тяжести полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

4.14. Найти объем произведенной продукции за два года, если задана функция Кобба–Дугласа $g(t) = (3+t)e^{2t}$.

4.15. Определить дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке 8 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 1 млн. руб. в год.

Вариант № 5

5.1. Найти интегралы

1) $\int e^{x^2} x\,dx$	2) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$	3) $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$
4) $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx$	5) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[5]{\cos 3x}}dx$	6) $\int \frac{e^x}{9+e^{2x}}dx$
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$	8) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	9) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-16x^2}}$
10) $\int e^{2x}\operatorname{ctg} e^{2x}dx$	11) $\int xe^{-3x}dx$	12) $\int x\arcsin x\,dx$
13) $\int \ln(x^2+4)dx$	14) $\int x^3\cos x^2dx$	15) $\int e^x\cos 4x\,dx$
16) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$	17) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$	18) $\int \frac{5x+1}{x^2+4x+5}dx$
19) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$	20) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$	21) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}dx$
22) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$	23) $\int \cos^4 2x\,dx$	24) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$
25) $\int \frac{x^2-3}{(x^2+2)(x^2+3)}dx$	26) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$	27) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$
28) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$	29) $\int x(1+x)^{3/2}dx$	30) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^3)^{5/3}}$
31) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos x}}dx$	32) $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x\,dx$	33) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$
34) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$	35) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x}dx$	36) $\int \sin 2x\cos^2 x\,dx$
37) $\int \operatorname{ctg}^3 3x\,dx$	38) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$	39) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+2}}$
40) $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$		

5.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx;\quad 2)\ \int_0^2 x3^{x^2}dx;\quad 3)\ \int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx.$$

5.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{1}{x+x^3},\ x\in[1,\sqrt{3}];\quad 2)\ y=\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right],\ x\in[0{,}04;0{,}81].$$

5.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sin x}{x}dx;\quad 2)\ \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^4}dx.$$

5.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6},\quad 2)\ \int_0^{+\infty}\frac{e^{-2/x}dx}{x^2},\quad 3)\ \int_0^{1/2}\frac{1}{x-x^2}dx,$$

$$4)\ \int_0^{\infty}x\operatorname{arctg}x\,dx,\quad 5)\ \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+2x)-2\ln(1+x)}{x^2}dx,\quad 6)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x\sin 5x}{x}dx.$$

5.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int_1^{+\infty}x\sin(e^{-x})dx,\quad 2)\ \int_0^3\frac{2+\sin x}{(x-1)^2}dx,\quad 3)\ \int_1^{\infty}\frac{x-2}{x\sqrt[3]{x^4+1}}dx,\quad 4)\ \int_1^{+\infty}\frac{6\cos^2(x^2)-3}{x}dx.$$

5.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \rho=5(1-\cos\varphi),\ -\pi/3\leqslant\varphi\leqslant 0;$$
$$2)\ y=-2\cos t,\ x=2(t+\sin t),\ 0\leqslant t\leqslant 4\pi;\quad 3)\ y^2=x+4,\ -2\leqslant x\leqslant 2.$$

5.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ xy+4=0,\ y-x=5;\quad 2)\ \rho=1-2\sin\varphi;$$
$$3)\ x=4(t-\sin t),\ y=4(1-\cos t),\ y=6,\ x=0,\ x=8\pi.$$

5.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=2/\sqrt{1+x^2}$, $y=\sqrt{2}$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

5.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\quad z\leqslant k^2.$$

5.11. Найти силу давления воды на вертикальную круглую заслонку радиуса $R=$ 0,5 м, центр которой погружен в воду на глубину 0,5 м.

5.12. Найти статический момент дуги эллипса

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1,$$

лежащей в первом квадранте, относительно оси абсцисс.

5.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y=x^{2/3}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, вокруг оси Ox.

5.14. Найти объем произведенной продукции за третий и четвертый часы работы, если производительность труда описывается функцией времени $f(t)=\dfrac{2t+3}{3t+1}+5$.

5.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 8 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 20 млн. руб., а ожидаемая прибыль 2 млн. руб. в год.

Вариант № 6

6.1. Найти интегралы

$$1)\ \int\frac{dx}{\cos^2 7x}\qquad 2)\ \int\operatorname{tg}3x\,dx\qquad 3)\ \int\frac{\operatorname{tg}2x}{\cos^2 2x}dx$$

$$4)\ \int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}dx\qquad 5)\ \int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx\qquad 6)\ \int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$$

7) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16x^4+9}}$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+4}$ 9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

10) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$ 11) $\displaystyle\int xe^{x/3}dx$ 12) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

13) $\displaystyle\int x^2\cos 2x\,dx$ 14) $\displaystyle\int x^3\cos(2x^2)dx$ 15) $\displaystyle\int e^x\sin 5x\,dx$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$ 17) $\displaystyle\int \frac{3-x}{\sqrt{3+2x+x^2}}dx$ 18) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{3x^2-3x+2}dx$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ 20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(9-x^3)^3}}{x^6}dx$ 21) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$

22) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$ 23) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ 24) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$

25) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^3+x}dx$ 26) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$ 27) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x+1)^4}$

28) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ 29) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 30) $\displaystyle\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}dx$

31) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$ 32) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x\,dx$ 33) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

34) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+5)}$ 35) $\displaystyle\int \sin^6\frac{x}{2}dx$ 36) $\displaystyle\int \cos x\cos 5x\,dx$

37) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$ 38) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$ 39) $\displaystyle\int \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

40) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx$

6.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx;\quad 2)\ \int\limits_{0}^{1/2} \arcsin 2x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_{0}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

6.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=x^2\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[0,a];\quad 2)\ y=[x]|\sin\pi x|,\ x\in[0{,}25;25{,}2].$$

6.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1+0{,}5\sin^2 x}dx;\quad 2)\ \int\limits_{-1}^{1} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$$

6.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh} x},\quad 2)\ \int\limits_{0}^{\pi/2} x\operatorname{ctg}^2 x\,dx,\quad 3)\ \int\limits_{1}^{4} \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx,\quad 4)\ \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx,$$

$$5)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2x-2\sin x}{x^2}dx,\quad 6)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\cos 3x\,dx.$$

6.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cos(e^{-x})}{2^x+x}dx; \quad 2)\ \int\limits_0^2 \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}dx; \quad 3)\ \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{x+1}}dx; \quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x\sin 2x}{\sqrt{x}}dx.$$

6.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ x=\cos^4 t, \quad y=\sin^4 t;$$
$$2)\ y^2=x+9,\ -3\leqslant y\leqslant 3; \quad 3)\ \rho=\frac{e^{\varphi}}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

6.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y=2x-x^2,\ y=-x; \quad 2)\ x=2+2\cos 2\varphi,\ y=2+\sin\varphi;$$
$$3)\ x=R\cos^3 t,\ y=R\sin^3 t.$$

6.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=|\sin 2x|$, $y=0$, $x\in[0,\pi]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

6.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1, \quad z=\sqrt{3}\,y, \quad z=0.$$

6.11. Вычислить работу, которую нужно совершить, чтобы выкачать воду из резервуара конической формы с вершиной, обращенной вниз. Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса $R=1$ м, высота конуса $H=2$ м.

6.12. Найти координаты центра масс однородной дуги кривой $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

6.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $\rho=\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

6.14. Найти объем выпуска продукции за шесть лет, если в функции Кобба – Дугласа $g(t)=(2t+3)e^{4t}$.

6.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 3 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 40 млн. руб., а ожидаемая прибыль 4 млн. руб. в год.

Вариант № 7

7.1. Найти интегралы

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 5x}$	2) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}(2x+3)dx$	3) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$
4) $\displaystyle\int\frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	5) $\displaystyle\int(a^{5x}+e^{5x})dx$	6) $\displaystyle\int\frac{dx}{4-9x^2}$
7) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$	8) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$	9) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{2\sin x+5}dx$
10) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{9-e^{4x}}}$	11) $\displaystyle\int xe^{x/2}dx$	12) $\displaystyle\int x\ln(1+x)dx$
13) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$	14) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x}$	15) $\displaystyle\int e^{3x}\cos x\,dx$
16) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$	17) $\displaystyle\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$	18) $\displaystyle\int\frac{(4x+1)dx}{x^2-2x+2}$
19) $\displaystyle\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$	20) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$	21) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$ 23) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}dx$ 24) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

25) $\displaystyle\int \frac{5x^2+2}{x^2+2x+10}dx$ 26) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+8}$ 27) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}dx$

28) $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$ 29) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 30) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

31) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ 32) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$ 33) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\sin x}$

34) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ 35) $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$ 36) $\displaystyle\int \cos 2x\cos 3x\,dx$

37) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ 38) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}$ 39) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

40) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

7.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{\pi} \sin^2 4x\,dx;\quad 2)\ \int\limits_0^{\pi/2} (1-5x^2)\sin x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx.$$

7.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\operatorname{tg} x\ln(\cos x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right];\quad 2)\ y=\max(1,x^2),\ x\in[-10,20].$$

7.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{-3}^{7} \frac{(x+3)dx}{x^2+7};\quad 2)\ \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}.$$

7.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^{3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x},\quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}},\quad 3)\ \int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}dx,\quad 4)\ \int\limits_{2/\pi}^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx,$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{3\sin 2x-2\sin 3x}{x^2}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x\sin 3x}{x^2}dx.$$

7.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{3} \frac{\sin 2x\,dx}{e^{x^2}-1},\quad 2)\ \int\limits_0^{3} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx,\quad 3)\ \int\limits_2^{\infty} \frac{e^x}{x^5}dx,\quad 4)\ \int\limits_0^{3} \frac{x\,dx}{\ln^2(7-2x)}.$$

7.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y=\ln(\cos x),\ 0\leqslant x\leqslant 1;$$
$$2)\ y=\cos^3 t,\ x=\sin^3 t,\ -\pi/4\leqslant t\leqslant \pi/4;\qquad 3)\ \rho=2+2\sin\varphi.$$

7.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y=\sqrt{25-x^2},\ 2y\leqslant x+5;\quad 2)\ \rho=2,\ \rho=2(1-\cos\varphi);$$
$$3)\ x=6\cos t,\ y=4\sin t,\ y\geqslant 2\sqrt{3}.$$

7.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=0$, $x\in[-\pi/2,\pi/2]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

7.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=ax,\quad x-z=0,\quad z\geqslant 0.$$

7.11. Определить кинетическую энергию диска массой M и радиусом R, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости.

7.12. Найти координаты центра тяжести первой арки циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$.

7.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $3\rho=2\cos\varphi$ вокруг полярной оси.

7.14. Найти среднее значение издержек $K(x)=2x^2+3x+1$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от 0 до 4. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

7.15. Определить дисконтированный доход за 6 лет при процентной ставке 5 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 20 млн. руб., а ожидаемая прибыль 1 млн. руб. в год.

Вариант № 8

8.1. Найти интегралы

1) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+3}}$	2) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x+1}}$	3) $\int\frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3}$
4) $\int\frac{dx}{\arccos^3 x\sqrt{1-x^2}}$	5) $\int\sin(\ln x)\frac{dx}{x}$	6) $\int e^{x/a}dx$
7) $\int\frac{dx}{1+2x^2}$	8) $\int\frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$	9) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^3}}$
10) $\int\frac{dx}{4x^2-25}$	11) $\int x^3\ln x\,dx$	12) $\int\arcsin^2 x\,dx$
13) $\int x\sin 5x\,dx$	14) $\int xe^{3x}dx$	15) $\int e^{2x}\cos x\,dx$
16) $\int\frac{(6x+1)dx}{\sqrt{x-x^2}}$	17) $\int\frac{(3x+2)dx}{x^2+8x+17}$	18) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$
19) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$	20) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$	21) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$
22) $\int\frac{\sqrt{2+x}}{x}dx$	23) $\int\frac{(3x+2)dx}{2x^2+x-3}$	24) $\int\frac{11x+16}{(x-1)^2(x+2)}dx$
25) $\int\frac{dx}{x^3-8}$	26) $\int\frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$	27) $\int\frac{dx}{x^3+4x}$
28) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$	29) $\int(1+x^{1/2})^{3/4}dx$	30) $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$
31) $\int\frac{\cos^3 x\,dx}{1+\sin x}$	32) $\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}$	33) $\int\sin 3x\cos x\,dx$
34) $\int(1-2\sin x)^3dx$	35) $\int\frac{dx}{\sin 2x}$	36) $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$

37) $\int(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)dx$ 38) $\int\sin^4 x\cos^6 x\,dx$ 39) $\int\frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

40) $\int\frac{(e^{2x}+1)e^x}{e^{2x}+9}dx$

8.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_{-1}^{0}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx;\quad 2)\ \int\limits_{1}^{2}x\ln^2 x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_{-3}^{3}x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

8.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)},\ x\in[-1,0];\quad 2)\ y=\frac{[x]}{x^2+[x^2]},\ x\in[1{,}2;5{,}6].$$

8.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{3-\cos x};\quad 2)\ \int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx.$$

8.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{0}^{3}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x}};\quad 2)\ \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{x^3}dx;\quad 3)\ \int\limits_{0}^{1}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx;\quad 4)\ \int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx;$$

$$5)\ \int\limits_{0}^{+\infty}(\sin 2x-\sin 3x)^2\frac{dx}{x^2};\quad 6)\ \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-\sqrt{3}x}}{x}dx.$$

8.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+3x}-x^{2/3}}{x+1}dx,\quad 2)\ \int\limits_{1}^{2}\frac{8}{\ln x}dx,\quad 3)\ \int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin 2x}{4x}dx,\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x\sin(e^{5x})dx.$$

8.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \rho=3e^{\varphi/3},\ -\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2;$$
$$2)\ y=\cos t+\sin t,\ x=\sin t-t\cos t,\ -\pi\leqslant t\leqslant\pi;\quad 3)\ y=\ln(\sin x),\ \frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

8.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1;\quad 2)\ \rho=4\sin^2\varphi;$$
$$3)\ x=8\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ x\geqslant 1.$$

8.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=2x/\pi$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

8.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1,\quad z=0,\quad z=1.$$

8.11. Определить количество тепла, выделяемого переменным током $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right)$ в течение периода T в проводнике с сопротивлением R.

8.12. Найти статистические моменты M_x и M_y кривой $x/a + y/b = 1$, $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$.

8.13. На каком расстоянии от геометрического центра лежит центр тяжести полушара радиуса R?

8.14. Найти объем произведенной продукции за первый час работы, если производительность труда описывается функцией времени $f(t) = -3t^2 + 4t + 32$.

8.15. Определить дисконтированный доход за 10 лет при процентной ставке 10 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 100 млн. руб., а ожидаемая прибыль 10 млн. руб. в год.

Вариант № 9

9.1. Найти интегралы

1) $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^4 2x}$ 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3 + 2\operatorname{tg} x)}$ 3) $\int \frac{\cos x\, dx}{a^2 + \sin^2 x}$

4) $\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2}$ 5) $\int x3^{x^2} dx$ 6) $\int \frac{a^x dx}{1 + a^{2x}}$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x}}$ 8) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 - x^{10}}}$ 9) $\int \frac{dx}{x(1 - \ln^2 x)}$

10) $\int e^{\operatorname{ctg} x}\frac{dx}{\sin^2 x}$ 11) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$ 12) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

13) $\int x^2 e^{3x} dx$ 14) $\int x\cos 3x\, dx$ 15) $\int \cos(\ln x) dx$

16) $\int \frac{(5x + 4)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ 17) $\int \frac{(x + 3)dx}{x^2 - 2x + 2}$ 18) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

19) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ 20) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ 21) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$

22) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$ 23) $\int \frac{dx}{(x + a)(x + b)}$ 24) $\int \frac{(x + 2)dx}{x^2(x - 2)}$

25) $\int \frac{(7x - 15)dx}{x^3 - 2x^2 + 5x}$ 26) $\int \frac{(5x - 1)dx}{(x - 1)^2(x - 2)}$ 27) $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2} dx$

28) $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt[3]{3x + 1}}$ 29) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ 30) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2 - x^3}}$

31) $\int \frac{dx}{5 - 4\cos 2x}$ 32) $\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \cos x}$ 33) $\int \cos^6 x \sin^2 x\, dx$

34) $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ 35) $\int \operatorname{ctg}^5 x\, dx$ 36) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$

37) $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$ 38) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ 39) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}$

40) $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x}$

9.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln(\cos x) dx; \quad 2)\ \int\limits_{-2}^{0} (x + 2)^2 \cos 3x\, dx; \quad 3)\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}.$$

9.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y = \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2},\ x \in [\pi, 2\pi]; \quad 2)\ y = \frac{1}{1 + [x]},\ x \in [0{,}5; 4{,}5].$$

9.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_0^{\ln 5} xe^{-x}dx; \quad 2)\ \int\limits_0^2 \sqrt{1-(x-1)^4}\,dx.$$

9.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}, \quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}, \quad 3)\ \int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{1+\sin x}dx, \quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x}dx,$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{3+4e^{-x}}{3+4e^{-4x}}\frac{dx}{x}, \quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{3\sin 2x - 2\sin 3x}{x^2}dx.$$

9.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^3 xe^{1/x}dx, \quad 2)\ \int\limits_1^{+\infty} x^2\sin(x^4)dx, \quad 3)\ \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx, \quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+3x^2+1}dx.$$

9.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t; \quad 2)\ y^2=(x+1)^3,\ -2\leqslant y\leqslant 2; \quad 3)\ \rho = 3-3\cos\varphi.$$

9.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y=(3-x)\ln(x+1),\ y=0; \quad 2)\ \rho=4(1+\cos\varphi),\ \rho=\frac{3}{\cos\varphi};$$

$$3)\ x=1-\cos t,\ y=t-\sin t,\ y=\frac{\pi x}{2}.$$

9.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=2-(x-1)^2$, $y=1$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

9.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=-1, \quad z=16.$$

9.11. Найти силу давления воды на вертикальную заслонку в форме эллипса с полуосями a и b, центр которой погружен в воду на глубину $2b$.

9.12. Найти момент инерции I_x кривой $x^2+(y-a)^2=R^2$, $R\leqslant a$.

9.13. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осями координат и дугой астроиды из первого квадранта.

9.14. Найти среднее значение издержек $K(x)=2x^2+3x+4$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от 0 до 5. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

9.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 4 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 40 млн. руб., а ожидаемая прибыль 4 млн. руб. в год.

Вариант № 10

10.1. Найти интегралы

$$1)\ \int x(x^2+1)^4dx \qquad 2)\ \int \frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}dx \qquad 3)\ \int \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}dx$$

4) $\int a^{x^5} x^4 dx$ 5) $\int \cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^3}$ 6) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 4)}$

7) $\int \operatorname{tg}\sqrt{x-1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ 8) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}$ 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^3}}$

10) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$ 11) $\int x\sin 5x\, dx$ 12) $\int \ln^2 x\, dx$

13) $\int \arccos x\, dx$ 14) $\int x^3 e^{x^2} dx$ 15) $\int e^x \sin 2x\, dx$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 17) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx$ 18) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$

19) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$ 20) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$ 21) $\int \frac{2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+4)}$

22) $\int \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$ 23) $\int \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}dx$ 24) $\int \frac{3x-4}{x^5(x-2)}dx$

25) $\int \frac{x+2}{x^3+2x^2+2x}dx$ 26) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$ 27) $\int \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx$

28) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1-x^2}}$ 29) $\int x^{1/3}(2+x^{2/5})^{1/4}dx$ 30) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

31) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$ 32) $\int (1+2\cos x)^3 dx$ 33) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

34) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ 35) $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ 36) $\int \sin 3x\cos 7x\, dx$

37) $\int \sin^2 x\cos^2 x\, dx$ 38) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ 39) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

40) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+e^{-2x}}$

10.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}};\quad 2)\ \int\limits_0^1 (x+1)\ln^2(x+1)dx;\quad 3)\ \int\limits_{-2}^{0} \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx.$$

10.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5},\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];\quad 2)\ y = [x],\ x \in [0{,}5; 11{,}5].$$

10.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}dx;\quad 2)\ \int\limits_{-1}^{1} 2^{-x^2}dx.$$

10.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{\cos(x^{1/3})dx}{x^{1/3}};\quad 2)\ \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx;\quad 3)\ \int\limits_0^1 \frac{1}{1-x^4}dx;\quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} \frac{x}{x^2+2x-3}dx;$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x} + xe^{-x}}{x^2}dx; \quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x \sin 7x}{x}dx.$$

10.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{\infty} \sin\Big(\frac{4\pi x}{2x-1}\Big)\frac{dx}{x}, \quad 2)\ \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx, \quad 3)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}}dx, \quad 4)\ \int\limits_1^{\infty} \sqrt{\ln\frac{x^2+1}{x^2}}\,\frac{dx}{x}.$$

10.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y = \ln(\sin x),\ \pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/2;$$
$$2)\ y = \cos^3 t^2,\ x = \sin^3 t^2,\ -\sqrt{\pi} \leqslant t \leqslant \sqrt{\pi}; \quad 3)\ \rho = \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

10.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \frac{4x}{\pi}; \quad 2)\ \rho = 4\cos 3\varphi;$$
$$3)\ x = 3t^2,\ y = 3t - t^3.$$

10.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \sin|x|$, $x \in [-\pi, 2\pi]$, $y = 0$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

10.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z^2 + 5y^2 = x + 2, \quad x = 0.$$

10.11. Капля с начальной массой M, падая под действием силы тяжести, испаряется, теряя ежесекундно массу m. Найти работу силы тяжести за время от начала падения до полного испарения капли.

10.12. Найти координаты центра масс однородной дуги астроиды $x = a^3\sin^3 t$, $y = a^3\cos^3 t$, $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi/3$.

10.13. Найти момент инерции конуса, радиус основания которого R и высота H, относительно его оси.

10.14. Найти общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет вид $f(t) = \dfrac{4}{t^2+1}$.

10.15. Определить дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке 8 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 20 млн. руб., а ожидаемая прибыль 1 млн. руб. в год.

Вариант № 11

11.1. Найти интегралы

$$1)\ \int \sqrt{a-bx}\,dx \qquad 2)\ \int 4^{2-3x}dx \qquad 3)\ \int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}$$

$$4)\ \int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}dx \qquad 5)\ \int \cos\sqrt[3]{x}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad 6)\ \int \operatorname{tg}^2 5x\,dx$$

$$7)\ \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4}} \qquad 8)\ \int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}dx \qquad 9)\ \int \frac{dx}{x\ln^3 x}$$

$$10)\ \int \frac{dx}{9x^2-4} \qquad 11)\ \int x\cos 3x\,dx \qquad 12)\ \int \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$13)\ \int \ln(2x+1)dx \qquad 14)\ \int x^3 2^{-x^2}dx \qquad 15)\ \int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$16)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}} \qquad 17)\ \int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+3}}dx \qquad 18)\ \int \frac{3x-1}{x^2+x+1}dx$$

19) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$ 20) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ 21) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^5}}$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ 23) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$ 24) $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$

25) $\displaystyle\int \frac{x^7dx}{x^4-1}$ 26) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$ 27) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-2}{x^2-4x+4}dx$

28) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ 29) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^5}dx$ 30) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{x^4+1}}$

31) $\displaystyle\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin 2x}dx$ 32) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ 33) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

34) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$ 35) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ 36) $\displaystyle\int \cos 2x\sin 4x\,dx$

37) $\displaystyle\int \sin^6 x\,dx$ 38) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$ 39) $\displaystyle\int \frac{dx}{(e^x+1)^2}$

40) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{e^x+1}}$

11.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx;\quad 2)\ \int\limits_{-3}^0 (x^2+6x+9)\sin 2x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx.$$

11.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2},\ x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right];\quad 2)\ y=\operatorname{sign}(\sin x),\ x\in[-11\pi,16\pi].$$

11.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{-6}^8 \sqrt{100-x^2}\,dx,\quad 2)\ \int\limits_0^3 3^{-x^2+2x-1}dx.$$

11.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(4+x^2)},\quad 2)\ \int\limits_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^5}},\quad 3)\ \int\limits_1^3 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx,$$

$$4)\ \int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{e^{3/x}}{x^2}dx,\quad 5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x}\cos 3x\,dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2-x^5}{\ln x}dx.$$

11.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty} \ln\Big(\frac{2x+5}{x+1}\Big)\frac{dx}{x};\quad 2)\ \int\limits_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}}dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+3}dx;\quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} \frac{1-3\sin^2 x}{x}dx.$$

11.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ x=\operatorname{ch}^3 t,\ y=\operatorname{sh}^3 t,\ 0\leqslant t\leqslant 1;$$

$$2)\ y^2 = x + 4,\ -2 \leqslant y \leqslant 2; \quad 3)\ \rho = \sqrt{1 - \sin 2\varphi}.$$

11.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x; \quad 2)\ \rho = 3 - \cos 2\varphi;$$
$$3)\ x = 2\sin 2t,\ y = 2\sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

11.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x\cos x$, $y = 0$, $x \in [0; 3\pi/2]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

11.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} + z^2 = 0, \quad y = 6.$$

11.11. Вертикальная цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Найти силу давления воды на стенки цистерны.

11.12. На циклоиде $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ найти точку, которая делит длину первой арки этой циклоиды в отношении 1:3, считая от начала координат.

11.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = x^3/3$, $|x| \leqslant 1/2$, вокруг оси Ox.

11.14. Известны законы изменения скорости издержек $v(x) = 2 + 2\sqrt[3]{t}$ и дохода $d(x) = 10 - 2\sqrt[3]{t}$, где время t измеряется годами, затраты $V(x)$ и доход $D(x)$ измеряются млн. руб. За какое время предприятие получит максимальный доход и какой будет величина этого дохода?

11.15. Определить дисконтированный доход за 6 лет при процентной ставке 7 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 2 млн. руб. в год.

Вариант № 12

12.1. Найти интегралы

1) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx$	2) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx$	3) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x(2+\operatorname{ctg} 3x)}$
4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$	5) $\int \operatorname{tg}^2 3x\,dx$	6) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$
7) $\int \frac{2x+3}{1+4x^2}dx$	8) $\int (e^{2x})^3 dx$	9) $\int \cos(x^3+1)x^2 dx$
10) $\int \frac{dx}{9x^2-16}$	11) $\int xe^{5x}dx$	12) $\int x^2 \sin 3x\,dx$
13) $\int \frac{\ln x}{(x-2)^2}dx$	14) $\int x \arcsin 2x\,dx$	15) $\int e^x \cos 4x\,dx$
16) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-2}}$	17) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$	18) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+3}dx$
19) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$	20) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$	21) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$
22) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$	23) $\int \frac{dx}{25x^3-9x}$	24) $\int \frac{x^2dx}{x^4-9}$
25) $\int \frac{(x+2)dx}{x^4+4x^2}$	26) $\int \frac{x^2+1}{x^2-x+1}dx$	27) $\int \frac{x^3dx}{x^3+1}$
28) $\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$	29) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$	30) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$
31) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$	32) $\int \cos^3 x \sin^4 x\,dx$	33) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

34) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ 35) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}$ 36) $\displaystyle\int \sin^4\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}dx$

37) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}dx$ 38) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 2x\,dx$ 39) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-1}$

40) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

12.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5}dx;\quad 2)\ \int\limits_2^3 (x-1)^3\ln^2(x-1)dx;\quad 3)\ \int\limits_{-1}^0 \frac{2x\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

12.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{x^3+x}{x^4+1},\ x\in[0,1];\quad 2)\ y=(-1)^{[x]},\ x\in[-11,20].$$

12.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_1^2 \frac{e^{-x}}{1+x}dx;\quad 2)\ \int\limits_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+(x-1)^4}}dx.$$

12.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{x[1-(\ln x)^2]},\quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{1+e^x}\Big)\frac{dx}{1+e^x},\quad 3)\ \int\limits_0^1 \frac{e^{2/x}}{x^3}dx,$$

$$4)\ \int\limits_e^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{3+5\ln x}}dx,\quad 5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 11x}{x}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty}\Big(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\Big)\frac{dx}{x^2}.$$

12.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x\{\ln(x^2)+2x\}},\quad 2)\ \int\limits_1^3 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2-6x+9}}dx,\quad 3)\ \int\limits_1^{\infty} x\sin x^3dx,\quad 4)\ \int\limits_0^3 x\operatorname{tg}x\,dx.$$

12.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \arcsin e^x,\ x\geqslant \ln\frac{1}{2};$$
$$2)\ y=2\cos t-\cos 2t,\ x=2\sin t-\sin 2t;\quad 3)\ \rho=\sqrt{1+\cos 2\varphi}.$$

12.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y=(x^2+2x)e^{-x},\ y=0;\quad 2)\ \rho=\frac{2}{1-\cos\varphi},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};$$
$$3)\ x=2(\cos t+t\sin t),\ y=2(\sin t-t\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

12.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$; $x\in[0,2\pi]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

12.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4} - y^2 + z^2 = 1, \quad y = -1, \quad y = 2.$$

12.11. Определить работу, затрачиваемую на перенос электрического заряда q из бесконечности в точку $A(0,1)$ электрического поля заряда Q, сосредоточенного в начале координат.

12.12. Найти координаты центра масс однородной дуги развертки окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t + t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

12.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

12.14. Найти объем произведенной продукции за восьмичасовой рабочий день, если производительность труда описывается функцией времени $f(t) = \dfrac{3}{3t+1} + 5$.

12.15. Определить дисконтированный доход за 2 года при процентной ставке 10 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 1 млн. руб. в год.

Вариант № 13

13.1. Найти интегралы

1) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(3+2x^3)^4}$ 2) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}dx}{2e^{3x}+9}$ 3) $\displaystyle\int (e^{x/a} + e^{-x/a})dx$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$ 5) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}dx$ 6) $\displaystyle\int x^2\sin(x^3)dx$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+16}$ 9) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}dx$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-1}$ 11) $\displaystyle\int x3^x dx$ 12) $\displaystyle\int x^2\ln(x+1)dx$

13) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 3x\, dx$ 14) $\displaystyle\int x^2\sin 5x\, dx$ 15) $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\, dx$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$ 17) $\displaystyle\int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ 18) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ 20) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$ 21) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$

22) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$ 23) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+x-2}dx$ 24) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x-2)}$

25) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+2)}$ 26) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^3+1}$ 27) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$

28) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}\,dx$ 29) $\displaystyle\int x^3\sqrt[4]{1+x^2}\,dx$ 30) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})^4dx$

31) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$ 32) $\displaystyle\int \cos^3 2x\sin 2x\,dx$ 33) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

34) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$ 35) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$ 36) $\displaystyle\int \sin x\sin 3x\,dx$

37) $\displaystyle\int \sin^4 3x\,dx$ 38) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ 39) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

40) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$

13.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{(x^2+1)^2};\quad 2)\ \int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt{x}};\quad 3)\ \int\limits_{-1}^0 \frac{\sqrt{x+1}\,dx}{1+\sqrt[4]{x+1}}.$$

13.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}},\ x\in[2,9];\quad 2)\ y=e^{[x]},\ x\in[1,3].$$

13.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx;\quad 2)\ \int\limits_1^2 3^{-(x^2+1)}dx.$$

13.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{-1} (\operatorname{cth} x+1)dx,\quad 2)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{x(2-\ln x)},\quad 3)\ \int\limits_{-1}^0 \frac{1}{1-e^x}dx,\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+2)(x-3)}dx,$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{2x\cos x-\sin 2x}{x^2}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x-\operatorname{arctg} 5x}{x}dx.$$

13.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty} x^2\sin(e^{-x})dx,\quad 2)\ \int\limits_1^{+\infty} [\sin^2(x^2)-\cos^2(x^3)]dx,\quad 3)\ \int\limits_0^{1/3} \frac{e^3+1/x}{x^2}dx,\quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}dx.$$

13.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \rho=\cos^4(\varphi/4);$$
$$2)\ x=3\cos t-\cos 3t,\ y=3\sin t-\sin 3t;\quad 3)\ y=x^2+1,\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

13.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y=\frac{1}{1+x^2},\ y=\frac{x^2}{2};\quad 2)\ \rho=\frac{4}{2+\cos\varphi};$$
$$3)\ x=\sin 2t,\ y=\sin t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ x=0.$$

13.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $x\in[-\pi,\pi]$, $y=0$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

13.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=\frac{b}{a}x,\quad z=0.$$

13.11. Заряд Q равномерно распределен вдоль четверти окружности радиуса R. Найти силу, с которой заряженная дуга действует на одноименный заряд q, расположенный в центре окружности.

13.12. Найти координаты центра масс однородной дуги кривой $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$.

13.13. Вычислить площадь катеноида – поверхности, образованной вращением цепной линии $y = 2\,\mathrm{ch}(x/2)$ вокруг оси абсцисс, от $x_1 = 0$ до $x_2 = 2$.

13.14. Найти объем произведенной продукции за один год, если задана функция Кобба–Дугласа $g(t) = (10 + t)e^{5t}$.

13.15. Определить дисконтированный доход за 4 года при процентной ставке 10 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 100 млн. руб., а ожидаемая прибыль 2 млн. руб. в год.

Вариант № 14

14.1. Найти интегралы

1) $\int (3x+2)^5 dx$ 2) $\int \frac{x^2 dx}{8x^3+1}$ 3) $\int (x-1)e^{x^2-2x} dx$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$ 5) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$ 6) $\int (\mathrm{tg}\, 2x - 1)^2 dx$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x}}$ 8) $\int \sin x \cos(\cos x) dx$ 9) $\int \frac{e^{3x} dx}{4+e^{3x}}$

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}$ 11) $\int e^{\cos x} \sin 2x\, dx$ 12) $\int \cos x \ln(\sin x) dx$

13) $\int x\, \mathrm{arctg}\, 3x\, dx$ 14) $\int \ln(x^2-1) dx$ 15) $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}} dx$ 17) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3x^2+7x-1}}$ 18) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2+2x+5}$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$ 20) $\int \frac{\sqrt{(16-x^2)^3}}{x^2} dx$ 21) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$

22) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$ 23) $\int \frac{x-3}{x^2+x-2} dx$ 24) $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx$

25) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$ 26) $\int \frac{dx}{x^3+27}$ 27) $\int \frac{5x+8}{x^3-4x^2+5x} dx$

28) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 29) $\int (1+x^6)^{-7/9} dx$ 30) $\int x^{2/3}\sqrt{1+x^{3/2}}\, dx$

31) $\int \frac{\sin^3 x}{4\cos^2 x - 1} dx$ 32) $\int \cos^7 x\, dx$ 33) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2}$

34) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ 35) $\int \mathrm{ctg}^3(3x+2) dx$ 36) $\int \cos 2x \cos 5x\, dx$

37) $\int \mathrm{tg}^4 x\, dx$ 38) $\int \frac{dx}{\sin^3 2x}$ 39) $\int \frac{e^x\sqrt{e^x+1}}{e^x+2} dx$

40) $\int \frac{e^{2x} dx}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+4)}$

14.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\, dx; \quad 2)\ \int_1^8 \frac{\ln^2 x\, dx}{\sqrt[3]{x^2}}; \quad 3)\ \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

14.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y = \frac{x^3}{(x^2+1)^2},\ x \in [0,1]; \quad 2)\ y = [x]\sin\frac{\pi x}{6},\ x \in [0,6].$$

14.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}};\quad 2)\ \int\limits_{-1}^1 (2-e^{-x^2})dx.$$

14.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4dx}{1+x^{10}},\quad 2)\ \int\limits_1^3 \operatorname{tg}^2 x\,dx,\quad 3)\ \int\limits_0^{\pi/2} \frac{3}{\cos x}dx,\quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} x^3e^{-x^2}dx,$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{3+2e^{-x}}{3+2e^{-3x}}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos 3x}{x}dx.$$

14.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{x^4-x^2-2},\quad 2)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x\sin 2x}{\sqrt{x}}dx,\quad 3)\ \int\limits_0^1 \frac{9x}{\sqrt{1-x^3}}dx,\quad 4)\ \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{\pi}{x^2\ln x}dx.$$

14.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \rho=\sqrt{2}e^{\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;$$
$$2)\ x=3\cos t-\sin 3t,\ y=3\sin t-\cos 3t;\quad 3)\ y=\sqrt{4x-x^2}.$$

14.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ x=y^2(y-1),\ x=0;\quad 2)\ \varphi=\sin\pi\rho,\ 0\leqslant\rho\leqslant 1;$$
$$3)\ x-t^2-4,\ y=t^3-4t.$$

14.9. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=x$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

14.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{3}=y,\quad y=4.$$

14.11. Коническая емкость с радиусом основания R и высотой H, обращенная вершиной вниз, заполнена водой. Найти силу давления воды на стенку емкости.

14.12. Найти координаты центра масс однородной дуги кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

14.13. Найти статический момент фигуры, ограниченной линиями

$$y_1=\frac{2}{1+x^2},\quad y_2=x^2,$$

относительно оси абсцисс.

14.14. Найти среднее значение издержек $K(x)=\exp x{+}2$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от 0 до 4. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

14.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 8 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 2 млн. руб. в год.

Вариант № 15

15.1. Найти интегралы

1) $\int e^x(3e^x+2)^5dx$ 2) $\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)^3}$ 3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}dx$

4) $\int x\,\mathrm{tg}(x^2)dx$ 5) $\int \frac{6x^5+4x^3}{\sqrt{x^6+x^4+1}}dx$ 6) $\int \frac{\mathrm{arctg}\,3x}{1+9x^2}dx$

7) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$ 8) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 9) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

10) $\int \frac{x^2dx}{\sin^2(x^3)}$ 11) $\int x^2\cos 3x\,dx$ 12) $\int x^3e^{x^2}dx$

13) $\int x\arcsin(x^2)dx$ 14) $\int (x^2+1)\ln x\,dx$ 15) $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x+x^2}}$ 17) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{6-x-x^2}}$ 18) $\int \frac{3x-4}{x^2+2x+2}dx$

19) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$ 20) $\int \frac{x^2sx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ 21) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}$

22) $\int \frac{3x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$ 23) $\int \frac{x-2}{x^2+x}dx$ 24) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$

25) $\int \frac{x^4dx}{x^4-16}$ 26) $\int \frac{x\,dx}{x^3+27}$ 27) $\int \frac{x^3-2x+3}{x^3-x^2-6x}dx$

28) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$ 29) $\int \frac{x\,dx}{(3+5x^{1/3})^2}$ 30) $\int \sqrt{x}\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}\,dx$

31) $\int \frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x+1}dx$ 32) $\int \sin^3 x\cos^5 x\,dx$ 33) $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$

34) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+\sin 2x}$ 35) $\int \mathrm{ctg}^4(2x)dx$ 36) $\int \sin 3x\cos 7x\,dx$

37) $\int \sin^4 x\cos^6 x\,dx$ 38) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$ 39) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+4}dx$

40) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x-1}}$

15.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2};\quad 2)\ \int_1^e \sqrt{x}\ln^2 x\,dx;\quad 3)\ \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$$

15.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{x-(\mathrm{arctg}\,x)^4}{1+x^2},\ x\in[0,\sqrt{3}];\quad 2)\ y=x\,\mathrm{sign}(\cos x),\ x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{11}{2}\pi\right].$$

15.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int_{1/2}^2 \frac{4^x}{x}dx;\quad 2)\ \int_{-1}^2 (2-\sqrt{1+x^4})dx.$$

15.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2},\quad 2)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x},\quad 3)\ \int\limits_{1/2}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx,$$

$$5)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\pi x}-e^{-2\pi x}}{x}dx,\quad 6)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x\sin 2x\sin 3x}{x}dx.$$

15.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\cos(e^{-x})}{e^x+x}dx,\quad 2)\ \int\limits_{1}^{3} \frac{x\,dx}{\ln^2 x-1},\quad 3)\ \int\limits_{0}^{2} \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2+x-2)^2}}dx,\quad 4)\ \int\limits_{2/\pi}^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx.$$

15.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y-\arcsin x=\sqrt{1-x^2};$$
$$2)\ y=2\cos t-\sin 2t,\ x=2\sin t-\cos 2t;\quad 3)\ \rho=\sqrt{1-\cos 2\varphi}.$$

15.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ (x^2+y^2)^2=R^2(x^2-y^2);\quad 2)\ \rho=\frac{1}{\varphi},\ \rho=\frac{1}{\sin\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};$$
$$3)\ x=\frac{3t}{1+t^3},\ y=\frac{3t^2}{1+t^3},\ 0\leqslant t\leqslant\infty.$$

15.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=\sqrt{2-x^2}$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

15.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2x,\quad x+z=2,\quad z\geqslant 0.$$

15.11. Заряд Q равномерно распределен вдоль отрезка прямой L. Найти силу, с которой отрезок действует на одноименный заряд q, расположенный на серединном перпендикуляре на расстоянии L от отрезка.

15.12. Найти координаты центра масс однородной дуги кривой $\rho=2\sin\varphi$ от точки $(0,0)$ до точки $(\sqrt{2},\pi/4)$.

15.13. Бесконечная дуга линии $y=e^{-x}$, соответствующая положительным значениям x, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить площадь поверхности, которая при этом получается.

15.14. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $P=181-x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 100.

15.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 3 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 40 млн. руб., а ожидаемая прибыль 4 млн. руб. в год.

Вариант № 16

16.1. Найти интегралы

$$1)\ \int\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 2x+3}}dx\quad 2)\ \int x2^{x^2}dx\quad 3)\ \int\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$$

$$4)\ \int\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx\quad 5)\ \int\sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}}\,dt\quad 6)\ \int\frac{dz}{z^2e^{1/2}}$$

7) $\int \operatorname{tg}\sqrt{y}\dfrac{dy}{\sqrt{y}}$ 8) $\int \sqrt{1+3\cos^2 t}\sin 2t\,dt$ 9) $\int \dfrac{z^2}{z^3+1}\ln(z^3+1)dz$

10) $\int \dfrac{dt}{5t+4}$ 11) $\int ye^{-y}dy$ 12) $\int t\sin t\cos t\,dt$

13) $\int \dfrac{\ln^2 z}{z^2}dz$ 14) $\int (\arcsin y)^2 dy$ 15) $\int \dfrac{\sin^2 t}{e^t}dt$

16) $\int \dfrac{dt}{\sqrt{5+2t-t^2}}$ 17) $\int \dfrac{2z+5}{\sqrt{9z^2+6z+2}}dz$ 18) $\int \dfrac{3x+5}{x^2+2x+2}dx$

19) $\int \dfrac{dy}{\sqrt{9-y^2}}$ 20) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ 21) $\int \dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$

22) $\int \dfrac{dy}{\sqrt{e^y+1}}$ 23) $\int \dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ 24) $\int \dfrac{3x+2}{x^4+3x^3+3x^2+x}dx$

25) $\int \dfrac{y^3+y+1}{y(y^2+1)}dy$ 26) $\int \dfrac{dx}{x^3+1}$ 27) $\int \dfrac{5z^2+6z+9}{(z+1)^2(z-3)^2}dz$

28) $\int \sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z-1}}dz$ 29) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{t}}}{\sqrt{t}}dt$ 30) $\int \dfrac{dy}{y^2\sqrt[3]{(2+y^3)^2}}$

31) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$ 32) $\int \sin^3 2x\,dx$ 33) $\int \dfrac{dx}{3\sin x+4\cos x}$

34) $\int \dfrac{1+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}dy$ 35) $\int \dfrac{dy}{\sin^4 y}$ 36) $\int \sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)dt$

37) $\int \dfrac{\cos x}{1+\cos x}dx$ 38) $\int \dfrac{\cos 3x\,dx}{4+\sin 3x}$ 39) $\int \dfrac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

40) $\int \dfrac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$

16.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx;\quad 2)\int\limits_{-1}^1 x^2e^{-x/2}dx;\quad 3)\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

16.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{x^2+\ln x}{x},\ x\in[1,e];\quad 2)\ y=\frac{2[x]}{x},\ x\in[1{,}5;7{,}2].$$

16.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\int\limits_1^e \frac{dx}{\ln x+2};\quad 2)\int\limits_{-1}^2 (2-2^{x^2})dx.$$

16.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\int\limits_1^{+\infty}\cos\sqrt{x}\,dx,\quad 2)\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\{9+(\ln x)^2\}},\quad 3)\int\limits_0^1 \frac{2}{e^x-1}dx,\quad 4)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)^2}dx,$$

$$5)\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\ln(1+4x)-4\ln(1+2x)}{x^2}dx,\quad 6)\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\pi x-\sin 3\pi x}{x}dx.$$

16.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{e^{2x}+1}dx, \quad 2)\ \int\limits_0^3 \frac{2x\,dx}{2^x-4}, \quad 3)\ \int\limits_0^1 \frac{x-1}{\ln^{1/3} x}dx, \quad 4)\ \int\limits_1^{\infty} \sin x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx.$$

16.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y = \ln(3\sin x),\ \pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2;$$
$$2)\ \varphi = \frac{\rho+\rho^{-1}}{2},\ 1 \leqslant \rho \leqslant 3; \quad 3)\ \begin{cases} y = 2\cos t - \cos 2t, \\ x = 2\sin t + \sin 2t. \end{cases}$$

16.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ x^3 + y^3 = 3xy; \quad 2)\ \rho = \frac{1}{4-\cos\varphi},$$
$$3)\ x = 1-\cos t,\ y = t - \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ x = 0.$$

16.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = (x-1)^3$, $y = x-1$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

16.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{y^2}{2p^2} + \frac{z^2}{2q^2} = x, \quad x = a.$$

16.11. Определить минимальную работу, которую необходимо затратить, чтобы построить каменную коническую башню с радиусом основания 10 м и высотой 30 м. Плотность камня принять 2500 кг/м^3.

16.12. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги логарифмической спирали $\rho = 2e^{\varphi}$ от $\varphi_1 = \pi/2$ до $\varphi_2 = \pi$.

16.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = 9\cos x$, $\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi$, вокруг оси Ox.

16.14. Известны законы изменения скорости издержек $v(x) = 2 + 3\sqrt{t}$ и дохода $d(x) = 14 - \sqrt{t}$, где время t измеряется годами, затраты $V(x)$ и доход $D(x)$ измеряются млн. руб. За какое время предприятие получит максимальный доход и какой будет величина этого дохода?

16.15. Определить дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке 8 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 1 млн. руб. в год.

Вариант № 17

17.1. Найти интегралы

$$1)\ \int x\sqrt[5]{3-x^2}\,dx \qquad 2)\ \int te^{-t^2}dt \qquad 3)\ \int \frac{dz}{\sqrt{e^z}}$$

$$4)\ \int a^{\sin y}\cos y\,dy \qquad 5)\ \int \operatorname{tg}^2 at\,dt \qquad 6)\ \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln z}}{z}dz$$

$$7)\ \int \operatorname{tg}\sqrt{y-1}\frac{dy}{\sqrt{y-1}} \qquad 8)\ \int \frac{z^2}{\sqrt[3]{z^3+1}}dz \qquad 9)\ \int \frac{dy}{(a+b)+(a-b)y^2}$$

$$10)\ \int \operatorname{tg}^3\frac{y}{3}\sec^2\frac{y}{3}dy \qquad 11)\ \int x3^x dx \qquad 12)\ \int e^x\ln(1+3e^x)dx$$

$$13)\ \int x\operatorname{tg}^2 2x\,dx \qquad 14)\ \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx \qquad 15)\ \int \cos 2xe^{3x}dx$$

$$16)\ \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}} \qquad 17)\ \int \frac{2z-8}{\sqrt{1-z-z^2}}dz \qquad 18)\ \int \frac{x\,dx}{x^2-6x+10}$$

19) $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{4-t^2}}$ 20) $\int \sqrt{a^2+z^2}\,dz$ 21) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

22) $\int \frac{e^y dy}{\sqrt{e^{2y}+e^y+1}}$ 23) $\int \frac{y^3-1}{4y^3-y}dy$ 24) $\int \frac{5t^2+6t+9}{(t-3)^2(t+1)}dt$

25) $\int \frac{5t^2+2}{t^3-5t^2+4t}dt$ 26) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$ 27) $\int \frac{dz}{(z+1)(z^2+5z+6)}$

28) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$ 29) $\int y^3(1+2y^2)^{-3/2}dy$ 30) $\int \frac{dt}{t^4\sqrt{1+t^2}}$

31) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}dx$ 32) $\int \sin^3 x\sqrt[5]{\cos^4 x}\,dx$ 33) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

34) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$ 35) $\int \frac{dy}{\sqrt{\sin y\cos^? y}}$ 36) $\int \sin 10t\sin 15t\,dt$

37) $\int z\sin^2 z^2 dz$ 38) $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$ 39) $\int e^{2z}(e^z-1)^{-1/3}dz$

40) $\int \frac{dz}{e^{2z}-2e^z}$

17.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx;\quad 2)\ \int\limits_0^1 x^2e^{3x}dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

17.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x},\ x\in[\pi,2\pi];\quad 2)\ y=[x]x^2,\ x\in[0{,}5;8{,}5].$$

17.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_1^2 2^{x^2}dx;\quad 2)\ \int\limits_{-2}^4 \Big(4-\frac{1}{1+x^4}\Big)dx.$$

17.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x}},\quad 2)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x},\quad 3)\ \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}dx,\quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} x\cos 3x\,dx,$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3-x^5}{\ln x}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} (e^{-x}-e^{-2x})^2\frac{dx}{x^2}.$$

17.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x+x^5)}{x^3+1}dx;\quad 2)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[4]{x}};\quad 3)\ \int\limits_{-1}^1 [x^2(x-1)]^{-1/3}dx;\quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} x\sin(e^x)dx.$$

17.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \rho=\varphi^2,\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi/2;$$

$$2)\ 2y = e^x + e^{-x},\ 0 \leqslant x \leqslant \ln 3; \quad 3)\ \begin{cases} x = t + 2\cos^2 t, \\ y = t - 2\sin^2 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

17.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y = \frac{\ln x}{4x},\ y = x\ln x; \quad 2)\ x = 2\cos\varphi,\ y = 3\sin\varphi;$$
$$3)\ x = t^2,\ y = 2\arcsin t,\ x = 1,\ |t| \leqslant 1.$$

17.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = 1 - (2x/\pi)$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

17.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x = 3, \quad x = 3.$$

17.11. Вертикальная плотина имеет форму полукруга радиуса 3 м. Найти силу давления воды на плотину.

17.12. Найти момент инерции I_x кривой $y = e^{2x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$.

17.13. На каком расстоянии от основания лежит центр тяжести тела, ограниченного параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной к его оси? Высота тела H.

17.14. Найти общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет вид $f(t) = (5 + t)e^{-4t}$.

17.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 8 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 50 млн. руб., а ожидаемая прибыль 1 млн. руб. в год.

Вариант № 18

18.1. Найти интегралы

1) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{7 - 5t^2}}$ 2) $\displaystyle\int e^{-z^2-1} z\,dz$ 3) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6 - 1}}$ 5) $\displaystyle\int \frac{s^2 - 5s + 6}{s^2 + 4}ds$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}}$

7) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{s} + \ln s}{s}ds$ 8) $\displaystyle\int \sqrt[3]{a - bx}\,dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{(a^t - b^t)^2}{a^t b^t}dt$

10) $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{a^4 - t^4}}$ 11) $\displaystyle\int y4^y dy$ 12) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln t)}{t}dt$

13) $\displaystyle\int y\arcsin y\,dy$ 14) $\displaystyle\int \ln(t + \sqrt{1 + t^2})dt$ 15) $\displaystyle\int e^{-z}\sin^2 z\,dz$

16) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t - t^2}}$ 17) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$ 18) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 - 7x + 13}$

19) $\displaystyle\int \sqrt{1 - y^2}\,dy$ 20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{z}dz$ 21) $\displaystyle\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)}dx$

22) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t + 1} + \sqrt[3]{(t + 1)^2}}$ 23) $\displaystyle\int \frac{2t^2 + 41t - 91}{(t - 1)(t^2 - t - 12)}dt$ 24) $\displaystyle\int \frac{dy}{y(y + 1)^2}$

25) $\displaystyle\int \frac{z^4}{z^4 - 1}dz$ 26) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}dx$ 27) $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2}$

28) $\displaystyle\int z\sqrt{\frac{z - 1}{z + 1}}\,dz$ 29) $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt[4]{1 + z^4}}$ 30) $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt[3]{1 + t^5}}$

31) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3 + 2\sin x}}$ 32) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$ 33) $\displaystyle\int \frac{dy}{3 + 5\cos y}$

34) $\int \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{tg} z}}$ 35) $\int \frac{\cos^2 y}{\sin^4 y} dy$ 36) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} dx$

37) $\int \frac{\cos 2t}{\cos^4 t + \sin^4 t} dt$ 38) $\int \frac{a\cos x + \sin x}{(b\sin x)^2} dx$ 39) $\int \frac{e^t(3 - e^t)}{1 + e^{2t}} dt$

40) $\int \frac{e^{2z}dz}{\sqrt[3]{e^z + 1}}$

18.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx;\quad 2)\ \int\limits_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6)\sin 3x\, dx;\quad 3)\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}.$$

18.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y = \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2},\ x \in [0, 1];\quad 2)\ y = \frac{[x]}{x^2},\ x \in [1{,}7; 5{,}2].$$

18.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_1^3 \frac{dx}{(x^2 - 4x + 8)^2};\quad 2)\ \int\limits_0^1 xe^{-x^3} dx.$$

18.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^3 \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}},\quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\cos(1/x)dx}{x^3},\quad 3)\ \int\limits_0^2 \frac{3}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx,\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\operatorname{sh} x},$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{3x\cos x - \sin 3x}{x^2} dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{1 + 2e^{-3x}}{1 + 2e^{-5x}} dx.$$

18.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty} \sqrt{\ln\frac{x + 3}{2x}}\,\frac{dx}{x};\quad 2)\ \int\limits_1^{+\infty} \cos\Big(\frac{3\pi x}{2x - 1}\Big)\frac{dx}{x};\quad 3)\ \int\limits_{-1}^1 \frac{\ln x^2}{1 - x} dx;\quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} x\cos(e^{-x})dx.$$

18.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \rho = e^{-2\varphi},\ \varphi \geqslant 0;\quad 2)\ y = e^{-2t}\cos 2t,\ x = e^{-2t}\sin 2t,\ 0 \leqslant t \leqslant \infty;$$
$$3)\ (y - 1)^3 = x^2,\ |x| \leqslant 1.$$

18.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y^2 = x^2 - x^4;\quad 2)\ \rho\varphi = 1,\ \rho\sin\varphi = 1,\ \varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2};$$
$$3)\ x = t^2,\ y = 2t - t^3.$$

18.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = (x - 1)^2$, $y = 1$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

18.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 4 - y^2,\quad x^2 = 2y,\quad z = 0.$$

18.11. Сила тока в проводнике с сопротивлением 55 Ом меняется по закону $I = 4\cos\omega t$ А. Определить количество тепла, которое выделится в проводнике за время от $t = 0$ до $t = 3\pi/\omega$. Время измеряется в секундах.

18.12. Найти координаты центра масс однородной дуги астроиды $x = 2\sin^3(t/4)$, $y = 2\cos^3(t/4)$, расположенной в первом квадранте.

18.13. Найти момент инерции полукруга радиуса R относительно его диаметра.

18.14. Найти объем произведенной продукции за третий час работы, если производительность труда описывается функцией времени $f(t) = \dfrac{3}{4t+5} + 4$.

18.15. Определить дисконтированный доход за 6 лет при процентной ставке 5 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 50 млн. руб., а ожидаемая прибыль 1 млн. руб. в год.

Вариант № 19

19.1. Найти интегралы

1) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$ 2) $\displaystyle\int e^{2\sin^2 x} 2\sin 2x\,dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{arctg}\,3x}{1+9x^2}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{2dx}{\arcsin 2x\sqrt{1-4x^2}}$ 5) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$ 6) $\displaystyle\int \sin(4x+1)dx$

7) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}(2x+1)dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$ 9) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2\,3x\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^8}}$ 11) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$ 12) $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$

13) $\displaystyle\int 2x\ln^2 x\,dx$ 14) $\displaystyle\int x^5 e^{x^2}dx$ 15) $\displaystyle\int \arccos x\,dx$

16) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx$ 17) $\displaystyle\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$ 18) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^2-x+1}dx$

19) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ 20) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 21) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}dx$

22) $\displaystyle\int \frac{(x+3)dx}{x\sqrt{x-4}}$ 23) $\displaystyle\int \frac{(3x-1)dx}{(x-2)(x-4)}$ 24) $\displaystyle\int \frac{(x-4)dx}{x(x+2)}$

25) $\displaystyle\int \frac{(x^3+6)dx}{(x^2-2)(x^2-4)}$ 26) $\displaystyle\int \frac{x^6dx}{x^3-1}$ 27) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^4+6x^2+8}$

28) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$ 29) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}{x^3}dx$ 30) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+4)^3}}$

31) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+5\cos x}$ 32) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x+3}dx$ 33) $\displaystyle\int \cos x\sin^3 x\,dx$

34) $\displaystyle\int \sin 5x\cos 8x\,dx$ 35) $\displaystyle\int \frac{dx}{16\sin^2 x+9\cos^2 x}$ 36) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$

37) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^7\,x\,dx$ 38) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4\sin x}$ 39) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{3x}-e^{2x}}$

40) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$

19.2. Вычислить определенные интегралы

1) $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\sin 3x\,dx$; 3) $\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

19.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{4\operatorname{arctg}x-x}{1+x^2},\ x\in[0,1];\quad 2)\ y=\frac{x}{[x]},\ x\in[1{,}5;9{,}5].$$

19.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^{10}x\,dx;\quad 2)\ \int\limits_0^1 x^4e^{-x^2}dx.$$

19.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x dx}{4+e^{2x}},\quad 2)\ \int\limits_1^3\operatorname{tg}^2x\,dx,\quad 3)\ \int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx,\quad 4)\ \int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx,$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty}\sin 3x\frac{cos2x}{x}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty}(e^{-x}-e^{-5x})^2\frac{dx}{x^2}.$$

19.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{\infty}x^2\sin^2(x^4)dx;\quad 2)\ \int\limits_0^2\ln^{-1}(2x-x^2)dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{\infty}\sin(e^x)dx;\quad 4)\ \int\limits_0^2\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^3+2x-3}}.$$

19.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y=\ln(-x-\sqrt{x^2-1}),\ -2\leqslant x\leqslant -1;$$
$$2)\ y=e^{2t}\cos t,\ x=e^{2t}\sin t,\ -\infty\leqslant t\leqslant 0;\quad 3)\ y=\sqrt{3-2x-x^2}.$$

19.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y=\operatorname{tg}x,\ y=\frac{2}{3}\cos x;\quad 2)\ \rho=\frac{1}{1-\cos\varphi},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};$$
$$3)\ x=\frac12\cos t-\frac14\cos 2t,\ y=\frac12\sin t-\frac14\sin 2t,\ \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

19.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=\sin^2x$, $y=0$, $x\in[0,\pi]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

19.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=9-y^2,\quad x=0,\quad y\geqslant 0,\quad z=0,\quad 3x+4y=12.$$

19.11. Определить момент инерции однородного шара массой M и радиусом R относительно его центра.

19.12. Найти момент инерции I_x части окружности $y^2+x^2=9$, $0\leqslant\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

19.13. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг одной из сторон. С помощью теоремы Гульдена найти объем тела, которое при этом получается.

19.14. Найти среднее значение издержек $K(x)=6x^2+4x+1$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от 0 до 5. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

19.15. Определить дисконтированный доход за 6 лет при процентной ставке 10 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 4 млн. руб. в год.

Вариант № 20

20.1. Найти интегралы

1) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$ 2) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ 3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3+x^4}}$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x-1}}$ 5) $\int \cos^2 2x \sin 2x\,dx$ 6) $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$

7) $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x}dx$ 8) $\int \frac{(\ln x)^3dx}{x}$ 9) $\int \sin(2x-3)dx$

10) $\int \sqrt{2-x^3}\,x^2dx$ 11) $\int x^3e^xdx$ 12) $\int x\cos x\,dx$

13) $\int \ln(x^2+1)dx$ 14) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 2x}$ 15) $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

16) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ 17) $\int \frac{x-4}{x^2-4x+2}dx$ 18) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

19) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$ 20) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ 21) $\int \frac{\sqrt[8]{x}+2}{\sqrt[8]{x^5}+\sqrt[8]{x^3}}dx$

22) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}}$ 23) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+3)(x-5)}$ 24) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+2)}$

25) $\int \frac{x^2dx}{(x^2+4)(x-3)}$ 26) $\int \frac{x^5dx}{x^3+1}$ 27) $\int \frac{x^3dx}{x^2+4x+2}$

28) $\int \sqrt{2x^3-x^4}\,dx$ 29) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ 30) $\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{2/3}}$

31) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x+\sin x}$ 32) $\int (3+\sin 2x)\cos^2 x\,dx$ 33) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

34) $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2}dx$ 35) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$ 36) $\int \cos^6 2x\,dx$

37) $\int \cos 3x\cos 7x\,dx$ 38) $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx$ 39) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$

40) $\int \frac{e^xdx}{e^{-x}+e^x}$

20.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1};\quad 2)\ \int_0^{\pi}(2x^2+4x+7)\cos 2x\,dx;\quad 3)\ \int_0^{5/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

20.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}},\ x\in[\sqrt{3},\sqrt{8}];\quad 2)\ y=[\sqrt{x}],\ x\in[0{,}16;3{,}6].$$

20.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int_0^4 x^3e^{-x}dx;\quad 2)\ \int_{-1}^1(1+\sqrt{1-x^6})dx.$$

20.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos 2x\, e^{-2x} dx; \quad 2)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos(x^{1/3})dx}{x^{2/3}}; \quad 3)\ \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-\ln^2 x}} dx; \quad 4)\ \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx;$$

$$5)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} \cos 5x\, dx; \quad 6)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 5x - \operatorname{arctg} 7x}{x} dx.$$

20.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_{0}^{3} x \operatorname{tg} x\, dx; \quad 2)\ \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x} dx; \quad 3)\ \int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[6]{x^3(x+2)^5}} dx; \quad 4)\ \int\limits_{0}^{\infty} \cos(e^x) dx.$$

20.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y = 2 - e^{x/2} - e^{-x/2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$2)\ \rho = \sin^4 \frac{\varphi}{4},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \quad 3)\ \begin{matrix} y = e^t(\cos t + \sin t), \\ x = e^t(\sin t - \cos t), \end{matrix} \quad t \in [0, 2\pi].$$

20.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ x^2 + y^2 = R^2,\ x^2 - 2y^2 = \frac{R^2}{4}; \quad 2)\ \rho = \sqrt{2 \sin 2\varphi};$$

$$3)\ x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ x \leqslant -1.$$

20.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = x$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

20.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 4 - x^2,\ x \geqslant 0, \quad y = z = 0, \quad 2x + y = 4.$$

20.11. Определить силу давления воды на параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

20.12. Найти статистические моменты M_x и M_y кривой $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$.

20.13. Фигура, образованная первыми арками циклоиды

$$\begin{matrix} \text{Ц}_1: & x = t - \sin t, & y = 1 - \cos t; \\ \text{Ц}_2: & x = t - \sin t, & y = \cos t - 1 \end{matrix}$$

вращается вокруг оси ординат. С помощью теоремы Гульдена найти площадь поверхности вращения.

20.14. Найти общую сумму текущих затрат, если функция, характеризующая текущие издержки обращения и капиталовложения, имеет вид $f(t) = (25 + t)e^{-2t}$.

20.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 10 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 2 млн. руб. в год.

Вариант № 21

21.1. Найти интегралы

$$1)\ \int (\cos x + 2)^{13} \sin x\, dx \quad 2)\ \int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 5}}{x} dx \quad 3)\ \int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$$

4) $\int xe^{x^2}\,dx$ 5) $\int \frac{3^x dx}{1+3^{2x}}$ 6) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[6]{(3x^3+2)^5}}$

7) $\int \frac{x^5 dx}{x^{12}+1}$ 8) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+25)}$ 9) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{7x-1}}$

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$ 11) $\int x\sin 3x\,dx$ 12) $\int (x^2+1)\cos x\,dx$

13) $\int \ln x\,dx$ 14) $\int x^5\ln x\,dx$ 15) $\int e^x\cos x\,dx$

16) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ 17) $\int \frac{3x-1}{x^2+x-1}dx$ 18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

19) $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ 20) $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$ 21) $\int \frac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}$

22) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$ 23) $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$ 24) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)}$

25) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$ 26) $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$ 27) $\int \frac{x^3dx}{(x^2-1)(x+1)}$

28) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ 29) $\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3}dx$ 30) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$

31) $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$ 32) $\int \sin^5 x\cos^4 x\,dx$ 33) $\int \sin 5x\cos x\,dx$

34) $\int \sin^4 x\,dx$ 35) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$ 36) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$

37) $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$ 38) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}$ 39) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

40) $\int \arccos\sqrt{x}\,dx$

21.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^{1/2} \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx;\quad 2)\ \int\limits_0^{2\pi}(2x^2-15)\cos 3x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x\,dx}{2+\sin x}.$$

21.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ x\in[\sqrt{2},2];\quad 2)\ y=\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right],\ x\in[0{,}04;0{,}81].$$

21.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{1/e}^{1} x^2\ln x\,dx;\quad 2)\ \int\limits_0^1(2+e^{2x-x^2})dx.$$

21.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin 2x\,e^{2x}dx,\quad 2)\ \int\limits_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx,\quad 3)\ \int\limits_{-1}^{15}\frac{7}{\sqrt[3]{x-7}}dx,\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\ln(1-x)}{(2-x)^2}dx,$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-3x}}{x}dx, \quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sin x-\sin 3x)^2}{x^2}dx.$$

21.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{\sqrt{x}}dx; \quad 2)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sqrt{x}}dx; \quad 3)\ \int\limits_0^{2} \ln\Big(\frac{2}{x}-1\Big)dx; \quad 4)\ \int\limits_1^{\infty} \ln\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2+1}dx.$$

21.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y=\frac{x^2}{4}-\ln(\sqrt{x}),\ 1\leqslant x\leqslant 3;$$

$$2)\ \rho=\cos^2\frac{\varphi}{2},\ -\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/4; \quad 3)\ \begin{aligned} y&=\sin t+\sqrt{1+\cos^2 t},\\ x&=\sin t-\sqrt{1+\cos^2 t}.\end{aligned}$$

21.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\ \frac{x^2}{2}-y^2=1; \quad 2)\ \rho=R\sin\varphi,\ \rho=R\cos\varphi;$$
$$3) x=R(1-\cos t),\ y=R(t-\sin t),\ y=0,\ x=2R.$$

21.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

21.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y=x^2, \quad z+2y=8, \quad z=0.$$

21.11. Шар радиуса R с удельным весом ρ погружен в воду так, что он касается поверхности. Какую работу нужно совершить, чтобы извлечь шар из воды?

21.12. Найти статистические моменты M_x и M_y дуги астроиды $x=a^3\sin^3 t$, $y=a^3\cos^3 t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

21.13. Найти центр тяжести сектора круга радиуса R с центральным углом, равным 2α.

21.14. Найти объем выпуска продукции за пять лет, если в функции Кобба–Дугласа $g(t)=(t+9)e^{5t}$.

21.15. Определить дисконтированный доход за 4 года при процентной ставке 5 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., а ожидаемая прибыль 3 млн. руб. в год.

Вариант № 22

22.1. Найти интегралы

$$1)\ \int\sqrt{\cos x+2}\sin x\,dx \quad 2)\ \int\frac{(\operatorname{tg}x+4)^{12}}{\cos^2 x}dx \quad 3)\ \int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx$$

$$4)\ \int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad 5)\ \int(x^2+1)^3 2x\,dx \quad 6)\ \int\sqrt{4-3x}\,dx$$

$$7)\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-2}} \quad 8)\ \int\frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx \quad 9)\ \int\frac{x^4dx}{x^{10}+9}$$

$$10)\ \int\sin(4x+5)dx \quad 11)\ \int x\operatorname{arctg}x\,dx \quad 12)\ \int(x^2+x)e^x dx$$

$$13)\ \int e^{\sqrt{x}}dx \quad 14)\ \int\sqrt{x}\ln x\,dx \quad 15)\ \int\cos(\ln x)dx$$

16) $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ 17) $\int \frac{x\,dx}{x^2-10x+29}$ 18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

19) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ 20) $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}$ 21) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}\sqrt[5]{x^2})}$

22) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$ 23) $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}$ 24) $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

25) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$ 26) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ 27) $\int \frac{x^4dx}{x^2-1}$

28) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ 29) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx$ 30) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}\sqrt{x}}}$

31) $\int \sin 2x \sin 4x\,dx$ 32) $\int \cos^3 2x \sin^2 x\,dx$ 33) $\int \cos^4 x\,dx$

34) $\int \frac{dx}{\sin x}$ 35) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ 36) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$

37) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ 38) $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$ 39) $\int \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

40) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

22.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx;\quad 2)\ \int\limits_0^{2\pi}(1-8x^2)\cos 4x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx.$$

22.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in[\sqrt{3},\sqrt{8}];\quad 2)\ y=\max[2,x^2],\ x\in[-5,12].$$

22.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{-1}^3 \frac{4-x^2}{4+x^2}dx;\quad 2)\ \int\limits_{-1}^2 (x^2+2^{-x^2})dx.$$

22.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(e^{-x})dx}{e^x},\quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(4+x^2)^2},\quad 3)\ \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\operatorname{tg} x\,dx,\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x}{(1+x^2)^3}dx,$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{3\ln(1+x)-\ln(1+3x)}{x^2}dx,\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin 5x}{x}dx.$$

22.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^2\frac{x\,dx}{\ln^2(5-2x)};\quad 2)\ \int\limits_0^2\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^3+x^{-2}}};\quad 3)\ \int\limits_0^{\infty}\sin x\operatorname{arcctg} x\,dx;\quad 4)\ \int\limits_{-\infty}^0\frac{\pi/2+\operatorname{arctg} x}{x^{1/3}}dx.$$

22.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ x = e^t(\cos t + \sin t), \quad y = e^t(\cos t - \sin t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$$
$$2)\ \rho = \cos^4 \frac{\varphi}{4},\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi; \quad 3)\ y = \sqrt{1 + 4x - x^2}.$$

22.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ x^2 + 4xy + 8y^2 = 1; \quad 2)\ \rho = 2\sin^2 \varphi; \quad 3)\ x = 3\sin^3 t,\ y = 3\cos^3 t.$$

22.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-|x|}$, $y = 0$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

22.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 8 - x^2 - 2y^2, \quad z = 0.$$

22.11. Какую работу нужно затратить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра?

22.12. Найти статистические моменты M_x и M_y арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

22.13. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

22.14. Найти объем произведенной продукции за пять лет, если задана функция Кобба–Дугласа $g(t) = (25 + t)e^t$.

22.15. Определить дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 7 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 40 млн. руб., а ожидаемая прибыль 4 млн. руб. в год.

Вариант № 23

23.1. Найти интегралы

1) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3\sin^5 x}}$	2) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x - 1}}{\sin^2 x}dx$	3) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$
4) $\int e^x \sin e^x dx$	5) $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$	6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 5x}}$
7) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$	8) $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$	9) $\int \cos(x^2 + 5)x\,dx$
10) $\int \cos(2 - 7x)dx$	11) $\int xe^{2x}dx$	12) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$
13) $\int (x^2 - 2x)\sin x\,dx$	14) $\int x^6 \ln x\,dx$	15) $\int e^x \sin x\,dx$
16) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$	17) $\int \frac{2x - 1}{1 - 6x - x^2}dx$	18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$
19) $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$	20) $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 1}}$	21) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}}dx$
22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$	23) $\int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2(x + 4)^2}$	24) $\int \frac{dx}{x(x + 3)(x - 1)}$
25) $\int \frac{x^3 - 2x + 2}{(x - 1)^2(x + 1)}dx$	26) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx$	27) $\int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)(x + 2)}$
28) $\int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}\,dx$	29) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$	30) $\int \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}\,dx$
31) $\int \cos x \sin 7x\,dx$	32) $\int \cos^3 x \sin x\,dx$	33) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$

34) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin x}dx$ 35) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ 36) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$

37) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ 38) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,dx$ 39) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}}$

40) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{e^x + 2}}{e^x - 3}dx$

23.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx;\quad 2)\ \int\limits_{-2}^{0} (x^2 - 4)\cos 3x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{2 + \cos x}.$$

23.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y = \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}},\ x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}];\quad 2)\ y = \frac{[x]}{x^2 + [x]^2},\ x \in [1{,}2; 6{,}5].$$

23.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{2}^{6} \ln\Big(\frac{x}{x - 1}\Big)dx;\quad 2)\ \int\limits_{0}^{1} (1 + xe^{-x^2})dx.$$

23.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{2}^{6} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 4}};\quad 2)\ \int\limits_{0}^{+\infty} (\operatorname{th} x - 1)dx;\quad 3)\ \int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x - 1}dx;\quad 4)\ \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1 + \ln x}{x(\ln x)^2}dx;$$

$$5)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x}\cos 5x\,dx;\quad 6)\ \int\limits_{0}^{+\infty} (\sin x - \sin 2x)^2\frac{dx}{x}.$$

23.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos(e^{-x})}{3^x + x^3}dx;\quad 2)\ \int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\ln^2(5 - 2x)};\quad 3)\ \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}dx;\quad 4)\ \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}dx.$$

23.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$$
$$2)\ \rho = \sin^2\frac{\varphi}{2},\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi;\quad 3)\ y = \sqrt{5 - 4x - x^2}.$$

23.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y = (5 - x)\ln(x + 2),\ y = 0;\quad 2)\ \rho = 2,\ \rho = 4\cos^2\varphi;$$
$$3)\ x = t^3 - 4t,\ y = t^2 - 4.$$

23.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [-\pi; \pi]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

23.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x + 2z = 4,\quad y = 4 - z^2,\quad x = 0, z \geqslant 0.$$

23.11. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобочной трапеции с верхним основанием a, нижним $b < a$ и высотой H.

23.12. Найти статистические моменты M_x и M_y логарифмической спирали $\rho = a\exp\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

23.13. Лемниската $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности образующейся при этом поверхности.

23.14. Найти объем произведенной продукции за три года, если задана функция Кобба–Дугласа $g(t) = (14+t)e^t$.

23.15. Определить дисконтированный доход за 6 лет при процентной ставке 2 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 40 млн. руб., а ожидаемая прибыль 2 млн. руб. в год.

Вариант № 24

24.1. Найти интегралы

1) $\displaystyle\int \frac{(1-\sqrt{x})^{1/2}}{\sqrt{x}}dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+3\operatorname{tg} x)}$ 3) $\displaystyle\int \frac{e^x+2}{e^x}dx$

4) $\displaystyle\int \cos\left(\frac{2}{x}\right)\frac{dx}{x^2}$ 5) $\displaystyle\int \operatorname{tg}\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3+3}}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-7}}$ 8) $\displaystyle\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ 9) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$

10) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\ln x+2}}{x}dx$ 11) $\displaystyle\int x\ln(x+1)dx$ 12) $\displaystyle\int x^3\sin(x^2)dx$

13) $\displaystyle\int \arcsin 5x\,dx$ 14) $\displaystyle\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx$ 15) $\displaystyle\int e^{5x}\cos 2x\,dx$

16) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4+6x-9x^2}$ 17) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+2x+3}dx$ 18) $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

19) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx$ 21) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$ 23) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-4x^2}$ 24) $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{x^4-1}$

25) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$ 26) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-8}$ 27) $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx$

28) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$ 29) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$ 30) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$

31) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ 32) $\displaystyle\int \cos^5 3x\,dx$ 33) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^6 x}$

34) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$ 35) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ 36) $\displaystyle\int \sin 5x\sin 7x\,dx$

37) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$ 38) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x}$ 39) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(1+e^x)(1+e^{2x})}$

40) $\displaystyle\int \frac{dx}{(e^x+1)^2}$

24.2. Вычислить определенные интегралы

1) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; 2) $\displaystyle\int_0^3 (x^2-3x)\sin 2x\,dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\sin^3 x\,dx$.

24.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y = \frac{1-\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x}},\ x \in [1,3]; \quad 2)\ y = \frac{2}{1+[x]},\ x \in [0{,}5; 7{,}2].$$

24.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_{-1}^{1} (1+\sqrt{1-x^6})dx; \quad 2)\ \int\limits_{-1}^{1} (1-e^{1/x^2})dx.$$

24.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{(1+e^x)^3}; \quad 2)\ \int\limits_{0}^{3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}; \quad 3)\ \int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx; \quad 4)\ \int\limits_{2}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$$

$$5)\ \int\limits_{0}^{+|iy} \frac{\sin 2x \sin 4x}{x^2}dx; \quad 6)\ \int\limits_{0}^{+|iy} \ln\frac{e+2e^{-x}}{e+2e^{-6x}}dx.$$

24.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_{1}^{+|iy} \frac{\ln(x+x^5)}{x^3+1}dx; \quad 2)\ \int\limits_{0}^{3} \frac{\sin 2x\,dx}{e^{x^2}-1}; \quad 3)\ \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\ln x^2}dx; \quad 4)\ \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x^{1/3}}{x}dx.$$

24.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ \rho = 1+\cos\varphi; \quad 2)\ y^2 = (x-1)^3,\ -1 \leqslant y \leqslant 3;$$

$$3)\ \begin{aligned} y &= \sqrt{t}+\sqrt{1-t}, \\ x &= \sqrt{t}-\sqrt{1-t}. \end{aligned}$$

24.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ x^2+y^2=4,\ x^2-2y^2=1; \quad 2)\ \rho = \sqrt{2}\cos\Big(\varphi - \frac{\pi}{4}\Big);$$

$$3)\ x = 8\sin t,\ y = 3\cos t,\ x \geqslant 4.$$

24.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2}/\sqrt{1+x^2}$, $y = x^2$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

24.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=R^2, \quad z = \frac{x^2}{4}, \quad z = 0, x \geqslant 0.$$

24.11. Диск толщиной h и радиусом r состоит из вещества с плотностью ρ и совершает n оборотов в секунду. Какую работу нужно затратить, чтобы остановить его?

24.12. Найти координаты центра масс однородной дуги астроиды $x = a^3\sin^3 t$, $y = a^3\cos^3 t$, $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi/3$.

24.13. Найти статический момент фигуры, ограниченной линиями $y_1 = x^2$, $y_2 = \sqrt{x}$, относительно оси абсцисс.

24.14. Найти объем произведенной продукции за первую половину восьмичасового рабочего дня, если производительность труда описывается заданной функцией времени $f(t) = \dfrac{t^2+4t}{(t+1)(t^2+1)}$.

24.15. Определить дисконтированный доход за 4 года при процентной ставке 5 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 200 млн. руб., а ожидаемая прибыль 10 млн. руб. в год.

Вариант № 25

25.1. Найти интегралы

1) $\int x\sqrt[4]{x^2+9}\,dx$ 2) $\int \sin^3 5x\cos 5x\,dx$ 3) $\int \dfrac{dx}{(2x+1)\ln(2x+1)}$

4) $\int (e^{x/3}+e^{-x/3})^2dx$ 5) $\int x^3\cos(x^4)dx$ 6) $\int \dfrac{dx}{16x^2+9}$

7) $\int \dfrac{dx}{9x^2-1}$ 8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2(1-3x)}$ 9) $\int \dfrac{x^4dx}{\sqrt{25-x^{10}}}$

10) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{4+\ln^2 x}}$ 11) $\int x^2e^{-2x}dx$ 12) $\int x\arccos 3x\,dx$

13) $\int \dfrac{\ln x\,dx}{(x+2)^2}$ 14) $\int x\sin 5x\,dx$ 15) $\int e^{2x}\cos 4x\,dx$

16) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ 17) $\int \dfrac{5x-2}{x^2+4x+5}dx$ 18) $\int \dfrac{(x-2)dx}{\sqrt{2-3x+x^2}}$

19) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$ 20) $\int \dfrac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}dx$ 21) $\int \dfrac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}dx$

22) $\int \dfrac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$ 23) $\int \dfrac{(3x+1)dx}{x(x-1)(x-2)}$ 24) $\int \dfrac{x^5dx}{x^4-1}$

25) $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$ 26) $\int \dfrac{x^4dx}{x^4+6x^2+8}$ 27) $\int \dfrac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$

28) $\int \dfrac{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}dx$ 29) $\int \dfrac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$ 30) $\int \dfrac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$

31) $\int \cos^4 x\,dx$ 32) $\int \sin^5 4x\,dx$ 33) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\sin^4 x}$

34) $\int \dfrac{dx}{\sin x\cos^3 x}$ 35) $\int \cos 6x\cos 8x\,dx$ 36) $\int \dfrac{dx}{1+\cos x}$

37) $\int \dfrac{dx}{2+\operatorname{ctg} x}$ 38) $\int \dfrac{4+\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ 39) $\int \dfrac{dx}{(e^x+1)^2}$

40) $\int \dfrac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

25.2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4};\quad 2)\ \int\limits_{-2}^0 (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x\,dx.$$

25.3. Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

$$1)\ y=\frac{1+\ln(x-1)}{x-1},\ x\in[e+1,e^2+1];\quad 2)\ y=2[x],\ x\in[0{,}4;4{,}6].$$

25.4. Оценить значение интеграла:

$$1)\ \int\limits_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;\quad 2)\ \int\limits_0^2 \sqrt{9+x^4}\,dx.$$

25.5. Вычислить несобственные интегралы по определению или установить их расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^3 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x}};\quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2};\quad 3)\ \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx;\quad 4)\ \int\limits_0^{\infty} \cos\sqrt[3]{x}\,dx;$$

$$5)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{4x\cos x - \sin 4x}{x^2}dx;\quad 6)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^4 - x^2}{\ln x}dx.$$

25.6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(1/x)}{x+1}dx;\quad 2)\ \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{3} \ln(3x - x^2)dx;\quad 4)\ \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x^{1/5}}{x}dx.$$

25.7. Вычислить длину кривых

$$1)\ y = \ln[(x + \sqrt{x^2 - 4})^2],\ -3 \leqslant x \leqslant -2;$$
$$2)\ x = 2\sin^2 t,\ y = 3\cos^2 t;\quad 3)\ \rho = \cos^5\frac{\varphi}{5}.$$

25.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ x^3 + y^3 = 9xy;\qquad 2)\ \rho = \sin\varphi + \cos\varphi;\qquad 3)\ x = 2t - t^3,\ y = t^2.$$

25.9. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = 0$, $x \in [-\pi/2; 3\pi/2]$, вокруг а) оси Ox и б) оси Oy.

25.10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\quad y - z = 0,\quad z = 0.$$

25.11. По закону Торричелли скорость вытекающей жидкости равна $\sqrt{2gh}$, где h — глубина отверстия под уровнем жидкости. Определить время вытекания воды из конической воронки с вершиной внизу, имеющей площадь основания S, высоту h и отверстие в вершине площадью s.

25.12. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности $y^2 + x^2 = 9$, $0 \leqslant \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

25.13. Найти момент инерции боковой поверхности цилиндра радиуса R и высотой H относительно его оси.

25.14. Найти объем произведенной продукции за пятый час работы, если производительность труда описывается функцией времени $f(t) = -3t^2 + 28t + 32$.

25.15. Определить дисконтированный доход за 6 лет при процентной ставке 5 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 40 млн. руб., а ожидаемая прибыль 2 млн. руб. в год.

Список литературы

1. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. I: *Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.
2. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. II, ч. 1: *Специальные функции.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 352 с.
3. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. II, ч. 2: *Уравнения математической физики.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 646 с.
4. Баранова Е., Васильева Н., Федотов В. *Практическое пособие по высшей математике.* Типовые расчеты: Учебное пособие. 2-е изд. — СПб.: Питер, 2013. — 400 с.
5. Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* — М.: Наука, 1985.
6. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. *Краткий курс математического анализа.* — М.: Наука, 1971.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Теория функций комплексного переменного.* — М.: Наука, 1981. — 448 с.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Задачник.* — М.: Наука, 1987.
9. Будак Б.М., Фомин С.В. *Кратные интегралы и ряды.* — М.: Наука, 1965.
10. Гайшун Л.Н., Денисенко Н.В., Марков А.В., Станишевская Л.В., Ящина Н.Н. *Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей*: в 2 ч. — Минск: БГЭУ, 2014. — Ч. 2. — 270 с.
11. Гончарова Т.М., Подолян С.В. *Высшая математика. Приложения определенного интеграла*: учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей. — Могилев: МГУП, 2010. — 32 с.
12. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* Т. 2. — М.: Наука, 1980. — 366 с.
13. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* – М.: Наука, 1977.
14. Ефимов А.В. *Математический анализ* (*специальные разделы*): Ч. I. — М.: Высшая школа, 1980.
15. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. *Математический анализ* (*специальные разделы*): Ч. II. — М.: Высшая школа, 1980. — 296 с.
16. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. III: *Дифференциальное и интегральное исчисление*: 1. *Дифференциальное исчисление функций одной переменной.* — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2013. — 325 с.
17. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. III: *Дифференциальное и интегральное исчисление*: 2. *Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.* — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2013. — 325 с.
18. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Часть V. *Дифферен-*

циальные уравнения. 3-е изд. — Томск: Изд-во Томского политехнического ун-та, 2014. — 392 с.

19. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. I: *Линейная алгебра.* 2 изд. — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2009. — 310 с.
20. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. II: *Аналитическая геометрия.* 3 изд. — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2014. — 398 с.
21. Зельдович Я.В., Яглом И.М. *Высшая математика для начинающих физиков и техников.* — М.: Наука, 1982. — 512 с.
22. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа* (в 2-х томах). — М.: Наука, 1971 (т. 1), 1973 (т. 2).
23. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержев В.Ф. *Специальный курс высшей математики.* — М.: Высшая школа, 1976. — 400 с.
24. Каплан И.А. *Практические занятия по высшей математике* (в 3-х томах). – Харьков: Изд-во ХГУ, т. 1 — 1965, т. 2 — 1971, т. 3 — 1972.
25. Карпук А.А., Жевняк Р.М., Цегельник В.В., Смирнова И.А. *Сборник задач по высшей математике.* Часть 6. *Интегральное исчисление функции одной переменной.* — Минск.: БГУИР, 2006. — 148 с.
26. Клементьев З.И. *Лекции по математическому анализу* (в 5 вып.) – Томск: Изд-во ТГУ, 1987.
27. Коршикова Т.И., Кирютенко Ю.А., Калиниченко Л.И., Савельев В.А. *Курс лекций по математическому анализу*, I курс, 1-й семестр. — Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2006. — 180 с.
28. Коршикова Т.И., Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А. *Курс лекций по математическому анализу*, I курс, 2-й семестр. – Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2007. – 147 с.
29. Коршикова Т.И., Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А. *Курс лекций по математическому анализу*, II курс, 3-й семестр. – Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2007. – 192 с.
30. Коршикова Т.И., Калиниченко Л.И., Кирютенко Ю.А. *Курс лекций по математическому анализу*, II курс, 4-й семестр. *Мера Жордана и кратные интегралы.* – Ростов-на-Дону: Из-во ООО «ЦВВР», 2010. – 67 с.
31. Кремммер Н.Ш. *Высшая математика для экономистов*: Практикум для студентов вуза, обучающихся по экономическим специальностям. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. — 479 с.
32. Крицкий О.Л., Михальчук А.А., Трифонов А.Ю., Шинкеев М.Л. *Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов.* Часть I. *Теория вероятностей*: учебное пособие. 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. —
33. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1981 (т. 1), 1982 (т. 2).
34. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Курс высшей математики.* – М.: Наука, 1971.
35. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Краткий курс высшей математики.* – М.: Наука, 1986.
36. Кузнецов Л.А. *Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики.* – М.: Наука, 1984.
37. Лунгу К.Н., Макаров Е.В. *Высшая математика. Руководство к решению задач.* Часть 1. — М.: Физматлит, 2005. — 216 с.
38. Лунгу К.Н., Макаров Е.В. *Высшая математика: Руководство к решению*

задач. Часть 2. — М.: Физматлит, 2007 — 384 с.

39. Ляликова Е.Р., Приходько Т.В. *Неопределенный и определенный интегралы. Приложения определенного интеграла в экономике.* – Ростов-на-Дону, 2015. — 42 с.
40. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. *Математический анализ в примерах и задачах* (в 2-х т.). – Киев: Вища школа, т. 1. – 1975, т. 2. – 1977.
41. Мышкис А.Д. *Математика для ВТУЗОВ* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1971 (т. 1), 1973 (т. 2).
42. Никифорова И.А. *Математика в экономике: сборник задач.* Часть I. *Введение в анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной.* – 2-е изд., испр. и доп. – Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2008. – 190 с.
43. Рябушко А.П. *Сборник индивидуальных задач по высшей математике*: Часть 1. — Минск: «Вышэйшая школа», 1990. — 271 с.; Часть 2 — Минск: «Вышэйшая школа», 1991. — 352 с.; Часть 3 — Минск: «Вышэйшая школа», 1991. — 288 с.
44. *Сборник задач по математике для втузов* / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. — В 3-х т. – М.: Наука, 1986.
45. Ситун А.Е. *Определенный интеграл в экономических задачах.* — Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2005. — 65 с.
46. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. *Математика в экономике: Учебник*: В 2-х частях. — Часть 1 – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 2003. — 384 с.; Часть 2. — М.: Финансы и статистика, 2000. - 376 с.
47. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица, Н. Сигала. — М.: Наука, 1979.
48. Сукач Т.Н. *Краткий курс высшей математики* (*для студентов экономических специальностей*)*: Учебное пособие для студентов вуза, колледжа.* – Алчевск: ДГМИ, 2012 – 314 с.
49. Фихтенгольц Г.М. *Основы математического анализа* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1964 (т. 1), 1968 (т. 2).
50. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (в 3-х т.). – М.: Наука, 1966.

Учебное издание

ЗАДОРОЖНЫЙ Валерий Николаевич
ЗАЛЬМЕЖ Владимир Феликсович
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич
ШАПОВАЛОВ Александр Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА для технических университетов
Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление
3. Интегральное исчисление функций одной переменной

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*
Компьютерная верстка *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе $\TeX$ – $\LaTeX$
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Отпечатано с готового оригинал макета заказчика в Томском ЦНТИ
Подписано к печати 05.06.2017 г. Формат 60х84 1/8. Бумага писчая. Печать офсетная.
П.л. 61,75. усл.. печ. л. 57,43. Заказ № 475. Тираж 100 экз.
. Россия, 634021, г. Томск, пр. Фрунзе, 115/3. Тел. (83822) 26-31-69,