КАФЕДРА

В М М Ф

Вариант 25

В Ы С Ш А Я МАТЕМАТИКА

Сборник индивидуальных домашних заданий

для студентов
технических специальностей ТПУ

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Если $\alpha(x) \to 0$, то справедливо:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $\arcsin\alpha(\mathrm{x}) \sim \alpha(\mathrm{x})$
3. $\mathrm{tg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
4. $\mathrm{arctg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
6. $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$
7. $\log_a[1+\alpha(x)] \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
8. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$
9. $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$
10. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^3}{6}$
2. $\arcsin\alpha(\mathrm{x}) \sim \alpha(\mathrm{x}) + \dfrac{(\alpha(\mathrm{x}))^3}{6}$
3. $\mathrm{tg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x) + \dfrac{(\alpha(x))^3}{3}$
4. $\mathrm{arctg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^3}{3}$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2} - \dfrac{(\alpha(x))^4}{24}$
6. $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
7. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x) + \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
8. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n} + \dfrac{1-n}{2n^2}(\alpha(x))^2$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e,$$

$$e = 2,7182818284590...$$

Сумма n членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем q

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

При $|q|<1$ $\qquad S = \dfrac{b_1}{1-q}$

Факториалы

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots(n-1)\cdot n, \qquad \begin{array}{l} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ 2! = 1\cdot 2 = 2 \\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \\ 4! = 24, \qquad 5! = 120, \ldots \end{array}$$

$$(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots(2n-1)\cdot 2n, \qquad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots(2n-2)\cdot 2n$$

$$(2n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1), \quad (2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)$$

Формула Стирлинга

При больших значениях n $\qquad n! \approx \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$

Если C–константа, а $U(x)$ и $V(x)$ – дифференцируемые функции, то

Основные правила дифференцирования

1. $(C)' = 0$
2. $(C \cdot U)' = C \cdot U'$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - U V'}{V^2}$
6. $[y(U(x))]' = y'_u \cdot U'_x$
7. $x'_y(y) = \dfrac{1}{y'_x(x)}$
8. $y'(x) = y(x) \cdot (\ln\ y(x))'$
9. $\left(U^V\right)' = V \cdot U^{V-1} \cdot U' + U^V \cdot \ln U \cdot V'$
10. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\quad y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \quad y''(x) = \dfrac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$

Таблица производных

1. $\left(U^k\right)' = k\, U^{k-1} \cdot U'$
2. $\left(\sqrt{U}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
3. $\left(\dfrac{1}{U}\right)' = -\dfrac{1}{U^2} \cdot U'$
4. $\left(a^U\right)' = a^U \cdot \ln\ a \cdot U'$
5. $\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$
6. $(\log_a U)' = \dfrac{1}{U\ \ln a} \cdot U'$
7. $(\ln U)' = \dfrac{1}{U} \cdot U'$
8. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$
9. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
10. $(\operatorname{tg} U)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$
11. $(\operatorname{ctg} U)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
12. $(\arcsin \mathrm{U})' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{U}^2}} \cdot \mathrm{U}'$
13. $(\arccos\ U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - U^2}} \cdot U'$
14. $(\operatorname{arctg}\ U)' = \dfrac{1}{1 + U^2} \cdot U'$
15. $(\operatorname{arcctg}\ U)' = -\dfrac{1}{1 + U^2} \cdot U'$
16. $(\operatorname{sh}\ U)' = \operatorname{ch}\ U \cdot U'$
17. $(\operatorname{ch}\ U)' = \operatorname{sh}\ U \cdot U'$
18. $(\operatorname{th}\ U)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\ U} \cdot U'$

Основные неопределенные интегралы

1. $\int U^k\,dU = \dfrac{U^{k+1}}{k+1} + C, \quad (k \neq -1)$

2. $\int dU = U + C$

3. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$

4. $\int \dfrac{dU}{U^2} = -\dfrac{1}{U} + C$

5. $\int \dfrac{dU}{U} = \ln|U| + C$

6. $\int a^U\,dU = \dfrac{a^U}{\ln a} + C$

7. $\int e^U\,dU = e^U + C$

8. $\int \sin U\,dU = -\cos U + C$

9. $\int \cos U\,dU = \sin U + C$

10. $\int \dfrac{dU}{\cos^2 U} = \operatorname{tg} U + C$

11. $\int \dfrac{dU}{\sin^2 U} = -\operatorname{ctg} U + C$

12. $\int \operatorname{tg} U\,dU = -\ln|\cos U| + C$

13. $\int \operatorname{ctg} U\,dU = \ln|\sin U| + C$

14. $\int \dfrac{dU}{\sin U} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{U}{2}\right| + C$

15. $\int \dfrac{dU}{\cos U} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{U}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16. $\int \dfrac{dU}{a^2 + U^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{U}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dU}{U^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{U-a}{U+a}\right| + C$

18. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{a}} + \mathrm{C}$

19. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right| + C$

20. $\int \operatorname{sh} U\,dU = \operatorname{ch} U + C$

21. $\int \operatorname{ch} U\,dU = \operatorname{sh} U + C$

22. $\int \dfrac{dU}{\operatorname{ch}^2 U} = \operatorname{th} U + C$

23. $\int \dfrac{dU}{\operatorname{sh}^2 U} = -\operatorname{cth} U + C$

24. $\int \sqrt{U^2 \pm a^2}\,dU = \dfrac{1}{2}\left(U\sqrt{U^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

25. $\int \sqrt{a^2 - U^2}\,dU = \dfrac{1}{2}\left(U\sqrt{a^2 - U^2} + a^2 \arcsin\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{a}}\right) + C$

26. $\int e^{\alpha U}\sin\beta U\,dU = \dfrac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\sin\beta U - \beta\cos\beta U) + C$

27. $\int e^{\alpha U}\cos\beta U\,dU = \dfrac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\cos\beta U + \beta\sin\beta U) + C$

Ряды Маклорена элементарных функций

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$,

2. $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

3. $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,

4. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

5. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,

6. $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$,

7. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$,

8. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,

9. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$,

10. $\arcsin x = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\dfrac{x^7}{7} + \ldots$

11. $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \ldots$

12. $\operatorname{th} x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 - \ldots$

Ряд и интеграл Фурье (основные формулы)

1. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[-\pi;\ \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

2. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[-l;\ l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

3. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[0;\ l]$

По синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

По косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

4. Ряд Фурье $f(x),\ x \in (-l;\ l)$ в комплексной форме

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\omega_n)e^{i\omega_n x}, \quad \text{где} \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \quad S_n(\omega_n) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\omega_n x}dx$$

5. Интеграл Фурье функции $f(x),\ x \in (-\infty;\ \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\ dt\right)\ d\omega$$

Для четной функции $\quad f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\cos\omega x\ d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt$

Для нечетной функции $\quad f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\sin\omega x\ d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\ dt$

6. Преобразование Фурье функции $f(x),\ x \in (-\infty;\ \infty)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

7. Косинус и синус преобразования Фурье функции $f(x),\ x \in (0;\ \infty)$

$$F_c(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\ dx, \qquad F_s(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\ dx$$

Таблица изображений и оригиналов

	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	t^2	$\frac{2}{p^3}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
5	$t\ e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
6	$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(p+a)^3}$
7	$\begin{cases} f(t), & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$F(p)(1-e^{-p\tau})$
8	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
9	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$

	$f(t)$	$F(p)$
10	$t\sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
11	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
12	$\mathrm{sh}\ at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
13	$\mathrm{ch}\ at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
14	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
15	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
16	$e^{-at}\mathrm{sh}\ bt$	$\frac{b}{(p+a)^2-b^2}$
17	$e^{-at}\mathrm{ch}\ bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
18	$\delta(t)$	1
19	$\delta(t-\tau)$	$e^{-p\tau}$

1. Вычислить определители

$$a)\ \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Найти матрицу **X** из уравнения. Сделать проверку

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Решить системы линейных уравнений:

a) методом Крамера, b) матричным методом

$$a)\ \begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + 5y + 8z = 3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

4. Решить системы методом Гаусса

$$a)\ \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Точка делит диагональ AC в отношении $\mid AM \mid : \mid MC \mid = 5/2$. Выразить векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MB}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

2. Определить координаты точки C, лежащей на прямой, проходящей через точки A и B, если $A(5;3;-3)$, $B(2;-2;5)$ и $|AC| : |AB| = 5 : 2$

3. В треугольнике с вершинами $A(3;-3;2)$, $B(1;-1;4)$, $C(2;0;-3)$.
Найти: a) вектор медианы AM,
b) вектор высоты BD,
c) любой по модулю вектор биссектрисы угла C.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(-2;1;-3)$, $B(1;-3;0)$, $C(-3;-1;5)$. Найти:
a) координаты четвертой вершины D,
b) длину высоты, опущенной на сторону AB,
c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a} = 4\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p}-2\vec{q}$, где $\mid \vec{p} \mid = 2$, $\mid \vec{q} \mid = 5$, $(\vec{p}\,\widehat{}\,\vec{q}) = 120^o$. Определить:
a) косинус угла между его диагоналями;
b) длину высоты, опущенной на сторону $\vec{b}$.

6. Найти единичный вектор $\vec{e}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{-7;10;-5\}$ и $\vec{b} = \{0;-2;-1\}$, если $(\vec{e}\,\widehat{}\,\vec{i}) \leq \pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$A(2;-4;-3)$, $B(5;-6;0)$, $C(-1;3;-3)$, $D(-10;-8;7)$
найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{p} = \{1;0;1\}$, $\vec{q} = \{1;-2;0\}$, $\vec{r} = \{0;3;1\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x} = \{2;7;5\}$ в этом базисе.

Аналитическая геометрия на плоскости

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(13;-8)$:

a) параллельно прямой $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$

b) перпендикулярно прямой $4x + y + 10 = 0$

c) под углом 45^0 к прямой $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{1} = 1$

2. Даны вершины треугольника $A(1;1)$, $B(-15;11)$, $C(-8;13)$.
Составить: a) уравнение стороны AC,
b) уравнение медианы BM,
c) уравнение высоты CH и найти ее длину.

3. Даны две прямые $l_1 : y = x + 12$, $l_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = t - 2 \end{cases}$ Найти:

a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) составить уравнения биссектрис углов между прямыми.

4. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2 + y^2 + 7x + 9y = 0$ 2) $9x^2 - 18x + 16y^2 = 0$

3) $x = -4 - 3\sqrt{y+5}$ 4) $x^2 - y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$

5) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 2x - 10y = 0$ 6). $3xy - 4x + 5y = 7$

5. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки $M(8;-4)$ и от прямой $x + 7 = 0$.

6. Построить линии, заданные в полярных координатах:

1) $\rho = \sqrt{\varphi}$, 2) $\rho = 2 - \cos 4\varphi$, 3) $\rho = \dfrac{3}{2 + \cos\varphi}$.

7. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t}{3}\,(t^2 - 3) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t\ \cos t \\ y = t\ \sin t \end{cases}$

8. Построить фигуру, ограниченную линиями

1) $\left| \begin{array}{l} y = x^2 - 2x, \\ y = 3x - 1. \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t),\ y = 0, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{array} \right.$

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5;-1;7)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{2;7;5\}$, $\vec{a}_2 = \{0;3;1\}$ Найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

2. Из общих уравнений прямой получить канонические и параметрические

$$\begin{cases} x + 5y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - 5y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

3. Найти точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -5t + 2 \\ z = 3t - 2 \end{cases} \quad \text{и плоскостью} \quad 5x - y + 4z + 3 = 0.$$

Составить уравнение проекции данной прямой на эту плоскость.

4. Даны вершины треугольной пирамиды

$$A(-1;2;4), \quad B(-1;-2;-4), \quad C(3;0;-1), \quad D(7;-3;1).$$

Составить уравнение грани ABC и уравнение высоты DH, опущенной на эту грань. Найти длину высоты.

5. Построить поверхности

$$\begin{array}{ll} 1) & x = 2y + y^2 \\ 2) & x^2 - z^2 = 1 \\ 3) & y^2 + z^2 = (x-1)^2 \\ 4) & 1 - x = z^2 + y^2 \\ 5) & z + 2 + x^2 + y^2 = 2x - 4y + 6z \end{array}$$

6. Построить тело, ограниченное поверхностями

$$a) \left| \begin{array}{l} z = 4 - y^2, \\ z = 2 + y^2, \\ x = -1, \quad x = 2. \end{array} \right. \qquad b) \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 4, \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Предел. Непрерывность

1. Найти пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n-1}-\sqrt[3]{64n^3+3n}}{\sqrt[4]{n}+n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+n+1}{(3n^2-1)^2-(3n^2+1)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\arcsin(5x/7)}-1}{1-\cos\sqrt{x}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-3n+2}-2n\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!\,n}{(n+1)!-n!}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^n-7^{n-1}}{3\cdot 7^n+4\cdot 9^{n+1}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3+3x-2}{(5x-4)(2x+1)^2}-3^{\frac{1}{x+2}}\right]$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2-x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x(e^x-1)}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{5\ \mathrm{arctg}\ (x/3)}$

13. $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1}$

14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+6}{3x+11}\right)^{\frac{7}{x+3}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n-6}\right)^{\frac{n}{6}+1}$

2. Сравнить две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to 0$, если

1) $\alpha(x)=x\sin x-\mathrm{tgx}$, $\quad\beta(x)=\sin^2 x+\cos x-1$
2) $\alpha(x)=\ln^3\cos x$, $\quad\beta(x)=x\ \mathrm{arctg}^4\ \mathrm{x}$

3. Для данных бесконечно малых при $x\to x_0$ величин записать эквивалентнные в виде $A(x-x_0)^k$

1. $\ln(1-\sqrt[5]{x^2\cdot\mathrm{tg}\,\sqrt{x}})$, $\quad x_0=0$

2. $1-\cos\dfrac{3x}{7}$, $\quad x_0=0$

3. $\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\quad x_0=-\dfrac{\pi}{6}$

4. $\dfrac{(x^3-4x)^2}{3x+5}$, $\quad x_0=2$

4. Исследовать на непрерывность функции

1. $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

2. $y=1-5^{\frac{1}{7-x}}$

3. $y=\begin{cases}-2x, & x<-1\\ (x-1)^2, & -1\le x\le 4\\ \sqrt{8+2x}, & x>4\end{cases}$

Производные

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

1) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$

2) $y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$

3) $y = 4 \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$

4) $y = 7 \ln \sin(4x - x^3)$

5) $y = \dfrac{\cos x - \operatorname{tg} x}{9x^2} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{6x - x^2 + 8}}$

6) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2} \cdot \operatorname{arctg}(2/x)$

7) $y = \ln \dfrac{(1 - x^3) \cdot \sqrt{1 + x^3}}{5\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

8) $y = \dfrac{(x+1)\sqrt{2 + x^2}}{\sqrt[3]{3 + x^3} \cdot \operatorname{tg}^4 (x/2)}$

9) $y = (x^3 + 2x + 5)^{\cos^2 x}$

10) $y = (1/x)^{\sqrt{4x-3}}$

11) $\begin{cases} x = 3e^t \\ y = 1 - \ln^2 t \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} \dfrac{3\mathrm{t}^2}{5} \\ y = \cos \dfrac{3t^2}{5} + 1 \end{cases}$

13) $x - y = a \cdot \cos^2 3y$

14) $\sqrt{\dfrac{y}{x}} - 2x = \ln(x + 5\sqrt[3]{y})$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = \arcsin(\mathrm{x}^2 - 1)$

2) $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 6t - 1 \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в точке

1) $y = x \cdot [\sin(\ln x) - \cos \ln x)],\qquad x_0 = 1$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{2t + t^2}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{2t - t^2}{1 + t^3} \end{cases} \qquad t_0 = 1$

4. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функции

1) $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} e^{-x}}$

2) $y = \cos \ln x$

5 Доказать, что функция $y = e^{\frac{\operatorname{tg} x}{2}}$
удовлетворяет уравнению $y' \cdot \sin x = y \cdot \ln y$

Приложения производной

1. Исследовать на экстремум функции

$$1)\ \ y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad 2)\ \ y=\frac{e^{-x}}{2(x+1)}$$

$$3)\ \ y=\frac{x^4}{x^3+1}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1)\ \ y=x+2\operatorname{arctg}\,x \qquad 2)\ \ y=x+\ln(x^2-1)$$

$$3)\ \ y=\frac{1-x^3}{x^2}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1)\ \ y=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2} \qquad 2)\ \ y=3\sqrt[3]{x}-x$$

$$3)\ \ y=x+\frac{\ln x}{x}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x=x_o$, или соответствующей значению параметра $t=t_o$

$$1)\ \ y=x-x^3 \qquad x_0=-1$$

$$2)\ \ \begin{cases} x=\mathrm{arcsint} \\ y=\arccos(1-t) \end{cases} \qquad t_0=1$$

5. В треугольник, основание которого a, высота h, вписан прямоугольник наибольшей площади (основание прямоугольника лежит на основании треугольника). Найти стороны этого прямоугольника.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=2^{\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{в интервале} \quad [-8;\ -1]$$

7. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1)\ \ \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} \qquad 2)\ \ \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x}{\ln(1+\frac{1}{x^2})} \qquad 3)\ \ \lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$$

1. Найти и изобразить области определения функций:

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 2) $z=\sqrt{x-y^2}-\sqrt{y^2+x-2}$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

1) $z=(\cos(x^2+4))^{\frac{1-y}{3y}}$ 2) $z=x\cdot\ln^2 y-x^2\ln\sqrt{y}$

3) $z=\dfrac{\sin(2x^2-5y^3)}{\sqrt{x-y^2}}+\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{\operatorname{tg}(x/y)}$ 4) $z=\sqrt{\ln\sin 3x}\cdot e^{-\frac{x^2}{y^3}}-\arcsin\dfrac{\text{y}}{\sqrt{\text{x}}}$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y сложной функции

$z=\sqrt{y}\,\sin^2\left(\dfrac{x}{2y}\right)$, где $u=x\cdot e^y$, $v=\arcsin^2\dfrac{\text{y}}{\sqrt{\text{x}}}$

4. Найти производную z'_t, если

$z=\sqrt{\arccos(x+3y)}$, $x=3^{1-t^2}$, $y=\frac{\operatorname{tg}\,3t}{t}$

5. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{d\,z}{d\,x}$, если

$$z=y^2\cdot\sqrt{y^2-x^2},\quad \text{где}\quad y=(2x-1)^3$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

1) $x-y=a\cdot\cos^2 3y$, 2) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2x=\ln(x+5\sqrt[3]{y})$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x,y)$, заданной выражением $z\ \ln(x^2+z)=\dfrac{3x}{\sqrt{z}}+\ln(y^3-4x)$

8. Найти первый dz и второй d^2z дифференциалы функции

$z=x\operatorname{tg} y$

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4$ в точке $M_o(2;\ -2;\ z_o)$

10. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3-y^3+2x-3y$

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-y^2-2a^2$ в замкнутой области $D:\{x^2+y^2\le a^2\}$

Неопределенный интеграл

1. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[5]{5-3\cos x}}$

2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}-2x+1}{\sqrt{x}}\, dx$

3. $\int (1+e^{3x})^2 \cdot e^{2x}\, dx$

4. $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\, dx$

5. $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{8-7x^3}\, dx$

6. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x\, dx}{\sqrt{5\ \operatorname{ctg} 3x - 4x}}$

7. $\int x \cdot e^{4x^2-1}\, dx$

8. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\cdot(3\operatorname{arctg}^2 x - 4)}$

9. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{5\ln x - 4}}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\cdot \arcsin^2 2\mathrm{x}}$

11. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$

12. $\int 5x \cdot e^{-x/4}\, dx$

13. $\int \frac{x\ \cos x}{\sin^3 x}\, dx$

14. $\int \frac{\arccos 2x\, dx}{\sqrt{1+2x}}$

15. $\int e^{2x}\cdot \sin 5x\, dx$

16. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$

17. $\int \frac{dx}{x^2+3x+9}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

19. $\int \frac{(7-3x)\, dx}{x^2-12x+1}$

20. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

21. $\int \frac{x^4\, dx}{x^3+1}$

22. $\int \frac{(7x-6x^2)\, dx}{(x-2)\,(x+2)^2}$

23. $\int \frac{(3x-1)\, dx}{(x+1)\,(x^2+4)}$

24. $\int \frac{(3x^2+2x^2+1)\, dx}{(x-1)\,(x-2)\,(x+1)}$

25. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x-7}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$

27. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\, dx$

28. $\int \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}\, dx$

29. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(6-x^2)^3}}\, dx$

30. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^2+9}}$

31. $\int \sin^3 x\ \cos^2 x\, dx$

32. $\int \frac{dx}{3-4\sin x + 7\cos x}$

33. $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$

34. $\int \frac{dx}{5-7\sin^2 x+6\cos^2 x}$

35. $\int \sqrt[4]{\sin^3 x}\cdot\cos^3 x\, dx$

36. $\int \cos 8x\cdot \sin 3x\, dx$

37. $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\, dx$

38. $\int \sqrt{e^x-1}\, dx$

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^3+x}{x^4+1}\,dx$ 2) $\int\limits_0^1 x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$ 3) $\int\limits_0^\pi \sin^4 x\,dx$

4) $\int\limits_2^{2\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$ 5) $\int\limits_6^8 \dfrac{dx}{x^2+2x}$ 6) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{dx}{e^x-1}$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

1) $y=\dfrac{x^2+3}{x-2}$, $[3;\ 4]$ 2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$, $[0;\ 1/2]$

3. Оценить значения интегралов

1) $\int\limits_2^6 \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\,dx$ 2) $\int\limits_{-4}^0 \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2\,dx$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1) $\int\limits_{-\infty}^1 \dfrac{dx}{x^2+3x+10}$ 2) $\int\limits_{-1}^0 \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1+x^3)^2}}$

3) $\int\limits_2^\infty \dfrac{x\,\ln x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$ 4) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2-\sin x}$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $\left|\begin{array}{l} y=2x-x^2, \\ y=2, \\ x=0, \quad x=-2. \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} x=t^2, \\ y=t^4-t^2, \\ y=0. \end{array}\right.$ 3) $\rho=4\cos 4\varphi$.

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной
указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

1) $\left|\begin{array}{l} x^2-y^2, \\ y=-2, \quad y=2. \end{array}\right.$ 2) $\left|\ x^2-y^2=4, \quad y=2, \quad y=-2.\right.$

7. Вычислить длины дуг кривых:

1) $L:\ \left|\begin{array}{l} y^2=(x+1)^3, \\ x=4. \end{array}\right.$ 2) $L:\ \left|\ \rho=a\ \sin(2\varphi).\right.$

8. Заряд Q равномерно распределен вдоль отрезка прямой длиной L. Найти величину силы, с которой отрезок притягивает одноименный заряд q, расположенный на серединном перпендикуляре на расстоянии L от отрезка.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ x^2+y^2\le 4,\quad x^2+y^2\le 4x.$$
$$2)\ \ x^2+y=0,\quad x-y-2=0$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)}\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2\le y,\quad -x\le y\le x\sqrt{3}\ \}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ 4x-y+6=0;\ \ x-2y=2;\ \ y=-2,\ \ y=2.$$
$$2)\ \ (x^2+y^2)^{7/2}=x^3\cdot y^2.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной
поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D:$ Треугольник, : $A(3;4),\ \ B(6;2),\ \ C(3;\ 1/2),\qquad \delta(x;y)=x+y.$

2) $D:\ \{4\le x^2+y^2\le 16,\quad x\le y\le x/\sqrt{3},\quad x>0,\ \ y>\},\qquad \delta(x;y)=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V),
ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ x+y=4,\quad z=4\sqrt{y},\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ \ x^2+y^2=4,\quad z=x^2+y^2,\quad z\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ z=4(x^2+y^2),\quad y=3x,\quad x=2,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ \ z^2+y^2=2y,\quad z^2+y^2=4y,\quad x=2,\quad x=4.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{\ 2\le x^2+y^2+z^2\le 8,\quad z^2=x^2+y^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\ ,\ z\ge 0\ \},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=x\,y.$

Криволинейный и поверхностный интегралы

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} x\sqrt{x^2-y^2}\, dl$,

где L – часть линии $y = 2-x$, от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;0)$.

2. Найти массу линии $x^2+y^2=2x$, если линейная плотность $\delta(x;y)=1+y$.

3. Найти координаты центра тяжести дуги однородной астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $(x\geq 0, \quad y\geq 0.)$

4. Вычислить $\iint\limits_{(S)} (x\ +y\ +z)\, d\sigma$, где $(S):\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

5. Найти площадь части поверхности $2y = x^2+z^2$, вырезанной плоскостями $y=3$, $y=5$.

6. Найти массу части поверхности $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=1$, если поверхностная плотность $\delta(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

7. Вычислить $\int\limits_{(L)} y\ dx + x(x^2+y)\ dy$, где L– периметр треугольника ABC $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$, обходимый в положительном направлении.

8. Доказать, что выражение $(12x^2y+1/y^2)\,dx+(4x^3-2x/y^3)\,dy$ является полным дифференциалом функции $U(x;y)$, и найти эту функцию.

9. Вычислить $\iint\limits_{(S)} x^2\, dydz$, где (S)– внешняя сторона поверхности $x+y+z=2$ в первом октанте.

10. Вычислить $\iint\limits_{(S)} y\ dydz - x\ dxdz + z\ dxdy$, где (S)– внешняя сторона части конуса $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $0\leq z\leq 1$.

Скалярное и векторное поле

1. Найти работу силового поля $\vec{F} = (x^2 + 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 - 2x) \cdot \vec{j}$ вдоль дуги кривой $L:\ y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$, между точками $A(-4;\ 0)$ и $B(0;\ 2)$.

2. Найти работу силового поля $\vec{F} = z \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$ вдоль дуги кривой $L:\ x = 3\cos t, \quad y = 4, \quad z = 3\sin t, \quad t \in [0;\ \pi/2]$.

3. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали

1) $\vec{A} = \{2x;\ \ y;\ \ -3z\}$, S – часть плоскости $x + y + z = 1$, вырезанной координатными плоскостями.

2) $\vec{A} = (3z^2 + x) \cdot \vec{i} + e^x \cdot \vec{j} + e^y \cdot \vec{k}$, S – полная поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 4$.

3) $\vec{A} = x^2 \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + xz \cdot \vec{k}$, S – полная поверхность четверти параболоида $x^2 + y^2 = z, \quad z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$.

4. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L

1) $\vec{A} = \{y^2;\ (x + y)^2\}$, L – контур треугольника $\triangle ABC$ с вершинами в точках $A(2;\ 0)$, $B(2;\ 2)$, $C(0;\ 2)$.

2) $\vec{A} = yz \cdot \vec{i} + 2xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$, L – линия пересечения полусферы $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ и цилиндра $x^2 + y^2 = 9$.

5. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A} = \{2x + ze^x;\ 2y;\ e^z - 2z\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

6. Построить линии уровня скалярного поля $U(x;\ y) = y - \sqrt{x + 2}$.

7. Найти производную скалярного поля $U(x; y; z) = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$ в точке $M_o(1;\ 1;\ 1)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{4; -2; 3\}$.

8. Найти величину и направление вектора наибольшей скорости изменения температурного поля $T(x;\ y;\ z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ в точках $M_1(1;\ 1;\ 1)$ и $M_2(0;\ -2;\ -1)$

Дифференциальные уравнения и системы

1. Найти общие решения уравнений первого порядка

1) $y' + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{y}{x}.$
2) $(3x^2 - 2x - y)\,dx + (2y - x + 3y^2)\,dy = 0.$
3) $(2x^2\,y\,\ln y - x)\,y' = y.$
4) $(x^2 - 1)\,y' - x\,y = x^3 - x.$
5) $y' + 2xy = x\,e^{x^2}.$
6) $\cos y\,dx = 2\sqrt{1+x^2}\,dy + \cos y\,\sqrt{1+x^2}\,dy.$

2. Найти частные решения уравнений

1) $(\sin^2 y + x\,\mathrm{ctg}\,y)\,y' = 1,\qquad y(0) = \dfrac{\pi}{2}.$
2) $y^2\,\ln x\,dx - (y-1)\,x\,dy = 0,\qquad y(1) = 1.$
3) $(2x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0,\qquad y(1) = 0.$
4) $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0,\qquad y(1) = 1/2\sqrt{e}.$

3. Найти решения уравнений высшего порядка

1) $x\,y'' + y' = \ln x.$

2) $2x\,y'\,y'' = (y')^2 - 1.$

3) $y''' = (y'')^2.$

4) $y'' = x\,\sin 2x,\quad \begin{matrix} y(0) = 2, \\ y'(0) = 2 \end{matrix}.$

5) $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}.$

6) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}.$

7) $y'' + 169y = \cos 13x.$

8) $y'' + 49y' = x^3 + 4x.$

9) $y''' + 3y'' + 2y' = (x+1)^2,$

10) $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)\,e^{2x}.$

11) $x^2\,y'' - 9x\,y' + 25y = 0,$

12) $x^2\,y'' - 2x\,y' + 2y = \sin\ln x.$

13) $4\ddot{x} + 7\dot{x} - 2x = (t-1)\,\cos 2t,\qquad x(0) = -4,\quad \dot{x}(0) = 2.$

14) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = e^{-4t}\,(t^2 - t + 1),\qquad x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = 2.$

4. Найти решения линейных систем

1) $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}.$

2) $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y \\ \dot{y} = 8x + 6y \end{cases},\qquad \begin{matrix} x(0) = -2 \\ y(0) = 0. \end{matrix}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 4y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}.$

4) $\begin{cases} \dot{x} = y - \cos 2t \\ \dot{y} = -x + \sin 2t \end{cases}.$

Числовые и функциональные ряды.

1. Найти суммы числовых рядов

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{5^{n-2}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{16n^2+8n-15}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$

2. Исследовать ряды на сходимость

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n\,(n+3)\,(2n+5)}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-3n} \cdot e^{-n}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n \cdot (n^2+1)}{n!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+5}{\sqrt{3n \cdot 7^n}}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+8}{3n+4}\right)^{5n}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}^{5n} \left(\dfrac{3}{n+1}\right)$

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln^2(\ln n)}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^{-\sqrt[3]{n+1}}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$

3. Найти интервалы сходимости функциональных рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{5^{2n}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-2)^{2n}}{n\,\sqrt{n+1}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^n (2x)$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3}{n^3+2} \dfrac{1}{(3x^3+10x+9)^n}$

4. Найти суммы функциональных рядов

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (4n^2+6n+5)x^n$

5. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции

1) $y = \sin 2x, \quad x_0 = 3\pi/4.$ 2) $y = x\,\ln(1+x^2), \quad x_0 = 0$

3) $y = 6^{3x} \quad x_0 = 3,$ 4) $y = x \cdot \sqrt[3]{27-2x} \quad x_0 = 0.$

6. Вычислить интегралы с точностью до 0,001

1) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+x^2/4}\,dx$ 2) $\int\limits_0^1 \dfrac{1-e^{-x}}{x}\,dx$

Ряды Фурье. Интеграл Фурье

1. Заданную на интервале $(-l;\ l)$ функцию разложить в тригонометрический ряд Фурье. Построить график суммы полученного ряда.

$$1)\ f(x) = 2x - 3, \quad x \in (-\pi;\ \pi),$$

$$2)\ f(x) = 2 + \cos^2 3x, \quad x \in (-1;\ 1)$$

$$3)\quad f(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & -\pi < x < 0, \\ \pi/2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

2. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 3 \end{cases}$ разложить в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{3}, \quad n = 1, 2, \ldots\infty\right\}$. Построить график суммы полученного ряда.

3. Функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ x - 2, & 1 \le x < 2 \end{cases}$ разложить в ряд Фурье по ортогональной системе $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\infty\right\}$. Построить график суммы полученного ряда.

4. Функцию $f(x) = e^x$, $x \in (-1;\ 1)$ представить тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме. Записать:

a) спектральную функцию $S(\omega_n)$,
b) амплитудный спектр $A(\omega_n) = |S(\omega_n)|$
c) фазовый спектр $\varphi(\omega_n) = \arg S(\omega_n)$.

5. Функцию $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $x \in (-\infty;\ \infty)$ представить интегралом Фурье.

6. Найти преобразование Фурье $F(\omega)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

7. Найти синус преобразование Фурье $F_s(\omega)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Комплексные числа и функции

1. Даны числа $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 2 + 2i$. Вычислить:

1) $2z_1 - 3z_2$, 2) $(z_2)^2$, 3) $\dfrac{\overline{z}_1 - z_2}{z_2}$, 4) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$,

5) $\sqrt[3]{z_1^2 z_2}$, 6) $\ln z_1$, 7) $\cos z_2$, 8) $\operatorname{sh} \overline{z}_1$.

Результаты вычислений представить в показательной и алгебраической формах.

2. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями

$$1)\ \operatorname{Im} \frac{1}{z+i} = C, \qquad 2)\ \operatorname{Re} z^2 = C.$$

3. Решить уравнения

$$1)\ \sin z + \cos z = 1, \qquad 2)\ i \cdot e^{2z} = 2 - 2i$$

4. На комплексной плоскости заштриховать области, в которых при отображении функцией $f(z) = \dfrac{2z+3i}{iz+4}$ имеет место

a) сжатие $k \le 1$;

b) поворот на угол $0 \le \alpha \le 90^o$.

5. Доказать, что функция $v(x;y) = x^2 - y^2$ может служить мнимой частью аналитической функции $f(z) = u + iv$ и найти ее.

6. Вычислить интегралы

1) $\displaystyle\int_{(L)} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $L : \{\ |\,z\,| = 1,\ \operatorname{Im} z < 0\ \}$;

2) $\displaystyle\int_{(L)} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\, dz$, где L – ломаная $(0;\ 1;\ 1+2i)$.

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши

$$\oint_{(L)} \frac{z^2\, dz}{(z-1)^2(z+1)} \qquad \text{где } (L): \begin{cases} 1)\ \ |z-1| = 1/2; \\ 2)\ \ |z+1| = 1/2; \\ 3)\ \ |z| = 2 \end{cases}$$

Вычеты и их приложения

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-i)\ln 2n}.$$

2. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(3n+i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i-3^n}{(z-2i)^n}.$$

3. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$

а) $\dfrac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}, \quad z_0 = 0;$ б) $z \sin \pi \dfrac{z+2}{z+1}, \quad z_0 = -1.$

4. Для функции $(\cos \pi z)/[(4z^2-1)(z^2+1)]$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

5. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а) $\dfrac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z\,\mathrm{sh}(3\pi z)}, \quad z = 0;$ б) $\dfrac{\mathrm{sh}(\pi i z)}{(z+2)^2 z}, \quad z = -2;$

в) $z\,\mathrm{ch}\,\dfrac{1}{z+2}, \quad z = -2;$ г) $\dfrac{\mathrm{sh}\,2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}, \quad z = 0;$

д) $\dfrac{z-1}{z^2+1}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{z}{z-3}, \quad z = \infty;$ е) $(z+1)^2\,\mathrm{sh}(e/t), \quad z = \infty.$

6. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z \cos z}\,dz;$ б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z e^{1/z} - z - 1}{z^3}\,dz;$

в) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+9)(x^2+4)^2}\,dx;$ г) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx;$

д) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{5-3\sin t}\,dt;$ е) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{6}+\cos t)^2}\,dt.$

Операционный метод

1. Найти изображения следующих функций

1) $f(t) = \cos^2 t.$ 3) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{-3\tau} d\tau.$

2) $f(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t}.$ 4) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ e^{-(t-3)}, & 3 \leq t \leq 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям

1) $F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}.$ 2) $F(p) = \frac{e^{-p/2}}{p(p^2+1)}.$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом

1) $\dot{x} + 5x = e^t,$ $x(0) = 0.$

2) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t - \sin t,$ $x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = 0.$

3) $\ddot{x} + 7\dot{x} + 6x = t^2 + 3t,$ $x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = 2.$

4) $9\ddot{x} + x = e^{3t} + 2,$ $x(0) = 2,$ $\dot{x}(0) = 0.$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля

1) $\ddot{x} + x = \frac{1}{1+e^t},$ $x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = 0.$

2) $\ddot{x} + 4x = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & 2 \leq t \leq 3, \\ -1, & 3 < t \leq 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases}$ $x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = 0.$

5. Найти решение систем операционным методом

1) $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 2y \\ \dot{y} = -x + 3y \end{cases},$ $x(0) = 0,$ $y(0) = 2.$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -2x + 4y \end{cases},$ $x(0) = 1,$ $y(0) = 0.$

1. В первой коробке 4 белых и 7 черных шаров, во второй коробке 8 белых и 5 черных шаров. Из первой коробки во вторую наугад переложено 4 шара, а затем из второй коробки извлекают 3 шара. Какова вероятность, что все они белые ?

2. Прибор состоит из 10 узлов. Вероятность безотказной работы течение определенного времени для каждого узла равна 0.9. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за это время откажут

a) хотя бы один узел, b) не менее двух узлов.

3. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй - 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что деталь произведена первым автоматом.

4. В одном из районов города в среднем за одни сутки происходит три дорожно-транспортных происшествия. Какова вероятность того, что за 2 дня число ДТП :

a) будет равно 6; b) будет не более четырех?

5. Математическое ожидание и средне квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12; 14).

6. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a(4x - x^3), & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

1) найти постоянную a,
2) найти функцию распределения $F(x)$,
3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$,
4) вычислить математическое ожидание $M(X)$,
5) вычислить дисперсию $D(X)$,
6) вычислить вероятность $P\ (0,5 < X < 1,5)$.

Математическая статистика

1. Проводился подсчет количества проезжающих мимо поста ГАИ в течении 1-ой случайно выбранной минуты (случайная величина X). Таких наблюдений проведено 30, результаты наблюдений приведены в таблице. Сколько, в среднем, автомобилей проедет мимо поста ГАИ за неделю?

$$N = \begin{cases} 4 & 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{cases}$$

2. В результате проведенных случайных измерений абсолютных значений тока в электрической цепи получены следующие значения:

$$I = \begin{cases} 0,73 & 1,48 & 1,72 & 2,53 & 3,28 & 3,39 & 3,68 & 4,26 & 4,65 & 5,23 \\ 5,75 & 5,83 & 6,17 & 6,39 & 6,67 & 7,39 & 7,47 & 8,84 & 10,26 & 10,26 \end{cases}$$

Определить величину среднего тока в цепи.

3. По условиям задач 1 и 2

a) составить статистическую таблицу распределения относительных частот случайной величины,

b) построить полигон и гистограмму распределения.

4. Дана статистическая таблица распределения частот в случайной выборке

a) Построить полигон и гистограмму распределения.

b) Найти величины $\overline{x}$ и s^2 выборки.

c) Записать теоретический закон распределения. Найти теоретические значения вероятностей и сравнить их с величинами относительных частот.

d) Использовать критерий Пирсона для установления правдоподобности выбранной гипотезы о законе распределения.

1)

x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
n_i	14	12	5	8	9	11	8	13	6	14

(использовать закон равномерного распределения)

2)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	22	33	20	11	7	3	2	1	1	0

(использовать закон распределения Пуассона)

3)

x_i	0	2	4	6	8	10	12	14
n_i	6	24	38	21	5	3	2	1

(использовать закон нормального распределения)

5. Для нормально распределенной случайной величины (табл.3, задача 4) определить доверительный интервал, в который с надежностью $p = 0,95$ попадает истинное значение (математическое ожидание) случайной величины.

6. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0.95, зная выборочную среднюю $\overline{x} = 75.15$, объем выборки $n = 64$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma = 8$.

7. По данным корреляционной таблицы значений $x_i; y_i$ случайных величин X и Y

1) нанести точки $(x_i; y_i)$ на координатную плоскость, и соединить их ломаной,

2) подобрать функциональную зависимость $y = f(x)$, наиболее хорошо описывающую данную корреляционную. Линеаризовать, если требуется, эту зависимость, используя новые переменные,

3) составить уравнение линии регрессии и определить коэффициент корреляции. Оценить тесноту связи между величинами X и Y.

1)

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75
y_i	0,21	2,35	4,30	6,45	8,40	10,5	12,5	14,5

2)

x_i	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
y_i	0,21	0,35	0,42	0,67	0,95	1,22	1,73	2,55