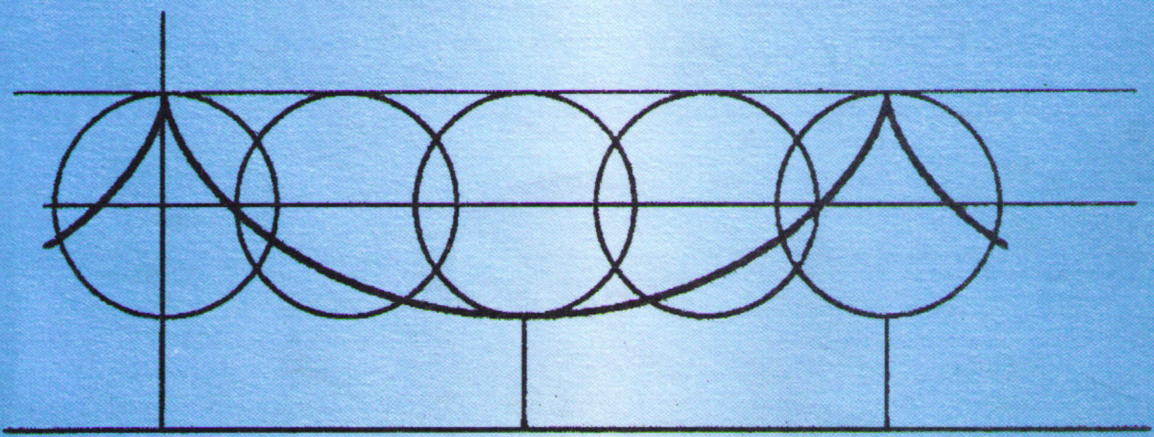

В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов

ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебники Томского политехнического университета

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Томский политехнический университет
Томский государственный университет
Институт естественных наук и экологии (Курчатовский РНЦ)
Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

В. Г. Багров, В. В. Белов, В. Н. Задорожный, А. Ю. Трифонов

ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением по образованию в области прикладной математики и управления качеством в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 073000 – Прикладная математика

Издательство ТПУ

Томск 2004

УДК 581
Б14

Б14 **Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю.**
Элементы современной математической физики: Учебное пособие. —
Томск: Изд-во ТПУ, 2004. — 165 с.

Настоящее пособие представляет собой дополнительные главы курса «Методы математической физики» и содержит материал по специальным разделам этого курса: вариационному исчислению и его приложениям в классической механике; уравнением в частных производных первого порядка; задаче Штурма–Лиувилля для уравнений в частных производных и псевдодифференциальным операторам. Предлагаемое пособие может быть полезно студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов физических и инженерно-физических специальностей.

УДК 581

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации
№МД-246.2003.02

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного
педагогического университета, г. Томск
Бухбиндер И.Л.

Доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного
университета, г. Томск
Шаповалов А.В.

Содержание

Глава 1. Элементы вариационного исчисления в классической механике 4

1. Функционалы. Основные понятия и определения 5
   - 1.1. Функционалы и близость функций 5
   - 1.2. Вариация и экстремум функционала 11
2. Уравнение Эйлера 15
3. Уравнения Эйлера, допускающие понижение порядка. Самосопряженная форма уравнений Эйлера 22
4. Вариационная задача с естественными граничными условиями 42
5. Вариационная задача с функционалами, зависящими от нескольких функций одной переменной 44
6. Вариационная задача для функционалов, зависящих от функций нескольких переменных 47
7. Вариационная задача для функционалов, зависящих от производных высших порядков 50
8. Условия Лежандра и Якоби 55
9. Уравнения Лагранжа в классической механике 58
10. Канонические уравнения Гамильтона 73
11. Первые интегралы системы Гамильтона. Скобки Пуассона 81
12. Канонические преобразования 83
13. Теорема Лиувилля 85
14. Уравнения движения классических частиц со спином во внешних полях 86
    - 14.1. Уравнения Френкеля–Найборга 87
    - 14.2. Уравнения Тамма–Гуда 90
    - 14.3. Уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди 91

Глава 2. Уравнения в частных производных первого порядка 93

15. Линейные уравнения в частных производных первого порядка 94
16. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка 103
17. Интегрирование уравнений неразрывности и переноса 109
    - 17.1. Интегрирование уравнения неразрывности 109
    - 17.2. Интегрирование уравнений переноса 112
18. Уравнение Гамильтона–Якоби 117
    - 18.1. Задача Коши для нестационарного уравнения Гамильтона–Якоби 117
    - 18.2. Решение задачи Коши с помощью лагранжевых поверхностей* . . 129
    - 18.3. Задача Коши для стационарного уравнения Гамильтона–Якоби* . 134
    - 18.4. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби 136

Глава 3. Задача Штурма–Лиувилля для уравнений в частных производных. Псевдодифференциальные операторы 145

19. Постановка задачи 145
20. Задача Штурма–Лиувилля и начально-краевые задачи для уравнений математической физики 147
    - 20.1. Редукция задачи 147
    - 20.2. Неоднородные начальные условия 148
    - 20.3. Линейное неоднородное уравнение 151
    - 20.4. Неоднородные граничные условия 154
21. Задача Штурма–Лиувилля и краевые задачи для стационарных уравнений 155
22. Псевдодифференциальные операторы и их символы 157

Список литературы 165

Настоящее пособие содержит материал по специальным разделам курса математической физики: вариационному исчислению и его приложениям в классической механике; уравнениям в частных производных первого порядка; задаче Штурма–Лиувилля для уравнений в частных производных; псевдодифференциальным операторам. Этот математический аппарат в той или иной степени используется во всех разделах теоретической физики, поскольку подавляющее большинство физических и инженерных задач допускает формулировку на языке вариационного исчисления. Поэтому знание основ этого раздела математики входит в образовательный минимум современного физика и инженера. Умение формулировать задачи на этом языке открывает, учитывая возможности современной вычислительной техники, необычайно широкие перспективы в области численного решения инженерных проблем практически неограниченной сложности за вполне приемлемое время с точностью, позволяющей свести к минимуму или исключить совсем весьма дорогостоящие натурные эксперименты, а также даёт возможность перебора большого количества различных вариантов решений и выбора подходящих значений сопутствующих параметров. Имеется большое число специальных монографий, рассчитанных в основном на специалистов-математиков и физиков-теоретиков, в которых изложены на хорошем математическом уровне различные аспекты вариационного исчисления.

Однако, как правило, эта часть математики слабо представлена в стандартных общеобразовательных математических курсах для студентов физических и, особенно, инженерно-физических специальностей. Изданием данного пособия мы предпринимаем попытку ликвидировать этот пробел.

ГЛАВА 1
Элементы вариационного исчисления в классической механике

Эта часть курса посвящена изучению разделов математики, исходным понятием для которых является функционал – величина, зависящая от выбора одной или нескольких функций, которые играют для функционала роль аргументов.

Вариационное исчисление – метод отыскания экстремумов функционалов – широко используют в различных областях физики. Фактически все законы природы, формулируемые обычно на языке дифференциальных уравнений, допускают вывод из так называемых «вариационных принципов», согласно которым истинное движение физической системы можно выделить из всех допустимых тем, что оно минимизирует некоторые функционалы.

Авторы в этом разделе курса ставят следующие основные учебные задачи. Первая – ознакомить с техникой исследования задач на экстремум функционалов на примере простейшей одномерной вариационной задачи для систем с закрепленными концами. Вторая – продемонстрировать, как из вариационного принципа «наименьшего действия» выводятся уравнения движения механической системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы и изучить общие свойства этих уравнений движения, составляющие важную часть гамильтонова подхода в классической и квантовой механике. Третья – привести решения ряда задач классической механики, результаты которых будут использованы в других курсах цикла.

1. Функционалы. Основные понятия и определения

1.1. Функционалы и близость функций

♦ Переменная величина v называется *функционалом*, определенным на некотором классе функций $\mathcal{K}$, если каждой функции $y(x)$ из класса $\mathcal{K}$ ставится в соответствие определенное число $v \in \mathbb{R}$ ($v \in \mathbb{C}$), а сам класс $\mathcal{K}$ называется областью определения функционала. Для значений функционала v на элементе $y = y(x) \in \mathcal{K}$ используется символ $v = v[y(x)]$.

В качестве функционального пространства $\mathcal{K}$ в этой главе мы рассматриваем пространство $\mathcal{C}^k([a, b])$, состоящее из всех функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и имеющих непрерывные производные до k-го порядка включительно. Здесь k — некоторое фиксированное число. При $k = 0$ пространство $\mathcal{C}^0([a, b]) = \mathcal{C}([a, b])$ есть пространство всех непрерывных на $[a, b]$ функций.

Приведем примеры функционалов.

1. Функционал

$$v[y(x)] = y'(x_0), \qquad y(x) \in \mathcal{C}^1([a, b]), \quad x_0 = \frac{a+b}{2} \tag{1.1}$$

ставит в соответствие функции $y(x)$ из класса $\mathcal{C}^1([a, b])$ число, равное значению производной этой функции в точке, являющейся серединой интервала. Если, например,

$$v[y(x)] = y'\Big(\frac{1}{2}\Big), \qquad y(x) \in \mathcal{C}^1([0, 1]), \quad x_0 = \frac{1}{2} \in [0, 1],$$

то

$$v[x^2] = 2x\Big|_{x=1/2} = 1,$$
$$v[e^x] = e^x\Big|_{x=1/2} = \sqrt{e}$$

и т.д.

2. Функционал

$$v[y(x)] = \int\limits_1^3 \sqrt{1 + \{y'(x)\}^2} dx, \qquad y(x) \in \mathcal{C}^1([1, 3]) \tag{1.2}$$

ставит в соответствие функции $y(x)$ длину дуги кривой $y = y(x)$ между точками $A(1, y(1))$ и $B(3, y(3))$. Например, для $y = \operatorname{ch} x$

$$v[x] = \int\limits_1^3 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int\limits_1^3 \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} 3 - \operatorname{sh} 1 = 2 \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 2$$

и т.д.

3. Функционал

$$v[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x) dx, \qquad y(x) \in \mathcal{C}([0, 1]) \tag{1.3}$$

ставит в соответствие функции $y(x)$, непрерывной на отрезке $[0,1]$ (т.е. из класса $\mathcal{C}([0,1])$), площадь под кривой $y = y(x)$. Например, для $y = 2x$

$$v[2x] = \int\limits_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

и т.д.

4. Функционал

$$v[y(x)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} y(x)\cos x\,dx, \qquad y(x) \in \mathcal{C}([0,\pi]) \tag{1.4}$$

ставит в соответствие функции $y(x)$, непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ (т.е. из класса $\mathcal{C}([0,\pi])$), первый коэффициент разложения функции $y(x)$ в ряд Фурье по косинусам кратных дуг.

5. Функционал

$$S = v[y(x)] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x, y(x), y'(x))dx, \quad y(x) \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta]) \tag{1.5}$$

называется действием, а $F(x, y, y')$ – функцией Лагранжа (или лагранжианом). Каждой функции (траектории) $y = y(x)$ ставится в соответствие действие $S = v[y(x)]$. Здесь $F(x, y, y')$ – непрерывная функция вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно. Свойства именно этого функционала и его обобщений мы и будем изучать в данной главе.

♢ Поскольку функционалы являются «функциями», в которых роль независимого переменного играют обычные функции $y(x) \in \mathcal{K}$, то для исследования функционалов на экстремум нам потребуются понятия «близости» и «расстояния» между функциями – элементами пространства $\mathcal{C}^k([a,b])$. Для их определения мы воспользуемся понятием нормы функционального пространства $\mathcal{C}^k([a,b])$ (см. [33]). В этом разделе, если не оговорено противное, под нормой будем понимать норму в $\mathcal{C}^k([a,b])$.

♦ *Нормой* элемента $y(x) \in \mathcal{C}^k([a,b])$ называется неотрицательное число

$$\|y(x)\|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{j=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |y^{(j)}(x)|, \tag{1.6}$$

где $y^{(0)}(x) = y(x)$.

♦ Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из пространства $\mathcal{C}^k[a,b]$ называются *близкими в смысле близости k-го порядка*, если норма их разности $\|y_1(x) - y_2(x)\|_{\mathcal{C}^k}$ мала на отрезке $[a,b]$.

Другими словами, близость функций $y(x)$ и $y_1(x)$ в пространстве $\mathcal{C}^k([a,b])$ с заданной точностью $\delta > 0$ означает, что $\|y(x) - y_1(x)\|_{\mathcal{C}^k} < \delta$, т.е. что близки не только сами функции, но и их производные до k-го порядка включительно.

Пример 1.1. Установить порядок близости функций

$$1)\quad y(x) = \frac{\sin n^2 x}{n^3+1}, \qquad y_1(x) = 0, \quad x \in [0,\pi];$$
$$2)\quad y(x) = \frac{\cos x}{n}, \qquad y_1(x) = 0, \quad x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big].$$

Решение. Обе пары функций на указанных отрезках имеют непрерывные производные любого порядка. Проверим условие близости нулевого порядка для первой пары функций. Так как

$$|y(x) - y_1(x)| = \left|\frac{\sin n^2 x}{n^3 + 1}\right| < \frac{1}{n^3},$$

то из полученного неравенства следует, что с ростом n модуль разности $|y(x) - y_1(x)|$ может стать сколь угодно малым. Это означает, что рассматриваемые функции близки в смысле близости нулевого порядка. Проверим условие близости первого порядка:

$$|y'(x) - y_1'(x)| = \left|\frac{n^2 \cos n^2 x}{n^3 + 1}\right| < \frac{1}{n}.$$

Из полученного неравенства следует, что рассматриваемые функции близки в смысле близости первого порядка. Проверим условие близости второго порядка:

$$|y''(x) - y_1''(x)| = \left| -\frac{n^4 \sin n^2 x}{n^3 + 1}\right| = \frac{n^4}{n^3 + 1}|\sin n^2 x|.$$

Так как в точках $x = \pi/(2n^2)$ разность $|y''(x) - y_1''(x)| = n^4/(n^3 + 1) \simeq n$ при больших n может быть сделана сколь угодно большой, то близость 2-го порядка отсутствует. Таким образом, первая пара функций близка в смысле близости первого порядка.

Близость функций нулевого порядка геометрически означает близость по ординатам, а близость первого порядка – еще и близость по направлениям касательных в соответствующих точках. Очевидно, что если кривые близки в смысле близости k-го порядка, то они тем более близки в смысле близости меньших порядков: $k - 1$, $k - 2$, ..., 0. Этим замечанием мы и воспользуемся при исследовании второй пары функций. Проверим условие их близости k-го порядка:

$$\left|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)\right| = \left|\frac{\cos^{(k)} x}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Из полученного неравенства следует близость этой пары функций k-го порядка и ниже, а в силу произвольности числа k – близость любого порядка.

♦ *Расстоянием между функциями* $y(x)$ и $y_1(x)$ из пространства непрерывных функций $\mathcal{C}([a, b])$ или расстоянием нулевого порядка называется неотрицательное число

$$\rho_0(y, y_1) = \|y(x) - y_1(x)\|_{\mathcal{C}([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |y(x) - y_1(x)|. \tag{1.7}$$

В пространствах более высоких порядков $\mathcal{C}^k[a, b]$ вводится понятие расстояния k-го порядка:

$$\rho_k(y, y_1) = \|y(x) - y_1(x)\|_{\mathcal{C}^k([a,b])} = \sum_{j=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |y^{(j)}(x) - y_1^{(j)}(x)| =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} |y(x) - y_1(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x) - y_1'(x)| + \cdots + \max_{x\in[a,b]} |y^{(j)}(x) - y_1^{(j)}(x)|. \tag{1.8}$$

Пример 1.2. Найти

1) расстояние нулевого порядка между функциями $y(x) = x$ и $y_1(x) = x^2$ из $\mathcal{C}([0, 1])$;

2) расстояние первого порядка между функциями $y(x) = x$ и $y_1(x) = \ln x$ из $\mathcal{C}^1([1/e, e])$.

Решение. 1. Согласно определению расстояния нулевого порядка (1.7), имеем

$$\rho_0(x, x^2) = \|x - x^2\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \max_{x\in[0,1]} |x - x^2|.$$

Поскольку на границах отрезка, т.е. в точках $x = 0$ и $x = 1$ разность $|x - x^2|$ обращается в нуль, то необходимо рассмотреть ее поведение во внутренних точках (рис. 1). Для этого на отрезке $[0, 1]$ запишем цепочку равенств

$$|x - x^2| = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

из которой следует, что наибольшее значение разность $|x - x^2| = 1/4$ имеет в точке $x = 1/2$. Следовательно,

$$\rho_0(x; x^2) = \|x - x^2\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \frac{1}{4}.$$

2. Согласно определению (1.8), для расстояния 1-го порядка запишем

$$\rho_1(x, \ln x) = \|x - \ln x\|_{\mathcal{C}^1([1/e,e])} = \max_{x\in[1/e,e]} |x - \ln x| + \max_{x\in[1/e,e]} \left|1 - \frac{1}{x}\right|.$$

Введем обозначения: $\varphi_0(x) = x - \ln x$, $\varphi_1 = \varphi_0' = 1 - 1/x$. Функция $\varphi_0(x)$ на отрезке $[1/e, e]$ имеет один экстремум в точке $x = 1$. Вычислив значение модуля функции $\varphi_0(x)$ в этой точке и на концах интервала, найдем

$$|\varphi_0(1/e)| = \left|\frac{1}{e} + 1\right| = 1 + \frac{1}{e}, \qquad |\varphi_0(1)| = |1 - \ln 1| = 1, \qquad |\varphi_0(e)| = |e - 1| = e - 1.$$

Наибольшим из этих значений является $|\varphi_0(e)| = e - 1$. Функция $\varphi_1 = \varphi_0' = 1 - 1/x$ на отрезке $[1/e, e]$ является монотонно возрастающей ($\varphi_1' = 1/x^2 > 0$) и экстремумов не имеет. Вычислим значения функции φ_1 на концах отрезка:

$$|\varphi_1(1/e)| = |1 - e| = e - 1, \qquad |\varphi_1(e)| = \left|1 - \frac{1}{e}\right| = 1 - \frac{1}{e}.$$

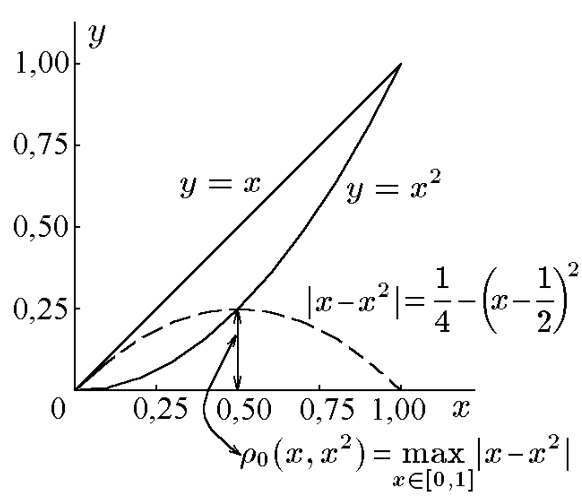

Рис. 1.

Среди них наибольшим является $|\varphi_1(1/e)| = e - 1$. Таким образом, для расстояния 1-го порядка найдем

$$\rho_1(x; \ln x) = \|x - \ln x\|_{\mathcal{C}^1([1/e,e])} = (e-1) + (e-1) = 2(e-1).$$

♦ Функционал $v[y(x)]$ называется *непрерывным в точке* $y(x) = y_0(x) \in \mathcal{C}^k$ в смысле близости k-го порядка, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $y(x)$, удовлетворяющих условию $\|y(x) - y_0(x)\|_{\mathcal{C}^k} < \delta$, справедливо

$$\big|v[y(x)] - v[y_0(x)]\big| < \varepsilon.$$

В противном случае функционал называется разрывным в смысле близости указанного порядка.

◊ Поскольку непрерывность функционала определяется не только его свойствами, но и функциональным пространством, на котором он задан, то один и тот же функционал может быть непрерывным на одном пространстве и разрывным на другом.

Проиллюстрируем это примером.

Пример 1.3. Показать, что функционал $v[y(x)]$ (1.1) является разрывным в смысле близости нулевого порядка (т.е. в $\mathcal{C}([a,b])$) и непрерывным в смысле близости первого порядка (т.е. в $\mathcal{C}^1([a,b])$).

Решение. Действительно, пусть функции $y(x)$ и $y_0(x)$ связаны соотношением

$$y(x) = y_0(x) + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ такова, что $|\varphi(x)| < \delta$ для всех $x \in [a,b]$, а $\varphi'(x_0) = 1$ для $x_0 \in [a,b]$. Очевидно, что такие функции $y(x)$ и $y_0(x)$ близки в смысле нулевого порядка, поскольку

$$\rho_0(y, y_0) = \max_{x\in[a,b]} |y(x) - y_0(x)|$$
$$= \max_{x\in[a,b]} |y_0(x) + \varphi(x) - y_0(x)| = \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| < \delta.$$

Однако для таких функций

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| = |y'(x_0) + \varphi'(x_0) - y'(x_0)| = |\varphi'(x_0)| = 1,$$

а это означает, что существуют такие $0 < \varepsilon < 1$, для которых при любом δ не выполняется условие

$$\big|v[y(x)] - v[y_0(x)]\big| < \varepsilon$$

в силу полученного выше ограничения

$$\big|v[y(x)] - v[y_0(x)]\big| = 1.$$

Таким образом, рассматриваемый функционал является разрывным в смысле близости нулевого порядка.

Рассмотрим теперь две функции $y(x)$ и $y_0(x)$, такие, что

$$|y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y_0'(x)| < \delta \tag{1.9}$$

для всех $x \in [a,b]$. Очевидно, что эти функции при малых δ близки в смысле близости 1-го порядка, поскольку

$$\rho_0(y, y_0) = \max_{x\in[a,b]} |y(x) - y_0(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x) - y_0'(x)| < \delta.$$

Кроме того, из неравенства (1.9) следует, что

$$|y'(x) - y_0'(x)| < \delta$$

для всех $x \in [a, b]$, включая x_0. Но в таком случае, положив $\varepsilon = \delta$, будем иметь

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| = |y'(x) - y_0'(x_0)| < \varepsilon = \delta.$$

Это и означает непрерывность функционала в смысле близости 1-го порядка.

Другими словами, функционал $v[y(x)]$ (1.1) непрерывен на гладких функциях и разрывен на непрерывных.

Этот пример показывает, что из непрерывности функционала в смысле близости k-го порядка не следует непрерывность функционала в смысле близости более низких порядков $k-1$, $k-2$ и т.д.

♦ Функционал $L[y(x)]$ называется *линейным*, если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) и любых $y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{K}$ справедливо

$$L[\lambda y(x)] = \lambda L[y(x)],$$
$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$

Пример 1.4. Показать, что функционал, определенный на множестве $\mathcal{C}^1([a, b])$ формулой

$$L[y(x)] = \int\limits_a^b \{\varphi(x)y(x) + \psi(x)y'(x)\}dx, \tag{1.10}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции, является линейным и непрерывным в смысле близости первого порядка.

Решение. 1. Линейность функционала непосредственно следует из свойств определенного интеграла.

2. Пусть $\|y(x) - y_1(x)\|_{\mathcal{C}^1} < \delta$. Поскольку функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то они ограничены, т.е. существуют постоянные M_1 и M_2 такие, что $|\varphi(x)| < M_1$, $|\psi(x)| < M_2$ для любого $x \in [a, b]$. Оценим модуль разности:

$$\big|v[y(x)] - v[y_1(x)]\big| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_a^b \big\{|\varphi(x)|\,|y(x) - y_1(x)| + |\psi(x)|\,|y'(x) - y_1'(x)|\big\}dx \leqslant (M_1 + M_2)(b - a)\delta.$$

Выбрав $\delta = \varepsilon/[(M_1 + M_2)(b - a)]$ для каждого $\varepsilon > 0$, получим, что функционал (1.10) непрерывен на множестве $\mathcal{C}^1([a, b])$.

Пример 1.5. Показать линейность и непрерывность функционалов $v[y(x)]$ (1.2)–(1.5) на пространстве $\mathcal{C}^1([a, b])$.

Решение. Линейность указанных функционалов непосредственно вытекает из свойств определенного интеграла, а их непрерывность в $\mathcal{C}^1([a, b])$ – из результатов примера 1.4, поскольку они являются частными случаями функционала (1.10). Действительно, функционал (1.3) получается из (1.10) при $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = 0$; функционал (1.4) – при $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = 0$; функционал (1.5) – при сделанных относительно $F(x, y(x), y'(x))$ предположениях, а функционал (1.2) является частным случаем функционала (1.5).

1.2. Вариация и экстремум функционала

Исследуем поведение функционала (1.5) при изменении функции $y(x)$. Пусть $y(x)$ – некоторая исходная функция, а $y_1(x)$ – некоторая другая функция, близкая (например, в смысле близости k-го порядка) к $y(x)$. Функцию $y_1(x)$ мы будем называть проварьированной (измененённой, от латинского variatio – изменение) функцией.

Существует несколько представлений проварьированной функции $y_1(x)$. Можно, например, ввести понятие вариации аналогично тому, как вводится понятие дифференциала в дифференциальном исчислении.

♦ *Приращением*, или *вариацией*, «аргумента» $y(x)$ функционала $v[y(x)]$ называется разность между функциями $y_1(x)-y(x)$, $y(x), y_1(x)\in\mathcal{K}$.

Для обозначения используется символ

$$\delta y = y_1(x) - y(x), \quad y(x)\in\mathcal{K}. \tag{1.11}$$

Тогда проварьированную функцию можно записать как

$$y_1(x) = y(x) + \delta y(x). \tag{1.12}$$

Символ $\delta y(x)$, согласно определению, следует понимать как единый, причём $\big(\delta y(x)\big)' = \delta\big(y'(x)\big)$, поскольку производная разности равна разности производных:

$$\big(\delta y(x)\big)' = \big(y_1(x) - y(x)\big)' = y_1'(x) - y'(x) = \delta\big(y'(x)\big). \tag{1.13}$$

Другой подход состоит в том, что функция $y(x)$ в функционале $v[y(x)]$ рассматривается как однопараметрическое семейство

$$y = Y(x,\alpha), \tag{1.14}$$

в котором изменение параметра α меняет функцию $y(x)$, т.е. варьирует ее. В этом случае сам функционал становится функцией от α, т.е. $v = v(\alpha)$, и его изменение в зависимости от вариации функции $y(x)$ определяется параметром α. При этом вариацию $\delta y(x)$, соответствующую (1.11), можно определить как

$$\delta y(x) = \frac{\partial Y}{\partial\alpha}d\alpha, \tag{1.15}$$

и для её произвольности семейство (1.14) предполагать произвольным, а не фиксированным.

♦ Обозначим через

$$\Delta v = v[y(x)+\delta y] - v[y(x)]$$

приращение функционала $v[y(x)]$, отвечающее приращению δy независимой переменной $y(x)\in\mathcal{K}$. Если $y(x)$ фиксировано, то Δv представляет собой функционал (вообще говоря, нелинейный) от $\delta y\in\mathcal{K}$.

♦ *Вариацией*, или *дифференциалом*, функционала $v[y(x)]$, отвечающей вариации δy, называется главная, линейная по отношению к δy часть приращения функционала, т.е.

$$\Delta v = v[y(x)+\delta y] - v[y(x)] = L[y(x),\delta y] + \beta(y(x),\delta y)\|\delta y\|,$$

где $L[y(x),\delta y]$ – линейный по отношению к δy функционал, а для функции $\beta(y(x),\delta y)$ при выбранной $y(x)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\|\delta y\|_C\to 0}\beta(y(x),\delta y) = 0.$$

Этот предел соответствует оценке

$$\beta(y,\delta y)\delta y = O(\|\delta y\|^2) \text{ при } \|\delta y\| \to 0.$$

♦ Функционал $v[y(x)]$, имеющий вариацию при $y = y_0(x)$, называется дифференцируемым при $y = y_0(x)$. Для обозначения вариации функционала используется символ $\delta v = L[y(x), \delta y]$.

♢ При исследовании функционалов на экстремум их вариация играет такую же роль, как дифференциал при исследовании функций конечного числа переменных на экстремум. Как и дифференциал функции, вариация функционала, если она существует, определяется единственным образом.

Теорема 1.1. *Если функционал $v[y(x)]$ дифференцируем в точке $y = y(x) \in \mathcal{K}$, то при любом δy функция $\varphi(\alpha) = v[y(x) + \alpha\delta y]$ как функция числа α (при фиксированных $y(x)$ и δy) дифференцируема по α при $\alpha = 0$. Причем вариацию функционала можно определить равенством*

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}v[y(x) + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}. \tag{1.16}$$

Доказательство. По определению производной

$$\begin{gathered}\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{v[y(x)+\alpha\delta y] - v[y(x)]}{\alpha} = \\ = \lim_{\alpha\to 0}\frac{L[y(x),\alpha\delta y] + \beta(y(x),\alpha\delta y)|\alpha|\,\|\delta y\|}{\alpha} = \\ = L[y(x),\delta y] + \delta y\lim_{\alpha\to 0}\beta(y(x),\alpha\delta y) = L[y(x),\delta y].\end{gathered}$$

Здесь мы воспользовались свойством линейности функционала $v[y(x), \delta y]$ по δy. Таким образом,

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = L[y(x),\delta y] = \delta v,$$

что и требовалось доказать.

♢ Если функционал $v[y(x)]$ всюду дифференцируем, то функция $\varphi(\alpha) = v[y(x) + \alpha\delta y]$ дифференцируема при всех α и фиксированных $y(x)$ и δy.

Пример 1.6. Вычислить приращение $\Delta v[y(x)]$ функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_0^1 y^2(x)\,dx \tag{1.17}$$

если $y(x) = x^3$, $y_1(x) = x^2$, и доказать его дифференцируемость в каждой точке пространства $\mathcal{C}([0,1])$.

Решение. Согласно определению, имеем

$$\Delta v[y(x)] = v[x^2] - v[x^3] = \int\limits_0^1 x^4\,dx - \int\limits_0^1 x^6\,dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}.$$

Пусть теперь $y(x)$ – произвольная функция из пространства $\mathcal{C}([0,1])$. Тогда, согласно определению,

$$\Delta v[y(x)] = v[y(x) + \delta y(x)] - v[y(x)] =$$

$$= \int\limits_0^1 [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int\limits_0^1 y^2(x)\, dx = 2\int\limits_0^1 y(x)\delta y(x)\, dx + \int\limits_0^1 \{\delta y(x)\}^2 dx.$$

Линейность первого слагаемого по $\delta y(x)$ очевидна, поэтому именно он будет определять вариацию $\delta v[y(x)]$ при условии, что второе слагаемое будет относительно $\|\delta y(x)\|_{\mathcal{C}([0,1])}$ иметь порядок малости выше первого. Действительно, из неравенств

$$\int\limits_0^1 \{\delta y(x)\}^2 dx = \int\limits_0^1 |\delta y(x)|^2 dx \leqslant \big\{ \max_{x\in[0,1]} |\delta y(x)| \big\}^2 \int\limits_0^1 dx = \|\delta y(x)\|^2_{\mathcal{C}([0,1])}$$

следует, что второе слагаемое относительно $\|\delta y(x)\|_{\mathcal{C}([0,1])}$ имеет второй порядок малости.

Таким образом, приращение функционала (1.17) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, одно из которых линейно по $\delta y(x)$ и определяет вариацию функционала (1.17):

$$\delta v[y(x)] = 2\int\limits_0^1 y(x)\delta y(x)\, dx,$$

а второе имеет второй порядок малости по $\|\delta y(x)\|_{\mathcal{C}([0,1])}$. Согласно определению, функционал (1.17) дифференцируем в точке $y(x)$, а в силу ее произвольности – в каждой точке пространства $\mathcal{C}([0,1])$.

К этому же выводу можно прийти, исходя из теоремы 1.1. Действительно, в этом случае

$$\delta v[y(x)] = \frac{\partial}{\partial\alpha} v[y(x) + \alpha\delta y(x)]\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_0^1 [y(x) + \alpha\delta y(x)]^2 dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_0^1 2[y(x) + \alpha\delta y(x)]\delta y(x)\, dx\Big|_{\alpha=0} = 2\int\limits_0^1 y(x)\delta y(x)\, dx,$$

что совпадает с полученным выше выражением.

Пример 1.7. Показать, что функционал (1.5) дифференцируем в $\mathcal{C}^1([a,b])$ и его вариация имеет вид

$$\delta v[y(x)] = \int\limits_\alpha^b \Big\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'(x)\Big\} dx. \tag{1.18}$$

Решение. Вычислим приращение $\Delta v[y(x)]$, отвечающее приращению $\delta y(x)$ из $\mathcal{C}^1([a,b])$:

$$\Delta v[y(x)] = \int\limits_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx - \int\limits_a^b F(x, y, y')dx. \tag{1.19}$$

Тогда по формуле Тейлора имеем

$$F(x, y+\delta y, y'+\delta y') = F(x,y,y') + \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right\} +$$
$$+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2}(\delta y')^2\right\} + \ldots \tag{1.20}$$

Подставив (1.20) в (1.19), получим

$$\Delta v[y(x)] = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2\right]dx + \ldots \tag{1.21}$$

Первое слагаемое линейно относительно δy, $\delta y'$. Если все вторые частные производные функции $F(x,y,y')$ по y и y' ограничены по абсолютной величине некоторым числом M, то справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2\right]dx \leqslant \frac{M}{2}\int\limits_a^b (\delta y + \delta y')^2 dx \leqslant \frac{M}{2}\|\delta y\|^2,$$

где $\|\delta y\| = \max\limits_{x\in[a,b]}(\delta y + \delta y')$.

Таким образом, второе слагаемое имеет второй порядок малости относительно $\|\delta y\|$. Аналогично оцениваются остальные слагаемые: их порядок также выше второго. Следовательно, рассматриваемый функционал дифференцируем в $\mathcal{C}^1([a,b])$ и его вариация имеет вид (1.18).

Если $y(x)$ в (1.19) является однопараметрическим семейством функций (1.14), то аналогичная линеаризация даёт

$$\delta v = \frac{dv}{d\alpha}d\alpha = \int\limits_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'(x)\right\}dx. \tag{1.22}$$

Пример 1.8. Найти вариации функционалов

$$\text{а)}\ \ v[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'(x)e^{2y(x)} - x^3y^2(x))dx, \quad \text{б)}\ \ v[y(x)] = \int\limits_{-1}^1 (x^2y'(x) - y^2(x))dx.$$

Решение. И в том, и в другом случае подынтегральные функции непрерывны по своим аргументам и имеют непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно. Следовательно, оба функционала дифференцируемы в пространстве $\mathcal{C}^1([a,b])$ и их вариации, согласно (1.18), равны

$$\text{а)}\ \ \delta v = \int\limits_0^1 \left[2(y'e^{2y} - x^3y)\delta y + e^{2y}\delta y'\right]dx;$$

$$\text{б)}\quad \delta v = \int\limits_{-1}^{1} \big[-2y\delta y + x^2 \delta y' \big] dx.$$

♦ Функционал $v[y(x)]$ достигает при $y = y_0(x)$ максимума (минимума) на множестве $\mathcal{C}^k([a,b])$, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех $y(x)$, удовлетворяющих условию $\|y(x) - y_0(x)\|_{\mathcal{C}^k} < \delta$, справедливо неравенство

$$\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leqslant 0 \qquad (\Delta v \geqslant 0).$$

Теорема 1.2 (необходимое условие экстремума). *Если функционал $v[y(x)]$, имеющий вариацию, достигает максимума или минимума при $y = y_0(x)$, то при $y = y_0(x)$*

$$\delta v = 0.$$

Доказательство. При фиксированных $y_0(x)$ и δy

$$v[y_0(x) + \alpha \delta y] = \varphi(\alpha)$$

– функция от α, которая при $\alpha = 0$, по предположению, достигает максимума или минимума. Отсюда следует $\varphi'(0) = 0$ или

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y]\Big|_{\alpha=0} = 0,$$

т.е. $\delta v = 0$, что и требовалось доказать.

Этот же результат следует из формулы (1.22).

♢ В зависимости от функционального пространства, на котором мы ищем экстремум функционала, достаточные условия существования экстремума будут различными. Так, экстремум в пространстве $\mathcal{C}([a,b])$ называется сильным экстремумом, а в пространстве $\mathcal{C}^1([a,b])$ – слабым. Нетрудно показать, что каждый сильный экстремум является и слабым, тогда как обратное не всегда справедливо (см. пример 1.3).

♢ При доказательстве теоремы 1.2 предполагалось, что функционал $v[y(x)]$ определен на всех $y(x)$, достаточно близких к $y_0(x)$ в смысле выбранной нормы, что обеспечивает существование вариации δv (допускает вблизи $y_0(x)$ линеаризацию по δy). Такое предположение определяет локальный, т.е. внутренний, а не граничный характер экстремума. Далее, если не оговорено противное, мы будем придерживаться этого предположения.

♦ Функции, для которых $\delta v = 0$, называются *экстремалями*, или *стационарными функциями*. Значения, которые функционал принимает на стационарных функциях, называются *стационарными*.

2. Уравнение Эйлера

♢ Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются вариационными. Мы начнём со следующей задачи: исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int\limits_{a}^{b} F(x, y(x), y'(x)) dx, \tag{2.1}$$

считая, что $y(a) = A$, $y(b) = B$, $y(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$, а функция $F(x,y,y')$ непрерывна вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно.

Такую задачу иногда называют основной задачей вариационного исчисления.

Лемма 2.1 (основная лемма вариационного исчисления). *Если для любой непрерывной функции $\eta(x)$ справедливо*

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \tag{2.2}$$

где $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть существует $x_0 \in [a,b]$ такое, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда, согласно свойствам непрерывной функции существуют x_1 и $x_2 \in [a,b]$ такие, что для всех $x \in]x_1, x_2[$ функция $f(x)$ сохраняет знак. Выбрав в качестве $\eta(x)$ функцию, также сохраняющую знак на $]x_1, x_2[$ и обращающуюся в нуль вне этого интервала, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)dx > 0,$$

так как функции $f(x)$ и $\eta(x)$ имеют одинаковый знак на интервале $]x_1, x_2[$. Полученное противоречие доказывает лемму.

$\Diamond$ В справедливости леммы 2.1 можно также убедиться следующим образом. В силу произвольности функции $\eta(x)$ выберем её равной $f(x)$, т.е. $\eta(x) = f(x)$, но тогда из (2.2) имеем

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0,$$

откуда и следует $f(x) = 0$.

Кроме того, лемма 2.1 остаётся справедливой, если условие (2.2) выполняется для функций $\eta(x)$, имеющих на $[a,b]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно и удовлетворяющих условию $\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) = 0$ для всех $k = \overline{0, n-1}$. Действительно, проинтегрировав (2.2) необходимое число раз по частям, получим требуемое утверждение.

Лемма 2.2 (Дю Буа–Реймонда). *Если для любой функции $\eta(x)$, непрерывной на $[a,b]$ вместе со своей производной и такой, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, справедливо соотношение*

$$\int\limits_a^b f(x)\eta'(x)dx = 0 \tag{2.3}$$

где $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$, то $f(x)$ – постоянная функция.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существуют две точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) < f(x_2)$. Покажем, что в этом случае существует функция $\eta(x)$, которая удовлетворяет условиям леммы и для которой равенство (2.3) не имеет места. Пусть C – произвольное число, такое, что $f(x_1) < C < f(x_2)$. В силу непрерывности функции $f(x)$ существуют такие непересекающиеся интервалы $]\alpha, \beta[$ и $]\alpha', \beta'[$, что для любых $x \in]\alpha, \beta[$ и $x' \in]\alpha', \beta'[$ справедливо

$$f(x) < C < f(x').$$

В качестве функции $\eta'(x)$ выберем любую непрерывную функцию, положительную на интервале $]\alpha, \beta[$, отрицательную на интервале $]\alpha', \beta'[$ и равную нулю вне этих интервалов, и такую, что

$$\int\limits_a^b \eta'(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta \eta'(x)dx + \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} \eta'(x)dx = 0.$$

Функцию $\eta(x)$ можно определить формулой

$$\eta(x) = \int\limits_a^x \eta'(x)dx. \tag{2.4}$$

Очевидно, что функция $\eta(x)$ удовлетворяет условиям леммы.

Тогда

$$\int\limits_a^b \{f(x) - C\}\eta'(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta \{f(x) - C\}\eta'(x)dx + \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} \{f(x) - C\}\eta'(x)dx < 0,$$

поскольку оба слагаемых отрицательны. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)\eta'(x)dx = \int\limits_a^b [f(x) - C]\eta'(x)dx + C\int\limits_a^b \eta'(x)dx =$$
$$= \int\limits_a^b [f(x) - C]\eta'(x)dx < 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.3. *Если для любой функции $\eta(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$, такой, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, справедливо*

$$\int\limits_a^b [\varphi(x)\eta(x) + \psi(x)\eta'(x)]dx = 0, \tag{2.5}$$

то $\psi(x)$ — дифференцируемая функция и $\psi'(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x \varphi(y)dy.$$

Проинтегрируем первое слагаемое (2.5) по частям, положив $U = \eta(x)$, $dV = \varphi(x)dx$. Тогда $dU = \eta'(x)dx$, $V = \Phi(x)$ и

$$\int_a^b \varphi(x)\eta(x)dx = -\int_a^b \Phi(x)\eta'(x)dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b [-\Phi(x) + \psi(x)]\eta'(x)dx = 0.$$

В силу леммы 2.2 $\Phi(x) = \psi(x) + \text{const}$ и $\psi'(x) = \Phi'(x) = \varphi(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.1. *Если функционал* (2.1) *достигает экструмума на функции* $y(x) \in \mathcal{C}^1([a, b])$, *то она удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) *называется уравнением Эйлера или Эйлера–Лагранжа.*

Доказательство. Предположим, что экстремум достигается на функции $y = y(x)$. Возьмем близкую к ней функцию $y = \bar{y}(x)$, такую, что $\bar{y}(a) = A$, $\bar{y}(b) = B$. Обозначим

$$\begin{gathered} y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\{\bar{y}(x) - y(x)\} = y(x) + \alpha\delta y, \\ y(x, 0) = y(x), \qquad y(x, 1) = \bar{y}(x). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Будем рассматривать значения функционала только на функциях семейства $y = y(x, \alpha)$. Тогда

$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha).$$

Эта функция достигает экстремума при $\alpha = 0$. Следовательно,

$$\varphi'(0) = 0,$$

где

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha))dx,$$

тогда

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b \left[F'_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F'_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'_x(x, \alpha)\right] dx.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(y + \alpha\delta y) = \delta y, \\ &\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \delta y', \end{aligned}$$

получим

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y')dx.$$

Из условия $\varphi'(0) = 0$ следует, что

$$\int_a^b \Big[F'_y\Big|_{\alpha=0}\delta y + F'_{y'}\Big|_{\alpha=0}\delta y'\Big]dx = 0, \quad \delta y(a) = \delta y(b) = 0.$$

В силу произвольности функции $\delta y(x)$ из леммы 2.3 следует утверждение теоремы.

◊ Доказательство теоремы можно упростить, если воспользоваться формулой (1.18). Действительно, проинтегрировав второе слагаемое по частям с учётом соотношений $\delta y(x)\big|_{x=a} = \delta y(x)\big|_{x=b} = 0$, а также

$$\int \delta\big(y'(x)\big)dx = \int \delta'\big(y(x)\big)dx = \delta y(x),$$

имеем

$$\delta v[y(x)] = \int_a^b \Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\Big]\delta(y)\,dx.$$

Так как на кривой $y(x)$ функционал достигает экстремума, то

$$\delta v[y(x)] = \int_a^b \Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\Big]\delta(y)\,dx = 0,$$

откуда в силу основной леммы 2.1 и следует (2.6).

◊ Уравнение Эйлера (2.6), вообще говоря, представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}y'' = 0. \tag{2.8}$$

Его решение зависит от двух произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Если обе части уравнения (2.8) умножить на y', а затем прибавить и вычесть слагаемые $\partial F/\partial x$ и $(\partial F/\partial y')y''$, то его можно записать как

$$\Big[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y''\Big] - \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y'\Big[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2}y''\Big] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

а затем привести к виду

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\Big[y'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

или

$$\frac{d}{dx}\Big[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9), наряду с уравнениями (2.6) и (2.8), представляет собой еще одну форму уравнения Эйлера–Лагранжа.

♦ Функция $y = y(x)$ называется *экстремалью функционала* (2.1), если она является решением уравнения Эйлера–Лагранжа (2.6).

◊ Ранее мы определили экстремали как функции, на которых функционалы принимают стационарные значения, т.е. для которых вариация функционала обращается в нуль. Так как функции $y(x)$ являются решениями уравнения Эйлера (его интегральными кривыми), на которых функционал $v[y(x)]$ достигает стационарных значений, то для экстремалей возможны два определения: как функций, на которых функционал принимает стационарные значения, и как интегральных кривых уравнения Эйлера.

Такая двойственность определения позволяет сформулировать так называемое свойство инвариантности уравнения Эйлера, смысл которого заключается в следующем. Если в некотором функционале $v[y(x)]$ перейти к новым переменным $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ и составить уравнение Эйлера для нового функционала $v[Y(X)]$, то его вид совпадет с видом уравнения, которое получается непосредственно из старого уравнения Эйлера после такой замены. При этом экстремали одного функционала переходят в экстремали другого отображением $X(x, y)$, $Y(x, y)$.

$\Diamond$ Теорема 2.1 дает только необходимое условие существования экстремума функционала (2.1). Зачастую существование экстремума следует из физической постановки задачи. В этом случае решения уравнения Эйлера–Лагранжа полностью определяют экстремум функционала.

Пример 2.1. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y'(x))^2 - y^2(x)]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Решение. В нашем случае $F(x, y, y') = (y')^2 - y^2$ и

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'', \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Первый способ. Согласно (2.8), уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$, а его общее решение

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Из граничных условий найдем $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, т.е. $y(x) = \sin x$.

Второй способ. Согласно (2.9) и с учетом $\partial F/\partial x = 0$ уравнение Эйлера допускает понижение порядка:

$$\frac{d}{dx}\Big[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big] = 0$$

или

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = -C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Воспользовавшись явным видом F и $F_{y'}$, имеем

$$(y')^2 - y^2 - 2(y')^2 = -C_1,$$

откуда

$$(y')^2 = C_1 - y^2.$$

Разделив переменные

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = dx, \qquad C_1 > 0,$$

и проинтегрировав полученное выражение, имеем

$$\arcsin \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$$

или

$$y(x) = \sqrt{C_1}\sin(x + C_2).$$

Отсюда с учетом граничных условий, как и в первом способе, найдем

$$y(x) = \sin x.$$

$\Diamond$ Рассмотренная вариационная задача имеет единственное решение. Однако её можно изменить так, чтобы решение стало неоднозначным. Для сравнения рассмотрим следующий пример.

Пример 2.2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_0^{\pi} [\{y'(x)\}^2 - y^2(x)]dx, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{2.10}$$

Решение. Этот функционал отличается от функционала из примера 2.1 правым граничным условием, а именно: вместо отрезка $[0, \pi/2]$ рассматривается отрезок $[0, \pi]$. Очевидно, что уравнение Эйлера для функционала (2.10) имеет вид, полученный в примере 2.1, с тем же общим решением

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Однако, подставив его в граничные условия (2.10), можно найти только одну произвольную постоянную $C_1 = 0$, тогда как постоянная C_2 может быть любой. В результате уравнение экстремали имеет вид

$$y(x) = C_2 \sin x.$$

Это означает, что поставленная вариационная задача имеет не единственное решение.

Теперь рассмотрим пример вариационной задачи, не имеющей решения.

Пример 2.3. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_1^2 (ax - by)y\,dx, \qquad y(1) = \frac{b}{2a}, \quad y(2) = \frac{a}{b}, \qquad a > 0,\ b > 0.$$

Решение. В данном случае $F(x, y, y') = axy - by^2$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial y} = ax - 2by, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

и уравнение Эйлера не является дифференциальным уравнением:

$$ax - 2by = 0$$

или

$$y = \frac{a}{2b}x.$$

Легко проверить, что полученная экстремаль удовлетворяет второму граничному условию

$$\frac{a}{2b}x\Big|_{x=2} = \frac{a}{b},$$

но не удовлетворяет первому, поскольку

$$\frac{a}{2b}x\Big|_{x=1} = \frac{a}{2b} \neq \frac{b}{2a}.$$

Таким образом, данная вариационная задача при $a \neq b$ решения не имеет (шаг $a = -b$). При $a = b$ задача имеет единственное решение с экстремалью

$$y = \frac{x}{2},$$

на которой функционал принимает стационарное значение (экстремум)

$$v\Big[\frac{x}{2}\Big] = a\int\limits_1^2 \Big(x - \frac{x}{2}\Big)\frac{x}{2}dx = \frac{7a}{12}.$$

3. Уравнения Эйлера, допускающие понижение порядка. Самосопряженная форма уравнений Эйлера

Уравнение Эйлера является дифференциальным уравнением второго порядка. Однако в некоторых частных случаях его порядок можно понизить. Рассмотрим эти случаи.

I. Функция $F = F(x, y, y')$ не зависит от y, т.е. $F = F(x, y')$.

В этом случае $\partial F/\partial y = 0$ и, как следует из (2.6),

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1, \tag{3.1}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Уравнение (3.1), в отличие от (2.6), является уравнением первого порядка. Таким образом, задача о нахождении экстремалей сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка (3.1).

Пример 3.1. Найти кривую $y = y(x)$, по которой материальная точка перемещается из точки $A(1, 1)$ в точку $B(2, 2)$ за минимальное время, если скорость ее движения

а) является постоянной величиной, т.е. $v = v_0 = \text{const}$;

б) пропорциональна значению абсциссы ее местоположения, т.е. $v = \alpha x$, $\alpha = \text{const}$.

Проанализировать решение.

Решение. Точки A и B соединим произвольной кривой $y = y(x)$, на которой выделим точку M с координатами x, y, т.е. $M(x, y)$. Пусть v – скорость, с которой точка проходит элемент дуги $dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx$ кривой $y = y(x)$ за время dt. Тогда, согласно определению скорости, имеем

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}dx}{dt}$$

или

$$dt = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{v},$$

откуда

$$t = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{v}. \tag{3.2}$$

С учетом граничных условий задачи

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2 \tag{3.3}$$

получим вариационную задачу для функционала (3.2) с функцией

$$F = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} \tag{3.4}$$

и условиями (3.3) для экстремали функционала.

Далее случаи а) и б) будем рассматривать раздельно.

а) В первом случае, когда $v = v_0$, имеем

$$F = \frac{1}{v_0}\sqrt{1+(y')^2}. \tag{3.5}$$

Так как функция (3.5) не зависит от y (а также от x, см. II), а зависит только от y', то, согласно (3.1), можно записать

$$\frac{\partial}{\partial y'}\Big(\frac{1}{v_0}\sqrt{1+(y')^2}\Big) = \frac{y'}{v_0\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

или

$$y' = v_0 C_1\sqrt{1+(y')^2}.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, придем к уравнению вида

$$y' = \frac{C_1 v_0}{\sqrt{1-C_1^2 v_0^2}},$$

проинтегрировав которое, найдем

$$y = \frac{C_1 v_0}{\sqrt{1-C_1^2 v_0^2}}x + C_2. \tag{3.6}$$

Здесь C_2 – произвольная постоянная. Таким образом, при движении точки с постоянной скоростью линиями, обеспечивающими минимальное время передвижения от одной точки к другой, являются прямые (3.6) (при $C_1^2 v_0^2 = 1$ это вертикальные прямые $x = \text{const}$). Произвольные постоянные легко находятся из условий (3.3):

$$1 = \frac{C_1 v_0}{\sqrt{1-C_1^2 v_0^2}} + C_2,$$

$$2 = \frac{2C_1 v_0}{\sqrt{1-C_1^2 v_0^2}} + C_2.$$

Отсюда

$$C_2 = 0 \tag{3.7}$$

и

$$\frac{C_1 v_0}{\sqrt{1 - C_1^2 v_0^2}} = 1. \tag{3.8}$$

Подставив (3.7), (3.8) в (3.6), окончательно найдем (рис. 2)

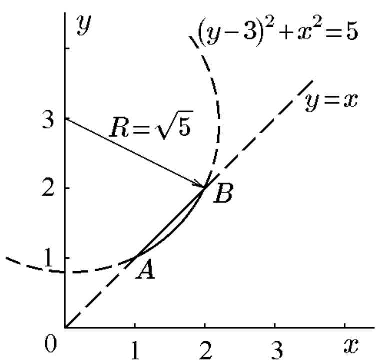

Рис. 2.

$$y = x. \tag{3.9}$$

б) Рассмотрим теперь второй случай, когда $v = \alpha x$. Тогда вместо (3.5) имеем

$$F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\alpha x}. \tag{3.10}$$

Функция (3.10), так же как и (3.5), не зависит от y. Следовательно, и в этом случае можно воспользоваться формулой (3.1), согласно которой

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\alpha x}\right) = \frac{y'}{\alpha x\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1$$

или

$$y' = C_1 \alpha x \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, придем к уравнению вида

$$y' = \frac{C_1 \alpha x}{\sqrt{1 - (C_1 \alpha x)^2}},$$

проинтегрировав которое, найдем

$$y = \int \frac{C_1 \alpha x\, dx}{\sqrt{1 - (C_1 \alpha x)^2}} = -\frac{\sqrt{1 - (C_1 \alpha x)^2}}{C_1 \alpha} + C_2$$

или

$$(y - C_2)^2 + x^2 = \frac{1}{(C_1 \alpha)^2}, \tag{3.11}$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Таким образом, при движении точки со скорость, изменяющейся по закону $v = \alpha x$, линиями, обеспечивающими минимальное время передвижения от одной точки до другой, являются окружности (3.11). Произвольные постоянные в (3.11) легко находятся из условий (3.3):

$$(1 - C_2)^2 + 1 = \frac{1}{(C_1 \alpha)^2}, \tag{3.12}$$

$$(2 - C_2)^2 + 4 = \frac{1}{(C_1 \alpha)^2}. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) с учетом (3.12) можно записать как

$$(2 - C_2)^2 + 4 = (1 - C_2)^2 + 1,$$

откуда

$$C_2 = 3. \tag{3.14}$$

Но тогда, согласно (3.12),

$$\frac{1}{(C_1\alpha)^2} = (1 - C_2)^2 + 1 = 5. \tag{3.15}$$

Подставив (3.14), (3.15) в (3.11), окончательно найдем (см. рис. 2)

$$(y-3)^2 + x^2 = 5.$$

Проанализируем полученные результаты. Итак, при движении материальной точки с постоянной скоростью экстремалями функционала (3.2), т.е. линиями наибыстрейшего прохождения расстояния между двумя точками, являются прямые $y = x$ (см. рис. 2) с временем прохождения

$$t = \frac{1}{v_0}\int\limits_1^2 \sqrt{1+(y')^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{v_0}. \tag{3.16}$$

Подчеркнем, что если время прохождения зависит от значения постоянной v_0, то уравнение экстремали – прямой $y = x$ – от него не зависит. Результат, вообще говоря, очевидный, поскольку кратчайшим расстоянием между точками $A(1,1)$ и $B(2,2)$ является отрезок длиной $\sqrt{2}$, время прохождения которого определяется как $\sqrt{2}/v_0$.

Во втором случае экстремалями функционала (3.3) являются окружности, а именно: $(y-3)^2 + x^3 = 5$. Время перемещения из точки $A(1,1)$ в точку $B(2,2)$ определяется соотношением

$$t = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2/(5-x^2)}}{x}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\alpha}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{5-x^2}} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{1/2}^2 \frac{dz}{\sqrt{z^2-1/5}} = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{2(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+1} \approx \frac{0{,}96}{\alpha}. \tag{3.17}$$

Подчеркнем, что, как и в предыдущем случае, время прохождения зависит от коэффициента α, тогда как уравнение, определяющее экстремали (окружности $(y-3)^2 + x^3 = 5$), не содержит этого параметра. В этом случае результат не столь очевиден, хотя и объясним. Для того чтобы время прохождения было наименьшим, частица «стремится» сначала переместиться в точки с наибольшими значениями координаты x, а затем, набрав скорость, перемещается непосредственно в точку B. Для сравнения с (3.17) интересно вычислить время прохождения по прямой $y = x$:

$$t = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\alpha x}dx = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\ln 2 \approx \frac{0{,}98}{\alpha}. \tag{3.18}$$

Из сравнения (3.17) и (3.18) можно сделать вывод, что время прохождения по прямой во втором случае, естественно, больше, чем по окружности.

II. Функция $F = F(x, y, y')$ не зависит от x, т.е. $F = F(y, y')$.

В этом случае $\partial F/\partial x = 0$ и, как следует из (2.9),

$$\frac{d}{dx}\Big(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = 0,$$

откуда

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1, \tag{3.19}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Таким образом, как и в предыдущем случае, порядок уравнения Эйлера понижается на единицу и решение вариационной задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка (3.19).

Пример 3.2 (задача о брахистохроне). Тело массой m, которое будем считать материальной точкой, под действием силы тяжести скатывается (не падает отвесно!) без трения с нулевой начальной скоростью из одной точки в другую по некоторой линии L. Найти уравнение линии L, по которой тело скатывается за минимальное время.

Решение. Выберем систему координат xOy так, чтобы сила тяжести действовала в обратном оси Oy направлении, а начальная точка A находилась на оси Oy на высоте h (рис. 3). При таком выборе координаты начальной точки A есть $x = 0$, $y = h$, т.е. $A(0, h)$. Пусть координаты конечной точки, которую мы обозначим через B, будут $x = x_1$, $y = y_1$, т.е. $B(x_1, y_1)$. Пусть точки A и B соединяет искомая линия L, уравнение которой мы запишем как $y = y(x)$. Очевидно, что эта функция $y(x)$ должна удовлетворять условиям

$$y(0) = h, \qquad y(x_1) = y_1. \tag{3.20}$$

Далее решение задачи разбивается на два этапа: во-первых, необходимо записать аналитическое выражение для времени t, за которое тело скатится из точки A в точку B; во-вторых, – исследовать полученное выражение на экстремум и в результате получить искомое уравнение линии L, которую называют линией наискорейшего спуска, или брахистохроной.

Перейдем к первой части задачи. Для этого на кривой L выделим точку M с координатами x, y, т.е. $M(x, y)$. Пусть v – скорость, с которой точка проходит элемент дуги $dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx$ кривой $y = y(x)$ за время dt. Тогда, согласно определению скорости, имеем

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}dx}{dt}$$

или

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}dx}{v}.$$

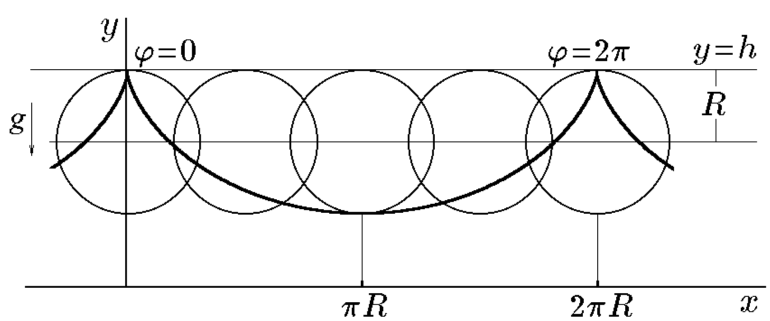

Рис. 3.

Так как точке A соответствуют значения $t = 0$ и $x = 0$, а точке B – значения t, равное времени спуска, и $x = x_1$, то интегрирование полученного выражения дает

$$t = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} dx \tag{3.21}$$

(можно было сразу воспользоваться формулой (3.2) из предыдущего примера). Чтобы найти зависимость скорости от местоположения тела, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h-y).$$

Здесь g – ускорение свободного падения, а m и y – масса тела и его ордината соответственно (см. рис. 3). Тогда

$$v = \sqrt{2g(h-y)}, \tag{3.22}$$

и выражение (3.21) примет вид

$$t = \int\limits_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(h-y)}} dx. \tag{3.23}$$

Таким образом, время наискорейшего спуска определяется функционалом (3.23), и, следовательно, вторая часть задачи сводится к нахождению экстремали функционала (3.23), удовлетворяющей условиям (3.20).

Так как подынтегральная функция в (3.23)

$$F = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(h-y)}}$$

не зависит от x, то, согласно (3.19), можно записать

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1.$$

С учетом

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(h-y)\{1+(y')^2\}}}$$

запишем

$$\frac{1}{\sqrt{2g(h-y)\{1+(y')^2\}}} = C_1.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, придем к уравнению с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-2gC_1^2(h-y)}{2gC_1^2(h-y)}}. \tag{3.24}$$

Проведём в (3.24) замену переменных

$$2gC_1^2(h-y) = \frac{1-\cos\varphi}{2}. \tag{3.25}$$

Тогда

$$dy = -\frac{\sin\varphi}{4gC_1^2} d\varphi,$$

и выражение (3.24) примет вид

$$\frac{\sin\varphi}{4gC_1^2}\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\frac{1-(1-\cos\varphi)/2}{(1-\cos\varphi)/2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

или

$$dx = \frac{1}{4gC_1^2}(1-\cos\varphi)d\varphi.$$

Проинтегрировав последнее соотношение, получим

$$x = \frac{1}{4gC_1^2}(\varphi - \sin\varphi) + C_2, \tag{3.26}$$

где C_2 – произвольная постоянная. Если ввести обозначение

$$R = \frac{1}{4gC_1^2},$$

то из (3.25), (3.26) придем к уравнениям экстремалей функционала (3.21) в параметрической форме

$$\begin{aligned} y &= h - R(1-\cos\varphi), \\ x &= R(\varphi - \sin\varphi) + C_2, \end{aligned} \tag{3.27}$$

определяющим циклоиду, т.е. линию, которую описывает точка окружности радиуса R, катящаяся снизу по прямой $y = h$ (рис. 3). Так как циклоида должна проходить через точку $A(0, h)$, то эта точка должна быть точкой возврата, и можно принять $C_2 = 0$. Тогда уравнения циклоиды (3.27) примут вид

$$\begin{cases} y = h - R(1-\cos\varphi), \\ x = R(\varphi - \sin\varphi). \end{cases} \tag{3.28}$$

При таком выборе значение параметра $\varphi = 0$ соответствует начальной точке $A(0, h)$, а $\varphi = 2\pi$ – следующей точке возврата (см. рис. 3). Значение R, которое остается пока произвольным, должно быть выбрано так, чтобы удовлетворялось второе граничное условие (3.20), т.е. чтобы циклоида проходила через точку $B(x_1, y_1)$. Для определения радиуса R, во-первых, можно получить трансцендентное уравнение, если значения $x = x_1$, $y = y_1$ подставить в уравнение (3.28) и исключить параметр φ. Во-вторых, искомое значение R можно найти по правилу подобия, если известно изображение одной из арок циклоиды с заданным значением R. Действительно, рассмотрим одну арку циклоиды с радиусом $R = h/2$ (рис. 4).

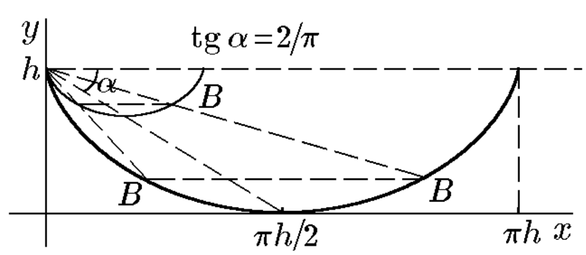

Рис. 4.

Как следует из рис. 4, существуют два типа граничных условий, определяемых значениями x_1 и y_1. Для первого типа, когда $x_1 < \pi h/2$, траектории движения лежат выше конечной точки B, а для второго типа, когда $x_1 > \pi h/2$, часть траектории расположена ниже конечной точки B. Такой результат удивителен только на первый взгляд, но, как и в предыдущем примере, легко объясним. Действительно, когда предстоит пройти большой путь по горизонтали, телу «выгодно» опуститься пониже, набрать скорость, а уже в конце пути подняться к месту назначения – точке B.

Из рис. 4 видно, что середины всех арок циклоид с точкой возврата $A(0, h)$ и произвольным радиусом R находятся на прямой $y = h - 2x/\pi$. В силу этого значения радиуса R циклоиды (3.28), на которой лежит конечная точка $B(x_1, y_1)$, можно определить через положение соответствующей ей точки, лежащей на циклоиде радиуса $R = h/2$, что непосредственно следует из рис. 4. Они лежат на одной прямой, проходящей через точку $A(0, h)$.

Из физических соображений очевидно, что экстремум функционала (3.23) является минимумом. Это означает, что время прохождения тела от одной точки циклоиды до другой действительно является наименьшим. Для сравнения найдем времена прохождения тела из точки $A(0, h)$ в точку $B(\pi h/2, 0)$ по циклоиде (3.28) и прямой $y = h - 2x/\pi$, обозначив их $t_{\text{ц}}$ и $t_{\text{пр}}$, соответственно:

$$t_{\text{ц}} = \int\limits_0^{\pi h/2} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(h-y)}}dx = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+[\sin\varphi/(1-\cos\varphi)]^2}{2g[h-h(1+\cos\varphi)/2]}}\frac{h}{2}(1-\cos\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\frac{2-2\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}d\varphi = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}};$$

$$t_{\text{пр}} = \int\limits_0^{\pi h/2} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(h-y)}}dx = \int\limits_0^{\pi h/2}\sqrt{\frac{1+4/\pi^2}{2g2x/\pi}}dx = \sqrt{\frac{\pi^2+4}{4g\pi}}\int\limits_0^{\pi h/2}\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^2+4}{4g\pi}}2\sqrt{x}\Big|_0^{\pi h/2} = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}\Big[1+\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^2\Big]}.$$

В результате приходим к соотношению

$$t_{\text{пр}} = t_{\text{ц}}\sqrt{1+\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^2},$$

из которого следует, что

$$t_{\text{пр}} > t_{\text{ц}}.$$

Кроме того, время $t_{\text{ц}}$ можно сравнить со временем отвесного падения тела $t_{\text{от}}$ с высоты h, которое можно найти как

$$t_{\text{от}} = -\int\limits_h^0 \frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Здесь учтено, что при отвесном падении

$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = |dy| = -dy$$

и начальному положению соответствует $y = h$, а конечному $y = 0$. Этот же результат можно было получить из известной формулы для равноускоренного движения $h = gt^2/2$, откуда $t = \sqrt{2h/g}$ и, соответственно,

$$t_{\text{ц}} = \frac{\pi}{2}t_{\text{от}}.$$

Пример 3.3 (плоская модель Пуанкаре геометрии Лобачевского). Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_{a_x}^{b_x} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} dx, \tag{3.29}$$

проходящие через точки $A(a_x, a_y)$ и $B(b_x, b_y)$ и расположенные в верхней полуплоскости xOy. Проанализировать полученное решение.

Решение. Пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой экстремали. Тогда должны выполняться следующие условия:

$$y(a_x) = a_y, \qquad y(b_x) = b_y. \tag{3.30}$$

Поскольку подынтегральное выражение функционала (3.29)

$$F = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} \tag{3.31}$$

не зависит от x, то, согласно (3.19), можно записать

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1,$$

что с учетом

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{y\sqrt{1+(y')^2}}$$

дает

$$\frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-(C_1 y)^2}}{C_1 y},$$

интегрирование которого дает

$$(x - C_2)^2 + y^2 = R^2, \tag{3.32}$$

где $R^2 = 1/C_1^2$, а C_2 – произвольная постоянная. Произвольные постоянные R и C_2 легко находятся из условий (3.30):

$$\begin{aligned} (a_x - C_2)^2 + a_y^2 &= R^2; \\ (b_x - C_2)^2 + b_y^2 &= R^2. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Уравнение (3.32) с учетом (3.33) можно записать как

$$(a_x - C_2)^2 + a_y^2 = (b_x - C_2)^2 + b_y^2,$$

откуда

$$C_2 = \frac{(b_x^2 + b_y^2) - (a_x^2 + a_y^2)}{2(b_x - a_x)} = \frac{1}{2}\Big[b_x + a_x + \frac{b_y^2 - a_y^2}{b_x - a_x}\Big]. \tag{3.34}$$

Но тогда, согласно (3.33), получим

$$R^2 = \frac{(a_y^2 - b_y^2)^2 + 2(a_y^2 + b_y^2)(b_x - a_x)^2 + (b_x - a_x)^4}{4(b_x - a_x)^2}. \tag{3.35}$$

Итак, экстремали функционала (3.29) образуют семейство окружностей с центром на оси Ox (3.32). Условия (3.30) выделяют из этого множества единственную окружность с центром в $x = C_2$ и радиусом R, которые определяются выражениями (3.34) и (3.35), поскольку через любые две точки верхней полуплоскости проходит одна и только одна окружность с центром на оси Ox. Например, через точки $A(1,1)$ и $B(1,3)$, согласно (3.34), (3.35), проходит единственная окружность

$$(x-2)^2 + y^2 = 2,$$

а если ограничиться верхней полуплоскостью $y > 0$, то единственная полуокружность (рис. 5)

$$y = \sqrt{2-(x-2)^2}. \tag{3.36}$$

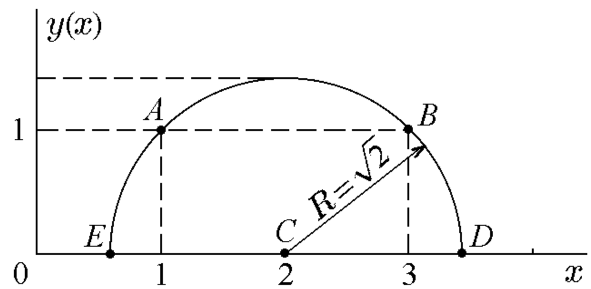

Рис. 5.

Кроме того, экстремали (3.32) обладают тем свойством, что на них функционал (3.29) приобретает стационарные значения: ограниченные, если точки A и B лежат в верхней полуплоскости, и неограниченные, если хотя бы одна из них принадлежит оси Ox. В этом легко убедиться на примере полуокружности (3.36), вычислив стационарные значения функционала (3.29) на кривой, соединяющей точки $A(1,1)$ и $B(1,3)$, точки $A(1,1)$ и $D(2+\sqrt{2},0)$, а также точки $A(1,1)$ и $E(2-\sqrt{2},0)$ (см. рис. 5). Действительно,

$$v\Big[\sqrt{2-(x-2)^2}\Big]_{AB} = \int\limits_1^3 \frac{1}{y}\sqrt{1+(y')^2}dx =$$

$$= \int\limits_1^3 \frac{1}{\sqrt{2-(x-2)^2}}\sqrt{1+\frac{(x-2)^2}{2-(x-2)^2}}dx = \sqrt{2}\int\limits_1^3 \frac{d(x-2)}{2-(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{2}}{x-2-\sqrt{2}}\right|\Big|_1^3 = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \approx 1{,}76; \tag{3.37}$$

$$v\Big[\sqrt{2-(x-2)^2}\Big]_{AD} = \int\limits_1^{2+\sqrt{2}} \frac{1}{y}\sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_1^{2+\sqrt{2}-\varepsilon}\frac{d(x-2)}{2-(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ln\frac{2\sqrt{2}-\varepsilon}{\varepsilon} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\Big] = +\infty; \tag{3.38}$$

$$v\left[\sqrt{2-(x-2)^2}\right]_{EA} = \int\limits_{2-\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{y}\sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{2-\sqrt{2}-\varepsilon}^{1} \frac{d(x-2)}{2-(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \ln\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}-\varepsilon}\right] = +\infty. \qquad (3.39)$$

Если функционал (3.29) интерпретировать как расстояние между точками A и B и учесть, что экстремали-полуокружности обеспечивают минимальное его значение, то дуги полуокружностей между точками A и B можно рассматривать как «отрезки» AB, а сами полуокружности – как «прямые», на которых эти «отрезки» расположены. При таком рассмотрении точки, лежащие на оси Ox, можно считать бесконечно удаленными, поскольку им соответствуют дуги бесконечной длины (3.38), (3.39). Если к этому добавить возможность измерения углов между пересекающимися «прямыми» как углов между касательными к полуокружностям в точке их пересечения, то можно получить геометрию, в которой сохраняются все положения обычной (евклидовой) геометрии за исключением пятого постулата о параллельных прямых, который, оказывается, можно заменить противоположным.

Действительно, будем считать параллельными две «прямые» – полуокружности, имеющие общую бесконечно удаленную точку. Такой подход оправдан, поскольку в этой точке их касательные параллельны. Тогда через некоторую точку M, не лежащую на «прямой»-полуокружности l, можно провести не одну, как этого требует евклидова геометрия, а две «прямые»-полуокружности l_1 и l_2, параллельные «прямой» l, как это показано на рис 6.

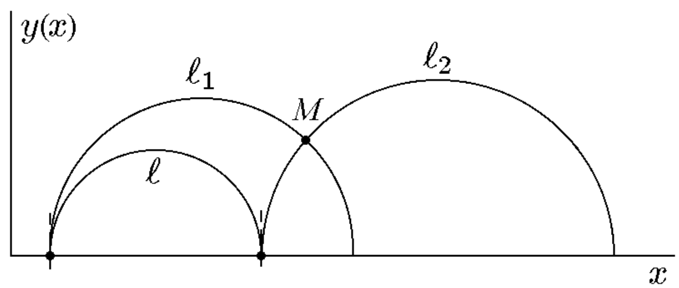

Рис. 6.

В этом случае выполняется постулат о параллельных прямых, принятый в геометрии Лобачевского: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две параллельные прямые».

Таким образом, экстремали функционала (3.29) в интерпретации Пуанкаре реализуют одно из представлений геометрии Лобачевского на плоскости.

Пример 3.4. Показать, что экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_a^b f(y)\sqrt{1+(y')^2}dx$$

определяются квадратурами

$$x - C_2 = C_1\int\frac{dy}{\sqrt{f^2(y)-C_1^2}}.$$

Решение. Поскольку подынтегральное выражение функционала

$$F = f(y)\sqrt{1+(y')^2}$$

не зависит от x, то, согласно (3.19), можно записать

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1,$$

что с учетом

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{f(y)y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

дает

$$f(y)\sqrt{1+(y')^2} - \frac{f(y)(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{f(y)}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{f^2(y) - C_1^2}}{C_1},$$

интегрирование которого и приведет к квадратурам

$$x - C_2 = C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{f^2(y) - C_1^2}}.$$

III. Функция $F = F(x, y, y')$ не зависит от y', т.е. $F = F(x, y)$.

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид $\partial F/\partial y = 0$ и не является дифференциальным уравнением (оно не содержит $y'(x)$), но неявно определяет решение $y = y(x)$, если последнее существует. В силу этого решение не содержит произвольных постоянных и в общем случае не удовлетворяет граничным условиям $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Лишь в тех случаях, когда линия $y = y(x)$ проходит через граничные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), её можно рассматривать как экстремаль, на которой функционал принимает стационарные значения. В этих случаях пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2), входящие в граничные условия, должны быть численными решениями функционального уравнения $F_{y'} = 0$ или $y = y(x)$ (см. пример 2.3).

Пример 3.5. Поставить граничные условия, при которых существуют экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_1^e (xe^y - ye^x)dx.$$

Решение. Здесь $F = xe^y - ye^x$ не зависит от y', и уравнение Эйлера записывается в виде

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y - e^x = 0,$$

откуда для $x > 0$

$$y = x - \ln x.$$

Кроме того, пределы интегрирования в рассматриваемом функционале диктуют следующие граничные условия:

$$y(1) = a, \qquad y(e) = b.$$

Подставив решение уравнения Эйлера в эти условия, получим

$$(x - \ln x)\big|_{x=1} = 1 = a,$$
$$(x - \ln x)\big|_{x=e} = e - 1 = b.$$

Следовательно, искомые граничные условия имеют вид

$$y(1) = 1, \qquad y(e) = e - 1.$$

Подчеркнем еще раз, что при других граничных условиях вариационная задача решения не имеет.

Пример 3.6. Выяснить, существует ли решение вариационной задачи

$$v[y(x)] = \int\limits_1^2 \Big(\frac{1}{3}y^3 + ye^x\Big)dx, \qquad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$$

Решение. Здесь $F = y^3/3 + ye^x$ не зависит от y', и уравнение Эйлера записывается в виде

$$y^2 + e^x = 0.$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решений в области действительных чисел. Следовательно, ни при заданных, ни при каких других граничных условиях вариационная задача решений не имеет.

IV. Функция $F = F(x, y, y')$ зависит только от y', т.е. $F = F(y')$.

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' F_{y'y'} = 0,$$

и его общим решением является семейство прямых

$$y = C_1 x + C_2$$

с произвольными коэффициентами C_1 и C_2.

В рассматриваемом случае постоянные C_1 и C_2 можно определить из граничных условий $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Тогда

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{3.40}$$

Это означает, что экстремалями функционала являются прямые, проходящие через точки x_1, y_1 и x_2, y_2.

Пример 3.7. Найти линии наименьшей длины, соединяющие заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (см. пример 2.1).

Решение. Как известно из курса математического анализа, длина ℓ дуги кривой $y = y(x)$, соединяющей две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), определяется интегралом

$$\ell = v[y(x)] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}dx. \tag{3.41}$$

Таким образом, математическая формулировка условия примера сводится к вариационной задаче на экстремум функционала (3.41) с граничными условиями

$$y(x_1) = y_1, \qquad y(x_2) = y_2.$$

Решение такой задачи можно представить в виде (3.40).

Заметим, что этой же формулой (3.40) определяются и экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \qquad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{3.42}$$

Заметим, что функционал (3.42), в отличие от функционала (3.41), на экстремалях (3.40) достигает не минимального, а максимального значения.

V. Функция $F = F(x, y, y')$ зависит от y' линейно, т.е.

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'.$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \tag{3.43}$$

Это уравнение, как и в случае III, не является дифференциальным (оно не содержит y'). В силу этого его решение, если оно существует, не содержит произвольных постоянных и в общем случае не удовлетворяет граничным условиям. Лишь в тех случаях, когда линия $y = y(x)$, определяемая неявно уравнением (3.43), проходит через граничные точки, ее можно рассматривать как экстремаль, на которой функционал достигает стационарного значения.

Кроме того, в тех случаях, когда уравнение (3.43) переходит в тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0, \tag{3.44}$$

выражение

$$F(x, y, y')dx = [P(x, y) + Q(x, y)y']dx = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$$

становится полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. Пусть D – некоторая область плоскости xOy, в которой функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ определены и удовлетворяют тождеству (3.44). Тогда интеграл

$$v[y(x)] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx = \int\limits_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] =$$

$$= \int\limits_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} dU(x, y) = U(x, y)\Big|_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)}$$

не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B из области D. Другими словами, на любой кривой из D, проходящей через эти точки, функционал $v[y(x)]$ имеет одно и то же значение. Это означает, что вариационная задача как задача на экстремум теряет смысл.

Пример 3.8. Для функционала

$$v[y(x)] = \int_1^e (xe^y + e^x y')dx \tag{3.45}$$

найти граничные условия, при которых существует решение вариационной задачи.

Решение. Здесь функция $F = xe^y + e^x y'$ линейно зависит от y'. Тогда $P(x,y) = xe^y$, $Q(x,y) = e^x$, и уравнение Эйлера, согласно (3.43), имеет вид

$$xe^y - e^x = 0, \tag{3.46}$$

откуда для $x > 0$

$$y = x - \ln x.$$

Кроме того, пределам интегрирования в функционале (3.46) соответствуют граничные условия:

$$y(1) = a, \quad y(e) = b.$$

Подстановка (3.46) в эти условия дает

$$(x - \ln x)\Big|_{x=1} = 1 = a,$$
$$(x - \ln x)\Big|_{x=e} = e - 1 = b.$$

Следовательно, искомые граничные условия имеют вид

$$y(1) = 1, \quad y(e) = e - 1.$$

Подчеркнем еще раз, что при других граничных условиях вариационная задача решений не имеет (см. пример 3.6).

Пример 3.9. Существует ли решение вариационной задачи

$$v[y(x)] = \int_1^2 \Big(\frac{y^3}{3} + e^{-x}y'\Big)dx, \qquad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$$

Решение. Здесь функция $F = y^3/3 + e^{-x}y'$, как и в предыдущем примере, линейно зависит от y'. Тогда $P(x,y) = y^3/3$, $Q(x,y) = e^{-x}$, и уравнение Эйлера, согласно (3.43), имеет вид

$$y^2 + e^{-x} = 0.$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решений для вещественных x. Следовательно, ни при заданных, ни при любых других граничных условиях вариационная задача решений не имеет.

Пример 3.10. Исследовать функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left[y^2(1+e^x) + 2y(x+e^x)y'\right]dx, \tag{3.47}$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2,$$

на экстремум.

Решение. Подынтегральная функция линейно зависит от y', причем $P(x,y) = y^2(1+e^x)$, $Q(x,y) = 2y(x+e^x)$. Вычислив

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y(1+e^x), \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y(1+e^x),$$

приходим к тождеству

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0,$$

справедливому на всей плоскости xOy. Это означает, что подынтегральная функция является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$. Легко убедиться (или найти с помощью известных методов), что этой функцией является

$$U(x,y) = y^2(x+e^x) + C,$$

где C – произвольная постоянная. Но тогда интеграл (3.47) не зависит от пути интегрирования и имеет постоянное значение

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left[y^2(1+e^x) + 2y(x+e^x)y'\right]dx = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} d\left[y^2(x+e^x) + C\right] =$$

$$= \left[y^2(x+e^x) + C\right]\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = y_2^2(x_2 + e^{x_2}) - y_1^2(x_1 + e^{x_1})$$

на любой кривой, проходящей через точки (x_1,y_1), (x_2,y_2). Вариационная задача на экстремум теряет смысл.

VI. Функция F зависит от y' квадратично:

$$F(x,y,y') = \varphi(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y \tag{3.48}$$

и определяет так называемый квадратичный функционал

$$v[y(x)] = \int_a^b [\varphi(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y]dx, \tag{3.49}$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

(заметим, что добавление к (3.48) смешанного слагаемого $2g(x)yy'$ не увеличивает общность рассмотрения, что подтверждается примером 3.13), где функции $\varphi(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$$

для функционала (3.49) с учетом

$$F_y = 2q(x)y + 2f(x), \quad F_{y'} = 2\varphi(x)y'$$

можно записать как

$$2q(x)y + 2f(x) - \{2\varphi(x)y'\}' = 0$$

или

$$\{\varphi(x)y'\}' - q(x)y = f(x). \tag{3.50}$$

Из (3.50) следует, что уравнение Эйлера в рассматриваемом случае представляет собой линейное дифференциальное уравнение в самосопряженной форме с граничными условиями (3.49).

Таким образом, вариационная задача (3.49) порождает одну из наиболее часто встречающихся в приложениях краевую задачу

$$\begin{gathered}\{\varphi(x)y'\}' - q(x)y = f(x);\\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b,\end{gathered} \tag{3.51}$$

которая обобщает простейшие геометрические и физические задачи, рассмотренные выше.

Таким образом, вариационное исчисление позволяет единообразно описать широкий круг физических и прикладных задач.

Согласно этому подходу, или, как его еще называют, вариационному принципу, для различных задач, описывающих некоторые процессы или состояния систем, из всех возможных решений, т.е. процессов или состояний, реализуются только те, которые придают некоторому характерному для этого класса задач функционалу стационарные значения. Существуют две основные группы вариационных принципов, которые мы рассмотрим ниже. Здесь же мы ограничимся их краткой характеристикой.

Первая группа задач, которую можно условно назвать естественно-научной, возникла еще в 17-м в. в классических разделах физики: геометрической оптике (принцип Ферма), классической механике (принцип Гамильтона) и т.д., а позднее появилась в разделах, являющихся их развитием: теория поля и др.

Вторая группа задач возникла позднее и наибольшее развитие получила в последние десятилетия. Она связана с задачами теории регулирования, математической экономики и др. В этих случаях вариационные задачи, как правило, характеризуются дополнительными условиями – так называемыми связями, использование которых и позволяет вырабатывать линию поведения (стратегию), обеспечивающую оптимальное управление (максимальную выгоду, минимальные затраты и т.п.). Следует заметить, что при решении задач этой группы условие стационарности функционала зачастую отступает на второй план, что приводит к необходимости применять методы решений, отличные от классических методов вариационного исчисления.

Пример 3.11. Найти экстремали квадратичного функционала

$$v[y(x)] = \int_0^l [(y')^2 - \omega^2 y^2]dx, \tag{3.52}$$

$$y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l,$$

где ω^2 – некоторая постоянная.

Решение. Экстремали функционала (3.52), согласно (3.51), определяются краевой задачей

$$\begin{gathered} y''(x) + \omega^2 y(x) = 0, \\ y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l, \end{gathered} \tag{3.53}$$

решение которой имеет вид

$$y(x) = y_0 \cos \omega x + [y_l - y_0 \cos \omega l] \frac{\sin \omega x}{\sin \omega l}. \tag{3.54}$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, характер решения краевой задачи существенно зависит от решений вспомогательной задачи – задачи Штурма–Лиувилля. (Решение (3.54) наглядно подтверждает это, поскольку при $\omega = \pi n/l$, $l = \overline{1, \infty}$, множитель $\sin \omega l$, стоящий в знаменателе, обращается в нуль: $\sin \pi n l/l = \sin \pi n = 0$.)

Выясним, как связана вариационная задача с соответствующей задачей Штурма–Лиувилля. Рассмотрим квадратичный функционал (3.49), выбрав для простоты (не снижая, однако, общности рассмотрения) $a = 0$, $b = l$, т.е.

$$v[y(x)] = \int\limits_0^l [\varphi(x)(y')^2 + q(x)y^2]dx, \quad \varphi(x) > 0, \quad x \in [0, l], \tag{3.55}$$

с однородными граничными условиями

$$y(0) = y(l) = 0 \tag{3.56}$$

при дополнительном условии

$$\int\limits_0^l \rho y^2(x)dx = 1, \qquad \rho(x) > 0, \quad x \in [0, l], \quad \rho(x) \in \mathcal{C}^1. \tag{3.57}$$

В этом случае о вариационной задаче (3.55), (3.56) говорят как о задаче на условный экстремум с интегральной связью (3.57).

Пусть на функции $y = y(x)$, удовлетворяющей граничным условиям (3.56), функционал (3.55) достигает экстремального значения. Тогда функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\widetilde{F} = F - \lambda \rho y^2 = \varphi(x)(y')^2 + [q(x) - \lambda \rho]y^2, \tag{3.58}$$

и на ней реализуется условный экстремум. Здесь λ – множитель Лагранжа. Согласно (3.50), имеем уравнение

$$\{\varphi(x)y'\}' - q(x)y + \lambda \rho y = 0. \tag{3.59}$$

Именно это уравнение совместно с граничными условиями (3.56) и составляет в теории дифференциальных уравнений задачу Штурма–Лиувилля или задачу на собственные значения λ и собственные функции $y(x)$.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, решения задачи Штурма–Лиувилля обладают рядом замечательных свойств, которые, вообще говоря, не связаны непосредственно с процедурой нахождения ее решения. В вариационном исчислении свойства собственных значений и собственных функций являются неотъемлемой частью процесса построения решений. Действительно, условие (3.57)

$$\int_0^l \rho(x)y^2(x)dx = 1$$

означает, что решение задачи нужно искать в пространстве квадратично интегрируемых с весом $\rho(x)$ на промежутке $]0,l[$ функций $\big(L^2\big(]0,l[,\ \rho(x)dx\big)\big)$. Ортогональность

$$\int_0^l \rho(x)y_i(x)y_j(x)dx = \delta_{ij}$$

в вариационном подходе также является неотъемлемой частью метода. Пусть функционал (3.55) достигает наименьшего значения на функции $y = y_1(x)$. Тогда эта функция удовлетворяет уравнению

$$\{\varphi(x)y_1'\}' - q(x)y_1 + \lambda\rho(x)y_1 = 0$$

при условиях (3.56) и (3.57). Найдем теперь функцию $y_2(x)$, на которой исходный функционал достигает наименьшего значения и которая удовлетворяет тем же граничным условиям, но уже двум интегральным связям

$$\int_0^l \rho(x)y^2(x)dx = 1, \qquad \int_0^l \rho(x)y_1(x)y(x)dx = 0. \tag{3.60}$$

Искомую экстремаль $y_2(x)$ найдем согласно (3.59) и с учетом (3.60) из уравнения

$$\{\varphi(x)y_2'\}' - q(x)y_2 + \lambda_2 y_2 = 0.$$

Далее найдем функцию $y = y_3(x)$, на которой исходный функционал достигает наименьшего значения и которая удовлетворяет тем же граничным условиям и трём интегральным связям

$$\int_0^l \rho(x)y^2(x)dx = 1, \quad \int_0^l \rho(x)y_1(x)y(x)dx = \int_0^l \rho(x)y_2(x)y(x)dx = 0$$

и т.д.

Таким образом, мы получим бесконечную последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ собственных функций, которые в силу наложенных связей образуют ортогональную систему.

Пример 3.12. Найти экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^l (y')^2 dx, \qquad y(0) = y(l) = 0, \tag{3.61}$$

при интегральной связи

$$\int_0^l y^2(x)dx = 1. \tag{3.62}$$

Решение. Уравнение для собственных функций исследуемого функционала (3.61), согласно (3.59), запишется как

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad y(0) = y(l) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y_n(x) = C_n \sin \sqrt{\lambda_n} x, \qquad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n = \overline{1, \infty}.$$

Произвольные постоянные C_n определяются из условия (3.62)

$$C_n^2 \int\limits_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = 1$$

как

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Таким образом, экстремалями функционала являются функции

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{3.63}$$

Легко проверить, что функции (3.63) образуют ортогональную систему:

$$\int\limits_0^l y_n y_k dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \delta_{nk}$$

и функционал (3.61) достигает на них стационарных значений, равных собственным числам λ_n. Действительно,

$$v[y_n(x)] = \int\limits_0^l \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \frac{1}{2} \int\limits_0^l \left(1 + \cos \frac{2\pi n x}{l}\right) dx = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = \lambda_n, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Пример 3.13. Показать, что квадратичный функционал

$$v[y(x)] = \int\limits_0^l \{\varphi(x)(y')^2 + 2g(x)yy' + q(x)y^2\} dx, \quad y(0) = y(l) = 0, \tag{3.64}$$

можно привести к виду (3.55).

Решение. Среднее слагаемое в (3.64) проинтегрируем по частям, положив $u = g(x)$, $dv = 2yy'dx$, $du = g'(x)dx$, $v = y^2$. Тогда

$$\int\limits_0^l 2g(x)yy'dx = g(x)y^2(x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l g'(x)y^2 dx = -\int\limits_0^l g'(x)y^2(x)dx.$$

В результате исходный функционал приобретет вид (3.55), т.е.

$$\int_0^l \{\varphi(x)(y')^2 + 2g(x)yy' + q(x)y^2\}dx = \int_0^l \{\varphi(x)(y')^2 + [q(x) - g'(x)]y^2\}dx.$$

Пример 3.14. Показать, что уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

представляет собой уравнение Эйлера для функционала

$$\int_0^l \Big\{x(y')^2 - \Big(x - \frac{\nu^2}{x}\Big)y^2\Big\}dx.$$

Решение. Исследуемый функционал представляет собой частный случай квадратичного функционала (3.49) с

$$\varphi(x) = x, \quad q(x) = -\Big(x - \frac{\nu^2}{x}\Big), \quad f(x) = 0.$$

Отсюда, согласно (3.50), имеем

$$(xy')' + \Big(x - \frac{\nu^2}{x}\Big)y = 0,$$

но это и есть уравнение Бесселя в самосопряженной форме, что и требовалось показать.

4. Вариационная задача с естественными граничными условиями

Классическая задача вариационного исчисления о нахождении экстремума функционала

$$v[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx \tag{4.1}$$

с граничными условиями

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \tag{4.2}$$

допускает ряд обобщений, существенно расширяющих возможности вариационного исчисления. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть задача об экстремуме функционала (4.1) рассматривается независимо от условий (4.2). При этом приходится сравнивать все функции $y(x)$ из пространства $\mathcal{C}'([a,b])$. Если на функции $\bar{y}(x)$ функционал (4.1) достигает экстремума, то в силу теоремы 1.1 (необходимого условия экстремума) должно выполняться равенство

$$\delta v[\bar{y}, \delta y] = \int_a^b (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx = 0,$$

которое после интегрирования по частям второго слагаемого можно записать в виде

$$\delta v[\bar{y}, \delta y] = F_{y'} \delta y \Big|_{x=a}^{x=b} + \int\limits_a^b \Big(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\Big) \delta y \, dx = 0. \tag{4.3}$$

Так как при любых граничных условиях функция $\bar{y}(x)$ является решением уравнения Эйлера, то интеграл в (4.3) обращается в нуль, и, следовательно,

$$F_{y'} \delta y \Big|_{x=a}^{x=b} = F_{y'}(b, \bar{y}(b), \bar{y}'(b)) \delta y(b) - F_{y'}(a, \bar{y}(a), \bar{y}'(a)) \delta y(a) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\delta y(a)$ и $\delta y(b)$ приходим к граничным условиям

$$F_{y'}(a, \bar{y}(a), \bar{y}'(a)) = F_{y'}(b, \bar{y}(b), \bar{y}'(b)) = 0. \tag{4.4}$$

♦ Граничные условия (4.4) для функционала (4.1) называются *естественными*, а соответствующая вариационная задача – *естественной*.

◊ Если граничные условия (4.2) заданы только в одной точке, то естественное условие (4.4) также формулируется только в этой точке.

Пример 4.1. Найти экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int\limits_0^{2\pi} [(y')^2 - y^2] dx,$$

удовлетворяющего граничным условиям:

а) $y(0) = y(2\pi) = 0$;

б) естественным граничным условиям;

в) $y(0) = 0$, а в точке $x = 2\pi$ – естественным условиям.

Решение. Этот функционал рассматривался в примере 2.1. Соответствующее уравнение Эйлера имеет общее решение вида

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{4.5}$$

Подстановка (4.5) в условие а) определяет экстремали

$$y = C_2 \sin x.$$

Сформулируем естественные граничные условия. Так как $F_{y'} = 2y'$, то, согласно (4.4), получим

$$y'(0) = y'(2\pi) = 0.$$

Подстановка (4.5) в эти условия даёт

$$y = C_1 \cos x.$$

В случае в) граничные условия имею вид

$$y(0) = y'(2\pi) = 0.$$

Подставив сюда (4.5), найдем единственную экстремаль

$$y = 0.$$

5. Вариационная задача с функционалами, зависящими от нескольких функций одной переменной

Классическая вариационная задача (4.1), (4.2) определяет плоские экстремали, т.е. экстремали, лежащие в плоскости xOy. Применение вариационных методов для нахождения пространственных экстремалей приводит к функционалам, определенным не на одной, а на нескольких функциях одной переменной.

Пусть $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ – вектор-функция скалярного аргумента x, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим функционал

$$v[\vec{y}(x)] = \int\limits_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}\,')dx \tag{5.1}$$

с закрепленными концами

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_a = (y_{1a}, y_{2a}, \dots, y_{na}), \quad \vec{y}(b) = \vec{y}_b = (y_{1b}, y_{2b}, \dots, y_{nb}).$$

♦ *Частной вариацией* функционала (5.1) называется его вариация, полученная в результате варьирования только одной переменной при фиксированных остальных, т.е.

$$\delta_{y_i} v[\vec{y}(x)] = \int\limits_a^b (F_{y_i}\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i')dx. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Если функционал* (5.1) *достигает экстремума на вектор-функции* $\vec{y} = \vec{y}(x) \in C'[a, b]$, *то она удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа*

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть вектор-функция $\vec{y} = \vec{y}(x)$ реализует экстремум функционала (5.1). Тогда все частные вариации, согласно теореме 1.2, должны равняться нулю:

$$\delta_{y_i} v[\vec{y}(x)] = \int\limits_a^b [F_{y_i}\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i']dx = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда, уже в силу теоремы 2.1, приходим к системе уравнений Эйлера–Лагранжа (5.3).

Пример 5.1. Найти экстремали $\vec{y} = (y_1(x), y_2(x))^\intercal$ функционала

$$v[\vec{y}(x)] = \int\limits_0^{\pi/4} (2y_2 - 4y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2)dx$$

при условии $\vec{y}(0) = (0, 0)^\intercal$, $\vec{y}(\pi/4) = (1, 1)^\intercal$.

Решение. Так как

$$F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 2y_2 - 4y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2,$$

то

$$F_{y_1} = -8y_1, \quad F_{y_2} = 2, \quad F_{y_1'} = 2y_1', \quad F_{y_2'} = -2y_2',$$

и система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} y_1'' + 4y_1 &= 0, \\ y_2'' + 1 &= 0, \end{aligned}$$

причём

$$\begin{aligned} y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi/4) = 1, \\ y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/4) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку система состоит из двух уравнений с постоянными коэффициентами, то её общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_{11}\sin 2x + C_{12}\cos 2x, \\ y_2(x) &= C_{21} + C_{22}x - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные C_{ij}, $i, j = 1, 2$, находятся из граничных условий. В результате искомая экстремаль определяется как линия пересечения двух цилиндрических поверхностей

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sin 2x, \\ y_2(x) &= \frac{32 + \pi^2}{8\pi}x - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5.2. Найти экстремали функционала

$$v[\vec{y}(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2]dx$$

при условии $\vec{y}(0) = (0, 0)^{\mathsf{T}}$, $\vec{y}(\pi/2) = (1, 1)^{\mathsf{T}}$.

Решение. Так как

$$F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = (y_1')^2 - (y_2')^2 - 2y_1y_2,$$

то

$$F_{y_1} = -2y_2, \quad F_{y_2} = -2y_1, \quad F_{y_1'} = 2y_1', \quad F_{y_2'} = 2y_2',$$

и система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} y_1'' + y_2 &= 0, \\ y_2'' + y_1 &= 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

причём

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1,$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = 1.$$

Исключив y_2 в системе уравнений (5.4), получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y_1^{(4)} - y_1 = 0.$$

Корнями его характеристического уравнения являются $k_{1,2} = \pm 1$, $k_{3,4} = \pm i$. Следовательно, его общее решение имеет вид

$$y_1(x) = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

В свою очередь, из (5.4) следует

$$y_2(x) = -y_1''(x).$$

Тогда

$$y_2(x) = -(C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x) + (C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

Произвольные постоянные C_i, $i = \overline{1,4}$, находятся из граничных условий, в силу которых

$$\begin{gathered} y_1(0) = C_1 + C_3 = 0, \\ y_1(\pi/2) = C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} + C_4 = 1, \\ y_2(0) = -C_1 + C_3 = 0, \\ y_2(\pi/2) = -\Big(C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}\Big) + C_4 = 1, \end{gathered}$$

и, следовательно,

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, \qquad C_4 = 1.$$

В результате искомая экстремаль определяется как

$$\begin{gathered} y_1(x) = \sin x, \\ y_2(x) = \sin x. \end{gathered}$$

Пример 5.3. Показать, что система уравнений Эйлера–Лагранжа (5.3) может быть записана в форме

$$\frac{d}{dx}\left[F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{5.5}$$

и допускает следующие первые интегралы:

$$F_{y_i'} = C_1, \tag{5.6}$$

если функция F не зависит от y_i, т.е. $F_{y_i} = 0$, и

$$F - \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} y_i' = C, \tag{5.7}$$

если функция F не зависит от x явно, т.е. $\partial F/\partial x = 0$.

Решение. Для получения (5.5) поступим следующим образом. Каждое из уравнений системы (5.3) умножим на y_i' и полученные уравнения сложим. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}\Big)y_i'=0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i}-\sum_{i=1}^{n}y_i'\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0.$$

В полученном выражении прибавим и вычтем одно и то же слагаемое, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i''F_{y_i'}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i''F_{y_i'}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\sum_{i=1}^{n}y_i'\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0.$$

Тогда

$$\Big[\frac{\partial F}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}F_{y_i}\frac{dy_i}{dx}+\sum_{i=1}^{\infty}F_{y_i'}\frac{dy_i'}{dx}\Big]-\sum_{i=1}^{n}\Big(F_{y_i'}\frac{dy_i'}{dx}+y_i'\frac{d}{dx}F_{y_i'}\Big)-\frac{\partial F}{\partial x}=0.$$

Это выражение можно привести к виду

$$\frac{d}{dx}F(x,\vec{y},\vec{y}\,')-\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}(x,\vec{y},\vec{y}\,')-\frac{\partial F}{\partial x}=0,$$

и

$$\frac{d}{dx}\left[F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right]-\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

совпадает с (5.5).

Соотношение (5.6) непосредственно следует из (5.3), поскольку при $F_{y_i}=0$, $dF_{y_i'}/dx=0$, а соотношение (5.7) следует из (5.5), поскольку при $\partial F/\partial x=0$:

$$\frac{d}{dx}\left[F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right]=0.$$

6. Вариационная задача для функционалов, зависящих от функций нескольких переменных

До сих пор мы рассматривали вариационные задачи, экстремалями которых являются кривые в пространствах двух, трёх и т.д. измерений. Одним из обобщений классической вариационной задачи являются вариационные задачи, экстремали которых представляют собой не кривые, а поверхности.

Пусть $y(\vec{x})$ – функция многих переменных $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – задана в области $D\subset\mathbb{R}^n$, ограниченной гладкой границей Γ. В этом случае функция $y(\vec{x})$ представляет собой поверхность $y=y(\vec{x})$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и соответствующий функционал имеет вид

$$v[y(\vec{x})]=\int\limits_D F(\vec{x},y,\nabla y)d\vec{x}, \tag{6.1}$$

где обозначено $d\vec{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, $\nabla y = (y_{x_1}, y_{x_2}, \ldots, y_{x_n})$. Рассмотрим задачу об отыскании экстремума функционала (6.1) при граничном условии

$$y(\vec{x})\big|_{\Gamma} = \varphi(M)\big|_{M\in\Gamma}, \tag{6.2}$$

где $\varphi(M)$ – некоторая заданная функция на границе Γ области D. Геометрически это означает, что значения функционала (6.1) сравниваются на всевозможных поверхностях, определяемых уравнением $y = y(\vec{x})$ и опирающихся на один и тот же контур Γ.

Рассуждая так же, как и при доказательстве основной леммы вариационного исчисления 2.1, убеждаемся в справедливости её обобщения на любое число переменных.

Лемма 6.1. *Если для любой непрерывной при $x \in D \cup \Gamma$ функции $\eta(\vec{x})$ справедливо*

$$\int\limits_D f(\vec{x})\eta(\vec{x})d\vec{x} = 0, \tag{6.3}$$

где функция $f(\vec{x})$ непрерывна при $\vec{x} \in D \cup \Gamma$, то $f(\vec{x}) \equiv 0$ в области D.

Обобщением теоремы 1.1 в этом случае будет следующая теорема.

Теорема 6.1. *Если функционал* (6.1) *достигает экстремума на функции $y(\vec{x})$, удовлетворяющей условию* (6.2), *то она удовлетворяет уравнению Эйлера–Остроградского*

$$F_y - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}} = 0. \tag{6.4}$$

Доказательство. Рассмотрим вариацию функционала (6.1)

$$\delta v[y(\vec{x}), \delta y(\vec{x})] = \int\limits_D \Big[F_y \delta y + \sum_{i=1}^{n} F_{y_{x_i}} \delta y_{x_i}\Big] d\vec{x},$$

которую с учетом $\delta(y_{x_i}) = (\delta y)_{x_i}$ можно записать

$$\delta v[y(\vec{x}), \delta y(\vec{x})] = \int\limits_D \Big[F_y \delta y + \sum_{i=1}^{n} F_{y_{x_i}} (\delta y)_{x_i}\Big] d\vec{x}. \tag{6.5}$$

Проинтегрировав второе слагаемое в (6.5) по частям с учётом $\delta y\big|_{\vec{x}\in\Gamma} = 0$ (т.е. поверхности $y = y(\vec{x})$ закреплены на границе Γ), получим

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} F_{y_{x_i}} (\delta y)_{x_i} d\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_D F_{y_{x_i}} (\delta y)_{x_i} d\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_D dx_1 \cdots dx_{i-1} F_{y_{x_i}} (\delta y)_{x_i} dx_i \cdots dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[\int\limits_\Gamma dx_1 \cdots dx_{i-1} F_{y_{x_i}} \delta y \, dx_{i+1} \cdots dx_n - \int\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}}\Big) \delta y \, d\vec{x}\Big] =$$

$$= 0 - \int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}}\Big) \delta y \, d\vec{x}.$$

Отсюда

$$\delta v[y(\vec{x}), \delta y(\vec{x})] = \int\limits_D \left(F_y - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}} \right) \delta y \, d\vec{x}. \tag{6.6}$$

Так как первая вариация функционала на экстремали $y = y(\vec{x})$ обращается в нуль при любых приращениях δy, то из (6.6) в силу леммы 6.1 вытекает уравнение Эйлера–Остроградского (6.4).

Отметим, что вычисление производных $\partial F_{y_{x_i}}/\partial x_i$ проводится при фиксированных переменных x_j, $j \neq i$, но с учётом того, что в $F_{y_{x_i}}$ в качестве $y(\vec{x})$, $\nabla y(\vec{x})$ подставлены их явные выражения через $\vec{x}$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}} = F_{y_{x_i} x_i} + F_{y_{x_i} y} y_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{y_{x_i} y_{x_j}} y_{x_i x_j}. \tag{6.7}$$

В результате уравнение Эйлера–Остроградского примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left[F_{y_{x_i} x_i} + F_{y_{x_i} y} y_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{y_{x_i} y_{x_j}} y_{x_i x_j} \right] - F_y = 0. \tag{6.8}$$

Это уравнение, в отличие от уравнений Эйлера–Лагранжа, является уравнением в частных производных.

Таким образом, вариационная задача для функционала (6.1) сводится к решению краевой задачи для уравнения в частных производных второго порядка, каким является уравнение Эйлера–Остроградского (6.8), с граничными условиями (6.2).

Пример 6.1. Записать уравнение Эйлера–Остроградского для поверхности $u = u(x, y)$, отвечающей функционалу

$$v[u(x, y)] = \iint\limits_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx \, dy, \tag{6.9}$$

где D – некоторая область плоскости xOy.

Решение. В переменных, задающих функционал (6.9), уравнение Эйлера–Остроградского (6.8) примет вид

$$\begin{gathered} A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) = 0, \end{gathered} \tag{6.10}$$

где

$$\begin{gathered} A(x, y) = F_{u_x u_x}, \quad B(x, y) = F_{u_x u_y}, \quad C(x, y) = F_{u_y u_y}, \\ a(x, y) = F_{u u_x}, \quad b(x, y) = F_{u u_y}, \quad c(x, y) = F_{x u_x} + F_{y u_y} - F_u. \end{gathered} \tag{6.11}$$

Пример 6.2. Найти экстремальную поверхность интеграла Дирихле

$$v[u(x, y)] = \iint\limits_D [(u_x)^2 + (u_y)^2] dx \, dy$$

при условии

$$u(M)\big|_{M \in \Gamma} = f(M), \tag{6.12}$$

где Γ – граница области D, являющаяся окружностью $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Поскольку

$$F(x, y, u, u_x.u_y) = (u_x)^2 + (u_y)^2,$$

то, согласно (6.10), с учётом соотношений (6.11), которые в нашем случае запишутся как

$$A(x,y) = 2, \quad B(x,y) = 0, \quad C(x,y) = 2,$$
$$a(x,y) = b(x,y) = c(x,y) = 0,$$

имеем уравнение Эйлера–Остроградского, совпадающее с уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{6.13}$$

Таким образом, экстремалями интеграла Дирихле являются поверхности $u = u(x,y)$, определяемые гармоническими функциями $u(x,y)$. Эти функции являются решениями задачи Дирихле для круга (6.13), (6.12) и могут быть представлены интегралом Пуассона (см., например, [6]).

Пример 6.3. Найти экстремаль функционала

$$v[u(x,y)] = \int_0^1 \int_0^1 (x + e^{u_y}) dx\, dy \tag{6.14}$$

при условии

$$u(x,0) = 0, \qquad u(x,1) = 1.$$

Решение. Функции Лагранжа

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = x + e^{u_y},$$

согласно (6.10) и (6.11), отвечает уравнение Эйлера–Остроградского

$$u_{yy} = 0.$$

Легко убедиться, что общее решение этого уравнения в частных производных имеет вид

$$u(x,y) = q(x)y + p(x),$$

где $q(x)$ и $p(x)$ – произвольные функции. Учёт граничных условий даёт

$$u(x,0) = p(x) = 0, \quad u(x,1) = q(1) = 1.$$

Таким образом, поверхностью, на которой функционал (6.14) принимает экстремальное значение, является плоскость $u = y$, проходящая через ось Ox.

7. Вариационная задача для функционалов, зависящих от производных высших порядков

Рассмотрим вариационную задачу для функционалов вида

$$v[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) dx \tag{7.1}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} y(a) = A_0, \quad y'(a) = A_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, \\ y(b) = B_0, \quad y'(b) = B_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Теорема 7.1. *Если функционал (7.1) достигает экстремума на функции $y(x)$, удовлетворяющей условиям (7.2), то она удовлетворяет уравнению Эйлера–Пуассона*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}F_{y^{(k)}}=0, \tag{7.3}$$

которое в развернутой записи имеет вид

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

Доказательство. Вариацию функционала (7.1)

$$\delta v[y,\delta y]=\int\limits_a^b\sum_{k=0}^{n}F_{y^{(k)}}\delta y^{(k)}dx$$

с учётом $\delta y^{(k)}=\delta^{(k)}y$ можно записать как

$$\delta v[y,\delta y]=\sum_{k=0}^{n}\int\limits_a^b F_{y^{(k)}}\delta^{(k)}y\,dx. \tag{7.4}$$

Проинтегрировав k-ое слагаемое по частям с учётом $\delta^{(n-1)}y(a)=\delta^{(n-1)}y(b)=0$, найдём

$$\int\limits_a^b F_{y^{(k)}}\delta^{(k)}\,dx=\delta^{(k-1)}yF_{y^{(k)}}\Big|_a^b-\int\limits_a^b\frac{d}{dx}(F_{y^{(k)}})\delta^{(k-1)}y\,dx=$$

$$=-\int\limits_a^b\frac{d}{dx}(F_{y^{(k)}})\delta^{(k-1)}y\,dx.$$

Повторное интегрирование по частям с учётом $\delta^{(k-2)}y(a)=\delta^{(k-2)}(b)=0$ даёт

$$\int\limits_a^b F_{y^{(k)}}\delta^{(k)}\,dx=\delta^{(k-2)}y\frac{d}{dx}F_{y^{(k)}}\Big|_a^b+\int\limits_a^b\frac{d^2}{dx^2}(F_{y^{(k)}})\delta^{(k-2)}y\,dx=$$

$$=\int\limits_a^b\frac{d^2}{dx^2}(F_{y^{(k)}})\delta^{(k-2)}y\,dx.$$

В результате после k-го шага запишем

$$\int\limits_a^b F_{y^{(k)}}\delta^{(k)}y\,dx=\int\limits_a^b\frac{d^k}{dx^k}(F_{y^{(k)}})\delta y\,dx.$$

В результате вариацию (7.4) можно представить в виде

$$\delta v[y,\delta y]=\int\limits_a^b\left[(-1)^k\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k}{dx^k}(F_{y^{(k)}})\right]\delta y\,dx. \tag{7.5}$$

Так как вариация (7.5) на экстремали $y = y(x)$ обращается в нуль при любых приращениях δy, то из (7.5) в силу основной леммы вариационного исчисления и вытекает уравнение Эйлера–Пуассона (7.3), что и требовалось доказать.

Пример 7.1. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_{-1}^{0} [240y + (y''')^2]dx$$

при условиях

$$y(-1) = 1, \quad y'(-1) = -4{,}5, \quad y''(-1) = 16,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Решение. Так как $F = 240y - (y''')^2$, то

$$F_y = 240, \quad F_{y'} = F_{y''} = 0, \quad F_{y'''} = 2y''',$$

и уравнение Эйлера–Пуассона примет вид

$$240 - \frac{d^3}{dx^3}(2y''') = 0$$

или

$$\frac{d^6 y}{dx^6} = 120.$$

Шестикратное интегрирование этого уравнения даёт общее решение

$$y(x) = \frac{120}{6!}x^6 + \frac{C_1}{5!}x^5 + \frac{C_2}{4!}x^4 + \frac{C_3}{3!}x^3 + \frac{C_4}{2!}x^2 + C_5 x + C_6.$$

Произвольные постоянные C_i легко находятся из граничных условий. В результате уравнение экстремали запишется как

$$y = \frac{x^6}{6} + x^4 + \frac{x^3}{6}.$$

Пример 7.2. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_{0}^{1} (y + y'')dx$$

при условиях

$$y(0) = A_0, \quad y'(0) = A_1, \quad y(1) = B_0, \quad y'(1) = B_1.$$

Решение. Так как $F = y + y''$, то

$$F_y = 1, \quad F_{y'} = 0, \quad F_{y''} = 1,$$

и уравнение Эйлера–Пуассона примет вид

$$1 - \frac{d}{dx}(1) = 0.$$

Следовательно вариационная задача решения не имеет ввиду отсутствия экстремума для исходного функционала.

Рассмотрим теперь пример, когда вариационная задача не имеет решения по другой причине.

Пример 7.3. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + yy'']dx \tag{7.6}$$

при условиях

$$y(0) = A_0, \quad y'(0) = A_1, \quad y(1) = B_0, \quad y'(1) = B_1.$$

Решение. Так как $F = (y')^2 + yy''$, то

$$F_y = y'', \quad F_{y'} = 2y', \quad F_{y''} = y,$$

и уравнение Эйлера–Пуассона примет вид тождества

$$y'' - \frac{d}{dx}(2y') + \frac{d^2}{dx^2}(y) \equiv 0.$$

Последнее уравнение выполняется тождественно. Это означает, что интеграл (7.6) не зависит от пути интегрирования и вариационная задача теряет смысл. Такой результат объясняется тем, что подынтегральная функция (7.6) представляет собой полный дифференциал

$$[(y')^2 + yy'']dx = d(yy')$$

и функционал (7.6)

$$v[y(x)] = \int_0^1 d(yy') = yy'\Big|_0^1 = B_0B_1 - A_0A_1$$

имеет одно и то же значение на всех кривых, соединяющих точки $x = 0$ и $x = 1$.

Пример 7.4. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_a^b (y'')^2 dx \tag{7.7}$$

с граничными условиями

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{7.8}$$

Решение. Функционал этой вариационной задачи содержит производные высших порядков (см. разд. IV), поскольку $F = (y'')^2$. Так как

$$F_y = F_{y'} = 0, \quad F_{y''} = 2y'',$$

то уравнение Эйлера–Пуассона имеет вид

$$y^{(4)} = 0$$

и общее решение

$$y(x) = \frac{C_1}{3!}x^3 + \frac{C_2}{2!}x^2 + C_3x + C_4,$$

где C_i – четыре произвольные постоянные. Поскольку граничные условия (7.8) позволяют определить только две из них, то вариационная задача (7.7), (7.8) не имеет единственного решения.

Для нахождения единственного решения можно поступить так же, как в разд. I при формулировке естественных граничных условий. Выпишем первую вариацию функционала (7.7)

$$\delta v[y,\delta y] = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial y''}[(y'')^2]\delta(y'')dx = 2\int\limits_a^b y''\delta'' y\,dx.$$

Двукратное интегрирование по частям даёт

$$\delta v[y,\delta y] = 2\left\{y''\delta y'\Big|_a^b - y'''\delta y\Big|_a^b + \int\limits_a^b y^{(4)}\delta y\,dx\right\}.$$

На экстремали $y = y(x)$ эта вариация должна обращаться в нуль. Если учесть, что последний интеграл обращается в нуль, согласно уравнению Эйлера–Пуассона $y^{(4)} = 0$, а предпоследний – в силу закреплённости экстремали в точках $x = a$ и $x = b$, т.е. $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, то для первого слагаемого найдём условие

$$y''\delta y'\Big|_a^b = y''(b)\delta y'(b) - y''(a)\delta y'(a) = 0.$$

В силу произвольности величин $\delta y'(b)$, $\delta y'(a)$ отсюда следует

$$y''(b) = y''(a) = 0.$$

Эти условия естественным образом доопределяют условия (7.8), выделяя из семейства экстремалей единственную $y(x) = 0$, поскольку $C_i = 0$, $i = \overline{1,4}$.

Рассмотренная задача представляет собой пример, когда хотя бы и частичное использование естественных граничных условий позволяет однозначно определить экстремаль функционала, содержащего производные порядка выше первого.

Некоторые вариационные задачи, совмещающие указанные выше обобщения, приводят к уравнениям, совмещающим, например, уравнение Эйлера–Остроградского и уравнение Эйлера–Пуассона. Рассмотрим такую задачу.

Пример 7.5. Записать уравнение Эйлера, определяющее экстремаль функционала

$$v[y(x_1,x_2)] = \iint\limits_D F\left(x_1,x_2,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2},\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)dx_1dx_2 \tag{7.9}$$

при условии

$$y\Big|_{M\in\Gamma} = \varphi(M), \quad \frac{\partial y}{\partial\vec{n}}\Big|_{M\in\Gamma} = \psi(M), \tag{7.10}$$

где под $\vec{n}$ подразумевается направление внутренней нормали к кривой Γ, являющейся гладкой границей, охватывающей область D на плоскости x_1Ox_2.

Решение. Имеем вариационную задачу для функционала, зависящего от функции двух переменных $y(x_1,x_2)$ и одновременно от производных этой функции по указанным переменным до второго порядка включительно. Рассуждая, как и в разд. III, IV, и обозначив для удобства

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = P_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = P_2, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = P_{11}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = P_{12}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = P_{22},$$

выпишем первую вариацию функционала (7.9):

$$\delta c[y, \delta y] = \iint\limits_D (F_y \delta y + F_{P_1} \delta P_1 + F_{P_2} \delta P_2 + F_{P_{11}} \delta P_{11} + F_{P_{12}} \delta P_{12} + F_{P_{22}} \delta P_{22}) dx_1 dx_2.$$

Как и ранее, проинтегрировав по частям один раз второе и третье слагаемые и дважды последующие, найдём

$$\delta v[y, \delta y] = \iint\limits_D \Big[F_y - \frac{\partial}{\partial x_1}(F_{P_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(F_{P_2}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(F_{P_{11}}) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(F_{P_{12}}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(F_{P_{22}}) \Big] \delta y \, dx_1 \, dx_2. \tag{7.11}$$

Здесь учтено, что

$$\delta(y_{x_i}) = (\delta y)_{x_i}, \quad \delta(y_{x_i x_j}) = (\delta y)_{x_i x_j}, \quad (\delta y)\Big|_{M| \in \Gamma} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (\delta y)_{M \in \Gamma} = 0,$$

а также $(\delta y)_{x_i}\Big|_{M \in \Gamma} = 0$. Так как первая вариация на экстремали $y = y(x_1, x_2)$ обращается в нуль при любых приращениях δy, то из (7.11) в силу леммы 6.1 следует уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x_1}(F_{P_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(F_{P_2}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(F_{P_{11}}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(F_{P_{12}}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(F_{P_{22}}) = 0. \tag{7.12}$$

Отметим, что при вычислении частных производных в формуле (7.12) необходимо учитывать замечание из разд. III к уравнению (6.7).

8. Условия Лежандра и Якоби

Кратко остановимся на достаточном условии экстремума функционала.

Пусть $y = y_0(x)$, $x \in [a, b]$, – экстремаль функционала $F\big(x, y(x) y'(x)\big)$. Обозначим через

$$F_{yy}(x) = F_{yy}\big(x, y_0(x) y_0'(x)\big),$$
$$F_{y'y'}(x) = F_{y'y'}\big(x, y_0(x) y_0'(x)\big),$$
$$F_{yy'}(x) = F_{yy'}\big(x, y_0(x) y_0'(x)\big),$$

соответствующие производные, вычисленные на экстремали $y = y_0(x)$.

♦ Линейное дифференциальное уравнение

$$\Big(F_{yy}(x) - \frac{dF_{yy'}(x)}{dx}\Big) u - \frac{d}{dx}\big(F_{y'y'}(x) u'\big) = 0 \tag{8.1}$$

относительно функции $u = u(x)$ называется *уравнением Якоби.*

Поставим для уравнения (8.1) задачу Коши:

$$u(a) = 0, \qquad u'(a) = 1. \tag{8.2}$$

♦ Пусть $u = u(x)$ – решение задачи Коши (8.1), (8.2). Точка $a^* > a$ называется сопряженной точке a, если $u(a^*) = 0$, $u(x) \neq 0$, $x \in]a, a^*[$ (см. рис. 7).

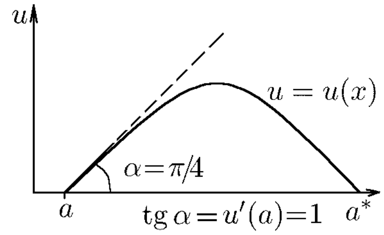

Рис. 7.

Теорема 8.1. *Пусть для экстремали $y = y_0(x)$, $x \in [a, b]$, выполняются условия*

1) *для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $F_{y'y'}(x) > 0$ или $F_{y'y'}(x) < 0$;*

2) *на отрезке $[a, b]$ нет точки, сопряженной с точкой a.*

Тогда функционал $v[y(x)]$ достигает на экстремали $y = y_0(x)$ минимума (максимума).

Доказательство выходит за рамки настоящего пособия (см., например, [27]).

♦Условие 1 называется условием Лежандра, а условие 2 – условием Якоби.

Пример 8.1. Найти кривую $y = y(x)$ минимальной длины, соединяющую точки (a, A) и (b, B).

Решение. Запишем функционал длины:

$$\ell[y(x)] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx. \tag{8.3}$$

Задача сводится к задаче на экстремум функционала длины (8.3) с граничными условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{8.4}$$

Запишем уравнение Эйлера для функции Лагранжа $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$. Поскольку $F(x, y, y')$ не зависит от y, то уравнение Эйлера сводится к уравнению (см. пример 3.4)

$$F_{y'}(x, y, y') = \widetilde{C}_1$$

или

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \widetilde{C}_1.$$

Следовательно,

$$(y'(x))^2 = \frac{\widetilde{C}_1^2}{1 - \widetilde{C}_1^2} = C_1^2,$$

и $y(x) = C_1x + C_2$. Из граничных условий найдём

$$\begin{cases} y(a) = C_1a + C_2 = A; \\ y(b) = C_1b + C_2 = B, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = \frac{B - A}{b - a}, \qquad C_2 = \frac{Ab - Ba}{b - a}.$$

Окончательно для экстремали найдём

$$y(x) = \frac{B - A}{b - a}x + \frac{Ab - Ba}{b - a}, \quad x \in [a, b]. \tag{8.5}$$

Проверим выполнение условий Лежандра и Якоби:

$$F_{yy}(x,y,y')=0,\quad F_{yy'}(x,y,y')=0,\quad f_{y'y'}(x,y,y')=\frac{1}{(1+(y')^2)^{3/2}},$$

откуда

$$F_{yy}(x)=F_{yy'}(x)=0;$$
$$F_{y'y'}(x)=\frac{1}{\{1+[(B-A)/(b-a)]^2\}^{3/2}}=F_{y'y'}>0.$$

Следовательно, выполнено условие Лежандра для минимума. Уравнение Якоби примет вид

$$-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}u')=0$$

или

$$u''=0.$$

Отсюда следует, что $u(x)=C_3x+C_4$. Из начальных условий (8.2) найдём

$$u(x)=x-a.$$

Поскольку $u(x)\neq 0$ при $x>a$, то точка не имеет сопряженной, т.е. условие Якоби выполнено.

Таким образом, функция (8.3) достигает минимума на отрезке, соединяющем точки (a,A) и (b,B).

Пример 8.2. Найти экстремум функционала

$$S[x(t)]=\int\limits_0^T\Big(\frac{m\dot x^2(t)}{2}-\frac{kx^2(t)}{2}\Big)dt,\qquad T\neq\frac{\pi j}{\omega_0},\quad j\in\mathbb{Z};$$

$$x(0)=0,\quad x(T)=B,\quad \frac{k}{m}=\omega_0^2,\quad k>0,\quad m>0.$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\ddot x+\omega_0^2x=0,\qquad x(0)=0,\quad x(T)=B.$$

Следовательно,

$$x_0(t)=\frac{B\sin(\omega_0t)}{\sin(\omega_0T)}.\tag{8.6}$$

Проверим выполнение условий Лежандра и Якоби для экстремали (8.6). Найдём

$$F_{\dot x\dot x}(t)=m,\qquad F_{x\dot x}(t)=0,\quad F_{xx}(t)=-k.$$

Поскольку $F_{\dot x\dot x}=m>0$, то условие Лежандра (для минимума) выполнено.

Запишем уравнение Якоби:

$$\ddot u+\omega_0^2u=0,\qquad u(0)=0,\quad \dot u(0)=1.$$

Отсюда

$$u(t)=\frac{\sin\omega_0t}{\omega_0},$$

и точка $t=\pi/\omega_0$ является сопряженной точке $t=0$.

При $t\in]0,\pi/\omega_0[$ условие Якоби выполнено и функционал достигает минимума на кривой (8.6).

Найдём минимальное значение функционала:

$$S[x_0(t)]=\int\limits_0^T\frac{B^2k}{2\sin^2(\omega_0T)}\big[\cos^2\omega_0t-\sin^2\omega_0t\big]dt=\frac{B^2k\sin(2\omega_0T)}{4\omega_0\sin^2(\omega_0T)}.$$

При $t>\pi/\omega_0$ условие Якоби нарушено, поэтому функционал не имеет экстремумов.

9. Уравнения Лагранжа в классической механике

Систематизация и классификация решений вариационных задач самого разнообразного характера привели к формированию так называемого вариационного принципа. Его смысл заключается в том, что для достаточно широкого круга задач введение некоторого характерного функционала позволяет сформулировать для него вариационную задачу, решение которой и приводит к решению этого круга задач.

Решение вариационных задач первоначально сводилось к решению уравнений Эйлера. Однако применение вариационных принципов к некоторым хорошо изученным задачам, описываемым дифференциальными уравнениями с известными решениями, поставило вопрос о возможности представления заданного дифференциального уравнения как уравнения Эйлера для некоторого функционала. Вопреки кажущейся нецелесообразности такого подхода, его применение привело к важным результатам, обобщение которых позволило сформулировать один из наиболее универсальных принципов современного естествознания – принцип Гамильтона.

Начнём с простого примера. Сформулируем вариационную задачу, уравнение Эйлера–Лагранжа которой совпадает с дифференциальным уравнением Ньютона для прямолинейного движения материальной точки массой m, движущейся вдоль оси q под действием силы $f(q,t)$:

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = f(q,t). \tag{9.1}$$

Для удобства в дальнейшем использованные ранее переменные x, y заменим на новые t, q соответственно. Обозначив через $U(q,t)$ потенциал силового поля, для которого $\partial U(q,t)/\partial q = U_q(q,t) = -f(q,t)$, а через $\dot q = dq/dt$, уравнение (9.1) можно записать как

$$\frac{d}{dt}(m\dot q) = -U_q(q,t),$$

а с учётом того, что кинетическая энергия T равна $T = m\dot q^2/2$ и

$$\frac{d}{dt}(m\dot q) = \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{d\dot q}\Big(\frac{m\dot q^2}{2}\Big)\Big] = \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{d\dot q}T\Big] = \frac{d}{dt}T_{\dot q}(\dot q),$$

ещё и как

$$\frac{d}{dt}T_{\dot q}(\dot q) = -U_q(q,t).$$

Учтём теперь, что, с одной стороны, кинетическая энергия $T(\dot q)$ зависит только от $\dot q$ и, следовательно, $\partial T(\dot q)/\partial q = 0$, а с другой, что потенциальная энергия от $\dot q$ не зависит и, следовательно, $\partial U(q,t)/\partial \dot q = 0$. Тогда последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial q}(T-U) - \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial \dot q}(T-U)\Big] = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q}L - \frac{d}{dt}L_{\dot q} = 0, \tag{9.2}$$

где введено обозначение

$$L(q,\dot q,t) = T(\dot q) - U(q,t). \tag{9.3}$$

Функция $L(q, \dot{q}, t)$ называется функцией Лагранжа. Нетрудно заметить, что именно функция Лагранжа (9.3) определяет функционал

$$v[q(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt, \tag{9.4}$$

для которого уравнение Эйлера–Лагранжа (9.2) совпадает с уравнением движения Ньютона (9.1).

♦ Функционал (9.4) в классической механике принято называть *действием* и обозначать $S = v[q(t)]$.

Если функционал (9.4) дополнить граничными условиями

$$q(t_1) = q_1, \qquad q(t_2) = q_2,$$

то для такой вариационной задачи уравнения движения Ньютона являются её экстремалями.

Таким образом, дифференциальный закон движения Ньютона можно рассматривать как следствие некоторого более общего утверждения, называемого принципом Гамильтона и гласящего, что если заданы начальное и конечное состояния системы, то из всех возможных законов движения реализуется такой, для которого действие принимает стационарное значение.

Следует отметить, что функция Лагранжа, определенная соотношением (9.3) как разность кинетической и потенциальной энергий, на первый взгляд представляет собой некоторое формальное выражение, и физическая интерпретация действия (9.4) затруднительна, если вообще возможна. Оказалось, однако, что именно такой вид функции Лагранжа в состоянии пояснить, во-первых, фундаментальные законы классической физики при самых общих предположениях, а во-вторых – связь между классической и квантовой механиками.

Действительно, тот факт, что функция Лагранжа в рассматриваемом случае зависит лишь от координаты и её первой производной, означает, что движение материальной точки можно предсказать, зная её положение и импульс, как это и показывает опыт. В том случае, когда функция Лагранжа не зависит явно от времени, согласно (3.19), существует первый интеграл

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \mathrm{const}\,.$$

Его с учётом (9.3) можно записать в виде

$$\dot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\Big(\frac{m\dot{q}^2}{2}\Big) - \Big(\frac{m\dot{q}^2}{2} - U\Big) = m\dot{q}^2 - \frac{m\dot{q}^2}{2} + U = \\ = \frac{m\dot{q}^2}{2} + U = T + U = E = \mathrm{const},$$

что соответствует закону сохранения энергии для консервативных систем.

Если же функция Лагранжа не зависит явно от q, то, согласно (9.2), существует первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \mathrm{const}\,.$$

Его с учётом (9.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\Big(\frac{m\dot{q}^2}{2}\Big) = m\dot{q} = p = \mathrm{const},$$

из которого следует закон сохранения импульса p частицы.

Если использовать обобщения, рассмотренные в предыдущем разделе, то аналогично тому, как это сделано для одномерного движения, можно ввести функцию Лагранжа частицы, движущейся в пространстве $\vec{q}(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. Действительно, рассмотрим функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{m}{2}\left[(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_3)^2\right] - U(t, \vec{q}), \tag{9.5}$$

где $\dot{q}_i = dq_i/dt$ – скорости частицы массой m в силовом поле с потенциалом $U(t, \vec{q})$. Соответствующее лагранжиану (9.5) действие определится интегралом

$$S[\vec{q}(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})\, dt. \tag{9.6}$$

Если этот функционал дополнить граничными условиями

$$\vec{q}(t_0) = \begin{pmatrix} q_1(t_0) \\ q_2(t_0) \\ q_3(t_0) \end{pmatrix} = \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(t_1) = \begin{pmatrix} q_1(t_1) \\ q_2(t_1) \\ q_3(t_1) \end{pmatrix} = \vec{q}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{pmatrix}, \tag{9.7}$$

то мы получим вариационную задачу, рассмотренную в п. III предыдущего раздела. Воспользовавшись формулами (5.3), найдём систему уравнений Эйлера–Лагранжа для экстремалей действия

$$m\ddot{\vec{q}} = -\nabla_q U(t, \vec{q}) \tag{9.8}$$

или

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= -\frac{\partial}{\partial q_1} U(t, \vec{q}), \\ m\ddot{q}_2 &= -\frac{\partial}{\partial q_2} U(t, \vec{q}), \\ m\ddot{q}_3 &= -\frac{\partial}{\partial q_3} U(t, \vec{q}). \end{aligned}$$

Очевидно, что уравнения (9.8) совпадают с классическим уравнением Ньютона. Это означает, что принцип Гамильтона или, как его ещё называют, принцип наименьшего действия справедлив и в этом случае.

◊ Строго говоря, траектории, определяемые уравнениями (9.8), сообщают действию (9.6) не только минимальные значения, поэтому определение «принцип наименьшего действия» не совсем точно. Корректнее была бы формулировка «принцип стационарного действия», но термин «принцип наименьшего действия» общепринят.

Как и для одномерного движения, в трёхмерном пространстве для консервативных систем выполняется закон сохранения полной энергии $E = T + U$. В результате этого функцию Лагранжа (9.4) можно представить как разность $L = 2T - E$, а интеграл (9.5), определяющий действие, – как

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})\, dt = -E(t_1 - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\, dt. \tag{9.9}$$

Поскольку интегралы в левой и правой частях этого равенства различаются на константу, то условие экстремума для действия $S(\vec{q}(t))$ фактически совпадает с условием экстремума для функционала

$$\widetilde{S}(\vec{q}(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\,dt, \tag{9.10}$$

имеющего интересное геометрической толкование и сыгравшего большую роль в становлении квантовой механики. Действительно, если скорость частицы обозначить через $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$, а импульс через $\vec{p} = m\vec{v}$ и учесть, что $T = (\vec{p}, \vec{v})/2$ и $d\vec{r} = \vec{v}dt$, то функционал (9.10) можно записать так:

$$\widetilde{S}(\vec{q}(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} 2T\,dt = \int\limits_{A}^{B} (\vec{p}, d\vec{r}), \tag{9.11}$$

где точки A и B определяют положение начала и конца траектории движения частицы. Условие стационарности действия для классической частицы в форме (9.11) совершенно аналогично принципу Ферма для световых волн в оптике. Согласно постулатам квантовой механики, длина волны λ, связанной с движением частицы с импульсом $|\vec{p}|$, определяется соотношением $\lambda = h/|\vec{p}|$, где h – постоянная Планка. Вероятность же того, что частица находится в некоторой точке пространства, пропорциональна квадрату амплитуды соответствующей ей волны, причём волны, пришедшие в одну точку, складываются. Тогда условие стационарности действия (9.11) на классических траекториях в квантовой механике представляет собой условие сложения волн с одинаковыми фазами, распространяющихся по путям, близким к классической траектории.

Следующим шагом в обобщении функции Лагранжа является функция Лагранжа для системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. В этом случае лагранжиан системы имеет вид

$$L(t, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n, \dot{\vec{q}}_1, \dot{\vec{q}}_2, \ldots, \dot{\vec{q}}_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2}\left[(\dot{q}_{1k})^2 + (\dot{q}_{2k})^2 + (\dot{q}_{3k})^2\right] - U(t, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n),$$

где $\dot{q}_{ik}$, $i = 1, 2, 3$, $k = \overline{1, n}$, – координаты скорости k-й частицы в силовом поле с потенциалом $U(t, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n)$, а функционал, определяющий действие S попрежнему находится по формуле (9.6). Нетрудно убедиться, что экстремали такого функционала определяются уравнениями движения

$$m_k\ddot{q}_{ik} = -\frac{\partial U}{\partial q_{ik}}, \qquad i = 1, 2, 3; \quad k = \overline{1, n}. \tag{9.12}$$

Наряду с этим принцип Гамильтона замечателен ещё и тем, что он формулируется в терминах кинетической и потенциальной энергий системы. Это позволяет распространить его на физические поля, обладающие аналогичными характеристиками, например электромагнитные и т.п. Кроме того, принцип Гамильтона естественным образом распространяется с дискретных систем на сплошные среды. В подтверждение этого выведем с помощью принципа Гамильтона уравнение малых колебаний мембраны. Под мембраной будем понимать (см. [6]) бесконечно тонкую плёнку, не сопротивляющуюся изгибу, но сопротивляющуюся растяжению, причём, как указывает опыт, её потенциальная энергия пропорциональна приращению площади. Предположим, что мембрана растянута с силой натяжения T_0 равномерно по всем направлениям и в состоянии равновесия занимает некоторую область S с границей L в плоскости xOy. Обозначим через $q(x, y, t)$ отклонение точки мембраны с координатами (x, y) в момент времени t в направлении, ортогональном плоскости xOy, под действием внешних сил с поверхностной плотностью $F(x, y, t)$, направленных перпендикулярно плоскости xOy. Если поверхностная плотность мембраны равна $\rho(x, y)$, то её кинетическая энергия определяется двойным интегралом

$$T = \iint\limits_S \frac{\rho}{2}(q_t)^2 dx\, dy. \tag{9.13}$$

Если мембрану в некоторый момент времени перевести из состояния $q(x, y, t)$ в ненагруженное состояние $q(x, y, t) \equiv 0$, то будет произведена работа

$$A = T_0 \iint\limits_S \left(\sqrt{1 + q_x^2 + q_y^2} - 1\right) dx\, dy - \iint\limits_S F(x, y, t) q(x, y, t) dx\, dy, \tag{9.14}$$

которая с точностью до аддитивной постоянной совпадает с потенциальной энергией V рассматриваемой системы. Разложив радикал в (9.14) в ряд и отбросив слагаемые высших порядков по $|q(x, y, t)|$ (в предположении их малости), получим

$$V = \iint\limits_S \left\{\frac{T_0}{2}\left[q_x^2 + q_y^2\right] - F(x, y, t) q\right\} dx\, dy. \tag{9.15}$$

С учётом соотношений (9.13), (9.15) запишем функцию Лагранжа

$$L = T - V = \iint\limits_S \left\{\frac{\rho}{2} q_t^2 - \frac{T_0}{2}\left[q_x^2 + q_y^2\right] + F(x, y, t) q\right\} dx\, dy. \tag{9.16}$$

Тогда действие определится интегралом

$$S[q(x, y, t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \iint\limits_S \mathcal{L}\, dx\, dy\, dt, \tag{9.17}$$

где функция $\mathcal{L}$, называемая плотностью функции Лагранжа L, равна

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} q_t^2 - \frac{T_0}{2}\left[q_x^2 + q_y^2\right] + F q. \tag{9.18}$$

Таким образом, можно рассматривать вариационную задачу для функционала (9.17), зависящего от функции q трёх переменных x, y, t. Его экстремали, согласно формуле (6.4), определяется уравнением Эйлера–Остроградского:

$$\mathcal{L}_q - \left[\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_{q_x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{L}_{q_y} + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{q_t}\right] = 0.$$

С учетом (9.18) окончательно запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q_t) = \frac{\partial}{\partial x}(T_0 q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(T_0 q_y) + F(x, y, t). \tag{9.19}$$

♦ Уравнение (9.19) называется уравнением *малых колебаний мембраны.*

◊ Уравнение (9.19) ранее было получено [6] вне рамок вариационного принципа. Для однородной мембраны оно переходит в двумерное волновое уравнение

$$q_{tt} = a^2(q_{xx} + q_{yy}) + f(x, y, t),$$

где $a = \sqrt{T_0/\rho}$; $f(x, y, t) = F(x, y, t)/\rho$.

Аналогичным образом вариационный принцип позволяет вывести большинство уравнений, рассмотренных в [6].

Пример 9.1. С помощью вариационного принципа получить уравнение плоских продольных колебаний прямолинейного стержня с естественными граничными условиями.

Решение. Эта задача уже рассматривалась другими методами [6]. Воспользуемся введёнными там допущениями и обозначениями. Пусть координатная ось Ox совпадает с направлением продольной оси упругого стержня. Под продольными колебаниями понимаются смещения поперечных сечений $S(x)$ стержня. Обозначим через $q(x, t)$ отклонение в момент времени t того сечения стержня $S(x)$, которое, находясь в покое, имело абсциссу x. Пусть $\rho = \rho(x)$ – объёмная плотность стержня в невозмущённом состоянии; $F = F(x, t)$ – объёмная плотность внешних сил, действующих строго вдоль оси Ox; $E = E(x)$ – модуль упругости стержня. Будем считать для общности, что концы стержня $x = 0$ и $x = l$ упруго закреплены с коэффициентами упругости α и β соответственно.

Кинетическая энергия стержня равна

$$T = \int\limits_0^l \frac{\rho}{2} q_t^2 S(x)\, dx. \tag{9.20}$$

Для вычисления потенциальной энергии примем во внимание, что при относительном удлинении $\partial q/\partial x$ элемента dx стержня в этом элементе возникает сила упругости, по закону Гука равная

$$T_{\text{уп}} = ESq_x,$$

и работа, затраченная на это удлинение из невозмущённого состояния $q \equiv 0$, равна

$$dA = \frac{1}{2} ESq_x \frac{\partial q}{\partial x} dx = \frac{1}{2} ESq_x^2 dx.$$

Поэтому потенциальная энергия растянутого стержня определится как

$$U = \int\limits_0^l \Big[\frac{1}{2} E(x)S(x)q_x^2 - F(x)S(x)q\Big] dx + \frac{1}{2}\Big[\alpha q^2(x)\Big|_{x=0} + \beta q^2(x)\Big|_{x=l}\Big]. \tag{9.21}$$

С учётом соотношений (9.20), (9.21) получим функцию Лагранжа

$$L = T - U = \int\limits_0^l S(x)\Big\{\frac{1}{2}\big[\rho q_t^2 - E(x)q_x^2\big] + F(x)q\Big\} dx + \frac{1}{2}\Big[\alpha q^2\big|_{x=0} + \beta q^2\big|_{x=l}\Big]$$

и действие

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt. \qquad (9.22)$$

Уравнение Эйлера–Остроградского для функционала (9.22) даёт уравнение продольных колебаний стержня

$$\rho(x)S(x)q_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(S(x)E(x)\frac{\partial q}{\partial x}\Big) + S(x)F(x,t), \qquad (9.23)$$

которое для однородного стержня постоянного сечения примет вид

$$q_{tt} = a^2 q_{xx} + f(x,t), \qquad (9.24)$$

где $a^2 = E/\rho$; $f(x,t) = F(x,t)/\rho$.

Обратимся теперь к граничным условиям. Рассуждая так же, как и в предыдущем разделе, приходим к естественным граничным условиям

$$\begin{aligned} (SEq_x - \alpha q)\big|_{x=0} &= 0,\\ (SEq_x - \beta q)\big|_{x=l} &= 0, \end{aligned} \qquad (9.25)$$

которые являются граничными условиями третьего рода.

◊ Пусть $\vec{x}$ – вектор n-мерного координатного пространства $\mathbb{R}^n$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, а $\gamma = \{t,\vec{x}:\vec{x}=\vec{x}(t), t\in[t_0,t_1]\}$ – кривая $n+1$-мерного координатного пространства $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$ – непрерывно дифференцируемая функция $2n+1$ аргументов. Тогда справедлива следующая теорема (частный случай теоремы 2.1):

Теорема 9.1. *Если функционал*

$$v[\vec{x}] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)dt \qquad (9.26)$$

достигает экстремума на кривых $\vec{x}=\vec{x}(t)$, то кривые удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_k} = 0, \quad x_k(t_0) = x_k^0, \quad x_k(t_1) = x_k^1, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (9.27)$$

Система уравнений (9.27) *называется системой уравнений Эйлера–Лагранжа или Лагранжа.*

◊ Систему уравнений Эйлера–Лагранжа (9.27) можно записать в векторном виде

$$\mathcal{L}'_{\vec{x}} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot{\vec{x}}} = 0, \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1.$$

◊ Система (9.27) – система n уравнений второго порядка. Следовательно, ее решение зависит от $2n$ произвольных постоянных.

♦ Число величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения механической системы, называется числом степеней свободы.

◊ Например, для определения положения системы N материальных точек в пространстве нужно задать N радиус-векторов, т.е. $3N$ координат. Следовательно, число степеней свободы равно $3N$.

♦ Любые n величин $q_1, \ldots, q_n = \vec{q} \in E \subset \mathbb{R}^n$, полностью задающих положение механической системы с n степенями свободы, называют ее обобщенными координатами, а производные $\dot{q}_j$, $j = \overline{1, n}$, – ее обобщенными скоростями. Пространство $\mathbb{R}^n$ называют конфигурационным пространством.

◊ Положение частицы на плоскости можно задавать декартовыми координатами $\vec{x} = (x_1, x_2)$ или полярными координатами $\vec{q} = (r, \varphi)$, $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. И те и другие являются обобщенными координатами частиц.

Пример 9.2. Найти общее решение уравнений Эйлера–Лагранжа для *гармонического осциллятора* — одномерной механической системы с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \tag{9.28}$$

где m, k – положительные постоянные.

Решение. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx.$$

Тогда при $n = 1$ система уравнений (9.27) примет вид

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Общее решение этого уравнения хорошо известно:

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$, а C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 9.3. Записать уравнение Эйлера–Лагранжа для нерелятивистской классической частицы во внешнем потенциальном поле $U(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Решение. Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - U(\vec{x}, t), \tag{9.29}$$

где m — масса частицы.

Найдем частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}}.$$

Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$m\ddot{\vec{x}} = -\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \tag{9.30}$$

и совпадут с уравнениями Ньютона.

◊ Далее мы будем использовать обозначение

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

для евклидова скалярного произведения векторов в отличие от эрмитова скалярного произведения

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_k.$$

Пример 9.4. Записать уравнение движения для нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решение. Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + \frac{e}{c}\langle \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t), \dot{\vec{x}}\rangle - e\Phi(\vec{x}, t), \tag{9.31}$$

где $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$; e и m – заряд и масса частицы соответственно; c – скорость света в вакууме; $\Phi(\vec{x}, t)$ и $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$ – скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля.

Найдем частную производную

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = \frac{e}{c}\operatorname{grad}\langle \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t), \dot{\vec{x}}\rangle - e\operatorname{grad}\Phi(\vec{x}, t). \tag{9.32}$$

С учетом известной формулы векторного анализа

$$\operatorname{grad}\langle \vec{A}, \vec{B}\rangle = \langle \vec{A}, \nabla\rangle\vec{B} + \langle \vec{B}, \nabla\rangle\vec{A} + \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A} + \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B}, \tag{9.33}$$

где $\times$ обозначает векторное произведение векторов, из формулы (9.32) получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = \frac{e}{c}\langle \dot{\vec{x}}, \nabla\rangle\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{x}}\times\operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) - e\nabla\Phi(\vec{x}, t) \tag{9.34}$$

и для частных производных по переменным $\dot{\vec{x}}$ найдем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t).$$

Тогда

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{d}{dt}\Big[m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\Big] = \\ = m\ddot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \langle \dot{\vec{x}}, \nabla\rangle\frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t).\end{gathered} \tag{9.35}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = m\ddot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{e}{c}\dot{\vec{x}}\times\operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) + e\nabla\Phi(\vec{x}, t) = 0.$$

Обозначим через

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t), \quad \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi(\vec{x}, t)}{\partial\vec{x}} \tag{9.36}$$

напряженности магнитного и электрического поля соответственно. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа примут вид

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{x}}\times\vec{H}(\vec{x}, t). \tag{9.37}$$

Уравнения (9.37) называются (нерелятивистскими) уравнениями Лоренца, а выражение, стоящее в их правой части, – силой Лоренца.

Пример 9.5. Записать уравнение движения релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решение. Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\langle\dot{\vec{x}},\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)\rangle - e\Phi(\vec{x},t). \tag{9.38}$$

Производная $\partial\mathcal{L}/\partial\vec{x}$ определяется выражением (9.32), а

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} + \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t).$$

Тогда аналогично предыдущему примеру система Эйлера–Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} = e\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{e}{c}\dot{\vec{x}}\times\vec{H}(\vec{x},t). \tag{9.39}$$

Домножим это уравнение скалярно на $\dot{\vec{x}}$ и получим

$$m\Big\langle\dot{\vec{x}},\frac{d}{dt}\frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}\Big\rangle = m\frac{\langle\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}\rangle}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}\Big(1+\frac{\dot{\vec{x}}^2/c^2}{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}\Big) = e\langle\dot{\vec{x}},\vec{E}(\vec{x},t)\rangle$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} = e\langle\dot{\vec{x}},\vec{E}(\vec{x},t)\rangle. \tag{9.40}$$

Уравнения (9.39) описывают изменение импульса системы, а уравнения (9.40) — изменение ее кинетической энергии. Система уравнений (9.39), (9.40) называется системой уравнений Лоренца.

Пример 9.6. Разрешить систему уравнений Эйлера–Лагранжа (9.39) относительно старшей производной.

Решение. Продифференцируем левую часть системы (9.39) по t. Получим

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} = \frac{m\ddot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} + m\dot{\vec{x}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}.$$

С учетом (9.40) запишем

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\Big\{\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{1}{c}\dot{\vec{x}}\times\vec{H}(\vec{x},t) - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{x}}\langle\dot{\vec{x}},\vec{E}(\vec{x},t)\rangle\Big\}. \tag{9.41}$$

Нетрудно заметить, что в пределе $c\to\infty$ эта система переходит в систему (9.37).

Пример 9.7. Найти общее решение уравнений Лоренца (9.37) для частицы в постоянном и однородном электрическом поле.

Решение. В постоянном и однородном электрическом поле уравнения Лоренца (9.37) примут вид

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}, \tag{9.42}$$

где $\vec{E}$ — постоянный вектор. Проинтегрировав левую и правую части этого уравнения по t, найдем

$$\vec{x}(t) = \frac{e}{2m}\vec{E}t^2 + \dot{\vec{x}}_0 t + \vec{x}_0, \tag{9.43}$$

где $\vec{x}_0$ и $\dot{\vec{x}}_0$ – произвольные постоянные векторы.

Пример 9.8. Найти общее решение уравнений Лоренца (9.37) для частицы в постоянном и однородном магнитном поле.

Решение. В постоянном и однородном магнитном поле уравнения Лоренца (9.37) примут вид

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{mc}\dot{\vec{x}} \times \vec{H}, \tag{9.44}$$

где $\vec{H}$ — постоянный вектор. Обозначим

$$\begin{aligned}
&\vec{n} = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta),\\
&\vec{e}_\theta = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta),\\
&\vec{e}_\varphi = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0).
\end{aligned} \tag{9.45}$$

Здесь θ и φ — углы сферической системы координат, задающие направление вектора $\vec{H}$. Векторы (9.45) есть единичные ортогональные векторы, удовлетворяющие условиям

$$\vec{n} \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\theta, \qquad \vec{n} \times \vec{e}_\theta = -\vec{e}_\varphi. \tag{9.46}$$

Решение системы (9.44) будем искать в виде

$$\vec{x}(t) = \vec{n}u(t) + \vec{e}_\theta v(t) + \vec{e}_\varphi w(t). \tag{9.47}$$

Подставив (9.47) в (9.44), с учетом (9.45) запишем

$$\vec{n}\ddot{u} + \vec{e}_\theta\ddot{v} + \vec{e}_\varphi\ddot{w} = \frac{eH}{mc}\{\vec{e}_\varphi\dot{v} - \vec{e}_\theta\dot{w}\}, \quad H = |\vec{H}|.$$

В результате для определения функций $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ получим следующую систему уравнений:

$$\ddot{u} = 0, \qquad \ddot{v} = -\omega_0\dot{w}, \qquad \ddot{w} = \omega_0\dot{v}, \tag{9.48}$$

где $\omega_0 = eH/(mc)$ – циклотронная частота. Из (9.48) найдем

$$u(t) = u_0 t + \dot{u}_0, \tag{9.49}$$

где u_0 и $\dot{u}_0$ – произвольные постоянные. Обозначим

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (9.48) можно представить в виде

$$\ddot{\vec{q}} = -i\omega_0\sigma_2\dot{\vec{q}}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.50}$$

где σ_2 – матрица Паули. Тогда

$$\vec{q}(t) = \frac{i}{\omega_0}\sigma_2 \exp\{-i\omega_0\sigma_2 t\}\dot{\vec{q}}_0 + \frac{i}{\omega_0}\sigma_2\vec{q}_0 - \dot{\vec{q}}_0. \tag{9.51}$$

Здесь

$$\dot{\vec{q}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{w}_0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

— постоянные векторы. С учетом соотношения $\sigma_2^2 = \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ – единичная матрица соответствующей размерности, получим

$$\begin{gathered}
\exp\{-i\omega_0\sigma_2 t\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i\omega_0\sigma_2 t)^n = \\
= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}i^{2k}\sigma_2^{2k}(\omega_0 t)^{2k} - i\sigma_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}i^{2k}\sigma_2^{2k}(\omega_0 t)^{2k+1} = \\
= \mathbb{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\omega_0 t)^{2k} + i\sigma_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\omega_0 t)^{2k+1} = \\
= \mathbb{I}\cos\omega_0 t - i\sigma_2\sin\omega_0 t = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t & -\sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t \end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{\dot{w}_0}{\omega_0}\cos\omega_0 t + \frac{\dot{v}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + v_0 - \frac{\dot{v}_0}{\omega_0}, \\
w(t) &= \frac{\dot{w}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{\dot{v}_0}{\omega_0}\cos\omega_0 t + w_0 + \frac{\dot{v}_0}{\omega_0}.
\end{aligned} \tag{9.52}$$

Пример 9.9. Найти общее решение уравнений Лоренца (9.41) для частицы в постоянном и однородном магнитном поле.

Решение. В постоянном и однородном магнитном поле уравнения Лоренца (9.41) примут вид

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{mc}\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\,\dot{\vec{x}} \times \vec{H}. \tag{9.53}$$

Домножим левую и правую части уравнения (9.53) скалярно на $\dot{\vec{x}}$ и получим

$$\langle\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}\rangle = 0.$$

Следовательно, $\dot{\vec{x}}^2 = \mathrm{const}$. Обозначим

$$\omega_0 = \frac{ecH}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}, \qquad H = |\vec{H}|.$$

Тогда система (9.53) примет вид

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\omega_0}{H}\dot{\vec{x}} \times \vec{H} \tag{9.54}$$

и с точностью до обозначений совпадет с нерелятивистской системой (9.44), решение которой дается соотношениями (9.47), (9.49), (9.52).

◊ Свойство кривой быть экстремалью функционала не зависит от выбора системы координат.

◊ Каждая механическая система с n степенями свободы характеризуется определенной функцией координат и скоростей

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t),$$

которая называется функцией Лагранжа, или лагранжианом, а функционал

$$S = S[\vec{q}(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)dt, \tag{9.55}$$

определенный на траектории $\vec{q} = \vec{q}(t)$, — действием системы.

Принцип Гамильтона (принцип наименьшего действия). *Движения механической системы на промежутке времени от t_0 до t_1 совпадают с экстремалями функционала*

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)dt.$$

Теорема 9.2. *Пусть $\vec{q} \in E \subset \mathbb{R}^n_q$ – обобщенные координаты механической системы с n степенями свободы. Тогда функции $\vec{q}$, определяющие движение механической системы, являются решениями уравнения Эйлера–Лагранжа* (9.27)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad k = \overline{1, n}.$$

Доказательство непосредственно следует из определения экстремали и теоремы 3.1.

◊ Для системы N материальных точек с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{m\dot{\vec{q}}^2}{2} - V(\vec{q}), \qquad \vec{q} = (q_1, \dots, q_{3N}),$$

где $V(\vec{q})$ — потенциальная энергия, уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$m\ddot{\vec{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{q}}$$

и, следовательно, совпадают с уравнениями Ньютона.

По аналогии с рассмотренным примером величины $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$, $j = \overline{1, n}$, называют обобщенными импульсами и обозначают

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j},$$

а величины $\partial\mathcal{L}/\partial q_j = F_j$ — обобщенными силами.

♦ Переменные $z = (\vec{q}, \vec{p})$ называют *каноническими*, а величины q_j и p_j — *сопряженными друг другу*. $2n$-мерное пространство $\mathbb{R}^{2n}_z = \mathbb{R}^n_q \times \mathbb{R}^n_p$ называют *фазовым*.

◊ Обозначим

$$\frac{\dot{\vec{x}}}{c} = \vec{\beta}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta^2 = \vec{\beta}^{\,2}. \tag{9.56}$$

Тогда уравнения Лоренца (9.39)–(9.41) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}m\gamma\vec{\beta} = \frac{e}{c}\big[\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{\beta}\times\vec{H}(\vec{x},t)\big]; \tag{9.57}$$

$$\frac{d}{dt}m\gamma = \frac{e}{c}\langle\vec{\beta}, \vec{E}(\vec{x},t)\rangle; \tag{9.58}$$

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{e}{mc\gamma}\big[\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{\beta}\times\vec{H}(\vec{x},t)\big] - \vec{\beta}\langle\vec{\beta}, \vec{E}(\vec{x},t)\rangle. \tag{9.59}$$

◊ Зачастую удобно использовать обозначения, отражающие ковариантные свойства векторных, тензорных и других объектов. Будем считать, что индексы, заданные греческими буквами, пробегают значения от нуля до трех.

♦ *Тензором* (или *символом*) *Леви–Чивиты* называется антисимметричный тензор $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, равный 1 или −1 в зависимости от того, является $\mu\nu\rho\sigma$ четной или нечетной перестановкой чисел $(0,1,2,3)$, и нулю во всех остальных случаях. Отметим, что $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Символ Леви–Чивиты используется для преобразования антисимметричного тензора в дуальный. Например,

$$\begin{gathered}\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = (-\vec{H}; -\vec{E}) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -E_z & E_y \\ -H_y & E_z & 0 & -E_x \\ -H_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{9.60}$$

где

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} = (\vec{E}; \vec{H}). \tag{9.61}$$

Обратное соотношение, связывающее тензор электромагнитного поля с дуальным, имеет вид

$$F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\widetilde{F}_{\rho\sigma}.$$

♦ Тензоры $F^{\mu\nu}$ и $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ называются *тензором* и дуальным тензором электромагнитного поля соответственно.

Пример 9.10. Систему уравнений Лоренца (9.39) записать в ковариантной форме.

Решение. Обозначим через τ собственное время частицы, связанное с лабораторным соотношением

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^{\,2}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma. \tag{9.62}$$

Тогда, обозначив

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = c\gamma(1, \vec{\beta}) = (u^0, \vec{u}),$$

соотношения (9.57), (9.58) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{du^0}{d\tau} = \frac{e}{mc}\langle \vec{e}(\vec{x}, t), \vec{u}\rangle;\\
&\frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{e}{mc}\Big[\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c\gamma}\vec{u} \times \vec{H}(\vec{x}, t)\Big],
\end{aligned}$$

откуда с учетом (9.61) окончательно получим

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc}F^{\mu\nu}(x)u_\nu, \quad x = (x^0, \vec{x}), \tag{9.63}$$

где $x^0 = ct$.

Использование ковариантных обозначений иногда позволяет значительно упростить рассматриваемую задачу.

Пример 9.11. Найти решение уравнения Лоренца в постоянном и однородном электромагнитном поле.

Решение. а) В постоянном и однородном электромагнитном поле тензор $F^{\mu\nu}$ не зависит от x. Следовательно, уравнение (9.63) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, и его решение можно представить в виде

$$u^\mu(\tau) = \Big(\exp\frac{e\tau}{mc}F\Big)^\mu_{\ \nu} u^\nu(0).$$

б) Проинтегрировав левые и правые части (9.57) и (9.58) по t, получим

$$\begin{aligned}
&m[\gamma(t)\vec{\beta}(t) - \gamma(0)\vec{\beta}(0)] = \frac{e}{c}\Big[t\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{x} \times \vec{H}\Big];\\
&m[\gamma(t) - \gamma(0)] = \frac{e}{c^2}\langle \vec{x}, \vec{E}\rangle.
\end{aligned}$$

Пример 9.12. Линейно поляризованная плоская волна характеризуется изотропным направляющим вектором n^μ и вектором поляризации ε^μ, причем

$$n^\mu n_\mu = \varepsilon^\mu n_\mu = 0, \quad \varepsilon^\mu\varepsilon_\mu = -1. \tag{9.64}$$

Электромагнитный потенциал плоской волны зависит только от $\xi = n_\mu x^\mu$:

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \varepsilon^\mu f(\xi). \tag{9.65}$$

Найти решение уравнений Лоренца в поле плоской электромагнитной волны (9.65).

Решение. Из (9.64) следует, что $\partial_\mu\mathcal{A}^\mu(x) = 0$, а тензор электромагнитного поля можно записать в виде

$$F^{\mu\nu}(x) = (n^\mu\varepsilon^\nu - n^\nu\varepsilon^\mu)f'(\xi). \tag{9.66}$$

Выберем систему координат так, чтобы $x(0) = 0$. Тогда

$$\xi = n_\mu x^\mu = u^\mu(0) n_\mu \tau, \tag{9.67}$$

а в системе уравнений Лоренца

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu u^\nu \tag{9.68}$$

можно перейти от переменной τ к переменной ξ. С учетом (9.66), (9.67) запишем

$$\frac{du^\mu}{d\xi} = \frac{e}{mc} f'(\xi) \Big[n^\mu \frac{\varepsilon^\nu u_\nu}{n^\sigma u_\sigma(0)} - \varepsilon^\mu \Big]. \tag{9.69}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $u^\mu n_\mu = \mathrm{const}$ в силу $n_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Свернув левую и правую части последнего соотношения с ε_μ, после интегрирования получим

$$u^\mu(\xi)\varepsilon_\mu = u^\mu(0)\varepsilon_\mu + \frac{e}{mc}[f(\xi) - f(0)]. \tag{9.70}$$

Подставим (9.70) в (9.69):

$$\frac{du^\mu}{d\xi} = \frac{e}{mc} f'(\xi) \Big[n^\mu \frac{\varepsilon^n u u_\nu(0) + \frac{e}{mc}[f(\xi) - f(0)]}{n^\sigma u_\sigma(0)} - \varepsilon^\mu \Big]. \tag{9.71}$$

Проинтегрировав (9.71), найдем

$$\begin{aligned} u^\mu(\xi) = u^\mu(0) + \frac{e}{mc}[f(\xi) - f(0)] \Big[n^\mu \frac{\varepsilon^\nu u_\nu(0)}{n^\sigma u_\sigma(0)} - \varepsilon^\mu \Big] + \\ + \frac{e^2}{2m^2c^2}[f(\xi) - f(0)]^2 \frac{n^\mu}{n^\sigma u_\sigma(0)}. \end{aligned} \tag{9.72}$$

10. Канонические уравнения Гамильтона

♢ Во многих задачах теоретической и математической физики оказывается полезным гамильтонов формализм, основанный на описании механической системы в канонических переменных и уравнении Эйлера–Лагранжа в так называемой канонической форме.

Рассмотрим задачу о нахождении экстремалей функционала действия

$$S[\vec q] = \int\limits_a^b \mathcal{L}(\vec q, \dot{\vec q}, t) dt, \qquad \vec q \in \mathbb{R}^n_q. \tag{10.1}$$

Система уравнений Эйлера–Лагранжа для этого функционала имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j} = 0, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{10.2}$$

Эта система есть система n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно n неизвестных функций $\vec q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$.

Рассмотрим обобщенные импульсы этой системы

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}(\vec q, \dot{\vec q}, t)}{\partial \dot q_j}, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{10.3}$$

Будем предполагать, что систему уравнений (10.3) можно разрешить относительно обобщенных скоростей $\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t)$.

◊ Из теоремы о неявных функциях следует, что систему уравнений (10.3) можно разрешить относительно $\dot{\vec{q}}$ (по крайней мере, локально), если

$$\det\left\|\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right\| \neq 0. \tag{10.4}$$

♦ Функция, задаваемая равенством

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t) = \big[\langle\dot{\vec{q}}, \vec{p}\rangle - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\big]\Big|_{\dot{\vec{q}}=\dot{\vec{q}}(\vec{p},\vec{q},t)}, \tag{10.5}$$

называется *функцией Гамильтона*, отвечающей функции Лагранжа $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$. Переход от переменных $\dot{\vec{q}}, \vec{q}$ и функций $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ к переменным $\vec{p}, \vec{q}$ и функции $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ по правилу (10.3) и (10.5) называется *преобразованием Лежандра*.

Теорема 10.1. *Система уравнений Эйлера–Лагранжа* (10.2) *эквивалентна системе* $2n$ *уравнений первого порядка*

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{q}}, \qquad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} \tag{10.6}$$

или в координатной форме

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j}, \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

где $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ *– функция Гамильтона* (10.5). *Система* (10.6) *называется системой Гамильтона, или канонической формой системы уравнений Эйлера–Лагранжа.*

Доказательство. Найдем полный дифференциал функции Гамильтона. По определению,

$$d\mathcal{H} = \Big\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}}, d\vec{p}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{q}}, d\vec{q}\Big\rangle + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}dt. \tag{10.7}$$

С другой стороны, из соотношения (10.5) следует

$$d\mathcal{H} = \Big\langle\Big(\vec{p} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{q}}}\Big), d\dot{\vec{q}}\Big\rangle + \langle\dot{\vec{q}}, d\vec{p}\rangle - \Big\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{q}}, d\vec{q}\Big\rangle - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt. \tag{10.8}$$

Считая, что канонические переменные $\vec{p}, \vec{q}$ и t независимы и что $\vec{p} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\vec{q}}$, получим

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} = \dot{\vec{q}}, \qquad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{q}} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{q}} = -\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{q}}}\Big) = -\dot{\vec{p}}, \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}.$$

Здесь мы воспользовались уравнениями Лагранжа (10.2). Последние уравнения эквивалентны системе уравнений Гамильтона (10.6).

Таким образом, если $\vec{q}(t)$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа, то $z(t) = (\vec{p}(t), \vec{q}(t))$ удовлетворяет системе уравнений Гамильтона. Доказательство обратного утверждения аналогично. Системы Лагранжа и Гамильтона эквивалентны, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Отметим, что для двумерного вектора $z = (\vec{p}, \vec{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$ система Гамильтона (10.6) примет вид

$$\dot{z} = J\mathcal{H}_z(z, t), \tag{10.9}$$

где J – единичная симплектическая матрица

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_{n\times n} \\ \mathbb{I}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 10.1. Найти функцию Гамильтона гармонического осциллятора (см. пример 9.2).

Решение. Найдем обобщенный импульс

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Следовательно, $\dot{x} = p/m$. Тогда функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}(p, x, t) = [p\dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)]\Big|_{\dot{x}=p/m}.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \qquad k > 0, \quad m > 0. \tag{10.10}$$

Пример 10.2. Найти функцию Гамильтона классической системы с функцией Лагранжа (9.29)

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - U(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^4. \tag{10.11}$$

Решение. По определению

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \big\{\langle \vec{p}, \dot{\vec{x}}\rangle - \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)\big\}\Big|_{\dot{\vec{x}}=\dot{\vec{x}}(\vec{x},\vec{p},t)},$$

где $\dot{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{p}, t)$ неявно определяется уравнением

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} = \vec{p}.$$

Следовательно, $\dot{\vec{x}} = \vec{p}/m$. Окончательно получим

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{x}, t). \tag{10.12}$$

Пример 10.3. Найти функцию Гамильтона нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решение. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + \frac{e}{c}\langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle + e\Phi(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{10.13}$$

Обобщенный импульс системы определяется соотношением

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t).$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\Big[\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\Big] = \frac{1}{m}\vec{\mathcal{P}}, \tag{10.14}$$

где $\vec{\mathcal{P}}$ — кинетический импульс системы. Тогда

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \Big\{\langle \vec{p}, \dot{\vec{x}}\rangle - \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + \frac{e}{c}\langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle + e\Phi(\vec{x}, t)\Big\}\Big|_{\dot{\vec{x}}=\vec{\mathcal{P}}/m}.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{\mathcal{P}}^2}{2m} + e\Phi(\vec{x}, t), \qquad \vec{\mathcal{P}} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t). \tag{10.15}$$

Пример 10.4. Найти функцию Гамильтона релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решение. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle - e\Phi(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{10.16}$$

Найдем обобщенный импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} + \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t). \tag{10.17}$$

Тогда

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \{\langle \vec{p}, \dot{\vec{x}}\rangle - \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)\}\big|_{\dot{\vec{x}}=\dot{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x}, t)}, \tag{10.18}$$

где $\dot{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ неявно определяется соотношением (10.17). Подставив (10.16) и (10.17) в (10.18), получим

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} + e\Phi(\vec{x}, t). \tag{10.19}$$

Заметим, что

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = c\sqrt{\frac{m^2\dot{\vec{x}}^2}{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} + m^2c^2}. \tag{10.20}$$

Из соотношения (10.17) найдем

$$\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = \vec{\mathcal{P}} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t). \tag{10.21}$$

С учетом (10.20) и (10.21) из (10.19) найдем

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = c\sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2 + m^2c^2} + e\Phi(\vec{x}, t). \tag{10.22}$$

Пример 10.5. Найти решение системы Гамильтона для гармонического осциллятора с функцией Гамильтона (10.10), удовлетворяющее начальному условию $x\big|_{t=0} = x_0$, $p\big|_{t=0} = p_0$.

Решение. Система Гамильтона, отвечающая гамильтониану (10.10), имеет вид

$$\dot{x} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -kx.$$

Найдем

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}\dot{p} = -\frac{k}{m}x$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{10.23}$$

Уравнение (10.23) – линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Следовательно,

$$\begin{aligned}&X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t,\\ &P(t) = m\dot{x} = -m\omega A\sin\omega t + m\omega B\cos\omega t.\end{aligned}$$

Из начальных условий найдем

$$\begin{aligned}&X(t) = x_0\cos\omega t + \frac{p_0}{\omega}\sin\omega t,\\ &P(t) = mp_0\cos\omega t - m\omega x_0\sin\omega t.\end{aligned} \tag{10.24}$$

Пример 10.6. Записать уравнения Гамильтона для нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решение. Функция Гамильтона системы имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x},t) = \frac{\vec{\mathcal{P}}^2}{2m} + e\Phi(\vec{x},t), \qquad \vec{\mathcal{P}} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t). \tag{10.25}$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{m}, \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{x}} = \frac{1}{2m}\nabla\vec{\mathcal{P}}^2 + e\nabla\Phi = -\frac{e}{c}\nabla\langle\dot{\vec{x}},\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)\rangle + e\nabla\Phi(\vec{x},t).$$

Окончательно получим

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{m}, \qquad \dot{\vec{p}} = \frac{e}{c}\nabla\langle\dot{\vec{x}},\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)\rangle - e\nabla\Phi(\vec{x},t). \tag{10.26}$$

Пример 10.7. Найти решение системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x}) = \frac{1}{2m}\Big(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\Big)^2, \quad \vec{A} = \Big(\frac{Hx_2}{2}, -\frac{Hx_1}{2}\Big), \quad H = \text{const} \tag{10.27}$$

при начальном условии $\vec{x}\big|_{t=0} = \vec{x}_0$, $\vec{p}\big|_{t=0} = \vec{p}_0$.

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} = \frac{1}{m}\Big(p_1 - \frac{eH}{2c}x_2, p_2 + \frac{eH}{2c}x_1\Big);$$
$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{x}} = \frac{\omega}{2}\Big(p_2 + \frac{eH}{2c}x_1, -p_1 + \frac{eH}{2c}x_2\Big), \quad \omega = \frac{eH}{mc}.$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\vec{p} - i\sigma_2\frac{\omega}{2}\vec{x};$$
$$\dot{\vec{p}} = -i\sigma_2\frac{\omega}{2}\vec{p} - \frac{\omega}{2}\frac{eH}{2c}\vec{x}.$$

Исключив из системы уравнений переменные $\vec{p}$, получим

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + \frac{im\omega}{2}\sigma_2\vec{x};$$
$$m\ddot{\vec{x}} + \frac{im\omega}{2}\sigma_2\dot{\vec{x}} = -i\sigma_2\frac{\omega}{2}\Big(m\dot{\vec{x}} + \frac{im\omega}{2}\sigma_2\vec{x}\Big) - \frac{\omega}{2}\frac{eH}{2c}\vec{x}.$$

Таким образом, для определения вектора $\vec{x}$ получим уравнение

$$\ddot{\vec{x}} + i\omega\sigma_2\dot{\vec{x}} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\vec{X}(t) = -\frac{i}{\omega}\big(e^{-i\omega\sigma_2 t} - 1\big)\dot{\vec{x}}_0 + \vec{x}_0.$$

Окончательно запишем

$$\begin{aligned}\vec{X}(t, z_0) &= \frac{1}{2}\big[1 + e^{-i\omega\sigma_2 t}\big]\vec{x}_0 - \frac{i}{2}\frac{\sigma_2}{m\omega}\big[1 - e^{-i\omega\sigma_2 t}\big]\vec{p}_0,\\ \vec{P}(t, z_0) &= \frac{1}{2}\big[1 + e^{-i\omega\sigma_2 t}\big]\vec{p}_0 - \sigma_2\frac{im\omega}{4}\big[1 - e^{-i\omega\sigma_2 t}\big]\vec{x}_0.\end{aligned} \tag{10.28}$$

Пример 10.8. Записать уравнения Гамильтона для релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решение. Функция Гамильтона системы имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = c\sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2 + m^2c^2} + e\Phi(\vec{x}, t). \tag{10.29}$$

Аналогично примеру 10.6 получим

$$\dot{\vec{x}} = \frac{c^2}{\varepsilon}\vec{\mathcal{P}}, \qquad \dot{\vec{p}} = \frac{e}{c}\nabla\langle\dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle - e\nabla\Phi(\vec{x}, t), \tag{10.30}$$

где обозначено

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t) = \sqrt{c^2\vec{\mathcal{P}}^2 + m^2c^4}. \tag{10.31}$$

Пример 10.9. Показать, что система уравнений Гамильтона (10.30) эквивалентна системе уравнений Лоренца (9.39).

Решение. Функция Гамильтона системы имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x},t)=\frac{\vec{\mathcal{P}}^2}{2m}+e\Phi(\vec{x},t),\qquad \vec{\mathcal{P}}=\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t). \tag{10.32}$$

Заметим, что с учетом (10.20) и (10.21)

$$\varepsilon=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}.$$

Тогда из первого уравнения системы (10.30) следует

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}=\dot{\vec{p}}-\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)=$$

$$=\frac{e}{c}\nabla\langle\dot{\vec{x}},\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)\rangle-e\nabla\Phi(\vec{x},t)-\frac{e}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)}{\partial t}-\frac{e}{c}\langle\dot{\vec{x}},\nabla\rangle\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)=$$

$$=\frac{e}{c}\dot{\vec{x}}\times\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{x},t)-e\nabla\Phi(\vec{x},t)-\frac{e}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}(\vec{x},t)}{\partial t}.$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (10.30) и (9.33). С учетом формул (9.36) окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}=e\vec{E}(\vec{x},t)+\frac{e}{c}\dot{\vec{x}}\times\vec{H}(\vec{x},t),$$

что и требовалось показать.

Пример 10.10. Найти решение системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x},t)=\frac{\vec{p}^2}{2m}-e\langle\vec{E},\vec{x}\rangle,\qquad \vec{x}\in\mathbb{R}^3, \tag{10.33}$$

удовлетворяющее условию $\vec{x}\big|_{t=0}=\vec{x}_0$, $\vec{p}\big|_{t=0}=\vec{p}_0$. Здесь $\vec{E}$ – постоянный вектор; e и m – заряд и масса частицы соответственно.

Решение. Система Гамильтона имеет вид

$$\dot{\vec{x}}=\frac{\vec{p}}{m},\qquad \dot{\vec{p}}=e\vec{E} \tag{10.34}$$

и описывает движение заряженной частицы в постоянном и однородном электромагнитном поле. Исключив переменную $\vec{p}=m\dot{\vec{x}}$, получим систему

$$\ddot{\vec{x}}=\frac{e}{m}\vec{E},$$

решение которой имеет вид

$$\vec{x}(t)=\frac{e}{2m}\vec{E}t^2+\dot{\vec{x}}_0+\vec{x}_0.$$

Тогда

$$\vec{p}(t)=e\vec{E}t+m\dot{\vec{x}}_0.$$

Пример 10.11. Найти общее решение системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x},t)=\varepsilon(\vec{p},\vec{x},t)=\sqrt{c^2\vec{\mathcal{P}}^2+m^2c^4},\quad \vec{\mathcal{P}}=\vec{p}-\frac{e}{2c}\vec{H}\times\vec{x}, \tag{10.35}$$

где $\vec{H}$ — постоянный вектор; e и m — заряд и масса частицы соответственно; c — скорость света.

Решение. Система Гамильтона имеет вид

$$\dot{\vec{x}}=\frac{c^2}{\varepsilon}\vec{\mathcal{P}},\qquad \dot{\vec{p}}=\frac{e}{2c}\nabla\langle\dot{\vec{x}},\vec{H}\times\vec{x}\rangle=\frac{e}{2c}\dot{\vec{x}}\times\vec{H}. \tag{10.36}$$

Поскольку гамильтониан (10.35) не зависит от времени, $\varepsilon=\mathrm{const}$. Следовательно,

$$\ddot{\vec{x}}=\frac{c^2}{\varepsilon}\Big(\dot{\vec{p}}-\frac{e}{2c}\vec{H}\times\dot{\vec{x}}\Big).$$

С учетом второго уравнения из (10.36) получим

$$\ddot{\vec{x}}=\frac{ec}{\varepsilon}\dot{\vec{x}}\times\vec{H}. \tag{10.37}$$

Уравнение (10.37) — уравнение Лоренца для частицы в постоянном и однородном магнитном поле, решение которого дано в примере 9.9.

Переформулируем принцип Гамильтона для описания механической системы в канонических переменных. Соответствующий функционал действия примет вид

$$S[\vec{p}(t),\vec{q}(t)]=S[z(t)]=\int\limits_{t_1}^{t_2}\{\langle\vec{p}(t),\dot{\vec{q}}(t)\rangle-\mathcal{H}(\vec{p}(t),\vec{q}(t),t)\}dt, \tag{10.38}$$

где $\dot{\vec{q}}(t)$ определяется уравнением

$$p_j=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}},\qquad j=\overline{1,n}. \tag{10.39}$$

Функционал (10.38) определен на функциях $z(t)=(\vec{p}(t),\vec{q}(t))$ в $2n$-мерном фазовом пространстве.

Теорема 10.2. *Экстремали функционала* (10.38), (10.39) *являются решениями системы Гамильтона* (10.6).

Доказательство. Пусть $\vec{q}$ и $\vec{p}$ – независимые переменные. Тогда, варьируя функционал

$$\delta S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big\{\langle\vec{p},\delta\dot{\vec{q}}\rangle+\langle\dot{\vec{q}},\delta\vec{p}\rangle-\Big\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{q}},\delta\vec{q}\Big\rangle-\Big\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}},\delta\vec{p}\Big\rangle\Big\}dt$$

при условии $\delta q|_{t_1}^{t_2}=\delta p|_{t_1}^{t_2}=0$ и учитывая, что

$$\delta\dot{q}_j=\frac{\partial}{\partial t}\delta q_j,$$

найдем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} p_j\delta\dot{q}_j dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} p_j\frac{d}{dt}\delta q_j dt = p_j\delta q_j\Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\dot{p}_j\delta q_j dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\langle\vec{p}_j,\delta\dot{\vec{q}}_j\rangle dt = \langle\vec{p}_j,\delta\vec{q}_j\rangle - \int\limits_{t_1}^{t_2}\langle\dot{\vec{p}}_j,\delta\vec{q}_j\rangle dt.$$

Тогда

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big\{\Big\langle\Big(\dot{\vec{q}} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}}\Big),\delta\vec{p}\Big\rangle - \Big\langle\Big(\dot{\vec{p}} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{q}}\Big),\delta\vec{q}\Big\rangle\Big\}dt.$$

Следовательно, условие $\delta S = 0$ эквивалентно равенствам

$$\dot{\vec{q}} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\vec{p}} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{q}} = 0,$$

что и доказывает теорему.

11. Первые интегралы системы Гамильтона. Скобки Пуассона

♦ Функция $A(\vec{p},\vec{q},t)$ называется *первым интегралом движения системы Гамильтона* (10.6), если она постоянна на любых решениях системы Гамильтона $\vec{p}(t)$, $\vec{q}(t)$, т.е.

$$A(t) = A(\vec{p}(t),\vec{q}(t),t) = A(\vec{p}(t_0),\vec{q}(t_0),t_0). \tag{11.1}$$

♦ *Скобкой Пуассона* функций $A(\vec{p},\vec{q},t)$, $B(\vec{p},\vec{q},t)$ называется выражение

$$\{A,B\} = \{A(\vec{p},\vec{q},t),B(\vec{p},\vec{q},t)\} = \\ = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\Big) = \Big\langle\frac{\partial A}{\partial\vec{q}},\frac{\partial B}{\partial\vec{p}}\Big\rangle - \Big\langle\frac{\partial A}{\partial\vec{p}},\frac{\partial B}{\partial\vec{q}}\Big\rangle. \tag{11.2}$$

◊ Иногда определение скобки Пуассона отличается от приведенного знаком. Из определения вытекают следующие свойства скобки Пуассона:

$$\{A,B\} = -\{B,A\}; \tag{11.3}$$
$$\{A,A,\} = 0; \tag{11.4}$$
$$\{\alpha A,B\} = \{A,\alpha B\} = \alpha\{A,B\}, \quad \alpha = \text{const}; \tag{11.5}$$
$$\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0; \tag{11.6}$$
$$\{A,B+C\} = \{A,B\} + \{A,C\}; \tag{11.7}$$
$$\{AB,C\} = A\{B,C\} + B\{A,C\}. \tag{11.8}$$

Соотношение (11.6) называется тождеством Якоби.

Теорема 11.1. *Функция $A = A(\vec{p},\vec{q},t)$ является первым интегралом движения системы Гамильтона тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial A(\vec{p},\vec{q},t)}{\partial t} + \{A(\vec{p},\vec{q},t),\mathcal{H}(\vec{p},\vec{q},t)\} = 0, \tag{11.9}$$

где $\mathcal{H}(\vec{p},\vec{q},t)$ – функция Гамильтона рассматриваемой системы.

Доказательство. Рассмотрим функцию $A(t) = A(\vec{p}(t), \vec{q}(t), t)$ на траекториях системы Гамильтона (10.6) и вычислим производную

$$\frac{dA(t)}{dt} = \Big[\Big\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{p}}, \dot{\vec{p}} \Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{q}}, \dot{\vec{q}} \Big\rangle + \frac{\partial A}{\partial t}\Big]\Big|_{\substack{\vec{p}=\vec{p}(t)\\ \vec{q}=\vec{q}(t)}} =$$

$$= \Big[\Big\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{p}}, \Big(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}\Big) \Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{q}}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \Big\rangle + \frac{\partial A}{\partial t}\Big]\Big|_{\substack{\vec{p}=\vec{p}(t)\\ \vec{q}=\vec{q}(t)}} = \Big[\frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}\}\Big]\Big|_{\substack{\vec{p}=\vec{p}(t)\\ \vec{q}=\vec{q}(t)}}.$$

Тогда если $A(t) = \mathrm{const}$, т.е. $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$ – интеграл движения, то $dA/dt = 0$ на фазовых траекториях $z(t) = (\vec{p}(t), \vec{q}(t))$. Поскольку через каждую точку фазового пространства проходит только одна траектория, то справедливо (11.9). Наоборот, если справедливо уравнение (11.9), то в силу предыдущих выкладок $dA/dt = 0$, а, следовательно, $A(t) = \mathrm{const}$ и $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$ – интеграл движения. Таким образом, теорема доказана.

♢ Соотношение (11.9) есть уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$ при заданной функции $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)$. Методы интегрирования таких уравнений рассмотрены в разд. «Уравнения Гамильтона – Якоби».

♢ Уравнение Гамильтона (10.6) с помощью скобок Пуассона можно записать в виде

$$\dot{\vec{p}} = \{\vec{p}, \mathcal{H}\}, \qquad \dot{\vec{q}} = \{\vec{q}, \mathcal{H}\}. \tag{11.10}$$

Теорема 11.2 (Пуассона). *Если функции $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$ и $B(\vec{p}, \vec{q}, t)$ являются интегралами движения, то функция $C(\vec{p}, \vec{q}, t) = \{A(\vec{p}, \vec{q}, t),\ B(\vec{p}, \vec{q}, t)\}$ также является интегралом движения.*

Доказательство. Пусть

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}\} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \{B, \mathcal{H}\} = 0.$$

Тогда

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \{C, \mathcal{H}\},$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\{A, B\} = \Big\{\frac{\partial A}{\partial t}, B\Big\} + \Big\{A, \frac{\partial B}{\partial t}\Big\},$$

$$\{C, \mathcal{H}\} = \{\{A, B\}, \mathcal{H}\} = -\{\mathcal{H}, \{A, B\}\} = \{A, \{B, \mathcal{H}\}\} - \{B, \{A, \mathcal{H}\}\}.$$

Здесь мы воспользовались тождеством Якоби

$$\{\mathcal{H}, \{A, B\}\} + \{A, \{B, \mathcal{H}\}\} + \{B, \{A, \mathcal{H}\}\} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \{C, \mathcal{H}\} = \Big\{\frac{\partial A}{\partial t}, B\Big\} + \Big\{A, \frac{\partial B}{\partial t}\Big\} + \{A, \{B, \mathcal{H}\}\} - \{B, \{A, \mathcal{H}\}\} =$$

$$= \Big\{A, \Big(\frac{\partial B}{\partial t} + \{B, \mathcal{H}\}\Big)\Big\} + \Big\{\Big(\frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}\}\Big), B\Big\} = 0.$$

В силу теоремы 11.1 $C(\vec{p}, \vec{q}, t) = \mathrm{const}$ на любых траекториях системы Гамильтона, что и требовалось доказать.

♦ *Фундаментальными*, или *каноническими*, *скобками Пуассона* называются скобки Пуассона канонических переменных

$$\{q_l, q_j\} = 0, \quad \{p_l, p_j\} = 0, \quad \{q_l, p_j\} = \delta_{l,j}, \quad l, j = \overline{1, n}.$$

12. Канонические преобразования

♦ Преобразование координат фазового пространства $z = (\vec{p}, \vec{q})$ к координатам $\omega = (\vec{P}, \vec{Q})$ называется *каноническим*, если для любых функций $A(z,t)$ и $B(z,t)$ сохраняются их скобки Пуассона, т.е. справедливо равенство

$$\{A, B\}_z = \{\tilde{A}, \tilde{B}\}_\omega, \tag{12.1}$$

где $\tilde{A}(\omega, t) = A(z,t)|_{z=z(\omega)}$.

♢ Там, где это не приводит к недоразумениям, будем писать $A(\vec{P}, \vec{Q}, t)$ вместо $\tilde{A}(\vec{P}, \vec{Q}, t)$.

♦ $2n \times 2n$ матрица S называется *симплектической*, если справедливо соотношение

$$S^\intercal J S = J, \tag{12.2}$$

где J – единичная симплектическая матрица.

Теорема 12.1. *Преобразование координат фазового пространства $z \to \omega = \omega(z,t)$ будет каноническим тогда и только тогда, когда матрица Якоби $\partial\omega/\partial z$ этого преобразования*

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \Big\| \frac{\partial\omega_b}{\partial z_b} \Big\|_{2n\times 2n} = \Big(\frac{\partial\omega}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial\omega}{\partial z_{2n}} \Big) \tag{12.3}$$

будет симплектической.

Доказательство. Скобку Пуассона двух функций $A(z,t)$ и $B(z,t)$ с помощью матрицы J можно представить в виде

$$\{A, B\}_z = \Big\langle \frac{\partial A}{\partial z}, J\frac{\partial B}{\partial z} \Big\rangle. \tag{12.4}$$

При преобразовании фазового пространства $\omega = \omega(z)$ частные производные и дифференциалы преобразуются по правилу

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\omega}. \tag{12.5}$$

Следовательно,

$$\{A, B\}_z = \Big\langle \frac{\partial A}{\partial z}, J\frac{\partial B}{\partial z} \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial A}{\partial\omega}, J\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial\omega} \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial A}{\partial\omega}, \Big(\frac{\partial\omega}{\partial z}\Big)^\intercal J\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial\omega} \Big\rangle. \tag{12.6}$$

С другой стороны,

$$\{A, B\}_\omega = \Big\langle \frac{\partial A}{\partial\omega}, J\frac{\partial B}{\partial\omega} \Big\rangle. \tag{12.7}$$

Таким образом, если преобразование $\omega = \omega(z)$ каноническое, т.е. выполняется соотношение (12.1), то необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Big(\frac{\partial\omega}{\partial z}\Big)^\intercal J\frac{\partial\omega}{\partial z} = J, \tag{12.8}$$

т.е. чтобы матрица $\frac{\partial\omega}{\partial z}$ была симплектической. Наоборот, если матрица $\frac{\partial\omega}{\partial z}$ симплектическая (справедлива формула (12.8)), то из (12.6) и (12.7) следует, что

$$\{A, B\}_z = \{A, B\}_\omega,$$

т.е. преобразование $\omega = \omega(z)$ будет каноническим. Таким образом, теорема доказана.

Следствие 12.1.1. Пусть $\omega = \omega(z)$ – каноническое преобразование фазового пространства и пусть вектор $z = z(t)$ – решение системы Гамильтона

$$\dot{z} = J\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}.$$

Тогда вектор $\omega = \omega(z(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\omega} = J\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial\omega},$$

где $\tilde{\mathcal{H}}(\omega, t) = \mathcal{H}(z, t)\big|_{z=z(\omega)}$.

Доказательство. Найдем полную производную функции

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\omega(z(t)) = \Big(\frac{\partial\omega}{\partial z}\Big)^{\intercal}\dot{z} = \Big(\frac{\partial\omega}{\partial z}\Big)^{\intercal}J\mathcal{H}_z = \Big(\frac{\partial\omega}{\partial z}\Big)^{\intercal}J\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial\omega} = J\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial\omega},$$

что и требовалось доказать.

♦ *Оператором сдвига* вдоль траекторий системы Гамильтона (10.6) за время $t - t_0$ называется преобразование фазового пространства

$$\hat{g}(t, t_0) : z_0 \to z = Z(t, z_0, t_0),$$

где $Z(t, z_0, t_0)$ — решение задачи Коши для системы Гамильтона

$$\dot{z} = J\partial_z\mathcal{H}(z, t), \qquad z\big|_{t=t_0} = z_0. \tag{12.9}$$

Следствие 12.1.2. Преобразование фазового пространства

$$\hat{g}(t, t_0)A(z_0, t_0) = A(z(t), t), \tag{12.10}$$

задаваемое оператором сдвига $\hat{g}(t, t_0)$ по траекториям гамильтоновой системы, является каноническим.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно показать, что матрица $\partial Z(t, z_0, t_0)/\partial z_0$ симплектическая.

1. Очевидно, что матрица $\partial Z(t, z_0, t_0)/\partial z_0$ при $t = t_0$ симплектическая, так как $\partial Z(t_0, z_0, t_0)/\partial z_0 = \mathbb{I}_{2n\times 2n}$.

2. Пусть $z = Z(t, z_0, t_0)$ — решение задачи Коши (12.9). Тогда

$$\dot{Z}(t, z_0, t_0) = J\partial\mathcal{H}(Z(t, z_0, t_0), t)$$

для любого $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Продифференцируем это равенство по $z_{01}, \ldots, z_{02n}$. Тогда для определения матрицы

$$A(t) = A(t, z_0, t_0) = \frac{\partial Z(t, z_0, t_0)}{\partial z_0}$$

получим уравнение

$$\dot{A}(t) = J\mathcal{H}''_{zz}(Z(t, z_0, t_0), t)A(t), \qquad A(t_0) = \mathbb{I}_{2n\times 2n}. \tag{12.11}$$

3. Рассмотрим, как изменяется со временем матрица $M(t) = A^{\intercal}(t)JA(t)$. Найдем

$$\dot{M} = \dot{A}^{\intercal}JA + A^{\intercal}J\dot{A} = A^{\intercal}\mathcal{H}''_{zz}J^{\intercal}JA + A^{\intercal}JJ\mathcal{H}''_{zz}A = 0_{2n\times 2n}.$$

Следовательно, $M(t) = M(t_0) = \mathbb{I}\cdot J\cdot\mathbb{I} = J$. Таким образом, матрица $A(t) = \partial Z(t, z_0, t_0)/\partial z_0$ симплектическая, что и доказывает теорему.

Следствие 12.1.3. Преобразование фазового пространства, обратное каноническому, является каноническим.

Доказательство следует из того факта, что матрица, обратная симплектической, также является симплектической.

13. Теорема Лиувилля

Рассмотрим область G_0 фазового пространства с гладкой границей. Пусть z_0 — точка фазового пространства, принадлежащая области G_0. Из каждой точки $z_0 \in G_0$ выпустим траекторию системы Гамильтона

$$\dot{z} = J\mathcal{H}_z, \qquad z\Big|_{t=t_0} = z_0, \quad z_0 \in G_0. \tag{13.1}$$

Обозначим через $Z(t, z_0, t_0)$ решение задачи Коши (13.1). В фиксированный момент времени точки $z_t = Z(t, z_0, t_0)$, $z_0 \in G_0$, занимают некоторую область фазового пространства, которую обозначим через G_t. Обозначим через Γ_0 и Γ_t фазовый объем областей G_0 и G_t соответственно:

$$\Gamma_0 = \int\limits_{G_0} dz_0, \qquad \Gamma_t = \int\limits_{G_t} dz. \tag{13.2}$$

Теорема 13.1 (Лиувилля). *Фазовый объем сохраняется, т.е.*

$$\Gamma_t = \Gamma_0, \qquad t > t_0. \tag{13.3}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, рассмотрим вспомогательное утверждение.

Лемма 13.1. *Если квадратная матрица $C(t)$ удовлетворяет матричному уравнению*

$$\dot{C} = A(t)C, \qquad C\Big|_{t=0} = C_0, \tag{13.4}$$

то для определителя матрицы $C(t)$ справедливо

$$\det C(t) = \det C(0) \exp\left\{\int\limits_0^t \operatorname{Sp} A(t)dt\right\}. \tag{13.5}$$

Соотношение (13.5) *называется тождеством Якоби.*

$\Diamond$ Здесь через Sp A обозначен след матрицы A, т.е.

$$\operatorname{Sp} A = \sum_{k=1}^n A_{kk}. \tag{13.6}$$

Доказательство. Определитель матрицы $C(t) = (\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_n)$ продифференцируем по t и воспользуемся уравнением (13.5). Получим

$$\frac{d}{dt}\det C(t) = \sum_{k=1}^n \det(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_{k-1}, \dot{\vec{C}}_k, \vec{C}_{k+1}, \ldots, \vec{C}_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \det(C_{1i}, \ldots, C_{k-1,i}, A_{kj}C_{ji}, C_{k+1,i}, \ldots, C_{ni}) = \sum_{k=1}^n A_{kk}\det C(t).$$

Здесь мы воспользовались свойствами определителей, а именно: определитель не изменяется, если к элементам какого-либо столбца прибавить элементы другого столбца, умноженные на произвольную постоянную, и общий множитель столбца можно выносить за знак определителя. Следовательно,

$$\frac{d\,\det C}{dt} = \operatorname{Sp} A(t)\,\det C.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы Лиувилля.

Доказательство. 1. $2n \times 2n$-матрица

$$A(t) = \frac{\partial Z(t, z_0, t_0)}{\partial z_0}$$

симплектическая, а значит, невырожденная, поэтому в интеграле (13.2), определяющем фазовый объем Γ_t, можно сделать замену переменных $z \to z_0$. Получим

$$\Gamma_t = \int\limits_{G_t} dz = \int\limits_{G_0} \mathcal{D}(t) dz_0, \tag{13.7}$$

где $\mathcal{D}(t) = \det A(t)$ — якобиан преобразования.

2. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что функциональный определитель $\mathcal{D}(t)$ не зависит от времени, т.е. $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(t_0) = 1$.

3. Согласно тождеству Якоби (13.5) из системы (12.11) следует

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(0) \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} [\operatorname{Sp} J\mathcal{H}''_{zz}(t)] dt\right\},$$

Вычислим след матрицы $J\mathcal{H}''_{zz}(t)$

$$\operatorname{Sp} J\mathcal{H}_{zz}(t) = \sum_{\substack{k=1\\ j=1}}^{2n} J_{kj} \mathcal{H}_{z_j z_k}(t).$$

Переобозначим индексы суммирования $j \to k$, $k \to j$. Получим

$$\operatorname{Sp} J\mathcal{H}_{zz}(t) = \sum_{\substack{k=1\\ j=1}}^{2n} J_{jk} \mathcal{H}_{z_k z_j}(t) = -\sum_{\substack{k=1\\ j=1}}^{2n} J_{kj} \mathcal{H}_{z_j z_k}(t) = -\operatorname{Sp} J\mathcal{H}_{zz}(t).$$

Здесь мы воспользовались тем, что матрица J антисимметрична, т.е. $J_{kj} = -J_{jk}$.

Следовательно,

$$\operatorname{Sp} J\mathcal{H}''_{zz}(t) = -\operatorname{Sp} J\mathcal{H}''_{zz}(t) = 0$$

и

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(t_0) = 1. \tag{13.8}$$

Тем самым теорема доказана.

14. Уравнения движения классических частиц со спином во внешних полях

Изучение спиновых свойств элементарных частиц в классической электродинамике началось с появления известных работ Я.И. Френкеля [35] в 1926 г., вскоре после открытия у электрона собственного механического момента. Поводом послужила попытка Томаса объяснить мультиплетную структуру спектральных линий атома водорода с помощью полуклассического введения спин-орбитального взаимодействия. Я.И. Френкель обратил внимание на то, что для полной характеристики магнитных свойств электрона задания трехмерного вектора магнитного момента $\vec{\mu}$ принципиально недостаточно. Пользуясь математическим аппаратом специальной теории относительности, он построил классическую теорию спина на основе введенного им тензора моментов $\mu_{\alpha\beta}$.

14.1. Уравнения Френкеля–Найборга

Следуя Я.И. Френкелю [35] (см. также [8, 31] и цитируемую там литературу), введем спиновый момент количества движения в тензорной форме путем задания безразмерного антисимметричного тензора

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi_x & -\Phi_y & -\Phi_z \\ \Phi_x & 0 & \Pi_z & -\Pi_y \\ \Phi_y & -\Pi_z & 0 & \Pi_x \\ \Phi_z & \Pi_y & -\Pi_x & 0 \end{pmatrix} = (\vec{\Phi}; \vec{\Pi}). \tag{14.1}$$

Соответствующий ему тензор поляризации частицы, определяющий взаимодействие с внешним электромагнитным полем, запишем как

$$M^{\alpha\beta} = (\vec{N}; \vec{M}) = \mu \Pi^{\alpha\beta}, \tag{14.2}$$

где $\mu = gs\mu_0$ – собственный магнитный момент; $\mu_0 = e\hbar/2mc$ – магнетон Бора. Здесь введен известный g-фактор частицы и число s, кратное $1/2$ (спин частицы в единицах $\hbar$).

Так как механический момент количества движения является трехмерным вектором, то Я.И. Френкель потребовал, чтобы в системе покоя частицы спин описывался только одним вектором $\vec{\Pi}_0$. Отсюда следует, что $\Pi^{\alpha\beta}$ – пространственно подобный тензор, т.е.

$$\Pi_0^{\alpha\beta} = (\vec{0}; \vec{\Pi}_0). \tag{14.3}$$

Тогда в любой другой координатной системе будет выполняться условие

$$\Pi^{\alpha\beta} u_\beta = 0, \tag{14.4}$$

где $u^\nu = dx^\nu/d\tau = c\gamma(1, \vec{\beta})$ – четырехмерная скорость частицы; $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Ковариантное условие (14.4) можно записать и в трехмерном виде:

$$\vec{\Phi} = \vec{\beta} \times \vec{\Pi}. \tag{14.5}$$

Тензор $\Pi^{\mu\nu}$ имеет два инварианта:

$$I_1 = \frac{1}{2}\Pi^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu} = \vec{\Pi}^2 - \vec{\Phi}^2; \quad I_2 = \frac{1}{4}\Pi^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} = \langle \vec{\Pi}, \vec{\Phi} \rangle, \tag{14.6}$$

где

$$\Phi^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Pi_{\rho\sigma} = \langle -\vec{\Pi}, \vec{\Phi} \rangle \tag{14.7}$$

– тензор, дуальный к $\Pi^{\mu\nu}$, а $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ – символ Леви–Чивиты.

Второй из этих инвариантов I_2 в силу условия (14.5) равен нулю. Потребуем, чтобы для первого инварианта выполнялось

$$I_1 = \vec{\Pi}^2 - \vec{\Phi}^2 = (1-\beta^2)\vec{\Pi}^2 + \langle \vec{\beta}, \vec{\Pi} \rangle^2 = 1. \tag{14.8}$$

Это налагает дополнительное условие на вектор $\vec{\Pi}$, в результате чего независимыми будут только две компоненты этого вектора и, стало быть, тензора $\Pi^{\mu\nu}$.

Как известно из нерелятивистской теории, частица с магнитным моментом, находящаяся во внешнем электромагнитном поле, обладает энергией $U = -\langle \vec{M}, \vec{H} \rangle$. В случае покоящейся частицы, которую Я.И. Френкель трактует как материальную точку, обладающую, помимо заряда, собственным магнитным моментом (магнетон), согласно (14.2), будем иметь

$$U_0 = -\mu \langle \vec{\Pi}_0, \vec{H}_0 \rangle. \tag{14.9}$$

Отсюда следует, что на частицу в системе покоя будет действовать сила

$$\vec{F}_0 = e\vec{E}_0 + \mu\nabla\langle \vec{\Pi}_0, \vec{H}_0 \rangle. \tag{14.10}$$

Чтобы найти выражение для силы в лабораторной системе, формуле (14.10) необходимо предварительно придать ковариантный вид:

$$\tilde{f}^{\alpha} = \frac{e}{c} F^{\alpha\nu} u_{\nu} + \frac{1}{2} \mu \partial^{\alpha} F^{\nu\rho} \Pi_{\nu\rho}, \tag{14.11}$$

где $F^{\mu\nu} = (\vec{E}; \vec{H})$ – тензор электромагнитного поля (9.61).

Однако в таком виде четырехмерная сила еще не удовлетворяет условию ортогональности

$$\tilde{F}^{\alpha} u_{\alpha} = 0, \tag{14.12}$$

которое является необходимым в специальной теории относительности.

Для выполнения условия (14.12) из вектора $\tilde{f}^{\alpha}$ следует выделить пространственно-подобную часть, которая и будет являться искомым четырехмерным вектором силы. В ковариантном виде эта процедура осуществляется следующим образом:

$$f^{\alpha} = \Big(\delta^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{c^2} u^{\alpha} u_{\nu} \Big) \tilde{f}^{\nu}. \tag{14.13}$$

В результате получим уравнение движения частицы

$$m\dot{u}^{\alpha} = \frac{e}{c} F^{\alpha\nu} u_{\nu} + \frac{1}{2} \mu D^{\alpha} F^{\nu\sigma} \Pi_{\nu\sigma}; \tag{14.14}$$

$$D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + \frac{1}{c^2} u_{\alpha} u^{\nu} \partial_{\nu}. \tag{14.15}$$

В этом виде уравнение было получено Найборгом.

Вернемся к описанию поведения спина частицы во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что в системе покоя магнитный момент и спин частицы должны удовлетворять уравнению

$$s\hbar \dot{\vec{\Pi}}_0 = \mu \vec{\Pi}_0 \times \vec{H}_0, \tag{14.16}$$

которое в ковариантной форме принимает вид

$$s\hbar \dot{\tilde{\Pi}}^{\alpha\nu} = \mu (F^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho} \widetilde{\Pi}^{\rho\nu} - F^{\nu\cdot}_{\cdot\rho} \widetilde{\Pi}^{\rho\alpha}). \tag{14.17}$$

Легко убедиться, однако, что правая часть этого уравнения в системе покоя имеет пространственно-временную компоненту

$$s\hbar \dot{\tilde{\Pi}}_0^{\alpha\nu} = \mu \big(- \vec{\Pi}_0 \times \vec{E}_0; \vec{\Pi}_0 \times \vec{H}_0 \big). \tag{14.18}$$

Исправить положение можно, выделив из тензора $\dot{\tilde{\Pi}}^{\alpha\nu}$ пространственно-подобную часть

$$\dot{\overline{\Pi}}^{\alpha\nu} = \Big(\delta^{\alpha}_{\rho} + \frac{1}{c^2} u^{\alpha} u_{\rho} \Big) \Big(\delta^{\nu}_{\sigma} + \frac{1}{c^2} u^{\nu} u_{\sigma} \Big) \dot{\tilde{\Pi}}^{\rho\sigma}. \tag{14.19}$$

Теперь имеем

$$s\hbar \dot{\overline{\Pi}}^{\alpha\nu} = \mu \Big[F^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho} \overline{\Pi}^{\rho\nu} - F^{\nu\cdot}_{\cdot\rho} \overline{\Pi}^{\rho\alpha} + \frac{1}{c^2} (u^{\alpha} \overline{\Pi}^{\nu\sigma} - u^{\nu} \overline{\Pi}^{\alpha\sigma}) F_{\sigma\beta} u^{\beta} \Big]. \tag{14.20}$$

Полученное выражение, тем не менее, не удовлетворяет еще условию Френкеля (14.4). Потребуем выполнения этого условия, представив уравнение (14.19) в виде

$$\begin{aligned} s\hbar \dot{\Pi}^{\alpha\nu} = \mu \Big[H^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho} \Pi^{\rho\nu} - H^{\nu\cdot}_{\cdot\rho} \Pi^{\rho\alpha} + \\ + \frac{1}{c^2} (u^{\alpha} \Pi^{\nu\sigma} - u^{\nu} \Pi^{\alpha\sigma}) F_{\alpha\beta} u^{\beta} \Big] + \frac{1}{c^2} (u^{\alpha} K^{\nu} - u^{\nu} K^{\alpha}) s\hbar. \end{aligned} \tag{14.21}$$

Чтобы это уравнение в системе покоя имело вид (14.16), четырехмерный вектор K^α должен быть пространственно-подобным, т.е. $K^\alpha u_\alpha = 0$, в остальном он пока произволен. Выражение для K^α найдем из соотношения

$$\frac{d}{d\tau}(\Pi^{\alpha\nu}u_\nu) = 0, \tag{14.22}$$

которое является следствием условия Френкеля (14.4).

Отсюда с учетом уравнения (14.14) найдем

$$K^\alpha = -\Pi^{\alpha\nu}\Big[\frac{e}{mc}F_{\nu\rho}u^\rho + \frac{1}{2m}\mu D_\nu F^{\rho\sigma}\Pi_{\rho\sigma}\Big]. \tag{14.23}$$

Спиновое уравнение (14.21) примет теперь вид

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}^{\alpha\nu} = \frac{\mu}{s\hbar}(F^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho}\Pi^{\rho\nu} - F^{\nu\cdot}_{\cdot\rho}\Pi^{\rho\alpha} + \frac{1}{c^2}(u^\alpha\Pi^{\nu\beta} - u^\nu\Pi^{\alpha\beta})\times \\ \times\Big[\Big(\frac{\mu}{s\hbar} - \frac{e}{mc}\Big)F_{\beta\gamma}u^\gamma - \frac{\mu}{2m}D_\beta F_{\rho\sigma}\Pi^{\rho\sigma}\Big].\end{aligned} \tag{14.24}$$

Постоянную Планка $\hbar$ можно исключить, воспользовавшись приведенным выше определением μ:

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}^{\alpha\nu} = \frac{eg}{2mc}(F^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho}\Pi^{\rho\nu} - F^{\nu\cdot}_{\cdot\rho}\Pi^{\rho\alpha} + \frac{1}{2mc^2}(u^\alpha\Pi^{\nu\beta} - u^\nu\Pi^{\alpha\beta})\times \\ \times\Big[\frac{e}{c}(g-2)F_{\beta\gamma}u^\gamma - \mu D_\beta F^{\rho\sigma}\Pi_{\rho\sigma}\Big].\end{aligned} \tag{14.25}$$

Это и есть тензорное уравнение для спина, полученное Найборгом.

Заметим, что входящий сюда g-фактор в классической теории является произвольной константой. Что касается значения μ, то его можно рассматривать как аномальный магнитный момент частицы. Легко видеть, что уравнение (14.25) является нелинейным. Это объясняется тем, что в нем учитывается влияние ускорения частицы на поведение спина. В уравнении (14.14), в свою очередь, присутствует слагаемое, зависящее от спина, что приводит к обратному влиянию спина на траекторию частицы. Таким образом, мы имеем дело с самосогласованной системой «спин – орбита».

Рассмотрим некоторые свойства уравнения (14.25). Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедливо соотношение

$$\frac{d}{d\tau}(\Pi^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}) = 0. \tag{14.26}$$

Следствием этого равенства является автоматическое выполнение условия (14.8) при выполнении его в начальный момент времени.

Заметим теперь, что если в уравнении (14.25) с использованием (14.14) явным образом выделить слагаемое, зависящее от ускорения частицы $\dot{u}^\nu$, то формально это уравнение принимает линеаризованный по $\Pi^{\mu\nu}$ вид [8]:

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}^{\alpha\nu} = \frac{eg}{2mc}(F^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho}\Pi^{\rho\beta} - F^{\beta\cdot}_{\cdot\rho}\Pi^{\rho\alpha} + \frac{1}{2mc^2}(u^\alpha\Pi^{\beta\cdot}_{\cdot\rho} - u^\beta\Pi^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta})\times \\ \times\Big[\frac{eg}{2mc}F^{\rho\sigma}u_\sigma - \dot{u}^\rho\Big].\end{aligned} \tag{14.27}$$

При $g = 2$ это уравнение полностью совпадает с уравнением Френкеля. Уравнение (14.25) в предположении $g = 2$ также идентично этому уравнению, если в последнем учесть значением вычисленной Френкелем величины a_γ. Как известно, условие $g = 2$ означает, что аномальный магнитный момент электрона отсутствует. Заметим, что Я.И. Френкель в то время не мог знать о наличии аномального магнитного момента электрона. Уравнение (14.27), равно как и (14.24), принято называть уравнением Френкеля–Найборга (см. [8, 31]).

14.2. Уравнения Тамма–Гуда

Согласно утверждению И.Е. Тамма, собственный механический момент частицы в классической электродинамике должен описываться четырехмерным (псевдо)вектором (который, как правило, полагают безразмерным)

$$a^\mu = (a^0, \vec{a}). \tag{14.28}$$

Этот вектор удовлетворяет условию Тамма

$$a^\mu u_\mu = 0, \tag{14.29}$$

которое означает, что a^μ – пространственно-подобный вектор. Как следствие, временная компонента a^μ не является независимой:

$$a^0 = \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle. \tag{14.30}$$

Квадрат четырехмерного вектора, как известно, является инвариантной величиной. Потребуем, чтобы

$$a^\mu a_\mu = 1. \tag{14.31}$$

Тогда четырехмерный вектор a^μ так же, как и тензор $\Pi^{\mu\nu}$, будет иметь только две независимые компоненты. Поскольку и вектор a^μ, и тензор $\Pi^{\mu\nu}$ описывают одну и ту же физическую величину, то между ними должно существовать взаимно-однозначное соответствие. Искомое соотношение известно в литературе (см., например, [3]):

$$2ca^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}u_\beta. \tag{14.32}$$

Легко найти обратное соотношение:

$$c\Pi_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}a^\rho u^\sigma. \tag{14.33}$$

Условия Френкеля (14.4) и Тамма (14.29) выполняются при этом автоматически.

Заметим также, что

$$a^\mu a_\mu = I_1 = 1 \tag{14.34}$$

в полном соответствии с (14.8) и (14.31).

С помощью соотношения (14.32) уравнение движения для вектора a^μ можно получить непосредственно из уравнения Френкеля–Найборга.

В результате имеем

$$\dot{a}^\alpha = \frac{eg}{2mc}F^{\alpha\beta}a_\beta + \frac{u^\alpha}{mc^3}\Big[\frac{e}{2}(g-2)u_\beta F^{\beta\gamma} + \mu\partial^\gamma \widetilde{F}^{\rho\sigma}a_\rho u_\sigma\Big]a_\gamma, \tag{14.35}$$

где $\widetilde{F}^{\mu\nu} = (-\vec{H}; \vec{E})$ – тензор, дуальный к $F^{\mu\nu}$ (9.61). Соответствующее уравнение движения частицы

$$m\dot{u}^\alpha = \frac{e}{c}F^{\alpha\nu}u_\nu + \frac{\mu}{c}D_\alpha \widetilde{F}^{\rho\sigma}a_\rho u_\sigma. \tag{14.36}$$

Уравнения (14.35) и (14.36) были впервые получены Гудом.

Как и в тензорном варианте, имеем самосогласованную систему спин–орбита.

В отсутствие аномального момента, т.е. когда $g = 2$, спиновое уравнение Гуда переходит в уравнение Тамма. В связи с этим уравнение движения четырехмерного вектора спина a^μ принято называть уравнением Тамма–Гуда. Силовое уравнение Тамма после выделения в нем пространственно-подобной части совпадает с уравнением (14.36).

Разумеется, уравнение Тамма–Гуда можно получить и независимо от уравнения Френкеля–Найборга, действуя методом, применявшимся в предыдущем разделе.

Легко заметить, что для уравнения Тамма–Гуда справедливо

$$\frac{d}{d\tau}a^\mu a_\mu = 0. \tag{14.37}$$

Это обеспечивает выполнение условия (14.31).

Представим уравнение (14.35) в форме, аналогичной (14.27), выделив слагаемое с ускорением $\dot{u}^\alpha$. Получим

$$\dot{a}^\alpha = \frac{eg}{2mc}(F^{\alpha\beta}a_\beta - u^\alpha u_\beta F^{\beta\gamma}a_\gamma) + \frac{1}{c^2}u^\alpha a^\beta \dot{u}_\beta. \tag{14.38}$$

Если заряд частицы отсутствует (нейтрон), то уравнение (14.38) принимает вид чисто кинематического соотношения

$$c^2\dot{a}^\alpha = u^\alpha a^\beta \dot{u}_\beta. \tag{14.39}$$

Если считать ускорение заданным, то уравнение (14.39) будет описывать движение спина, известное как прецессия Томаса.

Остановимся теперь на соответствии тензорной и векторной форм описания спина. В трехмерной форме соотношения (14.32) и (14.33) имеют вид

$$\begin{aligned} &a^0 = \gamma\langle\vec{\beta},\vec{\Pi}\rangle, \quad \vec{a} = \gamma(\vec{\Pi} + \vec{\beta}\times\vec{\Pi}), \\ &\vec{\Pi} = \gamma[\vec{a} - \vec{\beta}\langle\vec{\beta},\vec{a}\rangle], \quad \vec{\Phi} - \gamma(\vec{\beta}\times\vec{a}). \end{aligned} \tag{14.40}$$

Отсюда следует, что в системе покоя векторы $\vec{\Pi}$ и $\vec{a}$ совпадают:

$$\vec{\Pi}_0 = \vec{a}_0 = \vec{\zeta}. \tag{14.41}$$

В лабораторной системе физический смысл $\vec{\Pi}$ и $\vec{a}$ становится различным. Временная компонента a_0 описывает продольную ориентацию вектора $\vec{\Pi}$, а пространственно-временная компонента $\vec{\Phi}$ – поперечную ориентацию вектора $\vec{a}$.

Чтобы установить адекватное соответствие этих векторов с вектором $\vec{\zeta}$, обратимся к преобразованиям Лоренца. Как компонента тензора вектор $\vec{\Pi}$ преобразуется из системы покоя в лабораторную систему по закону

$$\vec{\Pi} = \gamma\vec{\zeta} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\langle\vec{\beta},\vec{\zeta}\rangle\vec{\beta}, \tag{14.42}$$

тогда как то же преобразование для вектора $\vec{a}$ имеет вид

$$\vec{a} = \vec{\zeta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\langle\vec{\beta},\vec{\zeta}\rangle\vec{\beta}. \tag{14.43}$$

Легко найти обратное преобразование

$$\vec{\zeta} = \vec{a} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\langle\vec{\beta},\vec{a}\rangle\vec{\beta} = \frac{1}{\gamma}\vec{\Pi} + \frac{\gamma}{\gamma+1}\langle\vec{\beta},\vec{\Pi}\rangle\vec{\beta}. \tag{14.44}$$

Если известно решение спинового уравнения для одного из векторов, $\vec{\Pi}$ или $\vec{a}$, то, согласно (14.42), (14.43) и (14.40), можно найти $\vec{\zeta}$ как функцию лабораторных параметров. Можно поступить и иначе: сначала написать уравнение для вектора $\vec{\zeta}$ в лабораторной системе, а затем найти его решение.

14.3. Уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди

Помимо рассмотренных выше уравнений движения классической частицы с собственным магнитным моментом существует еще уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди, первоначально полученное в квазиклассическом пределе из уравнения Дирака. Мы выведем это уравнение для произвольных электромагнитных полей из уравнения Дирака с помощью квазиклассического метода [7].

Уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди можно также получить с помощью процедуры, описанной выше (см., например, [24, 19]). Здесь мы ограничимся тем, что, не уменьшая общности, будем считать

$$\mu = O(\hbar). \tag{14.45}$$

Тогда в пределе $\hbar \to 0$ из уравнений Тамма–Гуда (14.35), (14.36) получим

$$\dot{a}^\alpha = \frac{eg}{2mc}F^{\alpha\beta}a_\beta + \frac{e(g-2)}{2mc^3}u^\alpha u_\beta F^{\beta\sigma}a_\sigma, \tag{14.46}$$

$$\dot{u}^\alpha = \frac{e}{mc}F^{\alpha\nu}u_\nu. \tag{14.47}$$

Уравнение (14.47) есть уравнение Лоренца (9.63), а уравнение (14.46) – так называемое уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди.

$\Diamond$ Таким образом, в предположении (14.45) спиновое уравнение становится линейным, а силовое уравнение теряет зависимость от спина. Аналогична ситуация и в случае постоянных электромагнитных полей.

Пример 14.1. Записать уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди для вектора $\vec{\eta}$ (14.41).

Решение. Уравнение (14.46) для вектора $\vec{a}$ $[a^\mu = (a^0, \vec{a})]$ имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{\vec{a}} = \frac{ge}{2m_0c\gamma}\big(\langle\vec{a},\vec{\beta}\rangle\vec{E} + \vec{H}\times\vec{a}\big) + \\ + \frac{e(g-2)\gamma}{2m_0c}\vec{\beta}\big(\langle\vec{a},\vec{E}\rangle + \langle\vec{a},\vec{\beta}\rangle\langle\vec{\beta},\vec{E}\rangle + \langle\vec{\beta},\vec{a}\times\vec{H}\rangle\big).\end{gathered} \tag{14.48}$$

Подставив (14.44) в (14.48), получим

$$\dot{\vec{\eta}} = \frac{2}{\hbar}\vec{\eta}\times\vec{\mathcal{D}}_0, \tag{14.49}$$

где

$$\begin{gathered}\vec{\mathcal{D}}_0(t,z_0) = \frac{\mu_0}{\gamma}\Big\{[1+(g-2)\gamma]\vec{H}(t) - \\ -\Big[\frac{1}{1+\gamma^{-1}} + (g-2)\gamma\Big]\vec{\beta}\times\vec{E}(t) - \frac{(g-2)\gamma}{1+\gamma^{-1}}\vec{\beta}\langle\vec{\beta},\vec{H}(t)\rangle\Big\},\end{gathered}$$

а μ_0 — магнетон Бора.

Пример 14.2. Показать, что задача Коши

$$\vec{\eta}\big|_{t=0} = \frac{1+\zeta\zeta'}{2}\zeta\vec{\ell} + \frac{1-\zeta\zeta'}{2}\frac{\vec{\ell}\times(\vec{k}\times\vec{\ell}) + i\zeta\vec{\ell}\times\vec{k}}{\sqrt{1-\langle\vec{\ell},\vec{k}\rangle^2}}, \tag{14.50}$$

где $\vec{\ell} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$, для уравнения (14.49) эквивалентна задаче Коши для спинора

$$\begin{gathered}\Big\{i\frac{d}{dt} + \frac{ec}{2\varepsilon}\Big[\Big(1+\frac{(g-2)\gamma}{2}\Big)\langle\vec{\sigma},\vec{H}(t)\rangle - \Big(\frac{1}{1+\gamma^{-1}} + \frac{(g-2)\gamma}{2}\Big)\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\vec{E}(t)\rangle - \\ - \frac{(g-2)\gamma\langle\vec{\beta},\vec{H}(t)\rangle}{2(1+\gamma^{-1})}\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\Big]\Big\}\mathcal{U} = 0,\end{gathered} \tag{14.51}$$

если спинор $\mathcal{U}(t,\zeta)$ в начальный момент времени удовлетворяет условию

$$\langle\vec{\sigma},\vec{\ell}\rangle\mathcal{U}(0,\zeta) = \zeta\mathcal{U}(0,\zeta), \quad \zeta = \pm 1, \tag{14.52}$$

фиксирующему проекцию спина частицы на произвольный единичный вектор $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^3$. Здесь $\zeta, \zeta' = \pm 1$, ; а $\vec{k}$ – произвольный единичный вектор, который в декартовой системе координат, как правило, выбирается в виде $\vec{k} = (0,0,1)$.

Отметим, что решение уравнения (14.52) можно представить в виде

$$\mathcal{U}(0,\zeta) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\zeta\sqrt{1+\zeta\cos\theta}\,\exp(-i\varphi/2) \\ \sqrt{1-\zeta\cos\theta}\,\exp(i\varphi/2)\end{pmatrix}, \ \alpha = \mathrm{const}\,. \tag{14.53}$$

ГЛАВА 2
Уравнения в частных производных первого порядка

В курсах общей и теоретической физики формируется, как известно, физическое представление о том, что классическая (геометрическая) оптика, классическая механика и классическая термодинамика являются предельными случаями соответственно волновой оптики, квантовой механики и статистической механики.

Математическое обоснование соответствующего предельного перехода отнюдь не тривиально и связано в первую очередь с построением приближенных (асимптотических) решений (псевдо)дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих всевозможные волновые процессы (стационарные и нестационарные) в непрерывных средах. Методы построения этих решений рассмотрены в [7].

При определенных условиях, наложенных на параметры волнового процесса и параметры среды (например, когда длина волны мала по сравнению с размерами рассматриваемых тел системы или по сравнению с параметром неоднородности среды), в первом приближении, которое называют коротковолновым, *фаза асимптотики* волнового поля удовлетворяет *нелинейному уравнению в частных производных первого порядка* – уравнению Гамильтона–Якоби для волновых фронтов. Следующее приближение приводит к *линейному уравнению первого порядка для определения амплитуды колебаний – уравнению переноса.*

Одно из важных достижений математического анализа XIX в. состоит в том, что решение уравнения в частных производных первого порядка сводится к интегрированию соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. С физической точки зрения этот факт есть проявление двойственности в описании волновых процессов: при помощи волновых фронтов или при помощи лучей (траекторий частиц) в конфигурационном пространстве классической системы, задаваемой характеристической системой ОДУ.

Лучи и траектории частиц могут пересекаться, касаться друг друга, собираться в одну точку, образуя множества в конфигурационном пространстве, которые, следуя терминологии геометрической оптики, называют каустиками или фокальными точками (точками поворота в квантовой механике).

С точки зрения асимптотики решений уравнений волновой физики на каустике и в ее окрестности происходит фокусировка (рост амплитуды) волнового поля, а фаза решения испытывает скачок (соответствующий четверти длины волны) при каждом прохождении луча через каустику.

Строгое описание этих физических эффектов в рамках коротковолнового приближения для линейных уравнений математической физики, описывающих волновые процессы, связано с геометрическими объектами в фазовом пространстве соответствующей характеристической системы ОДУ – поверхностями (многообразиями), образованными семействами фазовых траекторий (характеристик) этих систем.

При этом каустики интерпретируются как особенности (катастрофы) гладких отображений проектирования этих поверхностей из фазового пространства на конфигурационное. Изучение этих особенностей является предметом исследования современной математической теории катастроф (см., например, [2]).

Возникновение этих особенностей приводит, в свою очередь, к «катастрофам» в решении уравнений в частных производных первого порядка для фазы и амплитуды асимптотических решений: ветвлению решения, потере его гладкости – возникновению разрывов функций и их производных. Преодоление всех этих «катастроф» – получение явных и равномерных по пространственным переменным асимптотических формул для решений волновых уравнений (и систем) математической физики – осуществляется в рамках так называемой теории канонического оператора Маслова (и ее модификаций). Эта теория будет рассмотрена в следующем разделе на примерах решения содержательных физических задач.

Такие задачи и связанные с ними катастрофы решений соответствующих уравнений в частных производных первого порядка возникают при анализе распространения разрывов и ударных волн в механике сплошной среды, в частности в моделях газовой динамики и магнитной гидродинамики, анализе распространения и фокусировки видео- и радиоимпульсов в диспергирующих средах, коротких радиоволн в ионосфере Земли, анализе дифракции на проводящих телах, а также анализе распространения лазерного электромагнитного излучения в лабораторной плазме.

Объединение теории канонического оператора и теории катастроф, позволяющее рассчитать атласы каустик и волновых полей в их окрестностях, составляет математическую основу разнообразных приближенных методов исследования основных уравнений математической физики, таких, например, как коротковолновое приближение для уравнений электродинамики или квазиклассическое приближение для уравнений как нерелятивистской, так и релятивистской квантовой механики.

Цели этого раздела: во-первых, дать в виде алгоритмов методы решения задачи Коши для уравнений в частных производных первого порядка «в малом», т.е. при отсутствии катастроф в ее решении; во-вторых, дать геометрическую интерпретацию как самих уравнений, так и их решений, которая является необходимым этапом построения решения таких уравнений «в целом», в том числе в окрестности возникающих каустик.

15. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

♦ *Дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка* называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее частные производные только первого порядка.

Общий вид дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}) = 0 \tag{15.1}$$

или в векторной форме

$$F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n_x. \tag{15.2}$$

Здесь F — заданная функция своих аргументов.

◊ Геометрически решение $u = u(\vec{x})$ уравнения (15.2) можно интерпретировать как поверхность в $n+1$-мерном пространстве $(\vec{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1}_{x,u}$, представляющем собой прямое произведение пространства $\mathbb{R}^n_x$ на пространство $\mathbb{R}_u$ ($\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_u$). Такая поверхность называется интегральной поверхностью уравнения (15.2).

♦ Уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} a_k(\vec{x}) + u a_0(\vec{x}) = b(\vec{x}), \tag{15.3}$$

где $b(\vec{x}) = b(x_1, \ldots, x_n)$ и $a_k(\vec{x}) = a_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = \overline{0, n}$, – заданные функции указанных аргументов, называется *линейным уравнением в частных производных первого порядка*. Уравнение (15.3) называется *однородным*, если $b(\vec{x}) \equiv 0$, и *неоднородным* в противном случае.

♦ Уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} a_k(\vec{x}, u) = a_0(\vec{x}, u) \tag{15.4}$$

называется *квазилинейным* (*линейным относительно частных производных*). Если $a_0(\vec{x}, u) = 0$, то уравнение (15.4) называется квазилинейным однородным, в противном случае – неоднородным.

Пример 15.1. Дана струна (упругая стальная проволока) – модель одномерной однородной среды. В момент $t_0 = 0$ зададим профиль (отклонение) струны: $u|_{t=0} = f(x)$ (рис. 8). В момент $t \neq t_0$ процесс распространения плоской немонохроматической волны, бегущей вправо вдоль струны со скоростью a ($a = \text{const}, \ a > 0$) можно описать соотношением

$$u(x, t) = f(x - at). \tag{15.5}$$

Найти уравнение, описывающее распространение волны.

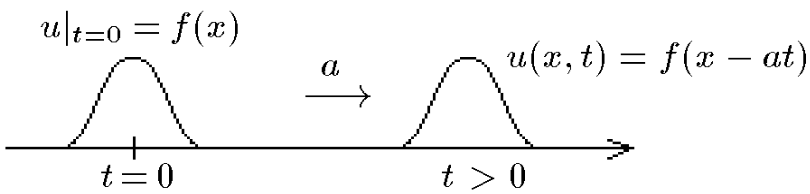

Рис. 8.

Решение. Продифференцировав соотношение (15.5) по x и по t, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t} f(x - at) = f'_{\tau = x - at}(x - at)(-a), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x - at) = f'_{\tau = x - at}(x - at) \cdot 1. \end{cases}$$

Сложим эти два уравнения, умножив второе из них на a, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{15.6}$$

– *линейное уравнение бегущей вправо волны*. Его *общее решение* есть $u(x, t) = f(x - at)$, где $f(\tau)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, т.е. принадлежащая классу $\mathcal{C}^1\Big(\mathbb{R}^1\Big)$.

Таким образом, общее решение этого уравнения зависит от произвольной функции одной переменной. Частных решений существует столько, сколько существует один раз дифференцируемых функций одной переменной.

Пример 15.2. Автономной системе ОДУ в области D фазового пространства $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \vec{a}(\vec{x}) \in \mathcal{C}^\infty(D), \quad \vec{a}(\vec{x}) \neq 0, \tag{15.7}$$

или в координатной записи

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \dot{x}_i = a_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = \overline{1, n},$$

сопоставить эквивалентное уравнение в частных производных первого порядка.

Решение. Для системы (15.7) поставим задачу Коши (см. рис. 9):

$$\vec{x}|_{\tau=0} = \vec{\xi} \in D. \tag{15.8}$$

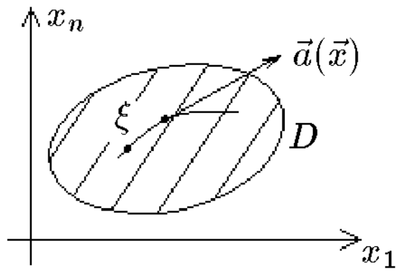

Рис. 9.

Как известно, на некотором интервале $\mathbb{I}_\delta =]-\delta, +\delta[$ $(\delta > 0)$ существует единственное ее решение $\vec{x} = \vec{X}(\vec{\xi}, \tau)$, $\tau \in \mathbb{I}_\delta$. Это решение определяет в D *фазовую траекторию* $\ell_\xi = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{X}(\vec{\xi}, \tau),\ \tau \in \mathbb{I}_\delta\}$. Сопоставим векторному полю $\vec{a}(\vec{x})$ линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\widehat{L}_a = \sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i} = \Big\langle \vec{a}(\vec{x}), \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \Big\rangle. \tag{15.9}$$

Тогда

$$\hat{L}_a u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = \langle \vec{a}(\vec{x}), \nabla u(\vec{x})\rangle. \tag{15.10}$$

Уравнение

$$\hat{L}_a u = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad |\vec{a}(\vec{x})| \neq 0, \tag{15.11}$$

есть *частный случай однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка.*

Для уравнения (15.11) система (15.7) называется *характеристической*, а ее фазовые траектории ℓ_ξ называются *характеристическими кривыми* (или *характеристиками*).

Рассмотрим подробнее квазилинейные уравнения с двумя независимыми переменными

$$P(x, y, u)u_x + Q(x, y, u)u_y = R(x, y, u). \tag{15.12}$$

Функции P, Q, R будем считать непрерывно дифференцируемыми в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^3_{x,y,u}$, причем P и Q не обращаются в нуль одновременно в области D.

Заданные функции (P, Q, R) определяют в области D векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$.

♦ Кривая L называется *векторной линией поля* $\vec{a}$, или *интегральной кривой*, соответствующей этому полю направлений, если в каждой точке этой кривой касательный вектор параллелен вектору $\vec{a}$.

Векторные линии поля $\vec{a}$ определяются в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} = \frac{du}{R(x, y, u)} = dt. \tag{15.13}$$

Мы уже отмечали, что решение уравнения (15.12) определяет в пространстве x, y, u некоторую поверхность $u = u(x, y)$, называемую интегральной. Нормаль к этой поверхности параллельна вектору $\vec{n} = (u_x, u_y, -1)$. В этом случае уравнение (15.12) выражает условие того, что нормаль к интегральной поверхности ортогональна векторным линиям поля направлений

$$(\vec{n}, \vec{a}) = 0, \qquad \vec{n} = (u_x, u_y, -1), \qquad \vec{a} = (P, Q, R). \tag{15.14}$$

Система уравнений (15.13), записанная в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y, u), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y, u), \\ \dfrac{du}{dt} = \dot{u} = R(x, y, u), \end{cases} \tag{15.15}$$

задает в параметрической форме (t — параметр) векторные линии поля $\vec{a}$.

♦ Система уравнений (15.13) или (15.15) называется *характеристической*, а ее решения – *характеристическими линиями*, или *характеристиками*, уравнения (15.12).

♢ Если поверхность $u = u(x, y)$ – геометрическое место характеристических линий уравнения (15.12), т.е. образована линиями, удовлетворяющими системе (15.15), то любая плоскость, касательная к этой поверхности, ортогональна вектору $\vec{n}$. Следовательно, функция $u(x, y)$, задающая поверхность, удовлетворяет уравнению (15.12), и поверхность $u = u(x, y)$ является его интегральной поверхностью.

Рассмотрим первый интеграл характеристической системы уравнений (15.15).

♦ *Первым интегралом системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{x}_j = a_j(x_1, \dots, x_n, t), \qquad j = \overline{1, n} \tag{15.16}$$

называется функция $\Psi(x_1, \dots, x_n, t)$, не равная тождественно постоянной, но сохраняющая постоянное значение на решениях $\vec{x} = \vec{X}(t)$ системы (15.16), т.е. $\Psi(X_1(t), \dots, X_n(t), t) = C$.

Теорема 15.1. *Пусть*

$$\Psi(x, y, u) = C \tag{15.17}$$

– первый интеграл системы (15.15), $\Psi(x, y, u)$ *дифференцируема по всем своим аргументам и*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u}(x, y, u) \neq 0.$$

Тогда функция $u = \varphi(x, y)$*, неявно определяемая соотношением* (15.17)*, удовлетворяет уравнению* (15.12).

Доказательство. Функция $\Psi(x, y, u) = C$ – первый интеграл системы (15.15). Следовательно,

$$\frac{d}{dt}[\Psi(x, y, u) - C] = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{du}{dt} = 0.$$

Разделим полученное уравнение на $\partial\Psi/\partial u$. Учитывая систему (15.15) и правила дифференцирования функций, заданных неявно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial \Psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}\Big/\frac{\partial \Psi}{\partial u},$$

получим

$$-\frac{\partial u}{\partial x}P(x, y, z) - \frac{\partial u}{\partial y}Q(x, y, u) + R(x, y, u) = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 15.1.1. Пусть

$$\begin{array}{l} \Psi_1(u,x,y) = C_1, \\ \Psi_2(u,x,y) = C_2 \end{array} \tag{15.18}$$

– два линейно независимых первых интеграла системы (15.15). Тогда общее решение уравнения (15.12) неявным образом задается соотношением

$$\Phi(\Psi_1(u,x,y), \Psi_2(u,x,y)) = 0, \tag{15.19}$$

где $\Phi(C_1, C_2)$ – произвольная гладкая функция двух переменных.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 15.1.

Пример 15.3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

Решение. Заметим, что $\vec{a} = (1,1,1)$. Следовательно, характеристическая система имеет вид $dx = dy = du$ или

$$\begin{cases} dx = dy \\ dx = du \end{cases}, \qquad \text{что дает} \qquad \begin{cases} x - y = C_1, \\ x - u = C_2. \end{cases}$$

В силу приведенного выше следствия общее решение неявно задается уравнением

$$\Phi(x-y, x-u) = 0.$$

Так как функция u входит только в один первый интеграл, то общее решение уравнения можно записать в виде

$$\tilde{\Phi}(x-y) + x - u = 0$$

или

$$u(x,y) = \tilde{\Phi}(x-y) + x,$$

где $\tilde{\Phi}(\omega)$ – произвольная функция.

Пример 15.4. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Решение. В этом случае

$$P(x,y,u) = x, \qquad Q(x,y,u) = -u, \qquad R(x,y,u) = 0.$$

Характеристическая система примет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-u} = \frac{du}{0}. \tag{15.20}$$

Из последнего соотношения найдем $u = C_1$ и

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{C_1},$$

$$y = -C_1 \ln x + \ln C_2 = \ln C_2 x^{-C_1}.$$

В результате для первых интегралов системы (15.20) получим

$$C_1 = u, \qquad C_2 = e^y x^{C_1} = e^y x^u,$$

а общее решение исходной задачи неявным образом определяется соотношением

$$\Phi(u, e^y x^u) = 0.$$

◊ Задача Коши для дифференциального уравнения (15.12) формулируется следующим образом: определить интегральную поверхность уравнения (15.12), которая проходит через заданную кривую γ в пространстве (u, x, y).

В неявной форме эта кривая задается системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(u, x, y) = 0, \\ \Phi_2(u, x, y) = 0 \end{array} \right. \tag{15.21}$$

при условии, что

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = 2.$$

◊ Теорему 15.1 легко обобщить на случай квазилинейного уравнения (15.4) с произвольным числом переменных. Полностью эти обобщения описаны теоремами (15.2) и (15.3), которые полезно предварить рядом примеров.

Пример 15.5. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z) \tag{15.22}$$

и выделить из общего решения частное, удовлетворяющее условию

$$u\Big|_{z=1} = x^y. \tag{15.23}$$

Решение. 1. В нашем случае уравнение (15.22) представляется в виде

$$P(x, y, z)u_x + Q(x, y, z)u_y + R(x, y, z)u_z = Z(x, y, z),$$

где

$$P(x, y, z) = x, \quad Q(x, y, z) = 0,$$
$$R(x, y, z) = -yz, \quad Z(x, y, z) = 0.$$

Следовательно, характеристическая система

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} = \frac{du}{Z(x, y, z)}$$

примет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{-yz} = \frac{du}{0}. \tag{15.24}$$

Здесь нуль в знаменателе понимается в смысле пропорции, т.е. если записано $a/0 = b/c$, то $a = (b/c)\cdot 0 = 0$. Из (15.24) получим

$$dy = 0, \qquad du = 0, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{-yz}$$

и найдем первые интегралы

$$y = C_1, \qquad u = C_3, \qquad \ln x = -\frac{\ln z}{C_1} + \ln C_2$$

или

$$C_2 = xz^{1/C_1} = xz^{1/y}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (15.22) неявным образом определяется уравнением

$$\Phi(y, xz^{1/y}, u) = 0, \tag{15.25}$$

где $\Phi(y,\omega,u)$ – произвольная функция трех переменных. Разрешив уравнение (15.25) относительно u, получим

$$u = f(y,\omega)\Big|_{\omega = xz^{1/y}},$$

где $f(y,\omega)$ – произвольная функция двух переменных. Из условия (15.23) находим

$$u\Big|_{z=1} = f(y,\omega)\Big|_{\omega=x} = x^y.$$

Выражая правую часть соотношения через ω, получим, что

$$f(y,\omega) = \omega^y.$$

Следовательно, решение задачи (15.22), (15.23) имеет вид

$$u = \omega^y\Big|_{\omega = xz^{1/y}} = (xz^{1/y})^y = zx^y. \tag{15.26}$$

Пример 15.6. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial u}{\partial y} = u, \qquad u = u(x,y) \tag{15.27}$$

и выделить из него частное, удовлетворяющее условию

$$u\Big|_{x=2} = y - 4. \tag{15.28}$$

Решение. В нашем случае

$$P(x,y,u) = x, \qquad Q(x,y,u) = y + x^2, \qquad R(x,y,u) = u.$$

Следовательно, характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{du}{u}. \tag{15.29}$$

В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y + x^2}, \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u}. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим

$$\ln u = \ln x + \ln C_2. \tag{15.30}$$

Первое уравнение системы эквивалентно линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x,$$

решение которого имеет вид

$$y = (C_1 + x)x. \tag{15.31}$$

Разрешим уравнения (15.30) и (15.31) относительно C_1 и C_2. Тогда первые интегралы системы (15.29) имеют вид

$$C_1 = \frac{y}{x} - x, \qquad C_2 = \frac{u}{x}, \tag{15.32}$$

а общее решение уравнения (15.27) неявным образом определяется соотношением

$$\Phi\Big(\frac{y}{x} - x, \frac{u}{x}\Big) = 0, \tag{15.33}$$

где $\Phi(p, q)$ – произвольная функция двух переменных. Разрешив (15.33) относительно u, найдем

$$u = xf(\omega)\Big|_{\omega = \frac{y}{x} - x}, \tag{15.34}$$

где $f(\omega)$ – произвольная функция. Перейдем к решению задачи Коши.

1. *Первый способ.* С учетом условия (15.28) из (15.34) запишем

$$u|_{x=2} = 2f(\omega)\Big|_{\omega = \frac{y}{2} - 2} = y - 4.$$

Выразив правую часть через ω, получим

$$2f(\omega) = 2\omega + 4 - 4.$$

Следовательно, $f(\omega) = \omega$, и решение задачи (15.27) и (15.28) имеет вид

$$u = x\omega\Big|_{\omega = \frac{y}{x} - x} = y - x^2. \tag{15.35}$$

2. *Второй способ.* Записав первые интегралы (15.32) с учетом условия (15.28), получим

$$C_1 = \frac{y}{2} - 2, \qquad C_2 = \frac{y - 4}{2},$$

т.е.

$$C_1 = C_2.$$

Возвратившись в полученном равенстве к явному виду первых интегралов, найдем

$$\frac{y}{x} - x = \frac{u}{x},$$

что эквивалентно соотношению (15.35).

Обобщим полученные результаты на многомерный случай. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}, u), \qquad \dot{u} = a_0(\vec{x}, u). \tag{15.36}$$

Будем предполагать, что функции $\vec{a}(\vec{x}, u)$ и $a_0(\vec{x}, u)$ непрерывно дифференцируемы в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}_{\vec{x},u}$, а вектор $\vec{a}(\vec{x}, u)$ отличен от тождественного нуля в области D.

Теорема 15.2. *Пусть* $w(\vec{x}, u)$ *– первый интеграл системы* (15.36). *Тогда функция* $u(\vec{x}, t)$, *неявно определяемая уравнением* $w(\vec{x}, u) = 0$ *удовлетворяет квазилинейному уравнению*

$$\langle \vec{a}(\vec{x}, u), \nabla u \rangle = a_0(\vec{x}, u). \tag{15.37}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложных функций найдем

$$\nabla u = -\frac{\nabla w}{\partial w / \partial u}. \tag{15.38}$$

Продифференцируем первый интеграл системы (15.37) по t

$$\frac{dw}{dt} = \langle \nabla w, \dot{\vec{x}} \rangle + \frac{\partial w}{\partial u}\dot{u} = \langle \nabla w, \vec{a}(\vec{x}, u) \rangle + \frac{\partial w}{\partial u} a_0(\vec{x}, u) = 0.$$

Воспользуемся соотношением (15.38) и получим (15.37), что и требовалось доказать.

Теорема 15.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *система* (15.36), *не содержащая в* D *точек покоя* $(a_0(\vec{x}, u) \neq 0, \vec{a}(\vec{x}, u) \neq 0)$, *всегда имеет в этой области* n *первых интегралов* $w_1(\vec{x}, u), \ldots, w_n(\vec{x}, u)$, *функционально независимых друг от друга, т.е. таких, что*

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} w_i(\vec{x}, u), \frac{\partial}{\partial u} w_i(\vec{x}, u)\right)_{n \times (n+1)} = n, \qquad \vec{x} \in D;$$

2) *любой другой первый интеграл* $w(\vec{x}, u)$ *есть произвольная гладкая функция от* n *функционально независимых первых интегралов:*

$$w(\vec{x}, u) = F\big(w_1(\vec{x}, u), w_2(\vec{x}, u), \ldots, w_n(\vec{x}, u)\big),$$

где $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство см., например, в [2].

Теорема 15.4. *Пусть* $w_k(\vec{x}, u)$, $k = \overline{1, n}$ *– независимые первые интегралы системы* (15.36). *Тогда общее решение уравнения* (15.37) *определяется соотношением*

$$F\big(w_1(\vec{x}, u), w_2(\vec{x}, u), \ldots, w_n(\vec{x}, u)\big) = 0, \tag{15.39}$$

где $F(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *– произвольная гладкая функция* n *переменных.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 15.1.

♦ Система (15.36) называется характеристической системой для уравнения (15.37).

16. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$\Diamond$ Пусть все коэффициенты в уравнении (15.1) дифференцируемы бесконечное число раз. Возникает вопрос: всегда ли в этом случае задача Коши имеет решение и если да, то является ли оно единственным? Следующие ниже примеры показывают, что задача Коши для уравнения (15.1) не всегда имеет решение, а если и имеет, то оно, вообще говоря, не единственно. Причина этого кроется в поведении характеристических кривых этого уравнения в окрестности заданной кривой γ.

Уточним понятие интегральной поверхности, исходя из следующего «геометрического смысла» уравнения (15.1) на примере двумерной поверхности $u = u(x_1, x_2)$ (рис. 10).

Для каждой точки $M \in S_u$ вычислим вектор нормали к ней $\vec{n}(M) = \big(\nabla_x u(M), -1\big)$. Уравнение поверхности S_u в пространстве $\mathbb{R}^3$: $\big\{(x, y, u) : -u + u(x, y) = 0\big\}$, а уравнение вектора, касающегося характеристики:

$$\vec{v} = \big(P(x, y, u), Q(x, y, u), R(x, y, u)\big).$$

Тогда уравнение (15.1) означает, что вектор нормали к интегральной поверхности в каждой ее точке ортогонален характеристическому направлению в этой точке, задаваемому вектором $\vec{v}(M)$: $\langle \vec{n}(M), \vec{v}(M)\rangle = 0$.

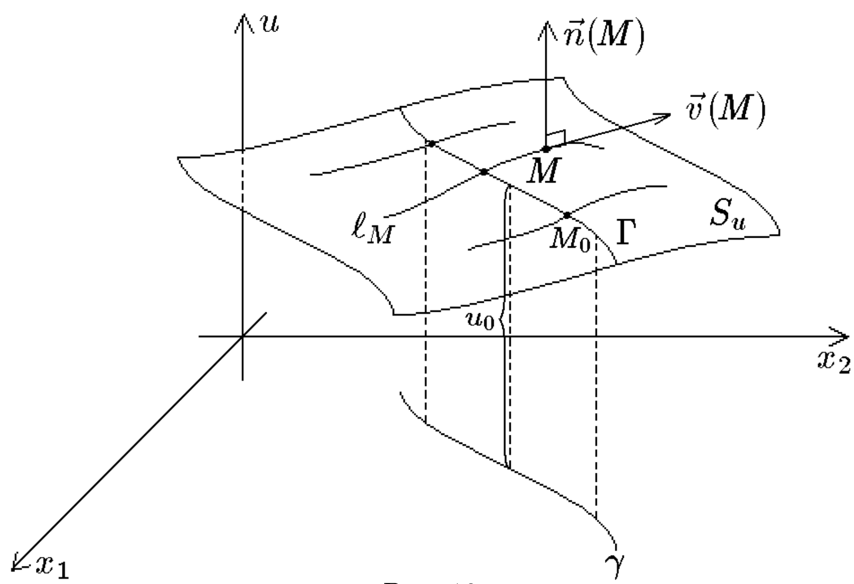

Рис. 10.

$\Diamond$ В каждой точке интегральной поверхности векторное поле характеристической системы (15.1) лежит в касательной плоскости к этой интегральной поверхности. Другими словами, интегральная поверхность расслаивается на характеристики. А именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 16.1. *Если $M_0 \in S_u$ и L_{M_0} – характеристика, проходящая через M_0, то эта характеристика целиком лежит на поверхности S_u.*

Отсюда приходим к следующей постановке задачи Коши для уравнения (15.1): провести через заданную в $\mathbb{R}^3_{x,u}$ кривую Γ, определяемую начальными данными, интегральную поверхность S_u (рис. 10).

Из утверждения также следует «геометрический» алгоритм решения этой задачи: надо «выпустить» из точек $M_0 \in \Gamma$ характеристики L_{M_0} и затем взять их объединение. Полученная таким образом поверхность, «сотканная» из характеристических кривых, и есть искомая интегральная поверхность.

Рассмотрим уравнение

$$\langle \vec{a}(\vec{x}), \nabla u\rangle + a_0(\vec{x})u = f(\vec{x}). \tag{16.1}$$

Задача Коши для уравнения (16.1) ставится на поверхности размерности $n-1$ в пространстве $\mathbb{R}^n_x$.

♦ Гладкой гиперповерхностью γ называется множество в $\mathbb{R}^n$, заданное уравнением

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \qquad (s_1, \ldots, s_{n-1}) \in U,$$

где U – область в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}_s$, а вектор-функция $\vec{\varphi}(s_1, \ldots, s_{n-1})$ – непрерывно дифференцируемая в U и

$$\operatorname{rang}\left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial s_k}\right\| = n-1.$$

♦ Задачей Коши для уравнения (16.1) называется задача о нахождении его решения, удовлетворяющего условию

$$u(\vec{x})|_\gamma = h(s_1, \ldots, s_{n-1}), \tag{16.2}$$

где $h(s_1, \ldots, s_{n-1})$ – функция, непрерывно дифференцируемая в U. Поверхность γ называется поверхностью Коши.

♦ Система

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}) \tag{16.3}$$

называется характеристической системой для уравнения (16.1), а ее решение – характеристикой.

Теорема 16.1. *Пусть гиперповерхность γ не касается характеристик. Тогда задача Коши* (16.1), (16.2) *однозначно разрешима в некоторой окрестности гиперповерхности γ.*

Доказательство. 1. Выпустим из каждой точки поверхности γ характеристику системы (16.3), т.е. решим задачу Коши для системы (16.3)

$$\vec{x}|_{t=0} = \vec{\varphi}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \qquad (s_1, \ldots, s_{n-1}) \in U. \tag{16.4}$$

2. Пусть

$$\vec{x} = \vec{X}(t, s_1, \ldots, s_{n-1}) \tag{16.5}$$

– решение задачи Коши (16.3), (16.4). Тогда вдоль характеристик

$$\frac{du}{dt} = \langle \nabla u, \dot{\vec{x}}\rangle = \langle \nabla u, \vec{a}(\vec{x})\rangle. \tag{16.6}$$

3. Для определения функции $u = U(t, s_1, \ldots, s_{n-1})$ получим задачу Коши на характеристиках системы (16.3)

$$\frac{du}{dt} + a_0(\vec{x}(t))u = f(\vec{x}(t)), \qquad u|_{t=0} = h(s_1, \ldots, s_{n-1}). \tag{16.7}$$

Решив это уравнение, получим $u = U(t, s_1, \ldots, s_{n-1})$ как гладкую функцию от $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$.

4. Разрешим систему (16.5) относительно t и s_k, т.е. найдем $t = T(\vec{x})$ и $s_k = S_k(\vec{x})$, $k = \overline{1, n-1}$. В результате решение задачи Коши (16.1)–(16.5) запишется в виде

$$u(\vec{x}) = U\big(T(\vec{x}), S_1(\vec{x}), \ldots, S_{n-1}(\vec{x})\big).$$

Остается показать, что U есть гладкая функция переменной $\vec{x}$. Для этого достаточно убедиться, что из соотношения (16.5) можно выразить $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$ как гладкие функции через $\vec{x}$.

Действительно, якобиан

$$J = \Big|\frac{\partial\vec{X}}{\partial t}, \frac{\partial\vec{X}}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial\vec{X}}{\partial s_{n-1}}\Big|\Big|_{t=0} = \Big|\vec{a}(\vec{x}), \frac{\partial\vec{x}}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial\vec{x}}{\partial s_{n-1}}\Big|_{\vec{x}\in\gamma} \neq 0,$$

так как по условию гиперповерхность γ не касается характеристик. Таким образом, существование решения задачи Коши доказано.

5. Предположим, что задача Коши (16.1), (16.2) имеет два решения $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$. Введем $v = u_1 - u_2$, тогда

$$\langle\nabla v, \vec{a}(\vec{x})\rangle + a_0(\vec{x})v = 0, \qquad v|_\gamma = 0.$$

В силу уравнения (16.7) на характеристиках имеем

$$\frac{dv}{dt} + a_0(t)v = 0, \qquad v|_{t=0} = 0,$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений $v(t) = 0$. Следовательно, $u_1(\vec{x}) = u_2(\vec{x})$, и решение задачи Коши (16.1), (16.2) единственно. Таким образом, теорема доказана.

Пример 16.1. Найти решение задачи Коши для линейного уравнения бегущей волны:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \\ u|_\gamma = 1, \end{cases}$$

где $\gamma = \big\{(x,t) : x - at = 0\big\}$.

Решение. Общее решение уравнения имеет вид $u = f(x - at)$, где $f(\xi)$ – непрерывно дифференцируемая функция ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$), и, следовательно, $u|_\gamma = f(x-at)\big|_{x-at=0} = f(0) = 1$. Отсюда следует, что все решения задачи Коши определяются формулой $u(x,t) = f(x-at)$, где $f(\xi)$ такая, что $f(0) = 1$. В данном примере кривая γ сама является характеристикой системы (15.3).

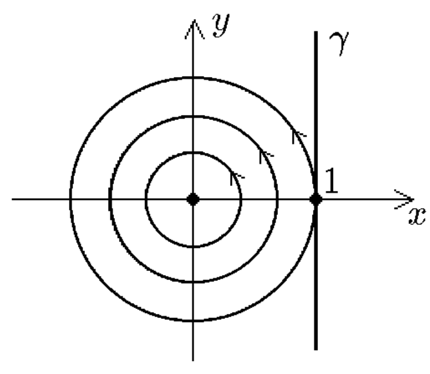

Рис. 11.

Пример 16.2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u|_{x=1} = u_0(y), \end{cases}$$

где $\gamma = \big\{(x,y) : x = 1\big\}$.

Решение. Фазовые траектории характеристической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

являются окружностями $x^2 + y^2 = c$, $c > 0$ (рис. 11). И, следовательно, общее решение уравнения имеет вид $u = F(x^2 + y^2)$, где $F(\xi) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Вычислим

$$u|_\gamma = F(x^2 + y^2)\Big|_{x=1} = F(1 + y^2) = u_0(y).$$

Отсюда следует, что если функция $u_0(y)$ не является четной, то задача Коши не имеет решения. В этом примере кривая γ не является характеристикой, но в одной своей точке ($x = 1, y = 0$) она касается характеристики $x^2 + y^2 = c$ при $c = 1$ (см. рис. 11). В результате условия теоремы 15.1 нарушены.

$\lozenge$ Из доказательства теоремы 16.1 следует, что для решения задачи Коши (16.1), (16.2) достаточно реализовать следующую процедуру или алгоритм, который иногда будем называть «алгоритм A2»:

1) построить характеристики системы (16.3), проходящие через поверхность γ и найти $\vec{x} = \vec{X}(t, s_1, \ldots, s_{n-1})$ – решение задачи Коши (16.3), (16.4);
2) решить семейство задач Коши (16.7), т.е. найти $u = U(t, s_1, \ldots, s_{n-1})$;
3) найти решение системы (16.5)

$$t = T(\vec{x}), \qquad s_k = S_k(\vec{x}), \qquad k = \overline{1, n-1}; \tag{16.8}$$

4) используя (16.8), вычислить

$$u(\vec{x}) = U\big(T(\vec{x}), S_1(\vec{x}), \ldots, S_{n-1}(\vec{x})\big).$$

Пример 16.3. Используя приведенную выше схему, найти решение задачи Коши

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad u\Big|_{z=1} = x^y.$$

Решение. 1. В этом случае характеристическая система имеет вид

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = 0, \qquad \dot{z} = -yz. \tag{16.9}$$

Уравнение поверхности Коши $z = 1$ в параметрической форме запишется как

$$x = s_1, \quad y = s_2, \quad z = 1, \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2,$$

начальные условия примут вид

$$x\Big|_{t=0} = s_1, \quad y\Big|_{t=0} = s_2, \quad z\Big|_{t=0} = 1.$$

Из (16.9) найдем

$$x = X(t, s_1, s_2) = s_1 e^t, \quad y = Y(t, s_1, s_2) = s_2,$$
$$z = Z(t, s_1, s_2) = e^{-s_2 t}.$$

2. Задача Коши (16.7) примет вид

$$\dot{u} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = s_1^{s_2},$$

откуда

$$u = V(t, s_1, s_2) = s_1^{s_2}.$$

3. Разрешим систему уравнений

$$x = s_1 e^t, \qquad y = s_2, \qquad z = e^{s_2 t}$$

относительно t, s_1 и s_2. Получим

$$s_2 = y, \qquad s_1 = e^{-t}x, \qquad s_2 t = -\ln z,$$

откуда

$$s_1 = S_1(x, y, z) = xe^{(\ln z)/y}, \quad s_2 = S_2(x, y, z) = y,$$
$$t = T(x, y, z) = -\tfrac{\ln z}{y}.$$

4. Окончательно получим

$$u = U(T(x, y, z), S_1(x, y, z), S_2(x, y, z)) = \Big[xe^{(\ln z)/y}\Big]^y = zx^y,$$

что совпадает с (15.26).

Пример 16.4. Используя приведенную выше схему, найти решение задачи Коши

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial u}{\partial y} = u, \qquad u\Big|_{x=2} = y - 4.$$

Решение. 1. Характеристическая система имеет вид

$$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y + x^2. \tag{16.10}$$

Уравнение поверхности Коши $x = 2$ в параметрической форме имеет вид

$$x = 2, \quad y = s_1, \quad s_1 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, для системы (16.10) необходимо поставить начальные условия

$$x\Big|_{t=0} = 2, \quad y\Big|_{t=0} = s_1.$$

Из (16.10) найдем

$$x = 2e^t, \quad y = (s_1 - 4)e^t + 4e^{2t}. \tag{16.11}$$

2. Для определения функции $U(t, s_1)$ получим задачу Коши

$$\dot{u} = u, \qquad u\Big|_{t=0} = s_1 + 4,$$

откуда

$$u = V(t, s_1) = (s_1 + 4)e^t. \tag{16.12}$$

3. Разрешим систему уравнений (16.11) относительно t, s_1. Получим

$$t = \ln\frac{x}{2}, \qquad s_1 = ye^{-t} - 4e^t = \frac{2y}{x} - 2x + 4. \tag{16.13}$$

4. Подставив (16.13) в (16.12), окончательно получим

$$u(x, y) = \Big(\frac{2y}{x} - 2x\Big)\frac{x}{2} = y - x^2,$$

что совпадает с (15.35).

Пример 16.5. Найти общее решение *уравнение Эйлера–Хопфа* (*уравнение нелинейной бегущей волны*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (x = (x_1, x_2) = (x, t)),$$

где скорость распространения волны $a = a(u) = u$ зависит от отклонения. Показать, что это уравнение описывает поле скоростей $u(x, t)$ в среде, состоящей из континуума частиц ξ, движущихся равномерно и прямолинейно.

Решение. 1. Действительно, для каждой частицы, начальная координата которой $\xi \in \mathbb{R}$, имеем $\ddot{x} = 0$. Поэтому $x = X(\xi, t) = \xi + v_0(\xi)t$, где $v_0(\xi)$ – начальная скорость частицы. Координата ξ называется *лагранжевой координатой* (для одномерной среды), t – время.

По определению поля скоростей имеем

$$\frac{dX}{dt} = u\big(X(\xi, t), t\big).$$

Следовательно,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t}\big(X(\xi, t), t\big) + \frac{\partial u}{\partial x}\big(X(\xi, t), t\big)\dot{X} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}\big(X(\xi, t), t\big) + \frac{\partial u}{\partial x}\big(X(\xi, t), t\big)u\big(X(\xi, t), t\big) = 0.$$

Если якобиан

$$J_x = \frac{\partial}{\partial \xi}X(\xi, t) \neq 0,$$

то для уравнения $x = X(\xi, t)$ существует единственное гладкое решение $\xi = \xi(x, t)$. И, следовательно, последнее равенство примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Координата x называется *эйлеровой координатой среды.*

2. Характеристическая система для уравнения Эйлера–Хопфа имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{t} = 1, \\ \dot{u} = 0, \end{cases}$$

поскольку $a(x, u) = (u, 1)$, $b(x, u) = 0$, $\vec{v} = (u, 1, 0)$.

Найдем два первых интеграла:

1) поскольку $\dot{u} = 0$, то $u = C_1$;

2) поскольку $\dfrac{dx}{dt} = u = C_1$, то $x = C_1t + C_2$ и, следовательно, $x - ut = C_2$.

Согласно следствию 15.1.1, решение u задается неявно уравнением $F(u, x-ut) = 0$, где $F(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. В предположении, что $\partial F/\partial \xi_1 \neq 0$, общее решение уравнения Эйлера–Хопфа можно записать в виде $u = f(x - ut)$.

17. Интегрирование уравнений неразрывности и переноса

17.1. Интегрирование уравнения неразрывности

Рассмотрим в трехмерном пространстве течение идеальной сжимаемой жидкости (без трения, без источника и стока) с заданным полем скоростей $\vec{v}(\vec{x},t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4_{x,t})$.

Пусть $\rho(x,t)$ – плотность жидкости в точке $\vec{x}$ в момент времени t. Из закона сохранения массы следует, что функция $\rho(x,t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \langle\nabla, \rho(\vec{x},t)\vec{v}(\vec{x},t)\rangle = 0, \tag{17.1}$$

которое называется *уравнением неразрывности*.

Поставим для (17.1) задачу Коши:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(\vec{x}), \tag{17.2}$$

где $\rho_0(\vec{x}) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ – заданная начальная плотность жидкости.

Пользуясь формулой векторного анализа

$$\nabla\rho(\vec{x},t)\vec{v} = \langle\nabla_x\rho(\vec{x},t), \vec{v}(\vec{x},t)\rangle + \rho(\vec{x},t)\operatorname{div}_x\vec{v}(\vec{x},t), \tag{17.3}$$

запишем уравнение (17.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \langle\nabla_x\rho, \vec{v}(x,t)\rangle + \rho\operatorname{div}_x\vec{v}(x,t) = 0. \tag{17.4}$$

Уравнение (17.4) представляет собой линейное однородное ($f = 0$) уравнение первого порядка размерности $n = 4$ ($(\vec{x},t) \in \mathbb{R}^4$). Гиперповерхность $\gamma \subset \mathbb{R}^4$, отвечающая начальному условию (17.2), задается так: $\gamma = \big\{(x,t):\ t = 0,\ \vec{x} = \vec{\xi},\ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3\big\}$, причем $\rho|_\gamma = \rho_0(\vec{\xi})$.

Очевидно, что в данном примере выполнены все условия теоремы 16.1, обеспечивающие существование единственного гладкого решения задачи (17.1), (17.2) в некоторой окрестности $V_T(\gamma)$ ($\delta = T$) гиперповерхности γ (рис. 12). В частности, векторное поле $a(\vec{x},t) = \big(\vec{v}(\vec{x},t), 1\big)$, $a(\vec{x},t) \in \mathbb{R}^4$, отвечающее (17.1), «трансверсально» γ.

Решение задачи (17.1), (17.2) можно найти с помощью следующего алгоритма:

1°. Запишем характеристическую систему в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^4_{x,t}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{d\tau} = \dot{x} = \vec{v}(x,t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \dfrac{dt}{d\tau} = \dot{t} = 1. \end{cases} \tag{17.5}$$

2°. Выпишем соответствующие начальные условия для этой системы:

$$\begin{cases} \vec{x}|_{\tau=0} = \vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, \\ t|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \tag{17.6}$$

Обозначим решение задачи (17.5), (17.6) на интервале $\mathbb{I}_\delta = (0,\delta)$, $\delta > 0$ через

$$\vec{x} = \vec{X}(\vec{\xi},\tau), \qquad \vec{x}, \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3, \qquad t = \tau, \quad \tau \in [0,T]; \tag{17.7}$$

где ℓ_ξ – соответствующая характеристика, «выходящая» из точки ξ в момент времени $\tau = 0$ (см. рис. 12).

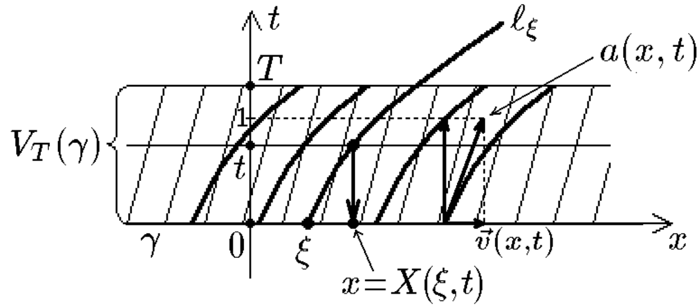

Рис. 12.

3°. Плотность среды $\rho(\vec{x},t)$ в лагранжевых координатах – функция $\rho(\vec{x},t)\big|_{\ell_\xi} = \tilde\rho(\vec\xi,\tau)$ – удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde\rho}{d\tau}(\vec\xi,\tau) + \tilde\rho(\vec\xi,\tau)\big[\nabla_x \vec v(x,t)\big]\Big|_{\substack{x=X(\xi,\tau),\\ t=\tau}} = 0, \\ \tilde\rho|_{\tau=0} = \rho_0(\vec\xi). \end{cases} \tag{17.8}$$

Очевидно, что решение этой задачи имеет вид

$$\tilde\rho(\vec\xi,\tau) = \rho_0(\vec\xi)\exp\Big[-\int\limits_0^\tau (\operatorname{div}{}_x\vec v)|_{\substack{\vec x=\vec X(\vec\xi,\tau'),\\ t=\tau'}}\, d\tau'\Big]. \tag{17.9}$$

4°. Разрешим систему (17.7) относительно τ и $\vec\xi$:

$$\begin{cases} \tau = t, \\ \vec\xi = \vec\Xi(\vec x,t), \end{cases}$$

где вектор-функция $\vec\Xi(\vec x,t)$ – гладкое решение системы уравнений

$$x_i = X_i(\vec\xi,t), \qquad i=1,2,3. \tag{17.10}$$

Здесь $\vec X(\vec\xi,t)$ – проекция точки (с координатой t) на характеристике ℓ_ξ на конфигурационное пространство $\mathbb{R}^3_x$ (см. рис. 12) – есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\vec x} = \vec v(\vec x,t), \\ \vec x|_{t=0} = \vec\xi. \end{cases} \tag{17.11}$$

Вычислим соответствующий якобиан:

$$J(\vec\xi,\tau)\big|_{\tau=t} = \frac{D\big(X(\vec\xi,\tau),T(\vec\xi,\tau)\big)}{D(\vec\xi,\tau)}\Bigg|_{\tau=t} =$$

$$= \left[\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec X(\vec\xi,\tau)}{\partial\vec\xi} & \dfrac{\partial\vec X(\vec\xi,\tau)}{\partial\tau} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\Bigg|_{\tau=t} =$$

$$= \det\left(\frac{\partial\vec X(\vec\xi,t)}{\partial\vec\xi}\right) = \det\left(\frac{\partial X_i}{\partial\xi_j}(\vec\xi,t)\right)_{3\times3} = J_x(\vec\xi,t)$$

и будем считать, что

$$J_x(\vec\xi,t) \neq 0. \tag{17.12}$$

5°. Тогда в окрестности $V_T(\gamma) = \{(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \vec{X}(\vec{\xi}, t),\ t \in [0, T]$ и $J_x(\vec{\xi}, t) \neq 0\}$ (рис. 12) решение задачи (17.1), (17.2) определяется формулой

$$\rho(\vec{x}, t) = \big[\tilde{\rho}(\vec{\xi}, \tau)\big]\Big|_{\substack{\vec{\xi}=\vec{\xi}(\vec{x},t),\\ \tau=t}} =$$

$$= \left\{\rho_0(\vec{\xi}) \exp\left[-\int\limits_0^t \operatorname{div}_x \vec{v}(\vec{x}, t)|_{\vec{x}=\vec{X}(\vec{\xi},t')}\, dt'\right]\right\}\Bigg|_{\vec{\xi}=\vec{\Xi}(\vec{x},t)}. \qquad (17.13)$$

Теорема 17.1. *Пусть при $t \in [0, T]$ и $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$ выполняется условие* (17.12). *Тогда формула* (17.13) *преобразуется к следующему виду:*

$$\rho(\vec{x}, t) = \left[\frac{\rho_0(\vec{\xi})}{J_x(\vec{\xi}, t)}\right]\Bigg|_{\vec{\xi}=\vec{\Xi}(\vec{x},t)}, \qquad (17.14)$$

где, напомним,

$$J_x(\vec{\xi}, t) = \det\left(\frac{\partial \vec{X}(\vec{\xi}, t)}{\partial \vec{\xi}}\right) \neq 0, \qquad t \in [0, T], \quad \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3, \qquad (17.15)$$

вектор-функция $\vec{X}(\vec{\xi}, t)$ – решение задачи Коши (17.11), *а $\vec{\xi} = \vec{\Xi}(x, t)$ – единственное гладкое решение системы* (17.10).

Доказательство этой теоремы основывается на известной формуле Лиувилля.

Лемма 17.1 (формула Лиувилля). *Якобиан $J_x(\vec{\xi}, t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d}{dt} J_x(\vec{\xi}, t) = J_x(\xi, t)\big(\operatorname{div}_x \vec{v}(\vec{x}, t)\big)\Big|_{\vec{x}=\vec{X}(\vec{\xi},t)}. \qquad (17.16)$$

Доказательство теоремы 17.1. С учетом леммы 17.1 из формулы (17.13) получаем

$$\rho(\vec{x}, t) = \left\{\rho_0(\vec{\xi}) \exp\left[-\int\limits_0^t \frac{\dot{J}_x}{J_x} dt'\right]\right\}\Bigg|_{\vec{\xi}=\vec{\Xi}(x,t)} =$$

$$= \big[\rho_0(\vec{\xi}) e^{-[\ln J_x(\vec{\xi},t) - \ln J_x(\vec{\xi},0)]}\big]\Big|_{\vec{\xi}=\vec{\Xi}(x,t)} = \big[\rho_0(\vec{\xi}) {J_x}^{-1}(\vec{\xi}, t)\big]\Big|_{\vec{\xi}=\vec{\Xi}(\vec{x},t)}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $J(\vec{\xi}, 0) = 1$).

Докажем теперь формулу Лиувилля (17.16). Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 17.2. *Пусть $\vec{x} = \vec{X}(\alpha, t)$ – однопараметрическое ($\alpha \in \mathbb{R}$ – параметр) гладкое семейство решений системы уравнений $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Тогда производная*

$$\frac{\partial \vec{X}(\alpha, t)}{\partial \alpha} = \vec{a}(\alpha, t) \in \mathbb{R}^3$$

удовлетворяет линейной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = V_x\big(\vec{X}(\alpha, t), t\big)\vec{a}(\alpha, t), \qquad V_x = \left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{3\times3}. \qquad (17.17)$$

$\Diamond$ Эта система, как известно, есть система в вариациях, отвечающая нелинейному уравнению $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ и его решению $\vec{x} = \vec{X}(\alpha, t)$.

Доказательство. Проведем доказательство для случая $n = 1$ ($x \in \mathbb{R}^1$). Пусть $x = \vec{X}(\alpha, t)$ – однопараметрическое гладкое семейство решений уравнения $\dot{x} = v(x, t)$. Тогда, продифференцировав по параметру α тождество

$$\frac{dX(\alpha, t)}{dt} = v\big(\vec{X}(\alpha, t), t\big),$$

получим (воспользовавшись теоремой Юнга: $(\partial/\partial\alpha)(d/dt) = (d/dt)(\partial/\partial\alpha)$) требуемое равенство:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}X(\alpha, t) = \frac{\partial v}{\partial x}\big(X(\alpha, t), t\big)\frac{\partial X}{\partial\alpha}(\alpha, t).$$

Доказательство леммы 17.1. Если существует трехпараметрическое гладкое семейство $\vec{x} = \vec{X}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) \in \mathbb{R}^3$ решений системы $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, то, применив (17.17) для каждого вектора $\vec{a}_i = \partial\vec{X}/\partial\alpha_i$, получим, что матрица $Y(\vec{\alpha}, t) = \partial X(\alpha, t)/\partial\alpha$ размерности 3×3 удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{Y} = V_x\big(\vec{X}(\vec{\alpha}, t), t\big)Y. \tag{17.18}$$

Положим теперь $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. Обозначим $J(\vec{\alpha}, t) = \det Y(\vec{\alpha}, t)$, считая, что $\det Y(\vec{\alpha}, t) \neq 0$, $0 \leq t \leq \delta$ ($\det Y(\vec{\alpha}, 0) = 1$), и воспользуемся правилом дифференцирования определителя невырожденной матрицы:

$$\frac{d}{dt}\det Y(\vec{\alpha}, t) = \det Y(\vec{\alpha}, t)\,\mathrm{Sp}\,\Big(\dot{Y}Y^{-1}\Big)(\vec{\alpha}, t).$$

Отсюда в силу (17.18) найдем, что

$$\frac{dJ}{dt} = J\,\mathrm{Sp}\,\Big(V_x\big(X(\vec{\alpha}, t), t\big)YY^{-1}\Big) = J\,\mathrm{Sp}\,\Big(V_x\big(X(\vec{\alpha}, t), t\big)\Big).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\mathrm{Sp}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{3\times3} = \mathrm{Sp}\ V'_x\big(X(\vec{\alpha}, t)\big) = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\big(x(\vec{\alpha}, t), t\big) = \mathrm{div}\,_x\vec{v}(\vec{x}, t)\big|_{\vec{x}=\vec{X}(\vec{\alpha}, t)}.$$

17.2. Интегрирование уравнений переноса

Как уже отмечалось ранее, амплитуда колебаний в волновых процессах определяется в коротковолновом приближении из так называемого *уравнения переноса*. Приведем здесь лишь два варианта этого уравнения: 1) для амплитуды $\varphi(x, t)$ решения задачи Коши (в квазиклассическом приближении) для уравнения Шрёдингера (см. [7]); 2) для амплитуды $\psi(x, t)$ решения задачи Коши (в коротковолновом приближении) для волнового уравнения (см. [7]).

В первом случае уравнение переноса имеет вид

$$\langle\vec{u}(\vec{x}, t), \nabla_{x,t}\varphi(\vec{x}, t)\rangle + f(\vec{x}, t)\varphi(\vec{x}, t) = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \tag{17.19}$$

где $\nabla_{x,t} = \big(\nabla_x, \partial/\partial t\big)$, $u(\vec{x}, t) = \big(\vec{v}(\vec{x}, t), 1\big)$, причем заданное трехмерное векторное поле $\vec{v}(\vec{x}, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ является потенциальным полем с потенциалом $S(\vec{x}, t)$:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \nabla_x S(\vec{x}, t), \tag{17.20}$$

а функция f также определяется через потенциал $S(\vec{x},t)$ по формуле

$$f(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\Delta S(\vec{x},t), \tag{17.21}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \partial^2/\partial {x_i}^2$ – оператор Лапласа.

Во втором случае уравнение переноса для амплитуды $\psi(\vec{x},t)$ записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} - a^2(\vec{x},t)\langle \nabla S(\vec{x},t), \nabla_x \psi(\vec{x},t)\rangle + f(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \tag{17.22}$$

где $S(\vec{x},t)$ и $a(\vec{x},t)$ – гладкие функции, $a(\vec{x},t) > 0$, а функция f также определяется через $S(\vec{x},t)$ по формуле

$$f(\vec{x},t) = \Box_a S = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - a^2(\vec{x},t)\Delta S\right). \tag{17.23}$$

Проинтегрируем уравнение (17.19) при условии, что

$$\varphi(\vec{x},t)\Big|_{t=0} = \varphi_0(\vec{x}), \qquad \varphi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^3), \quad \Omega_0 = \operatorname{supp} \varphi_0 \tag{17.24}$$

($\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^3)$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций в $\mathbb{R}_x^3$ с компактным носителем). Обозначим через $\vec{X}(\vec{x}_0,t)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x},t), \\ \vec{x}|_{t=0} = \vec{x}_0, \qquad \vec{x}_0 \in \Omega_0, \end{cases} \tag{17.25}$$

и пусть якобиан

$$J_x(\vec{x}_0,t) = \frac{D\vec{X}(\vec{x}_0,t)}{D\vec{x}_0} \neq 0, \qquad \vec{x}_0 \in \Omega_0, \quad t \in [0,T]. \tag{17.26}$$

Обозначим через $\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x},t)$ единственное гладкое решение системы

$$x_i = X_i(\vec{x}_0,t), \qquad i = 1,2,3, \quad \vec{x}_0 \in \Omega_0, \quad t \in [0,T]. \tag{17.27}$$

Теорема 17.2. *Пусть выполнено условие* (17.26). *Тогда решение задачи* (17.19), (17.24) *на отрезке* $[0,T]$ *определяется формулой*

$$\varphi(\vec{x},t) = \left[\frac{\varphi_0(\vec{x}_0)}{\sqrt{J_x(\vec{x}_0,t)}}\right]\Bigg|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(x,t)}. \tag{17.28}$$

Доказательство следует из теоремы 17.1 и того факта, что *квадрат амплитуды колебаний* $\varphi^2(\vec{x},t)$ *удовлетворяет уравнению неразрывности* вида (17.1) с заданным полем скоростей $v(\vec{x},t)$, определяемым формулой (17.20). Действительно, для функции $\rho(\vec{x},t) = \varphi^2(\vec{x},t)$ в силу уравнения (17.19) и формулы векторного анализа (17.3) следует с учетом вида $f(\vec{x},t)$, что $\rho(\vec{x},t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \nabla_x S(\vec{x},t).$$

Отсюда и из формулы (17.14) следует утверждение теоремы.

Проинтегрируем теперь уравнение (17.22) в предположении, что функция $S(\vec{x},t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - a^2(\vec{x},t)(\nabla_x S)^2 = 0. \tag{17.29}$$

Как известно из курса общей физики, это нелинейное уравнение в частных производных первого порядка есть основное для геометрической оптики уравнение – *уравнение эйконала*. Его решение $S(\vec{x},t)$ определяет фазу электромагнитных колебаний волнового поля в коротковолновом приближении.

Способы интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка будут рассмотрены ниже. Здесь же мы предположим, что нам известны два гладких решения $S^{\pm}(\vec{x},t)$ этого уравнения, которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t} \pm a(\vec{x},t)|\nabla_x S^{\pm}| = 0 \tag{17.30}$$

соответственно и, следовательно, удовлетворяют и уравнению (17.29).

Обозначим через $\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,t)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}^{\pm} = \pm a(\vec{x},t)\dfrac{\nabla_x S^{\pm}}{|\nabla_x S^{\pm}|}(\vec{x},t), \\ \vec{x}^{\pm}|_{t=0} = \vec{x}_0, \qquad \vec{x}_0 \in \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3_x, \end{cases} \tag{17.31}$$

а через $\vec{x}_0 = \vec{X}_0^{\pm}(\vec{x},t)$ – гладкое решение системы

$$\vec{x} = \vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,t) \tag{17.32}$$

относительно параметра $\vec{x}_0 \in \Omega_0$.

Теорема 17.3. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *якобиан отображения* (17.32) *отличен от нуля:*

$$J_x^{\pm}(\vec{x}_0,t) = \frac{D\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,t)}{D\vec{x}_0} \neq 0, \qquad \vec{x}_0 \in \Omega_0, \quad t \in [0,T];$$

2) $\nabla_x S(\vec{x},0) \neq 0$, $\vec{x} \in \Omega_0$.
Тогда функция

$$\psi(\vec{x},t)^{\pm} = a(\vec{x},t)\left[\frac{\psi^0(\vec{x}_0)}{a(\vec{x}_0,0)\sqrt{J_x^{\pm}(\vec{x}_0,t)}}\right]\Bigg|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0^{\pm}(\vec{x},t)} \tag{17.33}$$

является гладким решением уравнения переноса на отрезке $[0,T]$

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\frac{\partial \psi^{\pm}}{\partial t} - a^2\langle\nabla_x S^{\pm}, \nabla_x \psi^{\pm}\rangle + \frac{1}{2}\Box_a S^{\pm}\psi^{\pm} = 0 \tag{17.34}$$

и удовлетворяет начальному условию

$$\psi^{\pm}|_{t=0} = \psi^0(\vec{x}), \tag{17.35}$$

где $\psi^0(\vec{x})$ *– произвольная гладкая функция.*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы лишь для случая, когда скорость распространения колебаний $a(\vec{x},t)$ постоянна ($a(\vec{x},t)=a=\text{const}$, $a>0$).

Действуем, следуя пунктам алгоритма А1.

Пусть $\big(\vec{x}=\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau), t=t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big)$ – решение характеристической системы для (17.34)

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}^{\pm}}{d\tau} = -a^2\dfrac{\partial S^{\pm}}{\partial \vec{x}}(\vec{x},t), \\ \dfrac{dt^{\pm}}{d\tau} = \dfrac{\partial S^{\pm}}{\partial t}(\vec{x},t) \end{cases} \tag{17.36}$$

с начальными данными $\vec{x}(0)=\vec{x}_0\in\Omega_0$, $t(0)=0$.

На характеристике $\ell_{\vec{x}_0,\tau=0}$ уравнение переноса (17.34) есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $\widetilde{\psi}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)=\psi^{\pm}\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau),t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big)$:

$$\frac{d\widetilde{\psi}^{\pm}}{d\tau}(\vec{x}_0,\tau)+\widetilde{\psi}^{\pm}\frac{1}{2}\Box_a S^{\pm}\big|_x=0. \tag{17.37}$$

Из леммы 17.1 для системы (17.36) следует, что якобиан

$$\widetilde{J}^{\pm}_x(\vec{x}_0,\tau)=\frac{D\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau),t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big)}{D(\vec{x}_0,\tau)}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\widetilde{J}^{\pm}_x}{d\tau}=\widetilde{J}^{\pm}_x\Box_a S^{\pm}\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau),t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big). \tag{17.38}$$

Действительно,

$$\frac{d}{d\tau}\big(\widetilde{J}^{\pm}_x(\vec{x}_0,\tau)\big)^{-1/2}=-\frac{1}{2}\big(\widetilde{J}^{\pm}_x(\vec{x}_0,\tau)\big)^{-3/2}\frac{d\widetilde{J}^{\pm}_x}{d\tau}=$$
$$=-\frac{1}{2}\big(\widetilde{J}^{\pm}_x(\vec{x}_0,\tau)\big)^{-3/2}\widetilde{J}^{\pm}_x(\vec{x}_0,\tau)\Box_a S^{\pm}=-\frac{1}{2}\Big(\widetilde{J}^{\pm}_x(\vec{x}_0,\tau)\Big)^{-1/2}\Box_a S^{\pm}.$$

Теперь преобразуем якобиан $\widetilde{J}^{\pm}_x(\vec{x}_0,\tau)$:

$$\widetilde{J}^{\pm}_x(\vec{x}_0,\tau)=\frac{D\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau),t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big)}{D(\vec{x}_0,\tau)}=\frac{D\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau),t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big)}{D(\vec{x}_0,t)}\frac{D(\vec{x}_0,t)}{D(\vec{x}_0,\tau)}=$$
$$=\frac{D\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big)}{D\vec{x}_0}\frac{dt^{\pm}}{d\tau}(\vec{x}_0,\tau)=J^{\pm}_x(\vec{x}_0,t)\frac{dt^{\pm}}{d\tau}(\vec{x}_0,\tau). \tag{17.39}$$

Докажем, что производная $(dt^{\pm}/d\tau)(\vec{x}_0,\tau)$ постоянна вдоль траекторий системы (17.36). В самом деле, в силу (17.36) и уравнения (17.30) имеем

$$\frac{dt^{\pm}}{d\tau}(\vec{x}_0,\tau)=\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\bigg|_{\substack{\vec{x}=\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau),\\ t=t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)}}=\mp a\big|\nabla_x S^{\pm}\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau),t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big)\big|=\mp a\big|P^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big|.$$

Вычислим теперь

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{P}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)=\mp\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla_x S^{\pm}\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau),t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big)=\mp\nabla_x\bigg(\Big\langle\nabla_x S^{\pm},\frac{d\vec{X}^{\pm}}{d\tau}\Big\rangle+\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\frac{\partial t^{\pm}}{\partial\tau}\bigg).$$

Отсюда в силу системы (17.36) найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{P}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau) = \mp\nabla_x\left[\left\langle\nabla_x S^{\pm}, -a^2\nabla_x S^{\pm}\right\rangle + \left(\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\right)^2\right] =$$

$$= \mp\nabla_x\left[\left(\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\right)^2 - a^2\big(\nabla_x S^{\pm}\big)^2\right]\big(\vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,\tau), t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau)\big) = 0,$$

поскольку функции $S^{\pm}(\vec{x},t)$ удовлетворяют уравнению эйконала (17.29): $\Box_a S^{\pm} = 0$.

Таким образом, изменив на фиксированной траектории системы (17.36) масштаб времени $\tau \to t$, с учетом формулы

$$\frac{dt^{\pm}}{d\tau}(\vec{x}_0,\tau) = \mp a\left|\vec{P}^{\pm}(\vec{x}_0)\right| \neq 0$$

из формул (17.38) и (17.39) найдем, что функция

$$\psi^{\pm}(\vec{x},t) = \left[\frac{\psi^0(\vec{x}_0)}{\sqrt{J_x^{\pm}(\vec{x}_0,t)}}\right]\Bigg|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0^{\pm}(x,t)},$$

где $\psi^0(\vec{x})$ – произвольная гладкая функция, является решением уравнения переноса (17.34). Для завершения доказательства остается заметить, что при замене параметра τ на t $(t = t^{\pm}(\vec{x}_0,\tau))$ функция $X^{\pm}\big(\vec{x}_0, \tau^{\pm}(\vec{x}_0,t)\big) = \vec{X}^{\pm}(\vec{x}_0,t)$ есть решение системы (17.32).

Пример 17.1. Рассмотрим теперь одномерную по x версию уравнения переноса (17.22) в стационарной неоднородной среде (т.е. в такой среде, в которой скорость распространения колебаний $a(x,t)$ не зависит от времени t и является гладкой функцией x: $a(x,t) \equiv a(x) > 0$)

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\frac{\partial\psi^{\pm}}{\partial t} - a^2(x)\frac{\partial S^{\pm}}{\partial x}\frac{\partial\psi^{\pm}}{\partial x} + \frac{1}{2}\Box_a S^{\pm}\psi^{\pm} = 0. \tag{17.40}$$

Здесь функции $S^{\pm}(x,t)$ есть гладкие решения уравнения линейной бегущей волны в неоднородной среде со скоростью $\pm a(x)$ соответственно

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t} \pm a(x)\frac{\partial S^{\pm}}{\partial x} = 0. \tag{17.41}$$

Обозначим через $X(x_0,t)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x), \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases} \tag{17.42}$$

(которое, очевидно, легко находится в квадратурах). Тогда общее решение уравнения переноса (17.40) задается формулой

$$\psi^{\pm}(x,t) = \psi^0\big(X(x,\mp t)\big)\sqrt{\frac{a(x)}{a\big(X(x,\mp t)\big)}}, \tag{17.43}$$

где $\psi^0(x)$ – произвольная гладкая функция.

18. Уравнение Гамильтона–Якоби

♦ Уравнение в частных производных первого порядка, не содержащее явным образом неизвестную функцию, называется уравнением Гамильтона–Якоби. Уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S, \vec{x}, t) = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n_x, \quad S = S(\vec{x}, t) \tag{18.1}$$

и

$$\mathcal{H}(\nabla S, \vec{x}) = E, \quad \nabla S = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}}, \qquad E = \mathrm{const}, \quad S = S(\vec{x}) \tag{18.2}$$

называются нестационарным и стационарным уравнениями Гамильтона–Якоби, а их решения — функции $S(\vec{x}, t)$ и $S(\vec{x})$ — нестационарным и стационарным действием соответственно. Функция $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n_p$, называется функцией Гамильтона или гамильтонианом; n-мерное пространство $\mathbb{R}^n_x$ называется конфигурационным; $2n$-мерное пространство $\mathbb{R}^{2n}_{xp} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$ – фазовым. Если гамильтониан не зависит от времени, то он называется стационарным.

♢ Уравнение Гамильтона–Якоби – основное уравнение классической механики и, кроме того, естественным образом возникает в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, поскольку произвольное уравнение в частных производных первого порядка может быть сведено к уравнению (18.1) или (18.2), о чем говорит следующее утверждение, которое непосредственно следует из теоремы о дифференцировании неявных функций:

$$-\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \Big/ \frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial \vec{x}} = \nabla u.$$

Утверждение 18.1. Произвольное уравнение в частных производных первого порядка

$$F(\vec{x}, u, \nabla u) = 0 \tag{18.3}$$

для функции n переменных $u(\vec{x})$ эквивалентно уравнению Гамильтона–Якоби

$$F\Big(\vec{x}, z, -\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \Big/ \frac{\partial S}{\partial z}\Big) = 0 \tag{18.4}$$

для функции $n+1$ переменных $S(\vec{x}, z)$. Решения уравнений (18.3) и (18.4) связаны соотношением

$$S(\vec{x}, u) = \mathrm{const}\,.$$

18.1. Задача Коши для нестационарного уравнения Гамильтона–Якоби

♦ Задачей Коши для уравнения (18.1) называется задача об отыскании функции $S(\vec{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению (18.1) при $t > t_0$ и условию

$$S(\vec{x}, t)|_{t=t_0} = S_0(\vec{x}) \tag{18.5}$$

при $t = t_0$. Здесь $S_0(\vec{x})$ – заданная гладкая функция переменной $\vec{x}$.

♦ Системой Гамильтона, соответствующей гамильтониану $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n_x$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n_p$, $t > 0$, называется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)}{\partial \vec{p}}, \qquad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}. \tag{18.6}$$

Система (18.6) также называется характеристической системой уравнения (18.1), а ее решения – характеристиками.

♦ Задачей Коши для системы Гамильтона называется задача об определении вектор-функций $\vec{p}(t)$ и $\vec{x}(t)$, удовлетворяющих при $t > t_0$ системе (18.1), а при $t = t_0$ – условиям

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \qquad \vec{p}(t_0) = \vec{p}_0, \qquad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n_x, \qquad \vec{p}_0 \in \mathbb{R}^n_p. \tag{18.7}$$

Для интегрирования систем со стационарными гамильтонианами оказывается полезным следующее утверждение.

Утверждение 18.2. Пусть гамильтониан $\mathcal{H}$ не зависит явно от переменной t. Тогда он является интегралом системы (18.6).

Действительно, пусть $\vec{x}(t)$ и $\vec{p}(t)$ – решения системы Гамильтона (18.6). Тогда продифференцировав функцию $\mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{x}(t))$ по t с учетом системы Гамильтона (18.6), найдем

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{x}(t)) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}\Big) = 0,$$

т.е. $\mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{x}(t)) = \mathrm{const}$, что и требовалось показать.

Лемма 18.1. *Пусть* $S(\vec{x}, t)$ *– решение задачи Коши* (18.5) *для уравнения Гамильтона–Якоби* (18.1), *а функция* $\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0)$ *– решение задачи Коши*

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}(\nabla S(\vec{x}, t), \vec{x}, t), \qquad \vec{x}|_{t=t_0} = \vec{x}_0. \tag{18.8}$$

Тогда функции $\vec{X}(t, \vec{x}_0)$ *и* $\vec{p}(t) = \nabla S(\vec{X}(t, \vec{x}_0), t)$ *удовлетворяют системе Гамильтона* (18.6) *с начальным условием*

$$\vec{X}(t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0, \qquad \vec{P}(t_0, \vec{x}_0) = \frac{\partial S_0(\vec{x}_0, t_0)}{\partial \vec{x}_0}. \tag{18.9}$$

Доказательство. Обозначим $\vec{p}(\vec{x}, t) = \nabla S(\vec{x}, t)$ и продифференцируем уравнение Гамильтона–Якоби по $\vec{x}$. Получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t) = \\ = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t)}{\partial p_k}\frac{\partial p_k(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} = 0.\end{gathered} \tag{18.10}$$

Положим $\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0)$, где $\vec{X}(t, \vec{x}_0)$ – решение уравнения (18.8). С другой стороны,

$$\begin{gathered}\dot{\vec{p}} = \Big\{\frac{\partial \vec{p}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \vec{p}(\vec{x}, t)}{\partial x_k}\dot{X}_k\Big\}\Big|_{\vec{x}=\vec{X}(t,\vec{x}_0)} = \\ = \Big\{\frac{\partial \vec{p}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_k(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t)}{\partial p_k}\Big\}\Big|_{\vec{x}=\vec{X}(t,\vec{x}_0)} = \\ = -\frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(\vec{x}, t), \vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}\Big|_{\vec{x}=\vec{X}(t,\vec{x}_0)}.\end{gathered}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (18.10). Следовательно, лемма доказана.

Теорема 18.1. 1. *Пусть при* $t \in [0, T]$ *существует решение*

$$x_j = X_j(t, \vec{x}_0), \qquad p_j = P_j(t, \vec{x}_0), \qquad j = \overline{1, n}, \tag{18.11}$$

задачи Коши (18.9) *для системы Гамильтона* (18.6), *дифференцируемое по параметру* $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n_x$.

2. *Пусть при* $t \in [0, T]$ *существует единственное и гладкое решение системы уравнений*

$$\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0) \tag{18.12}$$

относительно $\vec{x}_0$, $\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)$, *т.е. якобиан*

$$J(\vec{x}_0, t) = \det \left\| \frac{\partial X_j(t, \vec{x}_0)}{\partial x_{i0}} \right\|, \qquad t \in [0, T], \tag{18.13}$$

отличен от нуля для $\vec{x} \in \mathbb{R}^n_x$.

3. *Пусть*

$$S(t, \vec{x}_0) = S_0(\vec{x}_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \big[\langle \vec{P}(\tau), \dot{\vec{X}}(\tau)\rangle - \mathcal{H}(\tau)\big] d\tau \tag{18.14}$$

– действие (см. разд. «Уравнения Эйлера–Лагранжа (многомерный случай)» части II) *вдоль характеристики* (18.11).

Тогда функция

$$S(\vec{x}, t) = S(t, \vec{x}_0)\big|_{\vec{x}_0 = \vec{X}_0(\vec{x}, t)} \tag{18.15}$$

является решением задачи Коши (18.1), (18.5).

$\Diamond$ Здесь и далее, где это не приводит к недоразумениям, зависимость функций $\vec{P}$ и $\vec{X}$ от $\vec{x}_0$ опускается и используется обозначение $\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{H}(\vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau), \tau)$.

Доказательство. 1. Найдем частную производную

$$\frac{\partial}{\partial x_{0j}}[S(t, \vec{x}_0) - S_0(\vec{x}_0)] = \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \int\limits_{t_0}^{t} \big[\langle \vec{P}(\tau, \vec{x}_0), \dot{\vec{X}}(\tau, \vec{x}_0)\rangle - \mathcal{H}(\tau)\big] d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\Big\langle \frac{\partial \vec{P}(\tau)}{\partial x_{0j}}, \dot{\vec{X}}(\tau)\Big\rangle + \Big\langle \vec{P}(\tau), \frac{\partial \dot{\vec{X}}(\tau)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle -$$

$$- \Big\langle \mathcal{H}_{\vec{p}}(\tau), \frac{\partial \vec{P}(\tau)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle - \Big\langle \mathcal{H}_{\vec{x}}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle\Big) d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\Big\langle \vec{P}(\tau), \frac{\partial \dot{\vec{X}}(\tau)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle + \Big\langle \dot{\vec{P}}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle\Big) d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \tau}\Big\langle \vec{P}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle d\tau = \Big\langle \vec{P}(\tau), \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= \Big\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle - \Big\langle \vec{P}(t_0), \frac{\partial \vec{X}(t_0)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle,$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_{0j}}[S(t, \vec{x}_0) - S_0(\vec{x}_0)] = \Big\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle - \Big\langle \vec{P}(t_0), \frac{\partial \vec{X}(t_0)}{\partial x_{0j}}\Big\rangle$$

и

$$\frac{\partial S(t,\vec{x}_0)}{\partial x_{0j}} = \Big\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \Big\rangle. \tag{18.16}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\frac{\partial X_i(t_0)}{\partial x_{0j}} = \delta_{ij} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial S_0(\vec{x}_0)}{\partial x_{0j}} = P_j(t_0). \tag{18.17}$$

2. Найдем

$$\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S(t,\vec{x}_0)}{\partial x_{0j}} \frac{\partial X_{0j}(\vec{x},t)}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \Big\rangle \frac{\partial X_{0j}(\vec{x},t)}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)}. \tag{18.18}$$

Продифференцировав соотношение $\vec{X}(t,\vec{X}_0(\vec{x},t)) = \vec{x}$ по x_i, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_k(t,\vec{X}_0(\vec{x},t))}{\partial x_{0j}} \frac{\partial X_{0j}(\vec{x},t)}{\partial x_i} = \delta_{ik}.$$

Подставив последнее соотношение в (18.18), запишем

$$\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} = P_i(t,\vec{x}_0)\big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)}. \tag{18.19}$$

3. В силу (18.16), (18.17) получим

$$\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} = \Big\{ \langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle - \mathcal{H}(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_{0j}(\vec{x},t)}{\partial t} \frac{\partial S(t,\vec{x}_0)}{\partial x_{0j}} \Big\}\Big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)},$$

т.е.

$$\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} = \Big\{ \langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle - \mathcal{H}(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_{0j}(\vec{x},t)}{\partial t} \Big\langle \vec{P}(t), \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \Big\rangle \Big\}\Big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)}. \tag{18.20}$$

Продифференцировав соотношение $\vec{X}(t,\vec{X}_0(\vec{x},t)) = \vec{x}$ по t, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}[\vec{X}(t,\vec{X}_0(\vec{x},t)) - \vec{x}] = \Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \frac{\partial X_{0j}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial t} \Big]\Big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial x_{0j}} \frac{\partial X_{0j}}{\partial t}\Big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)} = -\frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial t}\Big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)}. \tag{18.21}$$

Подставив (18.21) в (18.20), найдем

$$\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} = -\mathcal{H}(\vec{P}(t), \vec{X}(t), t)\big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)}.$$

Воспользовавшись соотношением (18.19) и тем, что

$$\vec{X}(t,\vec{X}_0(\vec{x},t))=\vec{x},$$

получим

$$\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t}=-\mathcal{H}(\nabla S(\vec{x},t),\vec{x},t),$$

что и доказывает теорему.

Теорема 18.2. *Решение задачи Коши* (18.1), (18.5) *единственно, если выполняются условия предыдущей теоремы.*

Доказательство следует непосредственно из единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Доказанные выше теоремы обосновывают алгоритм А4 решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона — Якоби

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial S}{\partial t}+\mathcal{H}\Big(\dfrac{\partial S}{\partial\vec{x}},\vec{x},t\Big)=0, & \vec{x}\in\mathbb{R}^n\\ S\Big|_{t=0}=S_0(\vec{x}), & t>0\end{array}\right. \tag{18.22}$$

1. Выписать характеристическую систему для (18.22) – систему Гамильтона в $2n$-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\vec{p}}=-\mathcal{H}_{\vec{x}}(\vec{p},\vec{x},t),\\ \dot{\vec{x}}=\mathcal{H}_{\vec{p}}(\vec{p},\vec{x},t).\end{array}\right. \tag{18.23}$$

Функция Гамильтона (классический гамильтониан) определяется по виду (18.22).

2. Поставить для (18.23) задачу Коши

$$\left\{\begin{array}{ll}\vec{p}|_{t=t_0}=\dfrac{\partial S(\vec{x}_0)}{\partial\vec{x}_0}, & \\ \vec{x}|_{t=t_0}=\vec{x}_0, & \vec{x}_0\in\mathbb{R}^n_x,\end{array}\right. \tag{18.24}$$

и найти n-параметрическое ($\vec{x}_0$ — параметр) семейство решений задачи (18.23), (18.24):

$$\ell_{x_0}:\left\{\begin{array}{l}\vec{x}=\vec{X}(t,\vec{x}_0)\\ \vec{p}=\vec{P}(t,\vec{x}_0),\end{array}\right. \tag{18.25}$$

где $\ell_{x_0}\in\mathbb{R}^{2n}$ – характеристика или фазовая траектория, стартующая из точки $\vec{p}_0=S_{\vec{x}}(\vec{x}_0)$, $\vec{x}_0$. Проекция ℓ_{x_0} на $\mathbb{R}^n_x:\vec{x}=\vec{X}(t,\vec{x}_0)$, $t_0\leqslant t<t_0+T$ — «луч» или траектория классической частицы, начинающаяся из точки $\vec{x}_0$ с начальным импульсом $\vec{p}_0=S_{\vec{x}}(\vec{x}_0)$.

3. Вычислить действие $S(t_0,\vec{x}_0)$ на характеристике ℓ_{x_0}

$$S(t,\vec{x}_0)=S_0(\vec{x}_0)+\int\limits_{t_0}^{t}[\langle\vec{P}(\tau),\dot{\vec{X}}(\tau)\rangle-\mathcal{H}(\tau)]d\tau. \tag{18.26}$$

4. Разрешить первое уравнение системы (18.25) относительно параметра $\vec{x}_0$

$$\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t) \tag{18.27}$$

в предположении, что якобиан не равен нулю:

$$J(t,\vec{x}_0) = \frac{D\vec{X}(t,\vec{x}_0)}{D\vec{x}_0} \neq 0, \qquad t_0 \leqslant t < t_0 + T, \quad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

5. Построить функцию $S(\vec{x},t)$

$$S(\vec{x},t) = S(t,\vec{x}_0)\Big|_{\vec{x}_0=\vec{X}_0(\vec{x},t)}. \tag{18.28}$$

Пример 18.1. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)^2 = 0 \tag{18.29}$$

при следующих начальных данных:

$$1)\ \ S|_{t=0} = x\xi; \qquad 2)\ \ S|_{t=0} = \frac{x^2}{2};$$

$$3)\ \ S|_{t=0} = -\frac{x^3}{3}; \qquad 4)\ \ S|_{t=0} = -x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Здесь $\xi \in \mathbb{R}$ — некоторая постоянная. Указать, при каких значениях t решение существует.

Решение. Функция Гамильтона, отвечающая уравнению (18.29), имеет вид $\mathcal{H}(p,x,t) = p^2/(2m)$, поэтому система Гамильтона определяется выражением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp}{dt} = 0,$$

откуда следует

$$x = X(t,x_0,p_0) = \frac{p_0}{m}t + x_0, \qquad p = P(t,x_0,p_0) = p_0, \tag{18.30}$$

где (p_0,x_0) — начальные значения импульса и координаты.

1) При $S|_{t=0} = S_0(x) = \xi x$ начальными данными для системы Гамильтона являются

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial x} = \xi,$$

поэтому уравнения траектории есть

$$x = X(t,x_0) = \frac{\xi}{m}t + x_0, \qquad p = P(t,x_0) = \xi.$$

В силу того что якобиан $J(t,x_0) = \partial X(t,x_0)/\partial x_0 = 1$, решение $S(x,t)$ существует при любых $t \in [0,+\infty[$. Поскольку

$$x_0 = X_0(x,t) = x - \frac{\xi}{m}t, \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2,$$

то из формулы (18.26) получим

$$S(x,t,\xi) = \Big(\xi x_0 + \frac{1}{2m}\int\limits_0^t P^2(\tau,x_0)d\tau\Big)\Big|_{x_0=x-\xi t/m} =$$

$$= \xi\Big(x - \frac{\xi t}{m}\Big) + \frac{1}{2m}\xi^2 t = \xi(x - \frac{t}{2m}\xi\Big).$$

2) При $S|_{t=0} = S_0(x) = x^2/2$ начальные данные для системы Гамильтона

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial x_0} = x_0.$$

Траектория задается уравнениями

$$x = X(t, x_0) = \frac{x_0}{m}t + x_0, \qquad p = P(t, x_0) = x_0.$$

Якобиан $J = \partial X/\partial x_0 = 1 + t/m$ и не обращается в нуль при $t > 0$. Поэтому решение

$$S(x,t) = \bigg(\frac{x_0^2}{2} + \frac{1}{2m}\int\limits_0^t x_0^2 d\tau\bigg)\bigg|_{x_0 = xm/(m+t)} =$$
$$= \frac{1}{2}x_0^2\Big(1 + \frac{t}{m}\Big)\Big|_{x_0 = xm/(m+t)} = \frac{m}{2}\frac{x^2}{t+m}$$

существует при $t \geqslant 0$.

3) При $S|_{t=0} = S_0(x) = -x^3/3$ начальные условия для системы Гамильтона имеют вид

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial x_0} = -x_0^2,$$

уравнения траекторий —

$$x = X(t, x_0) = -\frac{x_0^2}{m}t + x_0, \qquad p = P(t, x_0) = -x_0^2$$

и якобиан определяется выражением

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = -\frac{2x_0}{m}t + 1.$$

Нетрудно заметить, что для любого $t > 0$ существует такое $x_0 \in \mathbb{R}^1$, что условие единственности не выполняется. Следовательно, задача Коши не имеет решения в области $\Omega = \mathbb{R} \times [0, T]$ при любом T.

4) При $S|_{t=0} = -x \operatorname{arctg} x + [\ln(1 + x^2)]/2$ начальные условия для системы Гамильтона имеют вид

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial x_0} = -\operatorname{arctg} x_0,$$

уравнения траекторий —

$$x = X(t, x_0) = -\frac{t}{m}\operatorname{arctg} x_0 + x_0, \qquad p = P(t, x_0) = -\operatorname{arctg} x_0$$

и якобиан

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = -\frac{t}{m(1 + x_0^2)} + 1.$$

При $t < m$ якобиан $J > 0$, поэтому решение существует при $0 \leqslant t < m$ и имеет вид

$$S(x,t) = \Big[-x_0 \operatorname{arctg} x_0 + \frac{1}{2}\ln(1+x_0^2) + \frac{t}{2m}\operatorname{arctg}^2 x_0\Big]\Big|_{x_0=X_0(x,t)},$$

где $X_0(x,t)$ — решение уравнения

$$x = x_0 - \frac{t}{m}\operatorname{arctg} x_0, \qquad 0 \leqslant t < m.$$

Пример 18.2. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби в постоянном и однородном электрическом поле

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)^2 - Ex = 0, \tag{18.31}$$

если $S|_{t=0} = S_0(x) = \xi x$, где $\xi = \text{const}$ — числовой параметр. Указать, при каких значениях t решение существует.

Решение. Функция Гамильтона, отвечающая уравнению (18.31), имеет вид $\mathcal{H}(p,x,t) = p^2/(2m) - Ex$, поэтому система Гамильтона определяется выражением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp}{dt} = E.$$

Общее решение этой системы есть (см. пример 10.10)

$$x = X(t,p_0,x_0) = \frac{Et^2}{2m} + \frac{p_0}{m}t + x_0, \qquad p = P(t,p_0,x_0) = Et + p_0.$$

При $p_0 = \partial S_0(x_0)/\partial x_0 = \xi$ траектории определяются уравнениями

$$x = X(t,x_0) = \frac{Et^2}{2m} + \frac{\xi}{m}t + x_0, \qquad p = P(t,x_0) = Et + \xi.$$

Тогда

$$x_0 = X_0(x,t) = x - \frac{Et^2}{2m} - \frac{\xi}{m}t.$$

В силу равенства

$$J = \frac{\partial X(t,x_0)}{\partial x_0} = 1$$

решение существует для всех $t > 0$ и имеет вид

$$S(x,t) = \Big\{\xi x_0 + \int\limits_0^t \Big[\frac{(E\tau+\xi)^2}{2m} + E\Big(\frac{E\tau^2}{2m} + \frac{\xi}{m}\tau + x_0\Big)\Big]d\tau\Big\}\Big|_{x_0=X_0(x,t)} =$$
$$= \Big(\xi x_0 + \frac{E^2t^3}{3m} + \frac{\xi^2}{2m}t + \frac{E\xi}{m}t^2 + Ex_0 t\Big)\Big|_{x_0=X_0(x,t)} =$$
$$= x(\xi + Et) - \frac{\xi^2 t}{2m} - \frac{E\xi t^2}{2m} - \frac{E^2t^3}{6m}.$$

Пример 18.3. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} = 0, \tag{18.32}$$

отвечающее одномерному гармоническому осциллятору, если

$$1)\ \ S|_{t=0} = S_0(x) = -\frac{\omega x^2}{2}, \qquad 2)\ \ S|_{t=0} = S_0(x) = \xi x,$$

где ξ — числовой параметр, $x \in \mathbb{R}$. Указать, при каких значениях t решение существует.

Решение. Функция Гамильтона, отвечающая уравнению (18.32), имеет вид (см. пример 10.1)

$$\mathcal{H}(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}.$$

Ему соответствует система Гамильтона (см. пример 10.5)

$$\frac{dx}{dt} = p, \qquad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 x.$$

Продифференцировав первое уравнение по t и подставив в него dp/dt из второго уравнения, получим $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$. Отсюда найдем общее решение системы Гамильтона

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad p = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t.$$

Выразив постоянные A и B через начальные значения координаты и импульса, получим

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{p_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad p = -x_0\omega\sin\omega t + p_0\cos\omega t.$$

1) Если $S_0(x) = -\omega x^2/2$, то $p_0 = -x_0\omega$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} x &= X(t, x_0) = x_0(\cos\omega t - \sin\omega t) = \sqrt{2}x_0\cos\Big(\omega t + \frac{\pi}{4}\Big), \\ p &= P(t, x_0) = -x_0\omega(\sin\omega t + \cos\omega t) = -\sqrt{2}x_0\omega\sin\Big(\omega t + \frac{\pi}{4}\Big). \end{aligned} \tag{18.33}$$

Справедливо равенство

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = \sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4).$$

Отсюда следует, что решение $S(x, t)$ задачи Коши существует при $t \in [0, \pi/(4\omega)[$. Из уравнения (18.33) найдем

$$x_0 = X_0(x, t) = \frac{x}{\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)}.$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^t \Big(P(\tau)\dot{X}(\tau) - \mathcal{H}(\tau)\Big)d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t [P^2(\tau) - \omega^2 X^2(\tau)]d\tau =$$

$$= -\omega^2 x_0^2 \int\limits_0^t \cos\Big(2\omega\tau + \frac{\pi}{2}\Big) d\tau = \frac{\omega}{2} x_0^2 (1 - \cos 2\omega t).$$

Тогда

$$S(t, x_0) = S_0(x_0) + \int\limits_0^t \Big(P(\tau)\dot{X}(\tau) - \mathcal{H}(\tau)\Big) d\tau = -\frac{\omega}{2} x_0^2 \cos 2\omega t,$$

откуда следует

$$S(x,t) = S(t,x_0)\big|_{x_0 = X_0(x,t)} = -\frac{\omega}{4} x^2 \frac{\cos 2\omega t}{\cos^2(\omega t + \pi/4)} =$$
$$= -\frac{\omega}{4} x^2 \frac{\sin(2\omega t + \pi/2)}{\cos^2(\omega t + \pi/4)} = -\frac{\omega}{2} x^2 \operatorname{tg}\Big(\omega t + \frac{\pi}{4}\Big)$$

для всех $0 \leqslant t < \pi/(4\omega)$.

2) Пусть $S|_{t=0} = S_0(x) = \xi x$. Тогда $p|_{t=0} = \partial S_0/\partial x_0 = \xi$, $x|_{t=0} = x_0$ и

$$x = X(t, x_0) = x_0 \cos \omega t + \frac{\xi}{\omega} \sin \omega t,$$
$$p = P(t, x_0) = -x_0 \omega \sin \omega t + \xi \cos \omega t.$$

Аналогично случаю 1)

$$x_0 = X_0(x,t) = \frac{\omega x - \xi \sin \omega t}{\omega \cos \omega t}$$

и

$$S(x,t) = -\frac{\omega^2 x^2 + \xi^2}{2\omega} \operatorname{tg} \omega t + \frac{\xi x}{\cos \omega t}, \qquad 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2\omega}.$$

Пример 18.4. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(\nabla S)^2} = 0 \tag{18.34}$$

с начальным условием

$$S|_{t=0} = S_0(\vec{x}) = \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{18.35}$$

Здесь c — некоторая постоянная, $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$. Указать, при каких значениях t решение существует.

Решение. Функция Гамильтона, отвечающая уравнению (18.34), имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = c|\vec{p}|, \qquad |\vec{p}| = \sqrt{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle}.$$

Запишем систему Гамильтона:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$$

Тогда

$$\vec{p} = \vec{P}(t, \vec{p}_0, \vec{x}_0) = \vec{p}_0, \qquad \vec{x} = \vec{X}(t, \vec{p}_0, \vec{x}_0) = c\frac{\vec{p}_0}{|\vec{p}_0|}t + \vec{x}_0.$$

Из начальных условий получим

$$\vec{p}|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial \vec{x}_0} = \vec{k}.$$

Следовательно, уравнения траекторий имеют вид

$$\vec{p} = \vec{P}(t, \vec{x}_0) = \vec{p}_0 = \vec{k}, \qquad \vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0) = c\vec{n}t + \vec{x}_0,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении вектора $\vec{k}$. Отсюда видно, что решение существует при всех t, и

$$S(\vec{x}, t) = \langle \vec{k}, \vec{x} - c\vec{n}t\rangle = \langle \vec{k}, \vec{x}\rangle - |\vec{k}|ct,$$

так как выражение под интегралом вдоль траектории (18.26) равно нулю.

$\Diamond$ Уравнение (18.34) в геометрической оптике описывает распространение волнового фронта в однородной среде и называется уравнением эйконала. В этом случае c — скорость света в среде, а начальные условия (18.35) описывают плоскую волну.

Пример 18.5. При исследовании разностных схем для волнового уравнения на устойчивость возникает задача о решении уравнения Гамильтона–Якоби с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{2}{\gamma}\arcsin\Big(\frac{\gamma}{2}\sin p\Big),$$

где $\gamma = \tau/h$, τ, h — шаги разностной сетки соответственно по осям t и x. Указать, при каких значениях t существует решение уравнения Гамильтона–Якоби, удовлетворяющее условию $S|_{t=0} = x^2/2$.

Решение. Система Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\cos p}{\sqrt{1 - (\gamma^2\sin^2 p)/4}}, \qquad \dot{p} = 0$$

с начальными данными

$$x(0) = x_0, \qquad p(0) = \frac{\partial S_0}{\partial x_0} = x_0$$

легко интегрируется

$$p = P(t, x_0) = x_0, \qquad x = X(t, x_0) = \frac{\cos x_0}{\sqrt{1 - (\gamma^2\sin^2 x_0)/4}}t + x_0.$$

Вычислим якобиан

$$J = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} = 1 - \frac{(1 - \gamma^2/4)\sin x_0}{[1 - (\gamma^2\sin^2 x_0)/4]^{3/2}}t.$$

Уравнение $J = 0$ имеет решение

$$t(x_0) = \frac{[1 - (\gamma^2\sin^2 x_0)/4]^{3/2}}{(1 - \gamma^2/4)\sin x_0},$$

так что в области $\Omega = \mathbb{R}^n_x \times [0, T]$ ни при каком $T > 0$ не существует решения задачи Коши, если $\gamma^2/4 \geqslant 1$; при $\gamma^2/4 < 1$ решение $S(x, t)$ в Ω существует, если $T = \min t(x_0)$.

Пример 18.6. Решить задачу Коши для уравнения (18.29) при $m=1$, если

$$S|_{t=0} = S_0(x) = -\frac{x^4}{12}, \qquad x \in \Omega_0, \quad \Omega_0 = \{x, \, |x| < 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Решение. Начальные условия для системы Гамильтона имеют вид

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad p|_{t=0} = \frac{\partial S_0}{\partial x_0} = \frac{x_0^3}{4}.$$

С учетом соотношения (18.30) система Гамильтона имеет решения

$$x = X(t, x_0) = x_0 - \frac{x_0^3}{3}t, \qquad p = P(t, x_0) = -\frac{x_0^3}{3}. \tag{18.36}$$

Первое из уравнений (18.36) совместно с условием

$$J(t, x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 - x_0^2 t = 0$$

определяет две ветви огибающей $t = 4/(9x^2)$ семейства траекторий ℓ в пространстве (x,t) (рис. 13).

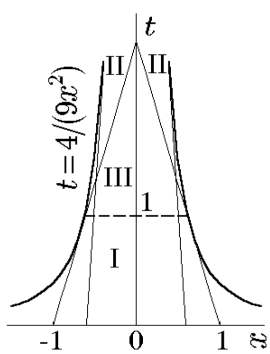

Рис. 13.

Как видно из рис. 13, решение задачи Коши существует только в области

$$\mathrm{I}: \; 0 < t < 1,$$
$$-1 + \frac{1}{3}t < x < 1 - \frac{1}{3}t.$$

В каждую точку (x,t) области II приходит две траектории. В каждую точку области III приходит единственная траектория, но ранее якобиан J обращается в нуль в точке касания огибающей, и поэтому условия существования решения задачи Коши в области III не выполнены.

Пример 18.7. Указать область существования решения для задачи Коши (18.22) с гамильтонианом $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = c|\vec{p}|$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ и начальным условием $S|_{t=0} = S_0(|\vec{x}|)$, $0 < a < |\vec{x}| < b < \infty$.

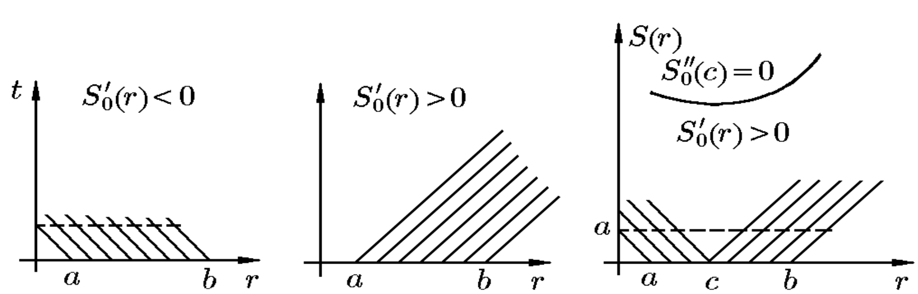

Рис. 14.

Решение. Для решения задачи воспользуемся сферической системой координат $\vec{q}=(r,\theta,\varphi)$. Выразив производные от функции S по декартовым координатам через производные по r,θ,φ, получим соотношение

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\frac{\partial S}{\partial x_j}\Big)^2=\Big(\frac{\partial S}{\partial r}\Big)^2+\frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial S}{\partial \theta}\Big)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\Big)^2.$$

Следовательно,

$$\vec{p}^2=p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2.$$

Уравнения Гамильтона в сферических переменных имеют вид

$$\frac{dp_r}{dt}=c\frac{p_\theta^2+p_\varphi^2/(\sin^2\theta)}{|\vec{p}|r^3},\qquad \frac{dr}{dt}=\frac{cp_r}{|\vec{p}|} \tag{18.37}$$

$$\frac{dp_\theta}{dt}=\frac{cp_\varphi^2\cos\theta}{|\vec{p}|r^2\sin^3\theta},\qquad \frac{d\theta}{dt}=\frac{cp_\theta}{|\vec{p}|r^2} \tag{18.38}$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt}=0,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{cp_\varphi}{r^2|\vec{p}|\sin^2\theta}. \tag{18.39}$$

Из начальных условий

$$\vec{q}|_{t=0}=\vec{q}_0,\qquad \vec{p}|_{t=0}=\frac{\partial S_0(\vec{q}_0)}{\partial\vec{q}_0}$$

получим начальные условия для уравнений (18.37)–(18.39) в явном виде:

$$r|_{t=0}=r_0,\quad p_r|_{t=0}=S_0'(r_0),\quad \theta|_{t=0}=\theta_0,$$
$$p_\theta|_{t=0}=0,\quad \varphi|_{t=0}=\varphi_0,\quad p_\varphi|_{t=0}=0.$$

Из уравнений (18.37)–(18.39) вытекает, что $p_\varphi(t)\equiv 0$, $p_\theta(t)\equiv 0$, $p_r(t)=S_0'(r_0)$, а поэтому из (18.38) и (18.39) следует, что $\varphi=\varphi_0$, $\theta=\theta_0$. Проинтегрировав второе уравнение в (18.37), получим

$$r=\operatorname{sign}S'(r_0)t+r_0. \tag{18.40}$$

Отсюда следует, что решение задачи существует, если $S'(r_0)\neq 0$ при $a\leqslant r_0\leqslant b$. Если же $S'(r_0)$ обращается в нуль в некоторой точке $c\in[a,b]$, то для существования решения достаточно выполнения условия $S''(c)>0$ (рис. 14).

18.2. Решение задачи Коши с помощью лагранжевых поверхностей*

С начальными данными (18.24) и решениями системы Гамильтона (18.23) можно связать следующие геометрические объекты в фазовом пространстве — *пространстве «координат» и «импульсов»* $\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_p^n$:

1) поверхность $\Lambda_0^n\subset\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_p^n$, задаваемую уравнениями

$$\vec{x}=\vec{x}_0,\qquad \vec{p}=\frac{\partial S_0(\vec{x}_0)}{\partial\vec{x}_0},$$

где $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ — параметры;

2) поверхности $\Lambda_t^n \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$, полученные из поверхности Λ_0^n сдвигом точек $(\vec{p}_0, \vec{x}_0) \in \Lambda_0^n$ вдоль траекторий гамильтоновой системы (18.23) за время t. Поверхности Λ_t^n задаются системой уравнений

$$x_i = X_i(t, \vec{x}_0), \qquad p_i = P_i(t, \vec{x}_0), \quad i = \overline{1, n}$$

и являются важным примером поверхностей, названных лагранжевыми.

Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$ поверхность Λ^n локально задается уравнениями

$$\vec{x} = \vec{X}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad \vec{p} = \vec{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad i = \overline{1, n},$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

♦ Поверхность Λ^n называется лагранжевой, если

$$\oint\limits_{\Gamma} \langle \vec{P}, d\vec{X} \rangle = 0 \tag{18.41}$$

для любой гладкой кривой $\Gamma \subset \Lambda^n$, непрерывно стягиваемой на Λ^n в точку.

Понятие лагранжевой поверхности позволяет связать формулу (18.26) для решения задачи Коши с интегралом по лагранжевой поверхности.

Если лагранжевы поверхности Λ_0^n и Λ_t^n, $t \in [0, T]$, взаимно однозначно проектируются на конфигурационное пространство $\mathbb{R}_x^n$ $(p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0)$ и $\vec{p} = \vec{P}(\vec{x}, t)$ – уравнения, задающие Λ_t^n, то решение задачи Коши (18.22) можно найти по формуле

$$S(\vec{x}, t) = S_0(\vec{x}_0^*) + \int\limits_0^t \big[\langle \vec{P}(\tau, \vec{x}_0^*), \dot{\vec{X}}(\tau, \vec{x}_0^*)\rangle -$$
$$-\mathcal{H}(\vec{P}(\tau, \vec{x}_0^*), \vec{X}(\tau, \vec{x}_0^*), \tau)\big] d\tau + \int\limits_{\ell(\vec{x}_t^*, \vec{x})} \langle \vec{P}(t, \vec{x}), d\vec{x} \rangle, \tag{18.42}$$

где $\vec{x}_0^*$ — произвольная фиксированная точка, $\vec{x}_t^* = \vec{X}(t, \vec{x}_0^*)$, $\vec{p}_t^* = \vec{P}(t, \vec{x}_0^*)$ — траектория, выходящая из $(\vec{p}_0^*, \vec{x}_0^*) \in \Lambda_0^n$, а последний интеграл в (18.42) вычисляется по любому пути $\ell(\vec{x}_t^*, \vec{x})$ на лагранжевой поверхности Λ_t^* от точки $(\vec{x}_t^*, \vec{p}_t^*)$ до произвольной точки $(\vec{x}, \vec{p}) \in \Lambda_t^n$. Формулой (18.42) удобно пользоваться, когда многообразия Λ_t^n, $t \in [0, T]$ имеют общую неподвижную точку $(\overline{\vec{p}}, \overline{\vec{x}})$, т.е. точку, координаты которой не меняются при эволюции начальной лагранжевой поверхности. В этом случае, положив $\vec{x}_0^* = \overline{\vec{x}}$, из формулы (18.42) получим

$$S(\vec{x}, t) = S_0(\overline{\vec{x}}) - \int\limits_0^t \mathcal{H}(\overline{\vec{p}}, \overline{\vec{x}}, \tau) d\tau + \int\limits_{\ell(\overline{\vec{x}}, \vec{x})} \langle \vec{p}(t, \vec{x}), d\vec{x} \rangle. \tag{18.43}$$

Между решением задачи Коши (18.22) и лагранжевыми поверхностями Λ_t^n, $0 \leqslant t \leqslant T$ существует тесная связь, когда Λ_t^n диффеоморфно проектируются на плоскость переменных, т.е.

$$J(t, \vec{x}_0) = \frac{D\vec{X}(t, \vec{x}_0)}{D\vec{x}_0} \neq 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

А именно, если $S(\vec{x}, t)$ — решение задачи Коши (18.22), то уравнения лагранжевых поверхностей Λ_t^n могут быть записаны в виде

$$\vec{p} = \vec{P}(\vec{x}, t) = \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}, \quad \vec{x} \in \Omega; \tag{18.44}$$

$$\Omega = \Big\{\vec{x} = \vec{X}(t, \vec{x}_0),\ J = \frac{D\vec{X}(t, \vec{x}_0)}{D\vec{x}_0} \neq 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\}.$$

♦ Функция $S(\vec{x}, t)$ в этом случае называется производящей функцией поверхности Λ^n_t.

Лемма 18.2. *Условие* (18.41) *для поверхности* $\Lambda^n \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$ *эквивалентно условиям*

$$\{x, p\}_{k,m} = 0, \quad k, m = \overline{1, n}, \tag{18.45}$$

где

$$\{x, p\}_{k,m} = \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial X_j}{\partial \alpha_k}\frac{\partial P_j}{\partial \alpha_m} - \frac{\partial X_j}{\partial \alpha_m}\frac{\partial P_j}{\partial \alpha_k}\Big) = \Big\langle \frac{\partial Z}{\partial \alpha_m}, J\frac{\partial Z}{\partial \alpha_k}\Big\rangle$$

в любой точке $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Выражение $\{x, p\}_{k,m}$ *называется скобками Лагранжа.*

Доказательство. Пусть гладкая кривая Γ целиком лежит в окрестности $U(\vec{x}) \subset \Lambda^n$ некоторой точки $\vec{x} \in \Lambda^n$ и пусть часть $U(\vec{x}) \bigcap \Lambda^n$ поверхности Λ^n задается уравнениями

$$\vec{x} = \vec{X}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad \vec{p} = \vec{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{18.46}$$

где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — локальные координаты на Λ^n:

$$\operatorname{rang}\Big\|\frac{\partial(\vec{p}, \vec{x})}{\partial \alpha}\Big\| = n.$$

Тогда криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_{\Gamma} \langle \vec{p}, d\vec{x}\rangle$$

в координатах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ запишется в виде

$$I = \oint\limits_{\Gamma} \langle \vec{p}, d\vec{x}\rangle = \sum_{j=1}^n \oint\limits_{\overline{\Gamma}} \Big\langle \vec{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_j}\Big\rangle d\alpha_j, \tag{18.47}$$

где $\overline{\Gamma}$ — прообраз кривой Γ при отображении (18.46). Преобразуем интеграл (18.47) по формуле Стокса:

$$I = \oint\limits_{\overline{\Gamma}} \sum_{j=1}^n \Big\langle \vec{P}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_j}\Big\rangle d\alpha_j =$$

$$= \iint\limits_D \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\Big\langle \vec{P}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_m}\Big\rangle - \frac{\partial}{\partial \alpha_m}\Big\langle \vec{P}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_j}\Big\rangle\Big) d\alpha_j\, d\alpha_m =$$

$$= \iint\limits_D \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \Big\{\Big\langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_m}\Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha_m}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \alpha_j}\Big\rangle\Big\} d\alpha_j\, d\alpha_m. \tag{18.48}$$

Здесь D – двумерная область в пространстве параметров $\mathbb{R}^n_\alpha$, границей которого является $\bar{\Gamma}$.

Из равенства (18.48) следует утверждение леммы.

Пример 18.8. Показать, что поверхность Λ^n, заданная уравнениями

$$\vec{p} = \frac{\partial S(\vec{x})}{\partial \vec{x}}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $S(\vec{x})$ – бесконечно дифференцируемая функция, является лагранжевой.

Решение. В качестве глобальных координат на Λ^n можно выбрать $\vec{x}$. Вычислим скобку Лагранжа:

$$\{x, p\}_{m,l} = \sum_{j=1}^{n} \Big[\frac{\partial x_j}{\partial x_m}\frac{\partial^2 S(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial x_j}{\partial x_l}\frac{\partial^2 S(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_m}\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big[\delta_{jm}\frac{\partial^2 S(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_l} - \delta_{jl}\frac{\partial^2 S(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_m}\Big] = \frac{\partial^2 S(\vec{x})}{\partial x_m \partial x_l} - \frac{\partial^2 S(\vec{x})}{\partial x_l \partial x_m} = 0.$$

Пример 18.9. Найти уравнения поверхностей Λ_0^n и Λ_t^n в задачах 18.1–18.4 и с их помощью — решение этих задач, используя формулы (18.42) или (18.43).

Решение. 1. Пример 18.1. 1). Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 15 при $m = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \Big\{(p, x),\ x = X(t, x_0) = \frac{\xi}{m}t + x_0,\ p = P(t, x_0) = \xi\Big\}.$$

Выберем $x_0^* = 0$, тогда действие $S(x, t)$ определяется формулой (18.42)

$$S(x, t) = \frac{\xi^2 t}{2m} + \int\limits_{\xi t/m}^{x} \xi\, dx = \xi x - \frac{\xi^2 t}{2m}.$$

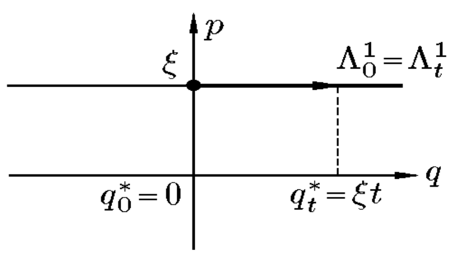

Рис. 15.

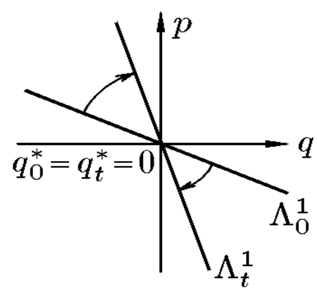

Рис. 16.

2. Пример 18.1. 2). Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 16 при $m = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \Big\{(p, x),\ p = P(x, t) = \frac{mx}{t - m}\Big\}.$$

Неподвижная точка имеет координаты $x_0^* = 0$, $p_0^* = 0$, поэтому

$$S(x, t) = m\int\limits_0^x \frac{x}{t - m}\, dx = \frac{m}{2}\frac{x^2}{t - m}, \qquad 0 \leqslant t < 1.$$

3. Пример 18.2. Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 17 при $m = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \Big\{(p, x),\ p = P(t, x_0) = Et + \alpha,$$
$$x = X(t, x_0) = \frac{Et^2}{2m} + \frac{\alpha}{m}t + x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}^1\Big\}.$$

Неподвижных точек нет. Воспользуемся формулой (18.42), выбрав $x_0^* = 0$, $p_0^* = \alpha$, тогда

$$S(x,t) = \int\limits_0^t \Big[\frac{(E\tau+\alpha)^2}{2m} + E\Big(\frac{E\tau^2}{2} + \frac{\alpha\tau}{m}\Big)\Big]d\tau + \int\limits_{\ell(x,X(t,x_0))} (Et+\alpha)dx =$$

$$= \frac{E^2t^3}{3m} + \frac{\alpha E t^2}{m} + \frac{\alpha^2 t}{2m} + (Et+\alpha)\Big(x - \frac{Et^2}{2m} - \frac{\alpha t}{m}\Big) = x(\alpha+Et) - \frac{\alpha^2 t}{2m} - \frac{E\alpha t^2}{2m} - \frac{E^2t^3}{6m}.$$

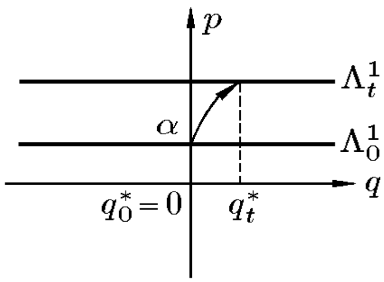

Рис. 17.

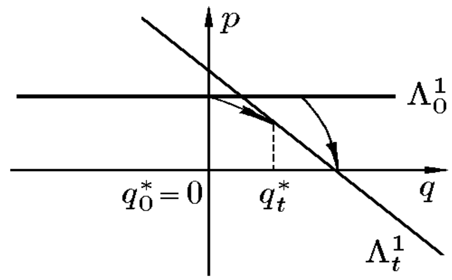

Рис. 18.

4. Пример 18.3. 1) Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 16 при $\omega = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \Big\{(p,x),\ p = P(x,t) = -x\omega\,\mathrm{tg}\Big(\omega t + \frac{\pi}{4}\Big)\Big\}.$$

Неподвижная точка имеет координаты $x_0^* = 0$, $p_0^* = 0$, поэтому

$$S(x,t) = -\int\limits_0^x x\omega\,\mathrm{tg}\Big(\omega t + \frac{\pi}{4}\Big)\,dx = -\frac{\omega x^2}{2}\,\mathrm{tg}\Big(\omega t + \frac{\pi}{4}\Big).$$

5. Пример 18.3. 2) Уравнение лагранжевой поверхности имеет вид (рис. 18 при $\omega = 1$)

$$\Lambda_t^1 = \Big\{(p,x),\ p = P(x,t) = \frac{\xi - x\omega\sin\omega t}{\cos\omega t}\Big\}.$$

Воспользуемся формулой (18.42), положив $x_0^* = 0$, тогда

$$S(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \xi^2\cos 2\omega\tau\,d\tau + \int\limits_{(\xi/\omega)\sin\omega t}^{x} \frac{\xi - \omega x\sin\omega t}{\cos\omega t}dx =$$

$$= -\frac{\omega^2x^2+\xi^2}{2\omega}\,\mathrm{tg}\,\omega t + \frac{\xi x}{\cos\omega t}.$$

6. Пример 18.4. Лагранжевы поверхности Λ_t^3 задаются соотношениями $p_j = k_j$, $j = 1,2,3$. Неподвижных точек на многообразиях нет, поэтому положим $\vec{x}_0^* = 0$ и воспользуемся формулой (18.42):

$$S(\vec{x},t) = \int\limits_{c\vec{n}t}^{\vec{x}} \langle\vec{P}(x,t),\,d\vec{x}\rangle = \langle\vec{k},(\vec{x}-c\vec{n}t)\rangle, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

Пример 18.10. Пусть

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x}) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_1 x_1^2}{2} + \frac{\omega_2 x_2^2}{2},$$
$$S|_{t=0} = \xi x_1 - \frac{\omega_2 x_2^2}{2}.$$

Найти решение задачи Коши с помощью формулы (18.42).

Решение. Система Гамильтона в данной задаче распадается на две независимые системы с независимыми начальными данными. Эти системы такие же, как в примерах 18.3. 1) и 18.3. 2), поэтому лагранжевы многообразия Λ_t^2 задачи представляют собой прямые произведения многообразий этих примеров:

$$\Lambda_t^2 = \Lambda_{t,1}^1 \times \Lambda_{t,2}^1 = \Big\{(\vec{p},\vec{x}),\ x_1 = x_{01}\cos\omega_1 t + \frac{\xi}{\omega_1}\sin\omega_1 t,$$
$$p_1 = -x_{01}\omega_1 \sin\omega_1 t + \xi\cos\omega_1 t, \quad x_2 = \sqrt{2}\cos(\omega_2 t + \pi/4),$$
$$p_2 = -\omega_2\sqrt{2}\sin(\omega_2 t + \pi/4)\Big\}.$$

Формула (18.42) распадается в сумму двух слагаемых, и поэтому

$$S(\vec{x},t) = S_1(\vec{x},t) + S_2(\vec{x},t),$$

где $S_1(\vec{x},t)$, $S_2(\vec{x},t)$ — решения примеров 18.3. 1) и 18.3. 2), соответственно.

18.3. Задача Коши для стационарного уравнения Гамильтона–Якоби*

Рассмотрим стационарное уравнение Гамильтона–Якоби

$$\mathcal{H}\Big(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial \vec{x}},\vec{x}\Big) = E, \qquad \vec{x}\in\mathbb{R}^n, \tag{18.49}$$

где $\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x})$ — гладкая функция на $\mathbb{R}_p^n\times\mathbb{R}_x^n$ и $|\mathcal{H}_{\vec{p}}(\vec{p},\vec{x})| \neq 0$.

Задача Коши для стационарного уравнения Гамильтона — Якоби формулируется аналогично задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных (см. разд. 16).

Пусть γ^{n-1} — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}_x^n$,

$$\gamma^{n-1} = \{\vec{x},\ \vec{x} = \vec{X}^0(\alpha), \qquad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\tilde{D}\},$$
$$\operatorname{rang}\left(\frac{X_i^0}{\alpha_j}\right)(\alpha) = n-1.$$

Начальные данные Коши на γ^{n-1}:

$$S|_{\gamma^{n-1}} = S_0(\alpha), \tag{18.50}$$
$$\frac{\partial S}{\partial \vec{x}}\bigg|_{\gamma^{n-1}} = \vec{P}^0(\alpha), \tag{18.51}$$

где S_0 и $\vec{P}^0$ — заданные гладкие функция и вектор-функция, подчиненные условиям согласования $\vec{P}^0$

а) с уравнением (18.22):

$$\mathcal{H}(\vec{P}^0(\alpha),\vec{X}^0(\alpha)) = E; \tag{18.52}$$

б) с дифференциалом функции S_0:

$$dS_0(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} P_i^0(\alpha) dX_i^0(\alpha). \tag{18.53}$$

Решение задачи Коши для стационарного уравнения Гамильтона–Якоби аналогично решению задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных (см. разд. 16).

Приведем схему решения.

1. Выписать характеристическую систему для (18.49) — систему Гамильтона

$$\dot{\vec{p}} = -\mathcal{H}_{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x}), \qquad \dot{\vec{x}} = \mathcal{H}_{\vec{p}}(\vec{p}, \vec{x}), \quad (\vec{p}, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{2n}_{px}, \tag{18.54}$$

где точкой обозначены производные по τ, с начальными данными

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}|_{\tau=0} = \vec{X}^0(\alpha), \\ \vec{p}|_{\tau=0} = \vec{P}^0(\alpha). \end{array} \right. \tag{18.55}$$

2. Найти $(n-1)$-параметрическое семейство решений задачи Коши (18.54)–(18.55) — характеристику ℓ_α (α — параметр)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \vec{X}(\tau, \alpha), \\ \vec{p} = \vec{P}(\tau, \alpha); \end{array} \right. \qquad |\tau| < \tau_0. \tag{18.56}$$

3. Вычислить действие $S(\tau, \alpha)$ на характеристике ℓ_α

$$S(\tau, \alpha) = S_0(\alpha) + \int\limits_0^\tau \langle \vec{P}(\tau', \alpha), \dot{\vec{X}}(\tau', \alpha) \rangle \, d\tau'. \tag{18.57}$$

4. Разрешить первое уравнение системы (18.56) относительно τ и α

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \mathrm{A}(\vec{x}), \\ \tau = \mathrm{T}(\vec{x}), \end{array} \right. , \tag{18.58}$$

считая, что

$$J = \frac{D\vec{X}(\alpha, \tau)}{D(\alpha, \tau)} \neq 0, \qquad \alpha \in \tilde{D}, \quad |\tau| < \tau_0.$$

5. Построить функцию

$$S(\vec{x}) = S(\mathrm{T}(\vec{x}), \mathrm{A}(\vec{x})). \tag{18.59}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 18.3. *Пусть выполнено условие*

$$J(0, \alpha) \neq 0.$$

Тогда формула (18.59) *определяет единственное гладкое решение задачи Коши* (18.49)–(18.53) *в окрестности* $V(\gamma) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = \vec{X}(\tau, \alpha),\ |\tau| < \tau_0,\ \alpha \in \tilde{D} \cap J(\tau, \alpha) \neq 0\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 18.1.

18.4. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби

♦ Непрерывно дифференцируемое решение $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ уравнения Гамильтона–Якоби (18.1), содержащее n произвольных постоянных $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, называется полным интегралом этого уравнения, если выполняется условие

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \alpha_j}\right\| \neq 0. \tag{18.60}$$

Полный интеграл $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ позволяет найти общее решение уравнения Гамильтона–Якоби.

Теорема 18.4. *Пусть $f(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и*

$$S(\vec{x}, t, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, t, \vec{\alpha}) + C(\vec{\alpha}),$$

где $C(\vec{\alpha})$ — произвольная функция от $\vec{\alpha}$. Тогда функция

$$S(\vec{x}, t) = S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})\big|_{\vec{\alpha}=\mathrm{A}(\vec{x},t)}, \tag{18.61}$$

где функции координат и времени $\vec{\mathrm{A}}(\vec{x}, t)$ неявным образом определяются уравнениями

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial \alpha_j} = 0, \qquad j = \overline{1, n}, \tag{18.62}$$

является общим решением уравнения Гамильтона–Якоби.

Доказательство. Действительно, так как $f(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, то для произвольной функции $C(\vec{\alpha})$, не зависящей от $\vec{x}$ и t, функция

$$S(\vec{x}, t, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, t, \vec{\alpha}) + C(\vec{\alpha})$$

— также полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Заменим здесь величины $\vec{\alpha}$ функциями $\vec{\mathrm{A}}(\vec{x}, t)$, которые являются решениями уравнения (18.62). Тогда для функции $S(\vec{x}, t) = S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})|_{\vec{\alpha}=\mathrm{A}(\vec{x},t)}$ справедливо

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial x_j} = \Big[\frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial x_j} + \Big\langle\frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial \vec{\alpha}}, \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial x_j}\Big\rangle\Big]\Big|_{\vec{\alpha}=\mathrm{A}(\vec{x},t)} = \\ = \frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial x_j}\Big|_{\vec{\alpha}=\mathrm{A}(\vec{x},t)}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial t}\Big|_{\vec{\alpha}=\mathrm{A}(\vec{x},t)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S(\vec{x}, t), \vec{x}, t) = \\ = \Big[\frac{\partial S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S(\vec{x}, t, \vec{\alpha}), \vec{x}, t)\Big]\Big|_{\vec{\alpha}=\mathrm{A}(\vec{x},t)} = 0,$$

поскольку функция $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби. Так как $S(\vec{x}, t)$ содержит произвольную функцию $C(\vec{\alpha})$ и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби, теорема доказана.

$\Diamond$ Как правило, интегрирование системы Гамильтона представляет собой более простую задачу, чем интегрирование уравнения Гамильтона–Якоби. Однако для некоторых типов гамильтонианов метод разделения переменных позволяет сравнительно просто находить полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Поэтому рассмотрим метод, позволяющий по функции $S(\vec{x}, t)$ находить решение системы Гамильтона.

Теорема 18.5 (Якоби). *Пусть $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ – полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Тогда*

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{18.63}$$

– независимые первые интегралы соответствующей системы Гамильтона.

Доказательство. 1. Пусть S есть полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (18.1). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\Big(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S, \vec{x}, t)\Big) = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial x_k}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = 0. \tag{18.64}$$

Здесь обозначено $\nabla S = \vec{p}$.

Считая β_j, $j = \overline{1, n}$, постоянными, найдем

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} - \beta_j\Big) = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial x_k}\dot{x}_k = 0. \tag{18.65}$$

Поскольку $S(\vec{x}, t, \vec{\alpha})$ непрерывно дифференцируема, можно поменять порядок дифференцирования. Вычтя (18.64) из (18.65), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial x_k}\Big(\dot{x}_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}\Big) = 0 \qquad j = \overline{1, n}. \tag{18.66}$$

Согласно формулировке теоремы, выполняется условие (18.60), следовательно,

$$\dot{x}_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = 0, \qquad k = \overline{1, n},$$

для всех $x_k(t)$, удовлетворяющих первой системе уравнений в (18.63).

2. Найдем полную производную по времени от второго соотношения в (18.63). Получим

$$-\frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_k = 0. \tag{18.67}$$

Учтем, что S – полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(\nabla S, \vec{x}, t)\Big) = \\ = \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = 0. \tag{18.68}$$

Вычтем из (18.68) соотношение (18.67) и получим

$$\Big(\dot p_j+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_j}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial x_k}\Big(\dot x_k-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k}\Big)=0.$$

Следовательно, соотношения (18.63) сохраняются в силу уравнений Гамильтона, т.е. величины, определяемые соотношениями (18.63), являются первыми интегралами этих уравнений. Независимость первых интегралов следует из условия (18.60), что и доказывает теорему.

◊ Теорема Якоби обосновывает следующее правило построения общего решения системы Гамильтона $\vec x(t)$ и $\vec p(t)$ по известному полному интегралу $S(\vec x,t,\vec\alpha)$ уравнения Гамильтона–Якоби:

1. Разрешаем систему n уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_j}=\beta_j,\qquad j=\overline{1,n},$$

относительно переменных x_k, $k=\overline{1,n}$, и находим функции

$$x_k=X_k(t,\vec\alpha,\vec\beta),\qquad k=\overline{1,n},$$

зависящие от $2n$ произвольных постоянных β_j, α_l, $j,l=\overline{1,n}$.

2. Подставим функции $x_k=X_k(t,\vec\alpha,\vec\beta)$, $k=\overline{1,n}$, во второе уравнение (18.63) и находим

$$p_j=P_j(t,\vec\alpha,\vec\beta)=\frac{\partial S}{\partial x_j}\big(\vec X(t,\vec\alpha,\vec\beta),t,\vec\alpha\big).$$

Пример 18.11. Найти полный интеграл стационарного уравнения Гамильтона–Якоби (18.2) с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(p,x)=\frac{p_1^2+p_2^2}{2}+\frac{\omega_1^2x_1^2}{2}+\frac{\omega_2^2x_2^2}{2}.$$

Соответствующая механическая система называется двумерным осциллятором.

Решение. В уравнении Гамильтона–Якоби, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac12\Big(\frac{\partial S}{\partial x_1}\Big)^2+\frac12\Big(\frac{\partial S}{\partial x_2}\Big)^2+\frac{\omega_1^2x_1^2}{2}+\frac{\omega_2^2x_2^2}{2}=0,$$

переменные полностью разделяются, поэтому

$$S(x_1,x_2,t,\alpha_1,E)=S_1(x_1,\alpha_1)+S_2(x_2,\alpha_1,E)-Et,$$

где $S_1(x_1)$ и $S_2(x_2)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac12\Big(\frac{\partial S}{\partial x_1}\Big)^2+\frac{\omega_1^2x_1^2}{2}=\alpha_1,\quad \alpha_1>0;$$
$$\frac12\Big(\frac{\partial S}{\partial x_2}\Big)^2+\frac{\omega_2^2x_2^2}{2}=E-\alpha_1.$$

Проинтегрировав эти уравнения, находим полный интеграл

$$S(x_1,x_2,\alpha_1,E)=\frac12\Big(x_1\sqrt{2\alpha_1-\omega_1^2x_1^2}+\frac{2\alpha_1}{\omega_1}\arcsin\frac{\omega_1x_1}{\sqrt{2\alpha_1}}+$$
$$+x_2\sqrt{2(E-\alpha_1)-\omega_2^2x_2^2}+\frac{2(E-\alpha_1)}{\omega_2}\arcsin\frac{\omega_2x_2}{\sqrt{2(E-\alpha_1)}}\Big).$$

Пример 18.12. Используя результаты предыдущего примера и формулу (18.63), найти общий вид траекторий частиц в конфигурационном пространстве.

Решение. Общее решение уравнений Гамильтона для двумерного осциллятора можно найти из системы (18.5). В силу результата предыдущей задачи для определения $X_1(t,\vec{\alpha},\vec{\beta})$ и $X_2(t,\vec{\alpha},\vec{\beta})$ справедлива система уравнений

$$\frac{\partial S(x_1,x_2,\alpha_1,E)}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{\omega_1}\arcsin\frac{\omega_1x_1}{\sqrt{2\alpha_1}}-\\ -\frac{1}{\omega_2}\arcsin\frac{\omega_2x_2}{\sqrt{2(E-\alpha_1)}}=\beta_1;$$
$$\frac{\partial S(x_1,x_2,\alpha_1,E)}{\partial E}=\frac{1}{\omega_2}\arcsin\frac{\omega_2x_2}{\sqrt{2(E-\alpha_1)}}=t+\beta_2.$$

Решением этой системы являются функции

$$x_1=X_1(t,\alpha_1,\beta_1,\beta_2,E)=\frac{\sqrt{2\alpha_1}}{\omega_1}\sin\omega_1(t+\beta_1+\beta_2);$$
$$x_2=X_2(t,\alpha_1,\beta_2,E)=\frac{\sqrt{2(E-\alpha_1)}}{\omega_2}\sin\omega_2(t+\beta_2).$$

Пример 18.13 (проблема Кеплера). Методом Якоби найти траектории движения нерелятивистского электрона в поле ядра.

Решение. Гамильтониан задачи имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{q})=\frac{\vec{p}^2}{2m}+\frac{e}{r}=\frac{1}{2m}\Big(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\Big)+\frac{e}{r}. \qquad (18.69)$$

Уравнение Гамильтона–Якоби для кулоновского поля в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\Big\{\Big(\frac{\partial S}{\partial r}\Big)^2+\frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial S}{\partial\theta}\Big)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\Big)^2\Big\}+\frac{e}{r}=0. \qquad (18.70)$$

Решение уравнения (18.70) будем искать методом разделения переменных

$$S(r,\theta,\varphi,t)=-\alpha_1t+S_1(r)+S_2(\theta)+\alpha_3\varphi.$$

Здесь мы учли, что переменные t и φ циклические. Тогда

$$\Big(\frac{dS_1}{dr}\Big)^2+\frac{1}{r^2}\Big(\frac{dS_2}{d\theta}\Big)^2+\frac{\alpha_3^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2me}{r}=\alpha_1rm.$$

Домножим это уравнение на r^2 и, разделив переменные, получим

$$r^2\Big\{\Big(\frac{dS_1}{dr}\Big)^2+2mer-2m\alpha_1r^2\Big\}=-\Big(\frac{dS_2}{d\theta}\Big)^2-\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}=-\alpha_2^2.$$

Тогда для $S_1(r)$ получим уравнение

$$r^2\Big\{\Big(\frac{dS_1}{dr}\Big)^2+2mer-2m\alpha_1r^2\Big\}=-\alpha_2^2,$$

из которого
$$S_1(r) = \int \sqrt{\frac{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}{r^2}}\, dr.$$
Аналогично для функции $S_2(r)$
$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta} = \alpha_2^2,$$
откуда
$$S_2(\theta) = \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta.$$
Окончательно для полного интеграла уравнения (18.70) получим
$$\begin{aligned}S(r,\theta,\varphi,t) = -\alpha_1 t + \alpha_3\varphi + \int \sqrt{2m\alpha_1 r^2 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}dr+\\ +\int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}}d\theta.\end{aligned} \tag{18.71}$$
Согласно теореме Якоби, общее решение канонических уравнений в неявной форме определяется уравнениями
$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial r} = p_r, \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta} = p_\theta, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi;\\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -\beta_3.\end{gathered} \tag{18.72}$$
Отсюда
$$\begin{gathered}p_r = \sqrt{2m\alpha_1 r^2 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}, \quad p_\theta = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}}, \quad p_\varphi = \alpha_3;\\ m\int \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}}dr = t - \beta_1.\end{gathered} \tag{18.73}$$
Вычислим интеграл (18.73)
$$\int \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}}dr = \int \frac{r\, dr}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}} =$$
$$= \int \frac{\frac{1}{4m\alpha_1}(4m\alpha_1 r - 2me) + \frac{e}{2\alpha_1}}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}}dr =$$
$$= \frac{1}{4m\alpha_1}\int \frac{d(2m\alpha_1 r^2 - 2mer)}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}} + \frac{e}{2\alpha_1}\int \frac{dr}{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}}{2m\alpha_1} +$$
$$+\frac{e}{2\alpha_1\sqrt{2m\alpha_1}}\int \frac{dr}{\sqrt{\left(r - \frac{e}{r\alpha_1}\right)^2 - \frac{e^2}{4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}}{2m\alpha_1} +$$
$$+ \frac{e}{\sqrt{8m\alpha_1^3}} \ln\left| r - \frac{e}{2\alpha_1} + \sqrt{\left(r - \frac{e}{2\alpha_1}\right)^2 - \frac{e^2}{4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1}} \right|.$$

Следовательно, зависимость полярного радиуса от времени задается уравнением

$$t - \beta_1 = \frac{\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - 2mer - \alpha_2^2}}{2m\alpha_1} +$$
$$+ \frac{e}{\sqrt{8m\alpha_1^3}} \ln\left| r - \frac{e}{2\alpha_1} + \sqrt{\left(r - \frac{e}{r\alpha_1}\right)^2 - \frac{e^2}{4\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1}} \right|.$$

Из уравнений (18.72) найдем

$$\alpha_2 \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}}} - \alpha_2 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = -\beta_2, \tag{18.74}$$
$$\alpha_3 \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}}} = \varphi + \beta_3. \tag{18.75}$$

Интеграл (18.73) позволяет найти зависимость полярного радиуса r от времени; интегралы (18.74) и (18.75) — пространственные интегралы.

Вычислим интеграл (18.75), положив $\operatorname{tg}\theta = x$. Тогда

$$\theta = \operatorname{arctg} x, \quad d\theta = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \sin^2\theta = \frac{x^2}{1+x^2}$$

и

$$J_1 = \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}}} =$$
$$= \int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{\alpha_2^2 x^2 - \alpha_3^2(1+x^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{\alpha_2^2 t - \alpha_3^2(1+t)}}.$$

Сделаем замену $\sqrt{t(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) - \alpha_3^2} = y$, $y^2 = t(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) - \alpha_3^2$,

$$t = \frac{y^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}, \qquad dt = \frac{2y}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} dy$$

и получим

$$J_1 = \int \frac{y}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} \frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{y^2 + \alpha_3^2} \frac{dy}{y} = \int \frac{dy}{y^2 + \alpha_3^2} = \frac{1}{\alpha_3} \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha_3} + C.$$

Возвратившись к исходным переменным, последовательно найдем

$$J_1 = \frac{1}{\alpha_3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{\alpha_3^2}(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) - 1} + C =$$

$$= \frac{1}{\alpha_3} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2\Big(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} - 1\Big) - 1} + C =$$

$$= \frac{1}{\alpha_3} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta\Big(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} - 1\Big) - 1} + C.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}^2(\varphi + \beta_3) = \Big(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} - 1\Big) \operatorname{tg}^2\theta - 1.$$

Окончательно получим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{(\alpha_2^2/\alpha_3^2) - 1}}{\cos(\varphi + \beta_3)}. \qquad (18.76)$$

Рассмотрим теперь в (18.74) интеграл

$$J_2 = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}}} = \int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \alpha_3^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_2} \int \frac{d(\cos\theta)}{\sqrt{(1 - \cos^2\theta) - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}} = -\frac{1}{\alpha_2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2^2} - x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_2} \arcsin\Big(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}} \cos\theta\Big) + C_2.$$

В интеграле по r в (18.74) проведем замену переменных $x = 1/r$, $dr = -dx/x^2$, и тогда

$$J_3 = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{2me}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{2m\alpha_1 - 2mex - \alpha_2^2 x^2}}.$$

Рассмотрим подкоренное выражение

$$\frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2} - \frac{2me}{\alpha_2^2} - x^2 = \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2} - \Big(x^2 + 2\frac{me}{\alpha_2^2} + \frac{m^2e^2}{\alpha_2^4} - \frac{m^2e^2}{\alpha_2^4}\Big) =$$

$$= \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2} + \frac{m^2e^2}{\alpha_2^4} - \Big(x + \frac{me}{\alpha_2^2}\Big)^2.$$

Тогда получим

$$J_3 = -\frac{1}{\alpha_2} \int \frac{dx}{\gamma^2 - [x + (me/\alpha_2^2)]^2} = -\frac{1}{\alpha_2} \arcsin \frac{x + me/\alpha_2^2}{\sqrt{(2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2)/\alpha_2^4}} + C_3.$$

Возвратившись к исходным переменным, запишем

$$J_3 = -\frac{1}{\alpha_2} \arcsin \frac{\alpha_2^2 + mer}{r\sqrt{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}} + C_3.$$

Следовательно, выражение (18.74) примет вид

$$-\arcsin\Big(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}} \cos\theta\Big) + \arcsin\Big(\frac{\alpha_2^2 + mer}{r\sqrt{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}}\Big) = -\beta_2$$

или

$$\frac{\alpha_2^2 + mer}{r\sqrt{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}} = \sin\Big[\arcsin\Big(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}}\cos\theta\Big) - \beta_2\Big],$$

или

$$\frac{\alpha_2^2 + mer}{r\sqrt{2m\alpha_1\alpha_2^2 + m^2e^2}} = \cos\Big[\arcsin\Big(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}}\cos\theta\Big) + \beta_2\Big],$$

или

$$\frac{1}{r} = -\frac{me}{\alpha_2^2} + \frac{\sqrt{m^2e^2 + 2m\alpha_1\alpha_2^2}}{\alpha_2^2}\cos\Big[\arcsin\Big(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}}\cos\theta\Big) + \beta_2\Big]. \qquad (18.77)$$

Пример 18.14. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби в двумерном поле кулоновских сил.

Решение. Гамильтониан системы в полярных координатах имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t) = c\sqrt{m_0^2c^2 + p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}} - m_0c^2 - \frac{m_0e}{r} = 0, \quad \vec{q} \in \mathbb{R}^2.$$

Запишем уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{m_0^2c^2 + \Big(\frac{\partial S}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\Big)^2} - m_0c^2 - \frac{m_0e}{r} = 0.$$

Обозначим постоянную энергию через α_3, постоянный импульс p_φ через α_2 и разделим переменные, положив

$$S(\vec{q}, t) = -\alpha_3 t + \alpha_2\varphi + f(r).$$

Тогда для определения функции $f(r)$ получим уравнение

$$c\sqrt{m_0^2c^2 + \Big(\frac{df}{dr}\Big)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2}} = m_0c^2 + \frac{m_0e}{r} + \alpha_3.$$

Отсюда

$$\Big(\frac{df}{dr}\Big)^2 = \Big(\frac{m_0^2e^2}{c^2} - \alpha_2^2\Big)\frac{1}{r^2} + 2m_0e\Big(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\Big)\frac{1}{r} + \alpha_3\Big(2m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\Big).$$

Полный интеграл имеет вид

$$S(\vec{q}, t) = -\alpha_3 t + \alpha_2\varphi +$$
$$+\int\sqrt{\Big(\frac{m_0^2e^2}{c^2} - \alpha_2^2\Big)\frac{1}{r^2} + 2m_0e\Big(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\Big)\frac{1}{r} + \alpha_3\Big(2m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\Big)}dr. \qquad (18.78)$$

Пример 18.15. Методом Якоби найти траектории релятивистского электрона в двумерном кулоновском поле.

Решение. По теореме Гамильтона–Якоби находим

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -\beta_3, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi = \alpha_2, \quad \frac{\partial S}{\partial r} = p_r.$$

Обратимся к интегралу

$$\int \frac{\alpha_2 dr}{r^2\sqrt{\Big(\frac{m_0^2e^2}{c^2} - \alpha_2^2\Big)\frac{1}{r^2} + 2m_0e\Big(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\Big)\frac{1}{r} + \alpha_3\Big(2m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\Big)}} = \varphi + \beta_2,$$

следующему из (18.78). Предположим, что

$$\frac{m_0^2e^2}{c^2} - \alpha_2^2 < 0, \qquad \alpha_3 < 0.$$

Положим также

$$\frac{1}{r} = u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2}S,$$

где u_1, u_2 – корни уравнения

$$\Big(\frac{m_0^2e^2}{c^2} - \alpha_2^2\Big)u^2 + 2m_0e\Big(m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\Big)u + \alpha_3\Big(2m_0 + \frac{\alpha_3}{c^2}\Big) = 0.$$

Вычислив интеграл, найдем

$$\frac{1}{r} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2}\cos\Big[\sqrt{1 - \frac{m_0^2e^2}{\alpha_2^2c^2}}(\varphi + \beta_2)\Big].$$

Здесь c – скорость света в вакууме, поэтому

$$\frac{m_0^2e^2}{\alpha_2^2c^2} \ll 1.$$

Найдем приближенное выражение для периода

$$\tau_r = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{m_0^2e^2}{\alpha_2^2c^2}}} \equiv 2\pi\Big(1 + \frac{m_0^2e^2}{\alpha_2^2c^2}\Big).$$

Видно, что $\tau_r > 2\pi$. Траекторию электрона можно приближенно представить в виде вращающегося эллипса ($\alpha_3 < 0$).

ГЛАВА 3
Задача Штурма–Лиувилля для уравнений в частных производных. Псевдодифференциальные операторы

В этом разделе мы рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для уравнений в частных производных и псевдодифференциальные операторы.

19. Постановка задачи

В разделе, посвященном специальным функциям, мы рассматривали задачу Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [5]). Понятие о задаче Штурма–Лиувилля может быть естественным образом обобщено на случай уравнений в частных производных.

Пусть E – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ и S_E – ее граница (гладкая поверхность). Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\widehat{L}v + \lambda\rho(\vec{x})v = 0, \qquad \vec{x} \in E, \tag{19.1}$$

с однородными граничными условиями

$$\Big(\alpha(\vec{x})\frac{\partial v}{\partial n} + \beta(\vec{x})v\Big)\Big|_{S_E} = 0. \tag{19.2}$$

Здесь обозначено

$$\widehat{L}v = \operatorname{div}\big(k(\vec{x})\operatorname{grad} v\big) - q(\vec{x})v = \big(\nabla, k(\vec{x})\nabla v\big) - q(\vec{x})v, \tag{19.3}$$

$\partial v/\partial n$ – производная вдоль внутренней нормали к поверхности S_E и $\rho(\vec{x})$ – заданная знакоположительная функция.

♦ Задача об определении значений параметра λ, при которых существует нетривиальное решение $v_\lambda(\vec{x})$ уравнения (19.1) с краевыми условиями (19.2), называется задачей Штурма–Лиувилля. Значения параметра λ, при которых существует решение задачи Штурма–Лиувилля, называются собственными значениями, а отвечающие им функции $v_\lambda(\vec{x})$ – собственными функциями.

♦ Совокупность всех собственных значений $\{\lambda_n\}$ задачи Штурма–Лиувилля называется спектром, а совокупность собственных значений и отвечающих им собственных функций $[\lambda_n, v_n(\vec{x})]$, $n = \overline{0, \infty}$, – спектральной серией.

Перечислим основные свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.

Свойство 1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ и собственных функций $\{v_n(\vec{x})\}$; можно так выбрать нумерацию собственных значений λ_n, что при увеличении номера n они неограниченно возрастают. Каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций.

♢ В отличие от задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнений в частных производных собственные значения могут быть вырожденными, т.е. собственному значению может соответствовать несколько линейно независимых собственных функций. Количество таких функций называется кратностью собственного значения, или кратностью вырождения. В дальнейшем мы будем предполагать, что в спектре задачи

Штурма–Лиувилля каждое собственное значение присутствует столько раз, какова его кратность.

Свойство 2. При $q(\vec{x}) \geqslant 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (краевое условие Дирихле) собственные значения задачи Штурма–Лиувилля положительны:

$$\lambda_n > 0, \qquad n = \overline{0, \infty}.$$

Свойство 3. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (19.1), (19.2) удовлетворяют условию ортогональности

$$\langle v_n(\vec{x})|v_m(\vec{x})\rangle_\rho = \|v_n(\vec{x})\|^2\delta_{nm}, \qquad n, m = \overline{0, \infty}, \tag{19.4}$$

где обозначено

$$\langle v|u\rangle_\rho = \langle v(\vec{x})|u(\vec{x})\rangle_\rho = \int\limits_E v(\vec{x})u(\vec{x})\rho(\vec{x})d\vec{x}, \tag{19.5}$$

$$\|v\| = \|v(\vec{x})\| = \sqrt{\langle v(\vec{x})|v(\vec{x})\rangle_\rho}. \tag{19.6}$$

◊ В дальнейшем мы будем предполагать, что собственные функции, соответствующие вырожденному собственному значению, выбраны ортогональными. Последнее всегда можно сделать, например, методом ортогонализации Шмидта (см. разд. «Ортогональные классические полиномы» части III).

Свойство 4 (теорема разложения В.А. Стеклова). Если функция $f(\vec{x})$ дважды непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\bar{E}$ и удовлетворяет граничному условию (19.2), то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи (19.1) и (19.2)

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n v_n(\vec{x}), \tag{19.7}$$

где

$$C_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\langle f(\vec{x})|v_n(\vec{x})\rangle_\rho. \tag{19.8}$$

Ряд (19.7) называется рядом Фурье функции $f(\vec{x})$ по ортогональной системе функций $\{v_n(\vec{x})\}$, $n = \overline{0, \infty}$. Коэффициенты (19.8) называются коэффициентами Фурье.

Следствие. Система собственных функций $\{v_n(\vec{x})\}$ задачи Штурма–Лиувилля удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2}\rho(\vec{y})v_n(\vec{x})v_n(\vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \tag{19.9}$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых в области $\bar{E}$ функций, для которых выполняется однородное граничное условие (19.2).

Доказательство. Подставим (19.8) в (19.7) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Получим

$$\int\limits_E f(\vec{y}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2}\rho(\vec{y})v_n(\vec{x})v_n(\vec{y})\, d\vec{y} = f(\vec{x}),$$

откуда в соответствии с определением дельта-функции следует (19.9).

◊ Доказательства свойств 1–4 полностью аналогичны доказательствам соответствующих свойств задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений.

20. Задача Штурма–Лиувилля и начально-краевые задачи для уравнений математической физики

20.1. Редукция задачи

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\rho(\vec{x})\widehat{P}_t u = \widehat{L}u + f(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in E, \tag{20.1}$$

где

$$\widehat{P}_t u = \sum_{j=0}^{2} a_j(t)\frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \tag{20.2}$$

а оператор $\widehat{L}$ определен формулой (19.3). Уравнение (20.2) является уравнением гиперболического типа, если $a_2 \neq 0$, и параболического типа, если $a_2 = 0$, а $a_1 \neq 0$.

В частности, при

$$a_2 = \frac{1}{a^2}, \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{P}_t u = \frac{1}{a^2}u_{tt}$$

уравнение (20.1) переходит в волновое уравнение, а если при этом $\widehat{L} = \Delta$, то в уравнение Даламбера

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} = \Delta u.$$

Если в уравнении (20.1)

$$a_0 = a_2 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{a^2} \quad \text{и} \quad \widehat{P}_t u = \frac{1}{a^2}u_t,$$

то оно переходит в уравнение теплопроводности. В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $\widehat{L} = \Delta$ и уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{1}{a^2}u_t = \Delta u.$$

Поставим для уравнения (20.1) начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(\vec{x}) \tag{20.3}$$

и граничные условия

$$\Big(\alpha(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\vec{x})u\Big)\Big|_{S_E} = \mu(\vec{x}, t)\big|_{S_E}, \quad |\alpha(\vec{x})| + |\beta(\vec{x})| \neq 0. \tag{20.4}$$

◊ В случае уравнения теплопроводности начальное условие имеет вид

$$u|_{t=0} = \varphi(\vec{x}). \tag{20.5}$$

♦ Классическим решением задачи (20.1)–(20.5) называется функция $u(\vec{x}, t)$, определенная и непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно в области E и $t \in [0, T]$ и удовлетворяющая граничному условию (20.4) и начальным условиям (20.3) или (20.5).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 20.1. *Пусть функции* $u_1(\vec{x},t)$, $u_2(\vec{x},t)$ *и* $u_3(\vec{x},t)$ *являются классическими решениями следующих задач:*

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_1 = \widehat{L}u_1, \qquad \vec{x}\in E, \\ \Big(\alpha\dfrac{\partial u_1}{\partial n}+\beta u_1\Big)\Big|_S = 0, \quad u_1|_{t=0}=\varphi(\vec{x}), \ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(\vec{x}); \end{cases} \tag{20.6}$$

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_2 = \widehat{L}u_2 + f(\vec{x},t), \qquad \vec{x}\in E, \\ \Big(\alpha\dfrac{\partial u_2}{\partial n}+\beta u_2\Big)\Big|_S = 0, \quad u_2|_{t=0}=\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=0; \end{cases} \tag{20.7}$$

$$\begin{cases} \rho(\vec{x})\widehat{P}_t u_3 = \widehat{L}u_3, \qquad \vec{x}\in E, \\ \Big(\alpha\dfrac{\partial u_3}{\partial n}+\beta u_3\Big)\Big|_S = \mu(\vec{x},t)|_S, \quad u_3|_{t=0}=\dfrac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \end{cases} \tag{20.8}$$

тогда решение $u(\vec{x},t)$ *задачи* (20.1), (20.3) *и* (20.4) *имеет вид*

$$u(\vec{x},t) = u_1(\vec{x},t) + u_2(\vec{x},t) + u_3(\vec{x},t). \tag{20.9}$$

Процедура сведения начально-краевой задачи (20.1), (20.3) *и* (20.4) *к более простым задачам* (20.6)–(20.8) *называется редукцией общей задачи.*

◊ Задача (20.6) представляет собой смешанную задачу с однородным граничным и неоднородным начальным условиями для однородного линейного уравнения в частных производных второго порядка; задача (20.7) – смешанную задачу с однородными граничными и начальными условиями для неоднородного линейного уравнения; задача (20.8) – смешанную задачу с неоднородными граничными и однородными начальными условиями для однородного линейного уравнения.

20.2. Неоднородные начальные условия

Рассмотрим задачу (20.6). Ее решение будем искать в виде

$$u_1(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)v_n(\vec{x}), \tag{20.10}$$

где $v_n(\vec{x})$ – решение задачи Штурма–Лиувилля (19.1), (19.2).

Подставим (20.10) в (20.6) и получим

$$\rho(\vec{x})\sum_{n=0}^{\infty} v_n(\vec{x})\widehat{P}_t T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{L}T_n(t)v_n(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_n)T_n(t)v_n(\vec{x}).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях $v_n(\vec{x})$, для определения функций $T_n(t)$ получим следующую задачу Коши:

$$\widehat{P}_t T_n + \lambda_n T_n = 0, \qquad T_n(0)=\varphi_n, \quad T_n'(0)=\psi_n, \tag{20.11}$$

где φ_n и ψ_n – коэффициенты (19.8) разложения функций $\varphi(\vec{x})$ и $\psi(\vec{x})$ в ряд Фурье по функциям $v_n(\vec{x})$:

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n v_n(\vec{x}), \qquad \psi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n v_n(\vec{x}); \tag{20.12}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\langle\varphi(\vec{x})|v_n(\vec{x})\rangle_\rho, \quad \psi_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\langle\psi(\vec{x})|v_n(\vec{x})\rangle_\rho. \tag{20.13}$$

В частности, задача Коши (20.11) для уравнения теплопроводности примет вид

$$\frac{1}{a^2}T_n' + \lambda_n T_n = 0, \qquad T_n(0) = \varphi_n, \tag{20.14}$$

и ее решением являются функции

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t}. \tag{20.15}$$

Аналогично задача Коши для волнового уравнения

$$\frac{1}{a^2}T_n'' + \lambda_n T_n = 0, \qquad T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \tag{20.16}$$

будет иметь решение

$$T_n(t) = \varphi_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin(a\sqrt{\lambda_n}t). \tag{20.17}$$

Таким образом, решение смешанной задачи (20.6) для уравнения теплопроводности имеет вид

$$u_1(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t}v_n(\vec{x}), \tag{20.18}$$

а для волнового уравнения

$$u_1(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\varphi_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)\Big]v_n(\vec{x}). \tag{20.19}$$

♦ Функция $g(\vec{x},\vec{y},t)$ называется функцией Грина, или фундаментальным решением смешанной задачи, для уравнения теплопроводности, если для произвольного фиксированного $\vec{y}\in E$ справедливо

$$\rho(\vec{x})g_t(\vec{x},\vec{y},t) = \widehat{L}_x g(\vec{x},\vec{y},t), \quad \vec{x}\in E; \tag{20.20}$$

$$\Big[\alpha(\vec{x})\frac{\partial g(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial n_x} + \beta(\vec{x})g(\vec{x},\vec{y},t)\Big\}\Big|_{S_E} = 0; \tag{20.21}$$

$$g|_{t=0} = \delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad |\alpha(\vec{x})| + |\beta(\vec{x})| \neq 0. \tag{20.22}$$

Если область E совпадает со всем пространством, то функция $g(\vec{x},\vec{y},t)$, удовлетворяющая условиям (20.20), (20.22), называется функцией Грина задачи Коши для уравнения (20.6) и обозначается через $G(\vec{x},\vec{y},t)$.

Подставив (20.22) в (20.13), из (20.18) получим следующее утверждение.

Утверждение 20.2. *Функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности* $\widehat{P}_t = \frac{1}{a^2}\partial_t$ (20.1) *можно представить в виде*

$$g(\vec{x},\vec{y},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\|v_n\|^2}\rho(\vec{y})e^{-\lambda_n a^2 t}v_n(\vec{x})v_n(\vec{y}). \tag{20.23}$$

Утверждение 20.3. *Пусть* $g(\vec{x},\vec{y},t)$ *– функция Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Тогда решение задачи* (20.6) *имеет вид*

$$u_1(\vec{x},t)=\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)\varphi(\vec{y})d\vec{y}. \tag{20.24}$$

Действительно, подставив коэффициенты Фурье (20.13) в соотношение (20.18), с учетом явного вида функции Грина (20.23) приходим к (20.24).

♦ Функции $g(\vec{x},\vec{y},t)$ и $\mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)$ называются функциями Грина смешанной задачи для волнового уравнения, если для произвольного фиксированного $\vec{y}\in E$ справедливы условия

$$\rho(\vec{x})g_{tt}(\vec{x},\vec{y},t)=\widehat{L}_x g(\vec{x},\vec{y},t),\quad \vec{x}\in E; \tag{20.25}$$

$$\Big[\alpha(\vec{x})\frac{\partial g(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial n_x}+\beta(\vec{x})g(\vec{x},\vec{y},t)\Big\}\Big|_{S_E}=0; \tag{20.26}$$

$$g\big|_{t=0}=0,\qquad g_t\big|_{t=0}=\delta(\vec{x}-\vec{y}); \tag{20.27}$$

$$\rho(\vec{x})\mathfrak{g}_{tt}(\vec{x},\vec{y},t)=\widehat{L}_x\mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t),\quad \vec{x}\in E; \tag{20.28}$$

$$\Big[\alpha(\vec{x})\frac{\partial \mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial n_x}+\beta(\vec{x})\mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)\Big\}\Big|_{S_E}=0; \tag{20.29}$$

$$\mathfrak{g}\big|_{t=0}=\delta(\vec{x}-\vec{y}),\qquad \mathfrak{g}_t\big|_{t=0}=0. \tag{20.30}$$

Когда область E совпадает со всем пространством, функции $g(\vec{x},\vec{y},t)$ и $\mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)$, отвечающие условиям (20.27)–(20.30), называются функциями Грина задачи Коши для волнового уравнения (20.1) $\widehat{P}_t=\frac{1}{a^2}\partial_t^2$ и обозначаются $G(\vec{x},\vec{y},t)$ и $\mathfrak{G}(\vec{x},\vec{y},t)$.

Утверждение, аналогичное 20.2, справедливо для волнового уравнения.

Утверждение 20.4. *Функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения* $\widehat{P}_t=\frac{1}{a^2}\partial_t^2$ (20.1) *можно представить в виде*

$$g(\vec{x},\vec{y},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\frac{1}{\|v_n\|^2}\rho(\vec{y})\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)v_n(\vec{x})v_n(\vec{y}); \tag{20.31}$$

$$\mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\|v_n\|^2}\rho(\vec{y})\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)v_n(\vec{x})v_n(\vec{y}). \tag{20.32}$$

Подставив коэффициенты Фурье (20.13) в соотношение (20.19) и учитывая явный вид функций Грина (20.31) и (20.32), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 20.5. *Пусть* $g(\vec{x},\vec{y},t)$ *и* $\mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)$ *– функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения. Тогда решение задачи* (20.6) *можно представить в виде*

$$u_1(\vec{x},t)=\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)\psi(\vec{y})d\vec{y}+\int\limits_E \mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)\varphi(\vec{y})d\vec{y}. \tag{20.33}$$

♢ Если $\widehat{P}_t=\frac{1}{a^2}\partial_t^2$ – волновой оператор, то из (20.31) и (20.32) следует

$$\mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)=g_t(\vec{x},\vec{y},t). \tag{20.34}$$

20.3. Линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим теперь задачу (20.7). Ее решение будем искать в виде

$$u_2(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(t) v_n(\vec{x}). \tag{20.35}$$

Подставим (20.35) в (20.7):

$$\rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\vec{x}) \widehat{P}_t T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{L} T_n(t) v_n(\vec{x}) + f(\vec{x},t) =$$

$$= \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n) T_n(t) v_n(\vec{x}) + \rho(\vec{x}) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) v_n(\vec{x}).$$

Здесь

$$f_n(t) = \frac{1}{\|v_n(\vec{x})\|^2} \left\langle \frac{f(\vec{x},t)}{\rho(\vec{x})} \middle| v_n(\vec{x}) \right\rangle_\rho . \tag{20.36}$$

Приравняв коэффициенты рядов Фурье, стоящих в левой и правой частях, получим следующее уравнение для $\Theta_n(t)$:

$$\widehat{P}_t \Theta_n + \lambda_n \Theta_n = f_n(t), \qquad \Theta_n(0) = \Theta_n'(0) = 0. \tag{20.37}$$

Решение уравнения (20.37) можно представить в виде

$$\Theta_n(t) = \int_0^t \mathcal{K}_n(t,\tau) f_n(\tau) d\tau, \tag{20.38}$$

где $\mathcal{K}_n(t,\tau)$ – функция Грина задачи Коши (20.37) (см. разд. «Фундаментальные решения линейных операторов» части II).

В случае уравнения теплопроводности получим

$$\Theta_n(t) = e^{-a^2\lambda_n t} \int_0^t e^{a^2\lambda_n\tau} f_n(\tau) d\tau \tag{20.39}$$

и

$$\mathcal{K}_n(t,\tau) = e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}. \tag{20.40}$$

В случае волнового уравнения для определения функции $\Theta_n(t)$ получим следующее уравнение:

$$\Theta_n'' + \lambda_n a^2 \Theta_n = f_n(t) \tag{20.41}$$

с начальными условиями (20.37).

Решение уравнения (20.41) будем искать методом Лагранжа:

$$\Theta_n(t) = p_n(t)\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n(t)\sin(a\sqrt{\lambda_n}t),$$

где функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} p_n'(t)\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n'(t)\sin(a\sqrt{\lambda_n}t) = 0, \\ p_n'(t)(-a\sqrt{\lambda_n})\sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + q_n'(t)a\sqrt{\lambda_n}\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) = f_n(t). \end{cases}$$

В результате получим

$$p_n(t) = -\frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin(a\sqrt{\lambda_n}\tau)d\tau + p_n^0,$$

$$q_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos(a\sqrt{\lambda_n}\tau)d\tau + q_n^0.$$

Из начальных условий (20.37) найдем $q_n^0 = p_n^0 = 0$. Тогда

$$\Theta_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\big[-\sin(a\sqrt{\lambda_n}\tau)\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) +$$

$$+\cos(a\sqrt{\lambda_n}\tau)\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)\big]d\tau = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin[a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)]d\tau.$$

Таким образом, для волнового уравнения

$$\mathcal{K}_n(t,\tau) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin[a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)]. \tag{20.42}$$

♦ Обобщенная функция $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ называется фундаментальным решением, или функцией Грина, смешанной задачи, если она при фиксированных $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, $\tau\in\mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(\vec{x})\widehat{P}_t\mathfrak{E} = \widehat{L}_x\mathfrak{E} + \delta(\vec{x}-\vec{y})\delta(t-\tau) \tag{20.43}$$

и однородному начально-краевому условию

$$\Big[\alpha(\vec{x})\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial n} + \beta(\vec{x})\mathfrak{E}\Big]\Big|_{S_E} = 0, \quad \mathfrak{E}|_{t=0} = \mathfrak{E}_t|_{t=0} = 0, \tag{20.44}$$
$$\{\alpha^2(\vec{x}) + \beta^2(\vec{x})\}\big|_{S_E} \neq 0.$$

Утверждение 20.6. *Фундаментальное решение $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ смешанной задачи* (20.1) *можно представить в виде*

$$\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{K}_n(t,\tau)v_n(\vec{x})v_n(\vec{y}). \tag{20.45}$$

Действительно, положив в (20.36)

$$f(\vec{x},t) = \delta(\vec{x}-\vec{y})\delta(t-\tau),$$

из (20.35) получим (20.45).

Подставив коэффициенты Фурье (20.36) в (20.35), поменяв местами суммирование и интегрирование и учтя явный вид функции $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 20.7. *Пусть* $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ *– фундаментальное решение смешанной задачи* (20.43) *и* (20.44). *Тогда решение задачи* (20.7) *можно представить в виде*

$$u_2(\vec{x},t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_E \mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau) f(\vec{y},\tau) d\vec{y}. \tag{20.46}$$

Утверждение 20.8. *Функции Грина* $\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)$ (20.43) *и* $g(\vec{x},\vec{y},t)$ (20.25), (20.20) *связаны соотношением*

$$\mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau) = \frac{1}{a_2(\tau)} g(\vec{x},\vec{y},t-\tau). \tag{20.47}$$

В случае уравнения теплопроводности в соотношении (20.47) *коэффициент* $a_2(\tau)$ *необходимо заменить на* $a_1(\tau)$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$u_2(\vec{x},t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_E \frac{1}{a_2(\tau)} g(\vec{x},\vec{y},t-\tau) f(\vec{y},\tau) d\vec{y}, \tag{20.48}$$

где функция $g(\vec{x},\vec{y},t)$ – решение задачи (20.25). Тогда

$$\widehat{L} u_2(\vec{x},t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_E \frac{1}{a_2(\tau)} \widehat{L}_x g(\vec{x},\vec{y},t-\tau) f(\vec{y},\tau) d\vec{y}.$$

Аналогично

$$\widehat{P}_t u_2(\vec{x},t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_E \frac{1}{a_2(\tau)} \widehat{P}_t g(\vec{x},\vec{y},t-\tau) f(\vec{y},\tau) d\vec{y} +$$
$$+ a_2(t) \int\limits_E \frac{1}{a_2(t)} g_t(\vec{x},\vec{y},0) f(\vec{y},t) d\vec{y} + a_2(t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_E \frac{1}{a_2(t)} \hat{g}(\vec{x},\vec{y},0) f(\vec{y},t) d\vec{y} +$$
$$+ a_1(t) \int\limits_E \frac{1}{a_2(t)} g(\vec{x},\vec{y},0) f(\vec{y},t) d\vec{y}.$$

С учетом определения (20.27) получим

$$\widehat{P}_t u_2(\vec{x},t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_E \frac{1}{a_2(\tau)} \widehat{P}_t g(\vec{x},\vec{y},t-\tau) f(\vec{y},\tau) d\vec{y} + f(\vec{x},t).$$

Отсюда в силу произвольности функции $f(\vec{y},\tau)$ следует, что представление (20.46) эквивалентно представлению (20.48) и соотношение (20.47) справедливо. Для уравнения теплопроводности доказательство аналогично.

20.4. Неоднородные граничные условия

Рассмотрим, наконец, задачу (20.8). Покажем, что ее можно свести к рассмотренным ранее. Действительно, пусть $\upsilon(\vec{x},t)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\Big[\alpha(\vec{x})\frac{\partial\upsilon}{\partial n}+\beta(\vec{x})\upsilon\Big]\Big|_{S_E}=\mu(\vec{x},t)\big|_{S_E}. \tag{20.49}$$

Решение уравнения (20.8) будем искать в виде

$$u_3(\vec{x},t)=\upsilon(\vec{x},t)+w(\vec{x},t). \tag{20.50}$$

Тогда для определения функции $w(\vec{x},t)$ имеем задачу:

$$\begin{gathered}\rho(\vec{x})\widehat{P}_t w=\widehat{L}w+\tilde{f}(\vec{x},t),\\ \Big(\alpha(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial n}+\beta(\vec{x})w\Big)\Big|_{S_E}=0,\\ w|_{t=0}=-\upsilon|_{t=0},\quad w_t|_{t=0}=-\upsilon_t|_{t=0},\end{gathered} \tag{20.51}$$

где

$$\tilde{f}(\vec{x},t)=\widehat{L}\upsilon(\vec{x},t)-\rho(\vec{x})\widehat{P}_t\upsilon(\vec{x},t),$$

т.е. для функции $w(\vec{x},t)$ получим задачи, рассмотренные выше. Тогда ее можно записать в виде

$$\begin{gathered}w(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E \mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)\tilde{f}(\vec{y},\tau)d\vec{y}-\\ -\int\limits_E \mathfrak{g}(\vec{x},\vec{y},t)\upsilon(\vec{y},0)d\vec{y}-\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)\upsilon_t(\vec{y},0)d\vec{y}.\end{gathered} \tag{20.52}$$

Соответственно, для уравнения теплопроводности вместо (20.52) получим

$$\begin{gathered}w(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E \mathfrak{E}(\vec{x},\vec{y},t,\tau)\tilde{f}(\vec{y},\tau)d\vec{y}-\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)\upsilon(\vec{y},0)d\vec{y}=\\ =\int\limits_0^t \frac{d\tau}{a_1(\tau)}\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t-\tau)\tilde{f}(\vec{y},\tau)d\vec{y}-\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)\upsilon(\vec{y},0)d\vec{y}.\end{gathered}$$

Для оператора $\widehat{P}_t=a^{-2}$, формулу (20.52) можно записать с помощью одной функции Грина $g(\vec{x},\vec{y},t)$

$$\begin{gathered}w(\vec{x},t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t-\tau)\tilde{f}(\vec{y},\tau)d\vec{y}-\\ -\int\limits_E g_t(\vec{x},\vec{y},t)\upsilon(\vec{y},0)d\vec{y}-\int\limits_E g(\vec{x},\vec{y},t)\upsilon_t(\vec{y},0)d\vec{y}.\end{gathered}$$

21. Задача Штурма–Лиувилля и краевые задачи для стационарных уравнений

Рассмотрим следующую задачу:

$$\widehat{L}u = f(\vec{x}), \tag{21.1}$$

$$\Big(\alpha(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\vec{x})u\Big)\Big|_{S_E} = \varphi(\vec{x})\big|_{S_E}. \tag{21.2}$$

Решение задачи (21.1), (21.2) будем искать в виде

$$u(\vec{x}) = w(\vec{x}) + \upsilon(\vec{x}), \tag{21.3}$$

где $\upsilon(\vec{x})$ – произвольная гладкая вместе со своими производными второго порядка функция, удовлетворяющая условию

$$\Big[\alpha(\vec{x})\frac{\partial \upsilon}{\partial n} + \beta(\vec{x})\upsilon\Big]\Big|_{S_E} = \varphi(\vec{x})\big|_{S_E},$$

например, $\upsilon(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$, если функция $\varphi(\vec{x})$ удовлетворяет перечисленным условиям. Тогда для функции $w(\vec{x})$ получим уравнение

$$\widehat{L}w = \bar{f}(\vec{x}) \tag{21.4}$$

с однородными граничными условиями

$$\Big[\alpha(\vec{x})\frac{\partial w}{\partial n} + \beta(\vec{x})w\Big]\Big|_{S_E} = 0. \tag{21.5}$$

Здесь обозначено

$$\bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \widehat{L}\upsilon(\vec{x}).$$

Решение уравнения (21.4) будем искать в виде

$$w(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n v_n(\vec{x}), \tag{21.6}$$

где $v_n(\vec{x})$ – собственные функции оператора $\widehat{L}$ в области E. Подставим (21.6) в уравнение (21.4):

$$\widehat{L}\sum_{n=0}^{\infty} w_n v_n(\vec{x}) = \bar{f}(\vec{x});$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_n)\rho(\vec{x})w_n v_n(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho(\vec{x})\alpha_n v_n(\vec{x}), \tag{21.7}$$

где

$$\alpha_n = -\frac{1}{\|v_n(x)\|^2}\left\langle\frac{\bar{f}(\vec{x})}{\rho(\vec{x})}\Big| v_n(\vec{x})\right\rangle_\rho, \tag{21.8}$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых функциях $v_n(\vec{x})$. Получим

$$\lambda_n w_n = -\alpha_n, \qquad n = \overline{0,\infty},$$

где λ_n – собственные числа задачи (19.1), (19.2). Предположим, что $\lambda_n \neq 0$, и, следовательно, функция $w(\vec{x})$ есть

$$w(\vec{x}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n} v_n(\vec{x}). \tag{21.9}$$

Тогда решение исходной задачи имеет вид

$$u(\vec{x}) = v(\vec{x}) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n} v_n(\vec{x}). \tag{21.10}$$

♦ Обобщенная функция $g(\vec{x}, \vec{y})$ называется функцией источника, или функцией Грина внутренней краевой задачи, если она при фиксированных $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{L}_x g(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \tag{21.11}$$

и однородному граничному условию

$$\Big\{\alpha(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_x} + \beta(\vec{x}) g(\vec{x}, \vec{y})\Big\}\Big|_{S_E} = 0, \tag{21.12}$$
$$\{\alpha^2(\vec{x}) + \beta^2(\vec{x})\}\big|_{S_E} \neq 0,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, нормальный к поверхности S и внутренний по отношению к области E (внутренняя нормаль). В случае граничных условий первого $(\alpha(\vec{x})|_S \equiv 0)$, второго $(\beta(\vec{x})|_S \equiv 0)$ и третьего рода функция $g(\vec{x}, \vec{y})$ называется функцией Грина (функцией источника) первой, второй и третьей краевой задачи соответственно.

Утверждение 21.1. *Функцию источника, или функцию Грина, $g(\vec{x}, \vec{y})$ внутренней краевой задачи* (21.11), (21.12) *можно представить в виде*

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\rho(\vec{y})}{\lambda_n \|v_n(\vec{x})\|^2} v_n(\vec{x}) v_n(\vec{y}). \tag{21.13}$$

Действительно, подставив $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$ в (21.8), из (21.9) получим (21.13).

Утверждение 21.2. *Пусть $g(\vec{x}, \vec{y})$ – функция Грина внутренней краевой задачи* (21.11), (21.12). *Тогда решение однородной задачи* (21.1), (21.2) $[\varphi(\vec{x}) = 0]$ *можно представить в виде*

$$u(\vec{x}) = \int\limits_E g(\vec{x}, \vec{y}) \bar{f}(\vec{y}) d\vec{y}. \tag{21.14}$$

Действительно, подставив коэффициенты α_n (21.8) в (21.9) и поменяв местами суммирование и интегрирование, с учетом (21.13) и $\varphi(\vec{x}) = 0$ убеждаемся в справедливости утверждения.

$\Diamond$ Из явного вида функции Грина (21.13) следует, что она определена, если соответствующая задача Штурма–Лиувилля не имеет тривиальных собственных значений. В противном случае можно ввести обобщенные функции Грина, аналогичные тем, которые возникали в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разд. «Краевая задача для линейных дифференциальных уравнений с параметром» части II). Например, для второй краевой задачи $(\beta(\vec{x})\big|_{S_E}=0)$

$$\big(\nabla, k(\vec{x})\nabla u\big) = f(\vec{x}), \qquad \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n}\Big|_{S_E} = 0 \tag{21.15}$$

существует обобщенная функция Грина, удовлетворяющая вместо (21.11) условию

$$\Big\{\frac{\partial g(\vec{x},\vec{y})}{\partial n_x}\Big\}\Big|_{S_E} = -\frac{1}{S_0}, \tag{21.16}$$

где S_0 – площадь поверхности S_E. Такая функция Грина называется функцией Неймана (см. также [30]). Подробно такая задача будет рассмотрена ниже.

22. Псевдодифференциальные операторы и их символы

Предположение 1. Пусть функция $A(\vec{p},\vec{x},t,\hbar)\in C^\infty$, где $(\vec{p},\vec{x})\in\mathbb{R}^n_p\times\mathbb{R}^n_x$, удовлетворяет при каждом фиксированном $t\geqslant 0$ следующим условиям:

1) регулярно зависит от параметра $\hbar$ в окрестности $\hbar=0$;

2) для произвольных мультииндексов α и β существуют такие постоянные $C_{\alpha\beta}$, M, что выполняется оценка (равномерная по t при $\hbar\to 0$)

$$|D^\alpha_{\vec{p}} D^\beta_{\vec{x}} A(\vec{p},\vec{x},t,\hbar)| \leqslant C_{\alpha\beta}(\hbar)(1+|\vec{p}|^M)(1+|\vec{x}|^M). \tag{22.1}$$

Таким образом, функция $A(\vec{p},\vec{x},t,\hbar)$ для каждого фиксированного t растет при $|\vec{p}|,|\vec{x}|\to\infty$ со всеми своими производными не быстрее некоторого полинома по $|\vec{p}|$ и $|\vec{x}|$.

Пусть теперь $\hat{\vec{p}}=(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_n)$ и $\hat{\vec{x}}=(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n)$ — набор обобщенных импульсов и координат, удовлетворяющих перестановочным соотношениям Гейзенберга

$$[\hat{p}_k,\hat{p}_l]=[\hat{x}_k,\hat{x}_l]=0, \qquad [\hat{x}_k,\hat{p}_l]=i\hbar\delta_{kl}. \tag{22.2}$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся способы упорядочения функций от некоммутирующих операторов $\hat{\vec{x}}$, $\hat{\vec{p}}$, т.е. сопоставления функции $A(\vec{p},\vec{x})$, определенной на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, оператора $\hat{A}$, самосопряженного в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n_x)$. Это соответствие будем обозначать $A(\vec{p},\vec{x})\to\hat{A}=A(\hat{\vec{p}},\hat{\vec{x}})$.

1) pq-упорядочение

$$\hat{A}_{pq}(t,\hbar) = A(\overset{2}{\hat{\vec{p}}},\overset{1}{\hat{\vec{x}}},t,\hbar) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{\eta}\,d\vec{\zeta}\,\tilde{A}(\vec{\eta},\vec{\zeta},t,\hbar)e^{i\langle\hat{\vec{p}},\vec{\eta}\rangle}e^{i\langle\hat{\vec{x}},\vec{\zeta}\rangle}. \tag{22.3}$$

2) qp-упорядочение

$$\hat{A}_{qp}(t,\hbar) = A(\overset{1}{\hat{\vec{p}}},\overset{2}{\hat{\vec{x}}},t,\hbar) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{\eta}\,d\vec{\zeta}\,\tilde{A}(\vec{\eta},\vec{\zeta},t,\hbar)e^{i\langle\hat{\vec{x}},\vec{\zeta}\rangle}e^{i\langle\hat{\vec{p}},\vec{\eta}\rangle}. \tag{22.4}$$

3) Упорядочение по Вейлю

$$\hat{A}_w(t,\hbar) = A(\overset{\omega}{\hat{\vec{p}}}, \overset{\omega}{\hat{\vec{x}}}, t, \hbar) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{\eta}\, d\vec{\zeta}\, \tilde{A}(\vec{\eta}, \vec{\zeta}, t, \hbar) e^{i\langle\hat{\vec{p}},\vec{\eta}\rangle + i\langle\hat{\vec{x}},\vec{\zeta}\rangle}, \tag{22.5}$$

где $\tilde{A}(\vec{\eta}, \vec{\zeta}, t, \hbar)$ есть фурье-образ функции $A(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar)$:

$$\tilde{A}(\vec{\eta}, \vec{\zeta}, t, \hbar) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{p} d\vec{x}\, A(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar) e^{-i\langle\vec{p},\vec{\eta}\rangle - i\langle\vec{x},\vec{\zeta}\rangle}. \tag{22.6}$$

♢ В упорядоченном символе элементы $a_1, \ldots, a_{2n}$, указывающие порядок действия операторов, расставляются слева направо по возрастанию номеров. Например, $\hat{L}_{qp} = L(\overset{1}{\hat{p}}, \overset{2}{\hat{x}})$ ($a_1 = 1$, $a_2 = 2$) означает, что оператор $\hat{p}$ действует первым, а затем на полученное выражение действует оператор $\hat{x}$. Если же $\hat{L}_{pq} = L(\overset{2}{\hat{p}}, \overset{1}{\hat{x}})$ ($a_1 = 2, a_2 = 1$), то первым действует оператор $\hat{x}$, вторым – $\hat{p}$. При вейлевском упорядочении все элементы $a_1, \ldots, a_{2n}$ равноправны в смысле порядка их следования, поэтому над ними ставится один и тот же номер ω. Значение этого номера не играет никакой роли, поэтому мы его будем опускать, если это не приводит к недоразумениям.

Подставив (22.6) в (22.3)–(22.5), получаем следующие выражения для упорядоченных операторов:

$$\hat{A}_{pq} = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{p}\, d\vec{x}\, A(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar) \delta(\vec{p} - \hat{\vec{p}}) \delta(\vec{x} - \hat{\vec{x}}), \tag{22.7}$$

$$\hat{A}_{qp} = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{p}\, d\vec{x}\, A(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar) \delta(\vec{x} - \hat{\vec{x}}) \delta(\vec{p} - \hat{\vec{p}}), \tag{22.8}$$

$$\hat{A}_w = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{p} d\vec{x}\, A(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar) \hat{\Delta}(\vec{p}, \vec{x}), \tag{22.9}$$

где $\delta(\hat{\vec{x}} - \vec{x})$ и $\delta(\hat{\vec{p}} - \vec{p})$ — операторные δ-функции, интегральное представление которых записывается в виде

$$\delta(\hat{\vec{x}} - \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{\zeta}\, e^{i\langle(\hat{\vec{x}} - \vec{x}), \vec{\zeta}\rangle} \tag{22.10}$$

и обозначено

$$\hat{\Delta}(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{\eta} d\vec{\zeta}\, e^{i\langle(\hat{\vec{p}} - \vec{p}), \vec{\eta}\rangle + i\langle(\hat{\vec{x}} - \vec{x}), \vec{\zeta}\rangle}. \tag{22.11}$$

♦ Функция $A(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar)$ называется символом операторов

$$\hat{A}_{pq}(t, \hbar), \quad \hat{A}_{qp}(t, \hbar), \quad \hat{A}_w(t, \hbar),$$

а функция $A(\vec{p}, \vec{x}, t, 0)$ – главным символом этих операторов.

Пример 22.1. Найти операторы $\hat{A}_{pq}, \hat{A}_{qp}, \hat{A}_w$, отвечающие символу $A(p, x) = xp^2$.

Решение. Из определения следует

$$\hat{A}_{qp} = \hat{p}^2 x, \qquad \hat{A}_{pq} = x\hat{p}^2,$$
$$\hat{A}_w = \frac{1}{3}(x\hat{p}^2 + \hat{p}x\hat{p} + \hat{p}^2 x).$$

Мы рассмотрели задачу о том, как заданной функции (символу) $A(\vec{p}, \vec{x})$ поставить в соответствие операторы $\hat{A}_{pq}$, $\hat{A}_{qp}$, $\hat{A}_w$. Рассмотрим теперь задачу о том, как связаны pq, qp и вейлевские символы одного и того же оператора $\hat{A}$.

Теорема 22.1. *Пусть $\hat{A}$ – псевдодифференциальный оператор, $A_w(\vec{p}, \vec{x})$ – его вейлевский символ, $A_{pq}(\vec{p}, \vec{x})$ – его pq-символ, $A_{qp}(\vec{p}, \vec{x})$ – его qp-символ. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$A_{pq}(\vec{p}, \vec{x}) = \exp\Big(-\frac{i\hbar}{2}\Big\langle\frac{\partial}{\partial\vec{p}}, \frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Big\rangle\Big)A_w(\vec{p}, \vec{x}), \tag{22.12}$$
$$A_{qp}(\vec{p}, \vec{x}) = \exp\Big(\frac{i\hbar}{2}\Big\langle\frac{\partial}{\partial\vec{p}}, \frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Big\rangle\Big)A_w(\vec{p}, \vec{x}), \tag{22.13}$$

где

$$\Big\langle\frac{\partial}{\partial\vec{p}}, \frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Big\rangle = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Доказательство. По определению (22.5) для упорядоченного по Вейлю оператора имеем

$$\hat{A}_w(t, \hbar) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{\eta}\, d\vec{\zeta}\, \tilde{A}_w(\vec{\eta}, \vec{\zeta}, t, \hbar)e^{i\langle\hat{\vec{p}}, \vec{\eta}\rangle + i\langle\hat{\vec{x}}, \vec{\zeta}\rangle}.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся тождеством Вейля: если $\hat{B}$ и $\hat{C}$ – два заданных некоммутирующих оператора, удовлетворяющих условиям

$$[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{C}]] = 0, \quad [\hat{C}, [\hat{B}, \hat{C}]] = 0,$$

то

$$e^{\hat{B} + \hat{C}} = e^{-[\hat{B}, \hat{C}]/2}e^{\hat{B}}e^{\hat{C}}. \tag{22.14}$$

Положим здесь $\hat{B} = i\langle(\hat{\vec{p}} - \vec{p}), \vec{\eta}\rangle$ и $\hat{C} = i\langle(\hat{\vec{x}} - \vec{x}), \vec{\zeta}\rangle$. Тогда соотношение (22.14) примет вид

$$e^{i\langle(\hat{\vec{p}} - \vec{p}), \vec{\eta}\rangle + i\langle(\hat{\vec{x}} - \vec{x}), \vec{\zeta}\rangle} = e^{(-i\hbar/2)\langle\vec{\eta}, \vec{\zeta}\rangle}e^{i\langle(\hat{\vec{p}} - \vec{p}), \vec{\eta}\rangle}e^{i\langle(\hat{\vec{x}} - \vec{x}), \vec{\zeta}\rangle}. \tag{22.15}$$

Подставим (22.15) в (22.5) и получим

$$\hat{A}_w(t, \hbar) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{\eta}\, d\vec{\zeta}\, \tilde{A}_w(\vec{\eta}, \vec{\zeta}, t, \hbar)e^{-\frac{i\hbar}{2}\langle\vec{\zeta}, \vec{\eta}\rangle}e^{i\langle\hat{\vec{p}}, \vec{\eta}\rangle}e^{i\langle\hat{\vec{x}}, \vec{\zeta}\rangle} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} d\vec{\eta}\, d\vec{\zeta}\, \tilde{A}_{pq}(\vec{\eta}, \vec{\zeta}, t, \hbar)e^{i\langle\hat{\vec{p}}, \vec{\eta}\rangle}e^{i\langle\hat{\vec{x}}, \vec{\zeta}\rangle},$$

где, согласно определению (22.3), обозначено

$$\tilde{A}_{pq}(\vec{\eta}, \vec{\zeta}, t, \hbar) = \tilde{A}_w(\vec{\eta}, \vec{\zeta}, t, \hbar)e^{-\frac{i\hbar}{2}\langle\vec{\zeta}, \vec{\eta}\rangle}.$$

Аналогично для qp-упорядоченного символа найдем

$$\tilde{A}_{qp}(\vec{\eta},\vec{\zeta},t,\hbar)=\tilde{A}_w(\vec{\eta},\vec{\zeta},t,\hbar)e^{\frac{i\hbar}{2}\langle\vec{\zeta},\vec{\eta}\rangle}.$$

Проведем обратное преобразование Фурье

$$A_{pq}(\vec{p},\vec{x})=\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}d\vec{\eta}d\vec{\zeta}\,\tilde{A}_{pq}(\vec{\eta},\vec{\zeta})e^{i\langle\vec{p},\vec{\eta}\rangle+i\langle\vec{x},\vec{\zeta}\rangle} \tag{22.16}$$

и с учетом его свойств получим утверждение теоремы.

Следствие 22.1.1. *Для упорядоченного по Вейлю оператора справедливо следующее представление:*

$$\begin{aligned}\hat{A}=&\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}d\vec{p}\,d\vec{x}\Big\{\exp\Big(-\frac{i\hbar}{2}\Big\langle\frac{\partial}{\partial\vec{p}},\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Big\rangle\Big)A_w(\vec{p},\vec{x})\Big\}\delta(\vec{p}-\hat{\vec{p}})\delta(\vec{x}-\hat{\vec{x}})=\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}d\vec{p}\,d\vec{x}\Big\{\exp\Big(\frac{i\hbar}{2}\Big\langle\frac{\partial}{\partial\vec{p}},\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Big\rangle\Big)A_w(\vec{p},\vec{x})\Big\}\delta(\vec{x}-\hat{\vec{x}})\delta(\vec{p}-\hat{\vec{p}}).\end{aligned} \tag{22.17}$$

Доказательство непосредственно следует из (22.7), (22.8) и (22.12), (22.13).

Пример 22.2. Найти операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ с вейлевскими символами а) $A(p,x)=p^2x$, б) $B(p,x)=T(p)+U(x)$.

Решение. а) Нетрудно заметить, что

$$\exp\Big(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\Big)p^2x=p^2x-i\hbar p.$$

Подставив последнее соотношение в (22.17), найдем

$$\hat{A}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,(p^2x-i\hbar p)\delta(p-\hat{p})\delta(x-\hat{x})=\hat{p}^2\hat{x}-i\hbar\hat{p}.$$

б) Аналогично

$$\exp\Big(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\Big)[T(p)+U(x)]=T(p)+U(x).$$

Следовательно,

$$\hat{B}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,[T(p)+U(x)]\delta(p-\hat{p})\delta(x-\hat{x})=T(\hat{p})+U(\hat{x}).$$

Следствие 22.1.2. *Имеет место операторное тождество*

$$e^{i\langle\hat{\vec{p}}-\vec{p},\vec{\eta}\rangle+i\langle\hat{\vec{x}}-\vec{x},\vec{\zeta}\rangle}=e^{(i\hbar/2)\langle\partial/\partial\vec{p},\partial/\partial\vec{x}\rangle}e^{i\langle\hat{\vec{p}}-\vec{p},\vec{\eta}\rangle}e^{i\langle\hat{\vec{x}}-\vec{x},\vec{\zeta}\rangle}. \tag{22.18}$$

Доказательство непосредственно следует из (22.7), (22.8) и (22.12), (22.13).

Следствие 22.1.3. *Справедливо следующее операторное тождество:*

$$\hat{\Delta}(\vec{p},\vec{x}) = e^{(i\hbar/2)\langle\frac{\partial}{\partial\vec{p}},\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\rangle}\delta(\hat{\vec{p}}-\vec{p})\delta(\hat{\vec{x}}-\vec{x}). \tag{22.19}$$

Доказательство аналогично.

Перечислим теперь основные свойства оператора $\hat{\Delta}(\vec{p},\vec{x})$ (см., например, [21]), которые затем используются при выводе основных формул вейлевского исчисления.

Лемма 22.1. *Ядро линейного оператора $\hat{\Delta}(\vec{p},\vec{x})$ определяется выражением*

$$\langle\vec{x}'|\hat{\Delta}(\vec{p},\vec{x})|\vec{x}''\rangle = \delta\Big(\vec{x}-\frac{\vec{x}'+\vec{x}''}{2}\Big)\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}e^{i\langle\vec{p},\vec{x}'-\vec{x}''\rangle/\hbar}. \tag{22.20}$$

$\Diamond$ Здесь и в дальнейшем под ядром линейного оператора $\widehat{A}$ будем понимать функцию $\mathcal{K}(\vec{x},\vec{y})$, определяемую соотношением

$$\hat{A}\Phi(\vec{x},t) = \int d\vec{y}\,\mathcal{K}(\vec{x},\vec{y})\Phi(\vec{y},t). \tag{22.21}$$

Доказательство. Для доказательства этого равенства следует воспользоваться формулой (22.18) и формулой связи между x- и p-представлениями

$$\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}e^{i\langle\vec{p},\vec{x}\rangle/\hbar}. \tag{22.22}$$

Из соотношения (22.17) легко заметить, что оператор $\hat{\Delta}(\vec{p},\vec{x})$ является самосопряженным. Отсюда, в соответствии с определением (22.9), следует и самосопряженность произвольного оператора $\hat{A}$, имеющего вещественный главный символ:

$$\hat{A}^+ = \hat{A}. \tag{22.23}$$

Теорема 22.2. *Ядро оператора $\hat{A}$ с символами $A_w(\vec{p},\vec{x})$, $A_{pq}(\vec{p},\vec{x})$, $A_{qp}(\vec{p},\vec{x})$ в x-представлении задается формулами*

$$\begin{gathered}\mathcal{K}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int d\vec{p}\,e^{i\langle\vec{p},\vec{x}-\vec{y}\rangle/\hbar}A_w\Big(\vec{p},\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}\Big) = \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int d\vec{p}\,e^{i\langle\vec{p},\vec{x}-\vec{y}\rangle/\hbar}A_{qp}(\vec{p},\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int d\vec{p}\,e^{i\langle\vec{p},\vec{x}-\vec{y}\rangle/\hbar}A_{pq}(\vec{p},\vec{y}).\end{gathered} \tag{22.24}$$

Доказательство. В самом деле, поскольку $\mathcal{K}(\vec{x}',\vec{x}'') = \langle\vec{x}'|\hat{\mathcal{H}}|\vec{x}''\rangle$, мы с помощью формул (22.9) и (22.20) легко получаем соотношение (22.24).

$\Diamond$ Из соотношения (22.24), используя определение ядра оператора (22.21), можно определить действие упорядоченного по Вейлю оператора $\hat{A}$ в x-представлении

$$\hat{A}\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int d\vec{y}\,d\vec{p}\,e^{i\langle\vec{p},\vec{x}-\vec{y}\rangle/\hbar}A_w\Big(\vec{p},\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2},t\Big)\Phi(\vec{y},t). \tag{22.25}$$

В математической литературе формула (22.25) часто принимается за определение вейлевского $\hbar$-псевдодифференциального оператора. В частности, из условия (22.1) для символа оператора $\hat{A}$ следует, что $\hat{A}(t) : L_2(\mathbb{R}^n_x) \to L_2(\mathbb{R}^n_x)$.

Приведем ниже формулы, полезные при переходе при $\hbar \to 0$ от квантовых наблюдаемых, описываемых вейлевскими операторами, к их классическим аналогам.

Обозначим

$$\operatorname{sym}\hat{A} = A(\vec{p}, \vec{x}, t), \tag{22.26}$$

где $A(\vec{p}, \vec{x}, t)$ — вейлевский символ (по-прежнему для удобства считаем его не зависящим от $\hbar$) оператора $\hat{A}$.

Лемма 22.2. *Имеют место следующие формулы:*

$$\operatorname{Sp}\,\big(\hat{\Delta}(\vec{p}, \vec{x})\hat{\Delta}(\vec{p}\,', \vec{x}\,')\big) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\delta(\vec{p} - \vec{p}\,')\delta(\vec{x} - \vec{x}\,'); \tag{22.27}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Sp}\,\big(\hat{\Delta}(\vec{p}, \vec{x})\hat{\Delta}(\vec{p}\,', \vec{x}\,')\hat{\Delta}(\vec{p}\,'', \vec{x}\,'')\big) = \\ = \frac{4^n}{(2\pi\hbar)^{3n}}\exp\Big\{\frac{2i}{\hbar}\big[\vec{p}(\vec{x}\,'' - \vec{x}\,') + \vec{p}\,'(\vec{x} - \vec{x}\,'') + \vec{p}\,''(\vec{x}\,' - \vec{x})\big]\Big\}.\end{gathered} \tag{22.28}$$

Доказательство. Доказательства этих равенств однотипны и прямо следуют из определения следа оператора

$$\operatorname{Sp}\ \hat{L} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{x}\,\langle\vec{x}|\hat{L}|\vec{x}\rangle$$

и формулы (22.20). Применив формулу (22.25) к оператору $\hat{A}$ (22.9), получим одну из важнейших формул вейлевского исчисления:

$$\operatorname{sym}\hat{A} = (2\pi\hbar)^n\ \operatorname{Sp}\,\big(\hat{A}\hat{\Delta}(\vec{p}, \vec{x})\big). \tag{22.29}$$

Получим теперь формулу, связывающую вейлевский символ оператора $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ с символами операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ (для удобства записи зависимость от времени будем опускать).

Теорема 22.3. *Если $A(\vec{p}, \vec{x}) = A(z)$ и $B(\vec{p}, \vec{x}) = B(z)$ – вейлевские символы операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ соответственно, то вейлевский символ оператора $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ определяется соотношениями*

$$C(\vec{p}, \vec{x}) = \Big\{\exp\Big[-\frac{i\hbar}{2}\Big(\Big\langle\frac{\partial}{\partial\vec{p}_A}\frac{\partial}{\partial\vec{x}_B}\Big\rangle - \Big\langle\frac{\partial}{\partial\vec{x}_A}\frac{\partial}{\partial\vec{p}_B}\Big\rangle\Big)\Big]\Big\}A(\vec{p}, \vec{x})B(\vec{p}, \vec{x}), \tag{22.30}$$

$$C(z) = \exp\Big\{-\frac{i\hbar}{2}\Big\langle\frac{\partial}{\partial z_A}, J\frac{\partial}{\partial z_B}\Big\rangle A(z)B(z)\Big\},$$

где индексы A, B указывают на то, от символа какого оператора берется производная.

Доказательство. Для доказательства следует воспользоваться формулами (22.28) и (22.29)

$$\begin{aligned}C(\vec{p}, \vec{x}) &= \operatorname{sym}(\hat{A}\hat{B}) = (2\pi\hbar)^n\ \operatorname{Sp}\,\big\{\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}(\vec{p}, \vec{x})\big\} = \\ &= (2\pi\hbar)^n\int d\vec{p}\,'d\vec{x}\,'d\vec{p}\,''d\vec{x}\,''\ A(\vec{p}\,', \vec{x}\,')B(\vec{p}\,'', \vec{x}\,'')\ \times \\ &\times\operatorname{Sp}\,\big\{\hat{\Delta}(\vec{p}, \vec{x})\hat{\Delta}(\vec{p}\,', \vec{x}\,')\hat{\Delta}(\vec{p}\,'', \vec{x}\,'')\big\} =\end{aligned}$$

$$= \frac{4^n}{(2\pi\hbar)^{2n}}\int \exp\Big[\frac{2i}{\hbar}\Big\{\langle\vec{p},(\vec{x}\,''-\vec{x}\,')\rangle + \langle\vec{p}\,',(\vec{x}-\vec{x}\,'')\rangle +$$
$$+\langle\vec{p}\,'',(\vec{x}\,'-\vec{x})\rangle\Big\}\Big]A(\vec{p}\,',\vec{x}\,')B(\vec{p}\,'',\vec{x}\,'')d\vec{p}\,'d\vec{x}\,'d\vec{p}\,''d\vec{x}\,''.$$

Перейдем к новым переменным $\vec{x}' = \vec{x} - \hbar\vec{\eta}/2$; $\vec{p}' = \vec{p} + \hbar\vec{\zeta}/2$ и учтем, что $d\vec{p}'d\vec{x}' = (\hbar/2)^{2n}d\vec{\eta}d\vec{\zeta}$. Получим

$$\operatorname{sym}(\hat{A}\hat{B}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int e^{i\langle(\vec{x}'-\vec{x}''),\vec{\zeta}\rangle + i\langle(\vec{p}'-\vec{p}''),\vec{\eta}\rangle}\times$$
$$\times A\Big(\vec{p}+\frac{\hbar}{2}\vec{\zeta},\vec{x}-\frac{\hbar}{2}\vec{\eta}\Big)B(\vec{p}'',\vec{x}'')d\vec{\eta}d\vec{\zeta}d\vec{p}''d\vec{x}''. \tag{22.31}$$

С помощью соотношения

$$A(\vec{p}+\frac{\hbar}{2}\vec{\zeta},\vec{x}-\frac{\hbar}{2}\vec{\eta}) = \exp\Big[\frac{\hbar}{2}\Big(\Big\langle\vec{\zeta},\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\Big\rangle - \Big\langle\vec{\eta},\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Big\rangle\Big)\Big]A(\vec{p},\vec{x})$$

формулу (22.31) можно переписать в виде

$$\operatorname{sym}(\hat{A}\hat{B}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int B(\vec{p}'',\vec{x}'')e^{i\left\langle\vec{\zeta},\left(\vec{x}-\vec{x}''-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right)\right\rangle}\times$$
$$\times e^{i\left\langle\vec{\eta},\left(\vec{p}-\vec{p}''+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)\right\rangle}A(\vec{p},\vec{x})d\vec{\eta}d\vec{\zeta}d\vec{p}''d\vec{x}''.$$

Так как, согласно формуле (22.10), операторная δ-функция в x-представлении имеет вид

$$\delta\Big(\vec{p}+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Big) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{\eta}\,\exp\Big[i\Big\langle\vec{\eta},\Big(\vec{p}+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Big)\Big\rangle\Big],$$

то

$$\operatorname{sym}(\hat{A}\hat{B}) = B\Big(\vec{p}+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{x}_A},\vec{x}-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{p}_A}\Big)A(\vec{p},\vec{x}) =$$
$$= B\Big(z-\frac{i\hbar}{2}J\frac{\partial}{\partial z_A}\Big)A(z) = A\Big(z+\frac{i\hbar}{2}J\frac{\partial}{\partial z_B}\Big)B(z). \tag{22.32}$$

Разложив правую часть (22.32) в ряд Тейлора в точке $(\vec{p},\vec{x})$, получим

$$\operatorname{sym}(\hat{A}\hat{B}) = \sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{\alpha!\beta!}\{\partial^\alpha_{\vec{p}_B}\partial^\beta_{\vec{x}_B}B(\vec{p},\vec{x})\}\Big\{\Big(\frac{i\hbar}{2}\partial_{\vec{x}_A}\Big)^\alpha\Big(-\frac{i\hbar}{2}\partial_{\vec{p}_A}\Big)^\beta A(\vec{p},\vec{x})\Big\} =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!}\Big(\frac{i\hbar}{2}\Big)^{|\alpha+\beta|}\{\partial^\beta_{\vec{p}_A}\partial^\alpha_{\vec{x}_A}A(\vec{p},\vec{x})\}\{\partial^\beta_{\vec{p}_B}\partial^\alpha_{\vec{x}_B}B(\vec{p},\vec{x})\} =$$
$$= \Big[\exp\Big\{-\frac{i\hbar}{2}(\partial_{\vec{p}_A}\partial_{\vec{x}_B}-\partial_{\vec{x}_A}\partial_{\vec{p}_B})\Big\}\Big]A(\vec{p},\vec{x})B(\vec{p},\vec{x}).$$

Из (22.30) в свою очередь следует, что

$$\operatorname{sym}[\hat{A},\hat{B}]_- = \Big\{-2i\sin\frac{\hbar}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial\vec{p}_A}\frac{\partial}{\partial\vec{x}_B}-\frac{\partial}{\partial\vec{x}_A}\frac{\partial}{\partial\vec{p}_B}\Big)\Big\}A(\vec{p},\vec{x})B(\vec{p},\vec{x}). \tag{22.33}$$

Формула (22.31) позволяет определить предел при $\hbar \to 0$ при переходе от квантовой скобки Пуассона к классической, а именно:

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{i}{\hbar} \operatorname{sym}[\hat{A}, \hat{B}] = \{A, B\}_{\vec{p},\vec{x}}, \tag{22.34}$$

где $\{A, B\}_{\vec{p},\vec{x}}$ – классическая скобка Пуассона. Кроме того, разложив правые части равенств (22.30) и (22.33) по степеням параметра $\hbar$ и применив формулу (22.9), получим

$$\hat{A}\hat{B} = (\widehat{A\,B}) - \frac{i\hbar}{2}\{\widehat{A, B}\} + \hat{O}(\hbar^2), \tag{22.35}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hbar\{\widehat{A, B}\} + \hat{O}(\hbar^3). \tag{22.36}$$

Список литературы

1. Анго А. *Математика для электро и радиоинженеров.* – М.: Наука, 1964. – 772 с.
2. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* — М.: Наука, 1989. — 472 с.
3. Bargmann V., Wigner B. Group theoretical discussion of relativistic wave equations // Proc. Nat. Acad. Sci USA. — 1948. — Vol. 34, No 5. — P. 211-223.
4. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. I: *Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.
5. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. II, ч. 1: *Специальные функции.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 352 с.
6. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. II, ч. 2: *Уравнения математической физики.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 646 с.
7. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики. Асимптотические методы.* — Томск: Изд-во ТПУ, 2005. — 182 с.
8. Багров В.Г., Бордовицын В.А. Классическая теория спина // Изв. вузов. Физика. — 1980. — № 2. — С. 67-76.
9. Белов В.В., Воробьев Е.М. *Сборник задач по дополнительным главам математической физики.* – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
10. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Задачи по математической физике.* – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.
11. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физики.* – М.: Наука, 1972. – 688 с.
12. Ватсон Г. *Теория бесселевых функций.* Т. 1. – М.: ИЛ, 1947. – 800 с.
13. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1981. – 512 с.
14. Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики.* – М.: Наука, 1981. – 270 с.
15. Воробьев Е.М., Дубнов В.Л., Маслов В.П. *Уравнения математической физики.* – М.: Из-во МИЭМ, 1973. – 136 с.
16. Гюнтер Н.М. *Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных.* – Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1934. – 360 с.
17. Ефимов А.В. *Математический анализ* (*специальные разделы*): Ч. I. – М.: Высшая школа, 1980. – 280 с.
18. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. *Математический анализ* (*специальные разделы*): Ч. II. – М.: Высшая школа, 1980. – 296 с.
19. Ициксон К., Зюбер Ж.З. *Квантовая теория поля.* Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 448 с.
20. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержев В.Ф. *Специальный курс высшей математики.* – М.: Высшая школа, 1976. – 400 с.
21. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1964. – 832 с.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* — М.: Наука, 1960. — 400 с.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика.* – М.: Наука, 1965. — 204 с.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Питаевский П.С. *Квантовая электродинамика.* — М.: Наука, 1998. — 624 с.

25. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. *Дифференциальные уравнения математической физики.* – М.: Изд-во МГТУ, 1996. – 368 с.
26. Масленникова В.Н. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* – М.: Изд-во РУДН, 1997. – 446 с.
27. Мышкис А.Д. *Математика для втузов. Специальный курс.* – М.: Наука, 1971. – 632 с.
28. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Лекции по математической физике.* – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
29. Смирнов В.М. *Курс высшей математики.* – Т. 4. – М.: Наука, 1953. – 812 с.
30. Соболев С.Л. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1966. – 444 с.
31. Тернов И.М., Бордовицын В.А. О современной интерпретации классической теории спина Я.И. Френкеля // Успехи физ. наук. — 1980. — Т. 132, вып. 2. — С. 345-352.
32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 736 с.
33. Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Элементы функционального анализа.* — Томск: Изд-во ТПУ, 2005. — 182 с.
34. Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1980. – 352 с.
35. Френкель Я.И. Электродинамика вращающегося электрона // Собр. избранных трудов. Т. 2. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 460-476.
36. Шилов Г.Е. *Математический анализ (специальный курс).* – М.: Физматгиз, 1960. – 388 с.
37. Шилов Г.Е. *Математический анализ (второй специальный курс).* – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 208 с.
38. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Багров Владислав Гавриилович,
Белов Владимир Владимирович,
Задорожный Валерий Николаевич,
Трифонов Андрей Юрьевич

Элементы современной математической физики

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*

Отпечатано с оригинал макета-макета авторов

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе TEX – LATEX
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати 24.12.2004.
Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Печать RISO. Усл. печ. л. 19,3 . Уч.-изд. л. 17,5 .
Тираж 150 экз. Заказ №356. Цена свободная.
Издательство ТПУ. 634050, г. Томск, проспект Ленина, 30

В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов

ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ