

**В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов,  
А.В. Шаповалов**

# **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ**

**Часть III.**

**Дифференциальное и интегральное исчисление**

**Часть III. 4.**

**Интегральное исчисление функций нескольких переменных**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

**В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА  
ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ**

Часть III. Дифференциальное и интегральное  
исчисление

Часть III. 4. Интегральное исчисление функций  
нескольких переменных

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета*

Издательство  
Томского политехнического университета  
2024

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73  
3-15

**Задорожный В.Н.**

3-15

Высшая математика для технических университетов. Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление. Часть III.4. Интегральное исчисление функций нескольких переменных : учебное пособие / В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов ; Томский политехнический университет. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2024. – 517 с.

ISBN 978-5-4387-1200-8

Настоящее пособие завершает изложение третьей части курса «Высшая математика для технических университетов».

Предназначено для студентов инженерных и физических специальностей технических университетов. Также будет полезно студентам, обучающимся в системе углубленного технического образования, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

**УДК 51(075.8)**  
**ББК 22.1я73**

*Рецензенты*

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ  
*В.Я. Эпп*

Доктор физико-математических наук, доцент НИ ТГУ  
*В.Н. Черепанов*

**ISBN 978-5-4387-1200-8**

© ФГАОУ ВО НИ ТПУ, 2024  
© Задорожный В.Н., Шаповалов А.В., 2024  
© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2024

## Оглавление

Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	7
Раздел 1. Интегралы Римана функций нескольких переменных . . . . .	9
1. Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла . . . . .	9
2. Клеточные множества и мера Жордана . . . . .	12
2.1. Определитель Грама. Клетка в $\mathbb{R}^n$ и ее мера . . . . .	12
2.2. Клеточные множества и их свойства . . . . .	15
2.3. Мера клеточного множества и её свойства . . . . .	16
2.4. Измеримость произвольного множества по Жордану. Критерий измеримости . . . . .	17
2.5. Свойства жордановых множеств . . . . .	25
3. Определение кратного интеграла Римана . . . . .	28
3.1. Интегральные суммы и интеграл Римана для функций многих переменных . . . . .	29
3.2. Интеграл Римана для функций нескольких переменных и классы интегрируемых функций . . . . .	30
3.3. Интегральные суммы Дарбу . . . . .	31
4. Свойства кратных интегралов . . . . .	38
4.1. Однородные свойства кратных интегралов . . . . .	38
4.2. Аддитивные свойства кратных интегралов . . . . .	39
4.3. Оценки кратных интегралов . . . . .	47
4.4. Интегральные теоремы о среднем . . . . .	48
5. Приведение кратных интегралов к повторным . . . . .	50
5.1. Двойной и повторные пределы интегральной суммы . . . . .	51
5.2. Двойной и повторные интегралы по клеточному компакту – прямоугольнику . . . . .	52
5.3. Кратные и повторные интегралы по клеточному компакту произвольной размерности . . . . .	62
5.4. Кратные и повторные интегралы по произвольным жордановым множествам . . . . .	66
Раздел 2. Вычисление кратных интегралов . . . . .	69
6. Вычисление двойных интегралов . . . . .	69
6.1. Расстановка пределов в повторных интегралах двойного . . . . .	69
6.2. Примеры вычисления двойных интегралов . . . . .	86
7. Вычисление тройных интегралов . . . . .	94
7.1. Расстановка пределов в повторных интегралах тройного . . . . .	95
7.2. Примеры вычисления тройных интегралов . . . . .	108
7.3. Примеры вычисления $n$ -кратных интегралов . . . . .	118
8. Замена переменных в кратных интегралах . . . . .	129
8.1. Лемма о якобиане непрерывно дифференцируемого отображения . . . . .	129
8.2. Формула замены переменных в кратном интеграле . . . . .	133
9. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	136
9.1. Отображение множеств на плоскости . . . . .	136
9.2. Вычисление двойных интегралов методом замены переменных. Примеры . . . . .	145
10. Использование полярных и обобщенных полярных координат для вычисления двойных интегралов . . . . .	153
11. Замена переменных в тройном интеграле . . . . .	189
11.1. Отображение множества в пространстве . . . . .	189
11.2. Вычисление тройных интегралов методом замены переменных. Примеры . . . . .	200

12. Цилиндрические и обобщенные цилиндрические координаты и их приложение к вычислению тройных интегралов . . . . .	209
13. Использование сферических и обобщенных сферических координат для вычисления тройных интегралов . . . . .	223
14. Использование $n$ -мерной сферической системы координат при вычислении кратных интегралов . . . . .	238
15. Приложения двойных интегралов . . . . .	248
15.1. Геометрические приложения двойных интегралов . . . . .	248
15.2. Физические приложения двойных интегралов . . . . .	262
16. Приложения тройных интегралов . . . . .	268
17. Приложения $n$ -кратных интегралов ( $n > 3$ ) . . . . .	281
Раздел 3. Криволинейные и поверхностные интегралы . . . . .	288
18. Криволинейные интегралы . . . . .	288
18.1. Параметризация гладкой кривой и производная переменной длины дуги . . . . .	289
18.2. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги) и его свойства . . . . .	302
18.3. Примеры вычислений криволинейных интегралов первого рода . . . . .	306
18.4. Приложения криволинейных интегралов первого рода . . . . .	314
18.5. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам) и его свойства . . . . .	321
18.6. Примеры вычисления криволинейных интегралов второго рода . . . . .	325
19. Формула Грина . . . . .	331
19.1. Граница плоской области. Ориентация и связность . . . . .	331
19.2. Формула Грина . . . . .	333
19.3. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования (плоский случай) . . . . .	349
20. Поверхностные интегралы . . . . .	358
20.1. Параметризация поверхности. Простые, почти простые и кусочно-гладкие поверхности . . . . .	358
20.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности . . . . .	364
20.3. Ориентируемые поверхности. Согласование ориентаций поверхности и простого контура на поверхности . . . . .	368
20.4. Площадь поверхности . . . . .	372
20.4.1. Первая квадратичная форма поверхности . . . . .	372
20.4.2. Площадь простой поверхности . . . . .	373
20.5. Поверхностные интегралы первого рода . . . . .	375
20.6. Практика вычислений поверхностных интегралов первого рода и их приложений . . . . .	379
20.7. Поверхностный интеграл второго рода . . . . .	407
20.8. Практика вычислений поверхностных интегралов второго рода и их приложений . . . . .	409
21. Кратные, поверхностные и криволинейные интегралы – связь между интегрированием и дифференцированием . . . . .	423
21.1. Теорема Остроградского–Гаусса . . . . .	423
21.2. Примеры применения формулы Остроградского–Гаусса . . . . .	427
21.3. Теорема Стокса . . . . .	434
21.4. Примеры применения формулы Стокса . . . . .	437

---

22. Элементы векторного анализа . . . . .	441
22.1. Скалярные и векторные поля . . . . .	442
22.2. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей . . . . .	442
22.3. Дифференциальные характеристики скалярных и векторных полей . . . . .	446
22.4. Оператор Гамильтона и дифференциальные операции векторного анализа . . . . .	449
22.5. Дивергенция векторного поля . . . . .	452
22.6. Ротор векторного поля . . . . .	454
22.7. Потенциальные векторные поля . . . . .	456
22.8. Соленоидальное поле . . . . .	463
Заключение . . . . .	468
Индивидуальные задания . . . . .	469
Список литературы . . . . .	515

## Предисловие

Настоящее учебное пособие завершает третью часть курса «Высшая математика для технических университетов». Данное пособие, как и ранее изданные части, при подготовке к изданию использовалось в учебном процессе Томского политехнического университета. В нем учтены все конструктивные замечания и предложения как студентов, так и преподавателей, обеспечивающих изучение соответствующих разделов курса высшей математики.

Третья часть курса, в которой изложены дифференциальное и интегральное исчисления, как самая объемная и трудоемкая часть получила наибольшее число замечаний и предложений. В связи с этим в ее первоначальную редакцию пришлось внести необходимые изменения, уточнения и дополнения, разбив на следующие подразделы:

- дифференциальное исчисление функций одной переменной;
- дифференциальное исчисление функций нескольких переменных;
- интегральное исчисление функций одной переменной;
- интегральное исчисление функций многих переменных.

В результате часть III курса получила дополнительную нумерацию: Часть III. 1, Часть III. 2, Часть III. 3 и Часть III. 4.

Таким образом, по курсу «Высшая математика для технических университетов» сложился единый комплекс, состоящий из восьми учебных пособий. Такой комплекс представляет собой одну из немногих на данный момент попыток создания полного курса высшей математики в рамках единой системы определений, обозначений и методологии. При изучении высшей математики это существенно облегчает переход от одной части курса к другой.

Авторы выражают искреннюю благодарность доценту ТПУ И.В. Мастерову за неоценимую помощь при редактировании и подготовке учебного пособия к изданию.

Во время работы над пособием из жизни ушел руководитель нашего авторского коллектива профессор ТПУ А.Ю. Трифонов. Публикация данного пособия является выражением нашего глубокого уважения этому замечательному человеку, ученому и педагогу...

## Введение

Новые математические дисциплины зачастую возникали на основе взаимного проникновения идей и методов уже существующих и хорошо изученных разделов математики. Так, например, синтез идей и методов аналитической геометрии и дифференциального исчисления функций нескольких переменных привел к созданию раздела математики, называемого дифференциальной геометрией. В технических университетах полный курс дифференциальной геометрии не входит в стандартный курс высшей математики. Однако основные понятия дифференциальной геометрии (кривизна, кручение, квадратичная форма и др.) весьма активно используются для характеристики геометрических объектов, участвующих в математических построениях, в том числе и в данном учебном пособии.

Поскольку в дифференциальном исчислении операцией обратной дифференцированию является интегрирование, синтез понятий и методов аналитической геометрии, теории функций нескольких переменных и интегрального исчисления приводит к математической дисциплине, которую условно можно было бы назвать «интегральной геометрией». Такое название, однако, не получило широкого распространения. Общепринятыми стали понятия кратного, криволинейного и поверхностного интегрирования под общим названием «интегральное исчисление функций нескольких переменных». Рассмотрение именно этого раздела высшей математики и составляет суть данного пособия, состоящего из трех глав.

В первой главе рассмотрены принципы построения многомерного интегрирования введением интеграла Римана в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Переход от одномерного интегрирования к многомерному потребовал введения понятия многомерной клетки и её меры как обобщение одномерного отрезка и его длины. Самым простым и наглядным обобщением оказалось обобщение, предложенное французским математиком Жорданом. В качестве жордановой клетки был выбран  $n$ -мерный параллелепипед,  $n$ -мерный объём которого получил название меры Жордана. Известные из геометрии длина, площадь и объём являются жордановыми мерами клеток в одномерном, двумерном и трехмерном пространствах.

Совокупность жордановых клеток задает произвольную  $n$ -мерную жорданову область, которая и является областью интегрирования  $n$ -мерного интеграла. Показано, что для непрерывных функций  $n$  переменных, заданных в  $n$ -мерной жордановой области  $n$ -мерный интеграл Римана существует. Способы его вычисления задает теорема Фубини, которая в самых общих предположениях позволяет свести  $n$ -мерный интеграл к двум интегралам меньших размерностей:  $m$  и  $(n - m)$ .

Во второй главе все общие положения, определения и формулировки из первой главы реализуются на пространствах конкретных размерностей. Сначала рассматривается двумерное пространство, т. е. двойные интегралы. Теорема Фубини в этом случае позволяет свести двойной интеграл к повторному, состоящему из двух одномерных, каждый из которых вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница. Далее рассматривается трехмерное пространство, т. е. тройные интегралы. В этом случае теорема Фубини позволяет тройной интеграл представить повторными: одномерным и двумерным, способы вычисления которых уже известны.

В третьей главе теория кратных интегралов рассматривается как фундамент для определения криволинейных и поверхностных интегралов. Кривые и поверхности, являющиеся в этом случае множествами интегрирования, всегда имеют размерность, меньшую размерности вмещающего их пространства. Однако их касательные подпространства (для кривой линии – прямая, для про-



странственной поверхности – плоскость) имеют размерности, совпадающие с размерностью кривой и поверхности соответственно. Исходя из этого, с помощью однопараметрических представлений кривых и двухпараметрических представлений поверхностей криволинейные и поверхностные интегралы можно определить как кратные интегралы по соответствующим касательным пространствам, т. е. одномерными и двойными интегралами по соответствующим областям параметров представления.

Теоретическая часть пособия дополнена практической частью, которая содержит большое количество примеров с подробными решениями, рисунками и пояснениями. Наряду с этим практическая часть дополнена двадцатью пятью вариантами индивидуальных заданий для самостоятельного решения.

Отметим, что для выделения из общего текста формулировок основополагающих определений используется символ  $\blacklozenge$ , а знак  $\diamond$  выделяет замечания, на которые следует обратить особое внимание.

РАЗДЕЛ 1

# Интегралы Римана функций нескольких переменных

## 1. Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла

Для функций одной переменной  $y = f(x)$  задача о вычислении площади  $S$  криволинейной трапеции привела к понятию интеграла Римана, или определенного интеграла,

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (1.1)$$

В приложениях этого интеграла существуют специальные приемы вычисления площадей поверхностей и объемов некоторых пространственных тел. Методы решения этих задач и аналогичных задач в пространствах больших размерностей можно упорядочить и унифицировать, используя математический аппарат теории функций нескольких переменных [17], который позволяет расширить схему построения одномерного интеграла (1.1) на пространства больших размерностей. В этом случае искомая величина разлагается на элементарные составляющие, которые вычисляются в некотором приближении. Их сумма принимается за приближенное значение искомой величины, точное значение которой окончательно определяется предельным переходом по сделанным приближениям. Проиллюстрируем сказанное на примере функции двух переменных  $z = f(x, y)$ .

Пусть требуется определить объем  $V$  пространственной области (тела)  $v$  (рис. 1), которая сверху ограничена гладкой поверхностью, заданной уравнением

$$z = f(x, y), \quad (1.2)$$

боковой поверхностью является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси  $Oz$ , а снизу, на плоскости  $xOy$ , её ограничивает плоская фигура  $D$ , граница которой является направляющей для образующих цилиндрической поверхности (рис. 1).

Для решения этой задачи воспользуемся схемой, разработанной для функции одной переменной [18]. Плоскую область  $D$  разобьем сетью кривых на элементарные площадки  $D_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , площадью  $\Delta S_i$  каждая, и рассмотрим совокупность цилиндрических столбиков  $v_i$ , которые имеют своим основанием элементарные площадки  $D_i$ . Для оценки объема  $\Delta V_i$  отдельного столбика  $v_i$  воспользуемся следующим приближением. В каждой фигуре  $D_i$  выберем точку  $M_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ . Если приближенно принять каждый столбик  $v_i$  за настоящий цилиндр с высотой, равной аппликате  $z_i = f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , то объем  $\Delta V_i$  отдельного столбика  $v_i$  оказывается равным (рис. 1)

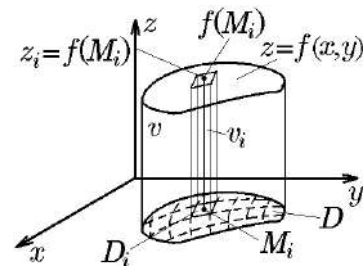


Рис. 1. Область  $v$

$$\Delta V_i = f(M_i)\Delta S_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad (1.3)$$

а следовательно, приближенное значение объема всего тела может быть вычис-

лено при помощи следующего выражения:

$$V_k = \sum_{i=1}^k \Delta V_i = \sum_{i=1}^k f(M_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

Чтобы получить точное значение объема  $V$ , будем увеличивать число элементарных площадок  $D_i$  так, чтобы площадь  $\Delta S_i$  каждой из них стремилась к нулю. Это будет выполняться при  $k \rightarrow \infty$  и условии, что  $d$  стремится к нулю. Здесь через  $d$  обозначен максимальный из диаметров  $d_i$  области  $D_i$ :  $d = \max_{i=\overline{1,k}} d_i$ .

Тогда

$$V = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} V_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(M_i) \Delta S_i. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) дает решение поставленной задачи. Если предел в ее правой части существует, то его называют *двойным интегралом* от функции  $f(x, y)$  по области  $D$  и для краткости обозначают как

$$V = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(M_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dS. \quad (1.5)$$

Формула (1.5) для вычисления объема тела через двойной интеграл раскрывает его геометрический смысл. Мы не случайно начали с геометрической задачи для  $f(x, y)$ , считая ее естественным двумерным обобщением классической геометрической задачи о площади криволинейной трапеции для функции одной переменной  $f(x)$ . Продолжив аналогию перехода от одномерного интеграла (1.1) к двумерному (1.5), следует отметить, что попытка получить решение задачи в виде тройного интеграла для функций трех переменных  $u = f(x, y, z)$  в геометрической интерпретации вызывает определенные затруднения. В этом случае мы должны использовать геометрию четырех измерений  $u, x, y, z$ , в которой проведение геометрических построений весьма затруднительно и не имеет наглядной интерпретации.

В связи с этим удобнее исходить не из геометрической, а из физической интерпретации одномерного (1.1) и двойного (1.5) интегралов. Можно, например, рассмотреть задачи о вычислении масс отрезка с линейной плотностью  $\rho = f(x)$  и плоской фигуры с поверхностной плотностью  $\rho = f(x, y)$ . Их решения также записываются одномерным и двойным интегралами:

$$M = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^k f(M_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx; \quad (1.6)$$

$$M = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^k f(M_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dS,$$

с тем лишь отличием, что при построении их интегральных сумм используются простейшие геометрические построения, размерность которых совпадает с размерностью плотностей:  $f(x)$  и  $f(x, y)$  (рис. 2, а, б). В такой интерпретации переход от двойного интеграла к тройному затруднений не вызывает. Действительно, по аналогии с соотношениями (1.6) массу  $M$  пространственной области

(тела)  $\Omega$  с пространственной плотностью  $\rho = f(x, y, z)$  можно записать как предел интегральной суммы

$$M = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^k f(M_i) \Delta V_i, \quad (1.7)$$

где  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_k$  – объемы элементарных ячеек  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ , которые получаются разбиением тела  $\Omega$  некоторой «сеткой» плоскостей, а  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  – произвольная точка элемента  $\Omega_i$  (рис. 2, в). Предел (1.7) вычисляется при тех же условиях, что и предел (1.6). Если он существует, то его называют *тройным интегралом* от функции  $f(x, y, z)$  по области  $\Omega$  и обозначают как

$$M = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(M_i) \Delta V_i = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV. \quad (1.8)$$

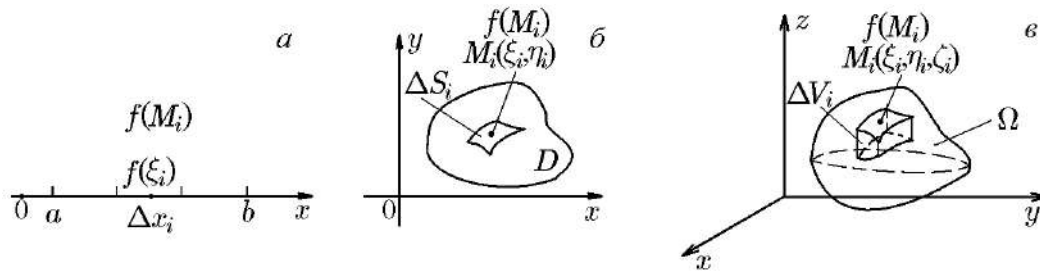


Рис. 2. Плотности: линейная  $\rho = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  (а);  
поверхностная  $\rho = f(x, y)$ ,  $x, y \in D$  (б);  
пространственная  $\rho = f(x, y, z)$ ,  $x, y, z \in \Omega$  (в)

Показательно (рис. 2, в), что для составления интегральной суммы (1.8) достаточно простейших геометрических построений в трехмерном пространстве  $x, y, z$  вместо четырехмерного  $u, x, y, z$  в случае геометрической интерпретации. Это означает, что в физической интерпретации переход от тройного интеграла к интегралам больших размерностей затруднений не вызывает. Дело осложняется тем, что выше проиллюстрирована только схема построения интегральных сумм, определяющих кратные интегралы. Далее для них, как и для определенных интегралов, необходимо сформулировать условия их существования, свойства и, наконец, способы и правила их вычисления. И здесь приходится прибегать к некоторым компромиссам между наглядностью и абстрактностью, а также между строгостью и допустимыми упрощениями при рассмотрении этих вопросов. По этой причине, для того чтобы воспользоваться основным инструментом изучения определенных интегралов, а именно суммами Дарбу, приходится вернуться к геометрической интерпретации кратных интегралов для функции  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Вместе с этим, чтобы избежать поочередного рассмотрения двойных, тройных и т. д. интегралов (а такой подход существует [35]), можно ввести некоторые характеристики, обобщающие понятия длины, площади, объема и т. п. Исходя из этого обобщения, можно изучить общие свойства кратных интегралов, а затем последовательно рассмотреть некоторые различия, возникающие при формулировке конкретных способов их вычисления.

Перед тем как перейти к рассмотрению этих обобщений и систематическому изучению кратных интегралов, справедливо будет отметить, что общие начала теории кратных интегралов были заложены еще Эйлером в стенах Санкт-Петербургской академии наук работой «О двойных интегралах» (1768 г.). Примечательно, что в отличие от изложенной выше схемы свою работу Эйлер начинает с задачи двойного неопределенного интегрирования функции двух переменных  $x, y$  как задачи об отыскании функции, двукратное дифференцирование которой по одной и затем по другой переменной дает выражение  $Z(x, y)dx dy$ . Чтобы найти эту функцию, используется операция повторного неопределенного интегрирования сперва по одной, а затем по другой переменной. Результат такого интегрирования обозначается как

$$\iint Z(x, y)dx dy$$

и записывается в виде

$$\iint Z(x, y)dx dy = F(x, y) + X(x) + Y(y), \quad (1.9)$$

где функция  $F(x, y)$  играет роль «первообразной», а сумма двух функций  $X(x)$  и  $Y(y)$  – роль произвольной «постоянной». Поскольку

$$[F(x, y) + X(x) + Y(y)]''_{xy} = [F(x, y) + X(x) + Y(y)]''_{yx} = Z(x, y),$$

то порядок повторных интегрирований, который различается записями:

$$\int dx \int Z(x, y)dy, \quad \int dy \int Z(x, y)dx,$$

не отражается на результате и, следовательно,

$$\iint Z(x, y)dx dy = \int dx \int Z(x, y)dy = \int dy \int Z(x, y)dx. \quad (1.10)$$

Важным шагом в работе был переход от неопределенного двойного интеграла к определенному двойному интегралу, что позволило использовать его в геометрических и физических приложениях. Эйлер проиллюстрировал способ вычисления определенного двойного интеграла по плоской области с помощью повторных интегралов (1.10) на примере нахождения объема восьмой части шара радиусом  $R$  с помощью двойного интеграла по четвертинке круга того же радиуса. К этой задаче мы еще вернемся при рассмотрении конкретных методов вычисления двойных интегралов.

## 2. Клеточные множества и мера Жордана

### 2.1. Определитель Грама. Клетка в $\mathbb{R}^n$ и ее мера

При рассмотрении геометрических приложений определенного интеграла [18] были введены понятия спрямляемой кривой, квадратуемой плоской фигуры и кубируемого пространственного тела, характеристиками которых являются длина, площадь и объем соответственно. Для вычисления этих характеристик были введены понятия клеточных множеств, являющихся обобщением необходимо заимствованных из геометрии объектов, таких как отрезок, прямоугольник и прямоугольный параллелепипед. Для построения интегрального исчисления функций нескольких переменных вида  $u = f(\vec{x})$ , где  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

понятие клеточного множества распространим на тела размерности выше трех на примере евклидовых пространств  $\mathbb{R}^n$  произвольной размерности  $n$  [15].

Пусть  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  – некоторый базис в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим тело  $T^n$  размерности  $n$ , построенное на векторах базиса  $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$  как на сторонах (ребрах). В аналитической геометрии численной характеристикой тела является величина  $V(T^n)$  [15], выражаемая через определитель Грама базисных векторов  $\vec{x}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

$$\Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_n \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 & \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_n \cdot \vec{x}_1 & \vec{x}_n \cdot \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \cdot \vec{x}_n \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

как

$$V(T^n) = \sqrt{\Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)}. \quad (2.2)$$

Если базис  $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$  является ортогональным:

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = |\vec{x}_i|^2 \delta_{ij},$$

то определитель Грама легко вычисляется:

$$\Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} |\vec{x}_1|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\vec{x}_2|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |\vec{x}_n|^2 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n |\vec{x}_i|^2, \quad (2.3)$$

и тогда

$$V(T^n) = \sqrt{\prod_{i=1}^n |\vec{x}_i|^2} = \prod_{i=1}^n |\vec{x}_i|. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что в случае одномерного пространства  $\mathbb{R}^1$  величина

$$V(T^1) = |\vec{x}| = l \quad (2.5)$$

определяет длину одномерного вектора, т. е. длину отрезка (рис. 3, б).

В случае двумерного пространства  $\mathbb{R}^2$  величина

$$V(T^2) = |\vec{x}_1| |\vec{x}_2| = S \quad (2.6)$$

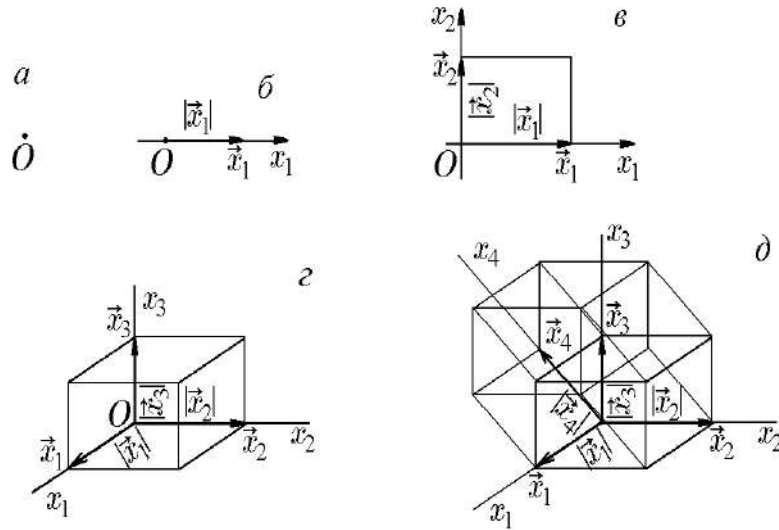
определяет площадь прямоугольника со сторонами  $|\vec{x}_1|$  и  $|\vec{x}_2|$  (рис. 3, в).

В случае трехмерного пространства  $\mathbb{R}^3$  величина

$$V(T^3) = |\vec{x}_1| |\vec{x}_2| |\vec{x}_3| = V \quad (2.7)$$

определяет объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 3, г).

Как видно из (2.5)–(2.7), название характеристики зависит от размерности тела: длина, площадь, объем. Для тел размерности больше трех величину  $V(T^n)$  также называют объемом, но  $n$ -мерным и обозначают  $V(T^n) = V^n$ .

Рис. 3. Примеры клеток  $K$  и их меры  $m(K)$ :

- а)  $\mathbb{R}^0$ ,  $T^0$ ,  $V(T^0) = 0 = m(K)$  – точка;  
 б)  $\mathbb{R}^1$ ,  $T^1$ ,  $V(T^1) = |\vec{x}_1| = l = m(K)$  – длина отрезка;  
 в)  $\mathbb{R}^2$ ,  $T^2$ ,  $V(T^2) = |\vec{x}_1||\vec{x}_2| = S = m(K)$  – площадь прямоугольника;  
 г)  $\mathbb{R}^3$ ,  $T^3$ ,  $V(T^3) = |\vec{x}_1||\vec{x}_2||\vec{x}_3| = V = m(K)$  – объем прямоугольного параллелепипеда;  
 д)  $\mathbb{R}^4$ ,  $T^4$ ,  $V(T^4) = |\vec{x}_1||\vec{x}_2||\vec{x}_3||\vec{x}_4| = V^4 = m(K)$  – четырехмерный объем четырехмерного параллелепипеда

Так, в случае четырехмерного пространства  $\mathbb{R}^4$  величина

$$V(T^4) = |\vec{x}_1||\vec{x}_2||\vec{x}_3||\vec{x}_4| = V^4 \quad (2.8)$$

определяет четырехмерный объем четырехмерного прямоугольного параллелепипеда (рис. 3, д). С учетом этого и положив  $V^0 = 0$ ,  $V^1 = |\vec{x}| = l$ , для  $n > 1$  формулу (2.4) можно представить в виде

$$V(T^n) = V^n = V^{n-1} \cdot |\vec{x}_n|, \quad (2.9)$$

причем для  $n = 2$  и  $n = 3$  имеем

$$\begin{aligned} V(T^2) &= V^2 = V^1|\vec{x}_2| = |\vec{x}_1||\vec{x}_2| = l|\vec{x}_2| = S, \\ V(T^3) &= V^3 = V^2|\vec{x}_3| = S|\vec{x}_3| = V. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Геометрическая иллюстрация формул (2.5)–(2.8) приведена на рис. 3. Из формул (2.4)–(2.10) и рис. 3 следует, что тело  $T^n$  размерности  $n$  получается параллельным переносом тела  $T^{n-1}$  вдоль оси с базисным вектором  $\vec{x}_n$ , перпендикулярным векторам  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}$ , на расстояние  $|\vec{x}_n|$ . Например, перенос точки  $O$  вдоль оси с базисным вектором  $\vec{x}_1$  на расстояние  $|\vec{x}_1|$  порождает отрезок длиной  $l = |\vec{x}_1|$ . В свою очередь, параллельный перенос отрезка  $Ox_1$  длиной  $l$  вдоль оси с базисным вектором  $\vec{x}_2$ , ортогональным вектору  $\vec{x}_1$ , на расстояние  $|\vec{x}_2|$  порождает прямоугольник площадью  $S = |\vec{x}_1||\vec{x}_2| = l|\vec{x}_2|$ . И наконец, параллельный перенос прямоугольника площадью  $S$  вдоль оси с базисным вектором  $\vec{x}_3$ , ортогональным векторам  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ , на расстояние  $|\vec{x}_3|$  порождает прямоугольный параллелепипед объемом  $V = S|\vec{x}_3|$ . На этом, вообще говоря, наглядность и заканчивается. Однако, следуя этому алгоритму, можно построить и четырехмерный параллелепипед параллельным переносом трехмерного параллелепипеда вдоль оси с базисным вектором  $\vec{x}_4$ , перпендикулярным векторам  $\vec{x}_1, \vec{x}_2,$

$\vec{x}_3$ , на расстояние  $|\vec{x}_4|$  (рис. 3, *d*). Это построение, однако, уже не обладает необходимой наглядностью и является чисто формальным.

Разнообразие приведенных выше объектов полезно в геометрических приложениях, однако для построения интегрального исчисления функции нескольких переменных  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , удобнее использовать следующие определения.

◆ Множество

$$K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i < b_i, i = \overline{1, n}\} \quad (2.11)$$

будем называть *клеткой* в  $\mathbb{R}^n$ . Пустое множество  $\emptyset$  также будем считать клеткой.

◆ Мерой  $m(K)$  клетки (2.11) будем называть число

$$m(K) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n), \quad (2.12)$$

а меру пустого множества будем считать равной нулю:  $m(\emptyset) = 0$ .

Очевидно, что в  $\mathbb{R}$  клеткой является полуинтервал  $[a, b[$ , а мера полуинтервала равна его длине  $b - a$ . В  $\mathbb{R}^2$  клеткой является прямоугольник, у которого удалены соответствующие стороны, а мера прямоугольника равна его площади  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ . В  $\mathbb{R}^3$  клеткой является прямоугольный параллелепипед, у которого удалены соответствующие грани, а мера параллелепипеда равна его объему  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$  и т. д. (см. рис. 3).

Легко установить, что пересечение двух клеток также является клеткой. Для этого достаточно заметить, что пересечение двух полуинтервалов  $[a, b[$  и  $[c, d[$  является либо полуинтервалом такого же вида, либо пустым множеством.

## 2.2. Клеточные множества и их свойства

Здесь мы рассмотрим еще одно важное обобщение, а именно обобщение операции разбиения, играющей важную роль при построении интегральных сумм с помощью сумм Дарбу.

◆ Множества  $\{A_i\}_{i=1}^n$  называются *попарно непересекающимися*, если для любых  $i, j = \overline{1, n}$  множества  $A_i$  и  $A_j$  не пересекаются, т. е.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

◆ Совокупность множеств  $\{A_i\}_{i=1}^n$  будем называть *разбиением множества*  $A$ , если  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  и множества  $\{A_i\}$  попарно не пересекаются.

Объединение понятий клетки и разбиения привели к понятию клеточного множества, что является ключевым для многомерного интегрирования.

◆ Множество  $A \in \mathbb{R}^n$  называется *клеточным*, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся клеток.

Существует бесконечное количество разбиений клеточного множества на клетки.

Приведем основные свойства клеточных множеств.

**Свойство 1.** Объединение конечного числа непересекающихся клеточных множеств является клеточным множеством.

**Свойство 2.** Пересечение двух клеточных множеств является клеточным множеством.

**Свойство 3.** Разность двух клеток является клеточным множеством.

**Свойство 4.** Разность двух клеточных множеств является клеточным множеством.

**Свойство 5.** Объединение конечного числа клеточных множеств является клеточным множеством.

Эти свойства можно доказать без особых затруднений. Действительно, свойство 1 очевидным образом вытекает из определения клеточного множества,



а в справедливости свойства 2 можно убедиться простыми рассуждениями. Пусть клетки  $K_1, \dots, K_n$  образуют разбиение клеточного множества  $A$ , а клетки  $K'_1, \dots, K'_m$  — разбиение клеточного множества  $B$ . Тогда клетки  $K_{ij} = K_i \cap K'_j$  при  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$  образуют разбиение клеточного множества  $A \cap B$ . Аналогично можно убедиться в справедливости остальных свойств.

### 2.3. Мера клеточного множества и её свойства

Так как понятие меры клетки  $m(K)$  (2.12) является обобщением понятий длины, площади и объема, обладающих свойствами аддитивности, монотонности и инвариантности [18], то меру клеточного множества определим следующим образом.

◆ Если клетки  $\{K_i\}_{i=1}^p$  образуют разбиение клеточного множества  $A$ , то его мерой  $m(A)$  будем называть число

$$m(A) = \sum_{i=1}^p m(K_i). \quad (2.13)$$

Сформулируем основные свойства меры клеточного множества.

**Свойство 1.** Мера клеточного множества не зависит от способа разбиения этого множества на клетки.

Действительно, пусть клетки  $\{K_i\}_{i=1}^p$  и  $\{K'_j\}_{j=1}^r$  образуют два различных разбиения множества  $A$  и пусть

$$K_{ij} = K_i \cap K'_j.$$

Так как

$$K_i = \bigcup_{j=1}^r K_{ij}, \quad K'_j = \bigcup_{i=1}^p K_{ij},$$

то

$$\sum_{i=1}^p m(K_i) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r m(K_{ij}) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p m(K_{ij}) = \sum_{j=1}^r m(K'_j),$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 2.** Если клеточные множества  $\{A_i\}_{i=1}^p$  попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p m(A_i). \quad (2.14)$$

Равенство (2.14) очевидным образом вытекает из определения (2.13) и свойства 1.

**Свойство 3.** Если  $A$  и  $B$  являются клеточными множествами, причем  $B \supset A$ , то

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A), \quad m(B) \geq m(A). \quad (2.15)$$

Действительно, поскольку клеточные множества  $A$  и  $B \setminus A$  не пересекаются и  $B = A \cup (B \setminus A)$ , то в силу свойства 2 приходим к формуле (2.15).

**Свойство 4.** Если  $\{A_i\}_{i=1}^p$  представляют собой клеточные множества, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \leq \sum_{i=1}^p m(A_i). \quad (2.16)$$

Действительно, для  $p = 2$  положим  $B = A_1 \cup A_2 \supset A_1$  и  $A_2 \subset B \setminus A_1$ , отсюда в силу соотношений (2.15) получим

$$m(B) = m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(B \setminus A_1) \leq m(A_1) + m(A_2).$$

Общий случай  $p > 2$  доказывается по индукции.

**Свойство 5.** Для любого клеточного множества  $A$  и любого  $\varepsilon > 0$  можно указать клеточное множество  $A(\varepsilon)$ , такое что  $A \supset A(\varepsilon)$ , причем

$$A \supset A^{(0)} \supset \bar{A}(\varepsilon) \supset A(\varepsilon), \tag{2.17}$$

где  $\bar{A}(\varepsilon)$  – замыкание множества  $A(\varepsilon)$ ,  $A^{(0)}$  – внутренность множества  $A$ .

В справедливости свойства 5 достаточно убедиться на одной клетке. Для одномерной клетки убедиться в справедливости (2.17) труда не представляет.

### 2.4. Измеримость произвольного множества по Жордану. Критерий измеримости

Продолжив цепочку обобщений, перейдем к обобщению понятий спрямляемости, квадратуемости и кубируемости, связанных с возможностью измерения длины, площади и объема геометрических объектов. Введем общее понятие *измеримости* произвольного множества  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , впервые предложенное итальянским математиком Д. Пеано и получившее развитие в работах французского математика М. Э. К. Жордана.

◆ Множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  называется *измеримым по Жордану*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся два клеточных множества  $A$  и  $B$ , таких, что  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(B) - m(A) < \varepsilon$  (рис. 4).

◆ Мерой измеримого по Жордану множества  $\Omega$  называется число  $m(\Omega)$ , удовлетворяющее оценке

$$m(A) \leq m(\Omega) \leq m(B), \tag{2.18}$$

где  $A$  и  $B$  – клеточные множества, такие, что  $A \subset \Omega \subset B$ .

**Утверждение 2.1.** Мера измеряемого по Жордану множества  $\Omega$  существует, определяется однозначно и равна

$$m(\Omega) = \sup_{A \subset \Omega} m(A) = \inf_{\Omega \subset B} m(B). \tag{2.19}$$

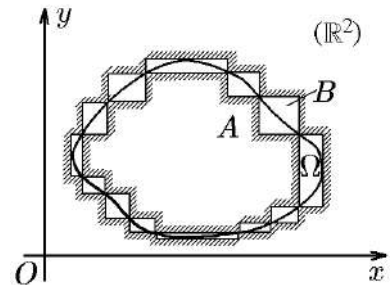


Рис. 4.  $A \subset \Omega \subset B$ ,  
 $m(B) - m(A) < \varepsilon$

**Доказательство.** Пусть  $A$  и  $B$  – произвольные клеточные множества, такие, что  $A \subset \Omega \subset B$ . Тогда в силу (2.15) справедлива оценка

$$m(A) \leq m(B). \tag{2.20}$$

Для числовых множеств  $m(A)$  и  $m(B)$ , порождаемых клеточными множествами  $A \subset \Omega$  и  $\Omega \subset B$  и удовлетворяющих условию (2.20), существует число  $\gamma$ , являющееся сечением [13] множеств  $m(A)$  и  $m(B)$ , и, следовательно,

$$m(\Omega) \leq \sup_{A \subset \Omega} m(A) \leq \gamma \leq \inf_{\Omega \subset B} m(B) \leq m(B). \tag{2.21}$$

Исходя из измеримости  $\Omega$  и в силу определения (2.18), число  $\gamma$  можно выбрать в качестве меры множества  $\Omega$ . Это означает, что мера множества  $\Omega$  существует и равна  $\gamma$ . Остается доказать единственность значения  $\gamma$ . Для этого

предположим, что существуют два числа  $\alpha$  и  $\beta$ , такие, что для любых клеточных множеств  $A$  и  $B$  из утверждения  $A \subset \Omega \subset B$  следует оценка

$$m(A) \leq \alpha \leq \beta \leq m(B). \quad (2.22)$$

С другой стороны, измеримость множества  $\Omega$  означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существуют клеточные множества  $A(\varepsilon)$  и  $B(\varepsilon)$ , такие, что

$$A(\varepsilon) \subset \Omega \subset B(\varepsilon), \quad m(B(\varepsilon)) - m(A(\varepsilon)) < \varepsilon. \quad (2.23)$$

Но тогда, принимая во внимание (2.22) и (2.23), придем к неравенству

$$0 \leq \beta - \alpha \leq m(B(\varepsilon)) - m(A(\varepsilon)) < \varepsilon,$$

из которого в силу произвольности  $\varepsilon$  следует равенство  $\alpha = \beta$ , доказывающее единственность значения  $\gamma = \alpha = \beta = m(\Omega)$ .

**Пример 2.1.** Показать, что множество, состоящее из одной точки  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , является измеримым по Жордану с мерой  $m(\vec{x}_0) = 0$ .

**Решение.** Множество, состоящее из точки  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , обозначим через  $\Omega$ , а через  $A$  и  $B$  обозначим клеточные множества, одно из которых, например  $A$ , содержится в  $\Omega$ , а другое,  $B$ , напротив, содержит в себе множество  $\Omega$ , т. е.

$$A \subset \Omega \subset B. \quad (2.24)$$

В качестве множества  $A$  всегда можно выбрать пустое множество, а в качестве множества  $B$  можно выбрать  $n$ -мерный куб с ребром  $\sqrt[n]{\varepsilon}$ , центром которого является точка  $\vec{x}_0$ . При таком выборе  $m(A) = m(\emptyset) = 0$ ,  $m(B) = (\sqrt[n]{\varepsilon})^n = \varepsilon$ , и поэтому из неравенства (2.24) следует неравенство

$$0 \leq m(\Omega) \leq \varepsilon,$$

означающее измеримость по Жордану множества  $\Omega$ . Отсюда, учитывая произвольность  $\varepsilon$  и оценку (2.21) утверждения 2.1, найдем

$$m(\Omega) = m(\vec{x}_0) = 0.$$

**Пример 2.2.** Показать, что множество, состоящее из конечного числа  $p$  точек  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, p$ , имеет жорданову меру нуль.

**Решение.** Пусть  $K_i$  есть  $n$ -мерный куб (клетка) с ребром  $\sqrt[n]{\varepsilon/p}$ , центром которого является точка  $\vec{x}_i$ . Для множества  $\Omega$ , состоящего из точек  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, p$ , как и в предыдущем примере, составим два множества: множество  $A = \emptyset$ , которое содержится в  $\Omega$ , и множество  $B = \bigcup_{i=1}^p K_i$ , которое содержит в себе множество  $\Omega$ , т. е.

$$\emptyset = A \subset \Omega \subset B = \bigcup_{i=1}^p K_i. \quad (2.25)$$

Поскольку  $m(A) = m(\emptyset) = 0$ , а мера множества  $B$  в силу свойств (2.14), (2.16) удовлетворяет оценке

$$m(B) = m\left(\bigcup_{i=1}^p K_i\right) \leq \sum_{i=1}^p m(K_i) = \sum_{i=1}^p (\sqrt[n]{\varepsilon/p})^n = \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon,$$

из неравенства (2.25) следует неравенство

$$0 \leq m(\Omega) \leq \varepsilon,$$

означающее измеримость множества  $\Omega$  по Жордану. Отсюда в силу произвольности  $\varepsilon$  и оценки (2.21) утверждения 2.1 найдем

$$m(\Omega) = m\left(\bigcup_{i=1}^p \vec{x}_i\right) = 0.$$

**Пример 2.3.** Показать, что множество точек сходящейся в  $\mathbb{R}^n$  последовательности имеет жорданову меру нуль.

**Решение.** Множество точек сходящейся в  $\mathbb{R}^n$  последовательности  $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$  обозначим через  $\Omega$ , а сам предел последовательности обозначим через  $\vec{a}$ , т. е.

$$\Omega = \{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}. \quad (2.26)$$

Сходимость последовательности  $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$  к пределу  $\vec{a}$  означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N(\varepsilon)$ , такое, что при всех  $k > N(\varepsilon)$  справедливо

$$|\vec{x}_k - \vec{a}| < \varepsilon,$$

или в символьной записи:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall k > N(\varepsilon) \Rightarrow |\vec{x}_k - \vec{a}| < \varepsilon. \quad (2.27)$$

Исходя из сходимости последовательности  $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ , множество  $\Omega$  можно разбить на два. Первое ( $\Omega_1$ ) содержит конечное число точек  $\vec{x}_k$  с номерами от 1 до  $N$ , а второе ( $\Omega_2$ ) содержит все остальные точки, которые, согласно определению (2.27), принадлежат  $n$ -мерной  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\vec{a}$  (рис. 5), т. е.

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 = \bigcup_{i=1}^N \vec{x}_i, \quad \Omega_2 = \bigcup_{i=N+1}^{\infty} \vec{x}_i. \quad (2.28)$$

Как и в предыдущем примере, составим два клеточных множества:  $A = \emptyset$ , которое содержится в множестве  $\Omega$ , и  $B$ , которое содержит в себе множество  $\Omega$ , т. е.

$$A \subset \Omega \subset B. \quad (2.29)$$

С этой целью для множества  $\Omega_1$  построим клеточное множество  $B_1$ , составленное из клеток  $K_i$  со стороной  $r$  и центром в точке  $\vec{x}_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , т. е.

$$B_1 = \bigcup_{i=1}^N K_i \supset \Omega_1,$$

а для множества  $\Omega_2$  построим клетку  $K$  со стороной  $2\varepsilon$ , так, чтобы все точки  $\vec{x}_i$ ,  $i = \overline{N+1, \infty}$  попали в эту клетку. Таким образом, имеем клеточное множество

$$B = B_1 \cup K = \bigcup_{i=1}^N K_i \cup K \supset \Omega.$$

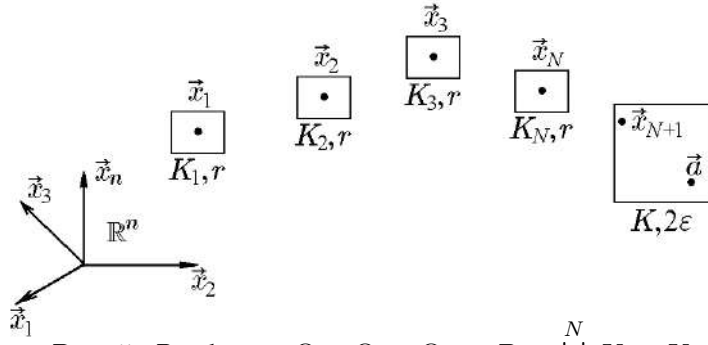


Рис. 5. Разбиение  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \subset B = \bigcup_{i=1}^N K_i \cup K$

Поскольку  $m(A) = m(\emptyset) = 0$ , а мера множества  $B$  в силу свойств (2.14), (2.16) удовлетворяет оценке

$$m(B) = m\left(\bigcup_{i=1}^N K_i \cup K\right) \leq \sum_{i=1}^N m(K_i) + m(K) = \sum_{i=1}^N r^n + (2\varepsilon)^n,$$

то из условия (2.29) следует:

$$0 \leq m(\Omega) \leq \sum_{i=1}^N r^n + (2\varepsilon)^n. \quad (2.30)$$

Для произвольного  $\varepsilon_1 > 0$  при выборе

$$r = \sqrt[n]{\frac{\varepsilon_1}{2N}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon_1}{2}}$$

из оценки (2.30) следует неравенство

$$0 \leq m(\Omega) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1,$$

означающее измеримость множества  $\Omega$  по Жордану. Отсюда в силу произвольности  $\varepsilon_1$  и оценки (2.21) утверждения 2.1 найдем меру  $\Omega$ :

$$m(\Omega) = 0.$$

Три последних примера показывают, что три различных множества, состоящие из одной точки, из конечного числа точек и из сходящейся последовательности точек, имеют одну жорданову меру – нуль. Далее мы расширим круг таких множеств, выделив их в отдельный класс множеств меры нуль. Именно этот класс множеств является важной составляющей формулировки критерия измеримости произвольного множества, поэтому для удобства работы с такими множествами общее определение меры (2.18) переформулируем непосредственно для множеств меры нуль.

♦ Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  называется *множеством меры нуль*  $m(E) = 0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует клеточное множество  $B(\varepsilon)$ , такое, что  $B(\varepsilon) \supset E$  и выполняется неравенство  $m(B(\varepsilon)) < \varepsilon$ .

Это определение удобно тем, что оно не использует понятие пустого множества  $\emptyset$ , для которого  $m(\emptyset) = 0$  и которое всегда является подмножеством исследуемого множества  $\Omega$ , что и проиллюстрировано в приведенных выше примерах. Там же были рассмотрены и использованы некоторые свойства множеств

меры нуль, обобщение которых мы приведем здесь в следующих формулировках.

**Свойство 1.** Объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль, т. е. если  $m(E_1) = m(E_2) = \dots = m(E_k) = 0$ , то  $m\left(\bigcup_{i=1}^p E_i\right) = 0$ .

**Свойство 2.** Любое подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль, т. е. если  $E_1 \supset E_2$  и  $m(E_1) = 0$ , то  $m(E_2) = 0$ .

◇ Очевидно, что, исходя из этих свойств, решение примеров 2.1 и 2.2 можно получить из решения примера 2.3. Следующие примеры показывают, что определение множества меры нуль может использоваться непосредственно для решения прикладных задач.

**Пример 2.4.** Показать, что спрямляемая кривая на плоскости  $\mathbb{R}^2$  имеет Жорданову меру нуль.

**Решение.** Пусть  $MN$  – спрямляемая кривая на плоскости  $\mathbb{R}^2$  длиной  $l$ . Точками

$$M = M_1, M_2, M_3, \dots, M_{n+1} = N$$

эту кривую разобьем на  $n$  частей длиной  $l_n = l/n$  каждая (рис. 6). Исходя из этого, построим клеточное множество  $B$ , содержащее кривую  $MN$ , следующим образом:

$$B = \bigcup_{i=1}^{n+1} K_i,$$

где  $K_i$  – клетка (квадрат) с центром в точке  $M_i$  со стороной  $2l_n$ , где  $i = \overline{1, n+1}$ . Такой выбор стороны квадрата заведомо обеспечивает взаимное пересечение клеток  $K_i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ . Теперь примем во внимание, что мера клетки  $K_i$

$$m(K_i) = (2l_n)^2 = \frac{4l^2}{n^2},$$

тогда в силу (2.16) мера клеточного множества  $B$  удовлетворяет оценке

$$m(B) \leq \sum_{i=1}^{n+1} m(K_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4l^2}{n^2} = \frac{4l^2(n+1)}{n^2}. \quad (2.31)$$

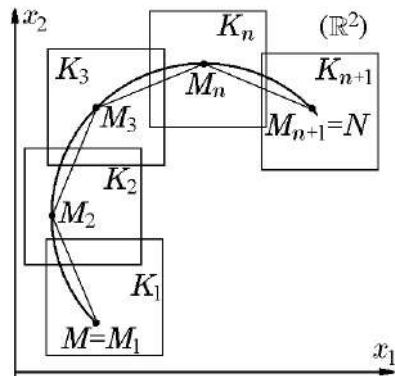


Рис. 6.  $B = \bigcup_{i=1}^{n+1} K_i$ ,  $l_n = l/n$

Если число разбиений  $n$  с помощью произвольного  $\varepsilon > 0$  выбрать как

$$n = \frac{2l}{\varepsilon}(l + \sqrt{l^2 + \varepsilon}), \quad (2.32)$$

то неравенство (2.31) примет вид

$$m(B) \leq \frac{4l^2(n+1)}{n^2} < \frac{4l^2[\frac{2l}{\varepsilon}(l + \sqrt{l^2 + \varepsilon}) + 1]}{\frac{4l^2}{\varepsilon^2}(l + \sqrt{l^2 + \varepsilon})^2} = \varepsilon \frac{2l^2 + 2l\sqrt{l^2 + \varepsilon} + \varepsilon}{l^2 + 2l\sqrt{l^2 + \varepsilon} + l^2 + \varepsilon} = \varepsilon,$$

т. е.

$$m(B) < \varepsilon.$$

В силу произвольности величины  $\varepsilon$  это означает, что мера множества  $B$  равна нулю:  $m(B) = 0$ . Следовательно, кривая  $MN$  как подмножество множества  $B$  также имеет жорданову меру нуль, что и требовалось доказать.

Отметим, что оценка (2.32) следует из решения неравенства

$$\frac{4l^2(n+1)}{n^2} < \varepsilon,$$

вытекающего из соотношения (2.31).

**Пример 2.5.** Показать, что спрямляемая кривая имеет жорданову меру нуль в любом пространстве  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n > 2$ .

**Решение** аналогично решению предыдущего примера, если двумерные клетки (квадраты) заменить на клетки (кубы) размерности  $n > 2$ .

Здесь будет полезно заметить, что отрезок  $[a, b]$  оси  $Ox$ , согласно определению, имеет жорданову меру  $m([a, b]) = b - a$  в одномерном пространстве  $\mathbb{R}$  и меру нуль в любом пространстве  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n \geq 2$ .

Забегая вперед, отметим, что в общем случае  $n$ -мерная клетка  $K^n$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , согласно определению, имеет жорданову меру

$$m(K^n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Эта же клетка  $K^n$  в пространстве  $\mathbb{R}^k$  с  $k > n$  имеет жорданову меру нуль.

До сих пор мы рассматривали множества, измеримые по Жордану. Приведем пример множества, не измеримого по Жордану.

**Пример 2.6.** Доказать, что множество всех точек отрезка  $[0, 1]$ , координаты которых являются рациональными числами, не измеримо по Жордану в  $\mathbb{R}$ .

**Решение.** Множество всех точек отрезка  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , координаты которых являются рациональными числами, обозначим через  $\Omega$ , а через  $A$  и  $B$  обозначим клеточные множества, такие, что

$$A \subset \Omega \subset B.$$

В качестве клеточного множества  $A$  выберем пустое множество:  $A = \emptyset$ , а в качестве клеточного множества  $B$  выберем полуинтервал  $[0, 1 + \varepsilon[$  с произвольным  $\varepsilon > 0$ , который содержит все точки отрезка  $[0, 1]$ , координаты которых являются рациональными числами. Так как

$$m(A) = m(\emptyset) = 0, \quad m(B) = 1 + \varepsilon,$$

то разность

$$m(B) - m(A) = 1 + \varepsilon$$

не может быть меньше единицы, а следовательно, согласно определению, множество  $\Omega$  является не измеримым по Жордану.

**Пример 2.7.** Доказать, что множество точек  $n$ -мерного единичного куба, координаты которых являются рациональными числами, не измеримо по Жордану в  $\mathbb{R}^n$ .

**Решение.** Множество всех точек  $n$ -мерного единичного куба, координаты которых  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  являются рациональными числами  $0 \leq x_i \leq 1$ , обозначим через  $\Omega^n \subset \mathbb{R}^n$ , а через  $A$  и  $B$  обозначим клеточные множества, такие, что

$$A \subset \Omega^n \subset B.$$

По аналогии с примером 2.6 в качестве клеточного множества  $A$  выберем пустое множество ( $A = \emptyset$ ), а в качестве клеточного множества  $B$  выберем  $n$ -мерную клетку  $0 \leq x_i \leq 1 + \varepsilon_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , которая при произвольных  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , содержит в себе все точки множества  $\Omega^n$ . Так как

$$m(A) = m(\emptyset) = 0, \quad m(B) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i)^n,$$

то разность

$$m(B) - m(A) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i)^n$$

не может быть меньше единицы, а следовательно, согласно определению, множество  $\Omega^n$  не является измеримым по Жордану.

Ответы на вопросы, сформулированные в следующих примерах, полезны при работе с конкретными множествами.

**Пример 2.8.** Может ли равняться нулю мера множества, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку?

**Решение.** Если множество  $\Omega$  содержит внутреннюю точку  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , то в  $\Omega$  входит и некоторая окрестность  $S(\vec{x}_0, \varepsilon)$  этой точки, например, в виде некоторой  $n$ -мерной клетки с ненулевой мерой  $m(S(\vec{x}_0, \varepsilon)) > 0$ . Но тогда

$$m(\Omega) \geq m(S(\vec{x}_0, \varepsilon)) > 0.$$

Другими словами, никакое открытое множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  не является множеством меры нуль. Следует лишь отличать, что интервал  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  есть открытое множество в пространстве  $\mathbb{R}$  и потому не является в этом пространстве множеством меры нуль. Тогда как интервал  $]a, b[$  на оси  $Ox_1$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , будет множеством меры нуль, но этот одномерный интервал в  $\mathbb{R}^n$  уже не является открытым множеством.

**Пример 2.9.** Можно ли построить на отрезке  $[a, b]$  замкнутое множество линейной меры  $(b - a)$ , отличное от самого отрезка?

**Решение.** Если бы мера замкнутого множества  $\overline{\Omega} \subset [a, b]$ , отличного от  $[a, b]$ , равнялась  $(b - a)$ , то  $[a, b] \setminus \Omega$  содержало бы внутренние точки и имело бы меру нуль. А это невозможно, как следует из примера 2.8.

**Пример 2.10.** Пусть множество  $\Omega$  на отрезке  $[0, 1]$  имеет меру нуль. Должно ли его замыкание  $\overline{\Omega}$  быть множеством меры нуль?

**Решение.** Нет. Пусть  $\Omega$  – множество всех рациональных чисел на отрезке  $[0, 1]$ . Тогда  $m(\Omega) = 0$ , а  $m(\overline{\Omega}) = 1$ .

**Теорема 2.1 (критерий измеримости множества в  $\mathbb{R}^n$ ).** Для того чтобы множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным, а его граница  $\partial\Omega$  имела жорданову меру нуль.



**Доказательство.** Здесь мы воспользуемся известным из теории множеств утверждением: если связное множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  не имеет общих точек с границей множества  $B \subset \mathbb{R}^n$ , то  $A$  лежит либо внутри  $B$  (рис. 7, а), либо внутри его дополнения (рис. 7, б). Теперь последовательно докажем необходимость и достаточность утверждения теоремы.

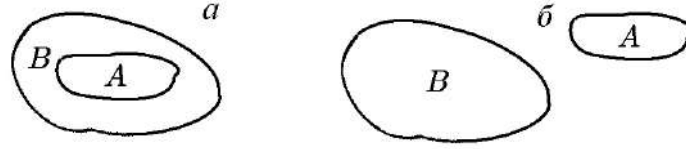


Рис. 7. Примеры множеств  $A$  и  $B$ : а)  $A$  лежит внутри  $B$ ; б)  $A$  лежит внутри дополнения  $B$

**Необходимость.** Пусть множество  $\Omega$  измеримо по Жордану. Тогда, согласно определению, для любого  $\varepsilon > 0$  существуют клеточные множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(B) - m(A) < \varepsilon$ . В силу свойства 5 меры клеточных множеств без ограничения общности можно считать, что множество  $A$  не содержит граничных точек множества  $\Omega$ , а множество  $B$  содержит все граничные точки  $\Omega$  (рис. 8), т. е.  $B \setminus A \supset \partial\Omega$  и при этом  $m(B \setminus A) = m(B) - m(A) < \varepsilon$ . Согласно определению это означает, что множество  $B \setminus A$  является множеством меры нуль в  $\mathbb{R}^n$ :  $m(B \setminus A) = 0$ . Так как множество  $\partial\Omega$  является подмножеством множества  $B \setminus A$  меры нуль, то множество  $\partial\Omega$  также является множеством меры нуль:  $m(\partial\Omega) = 0$ , что и требовалось доказать.

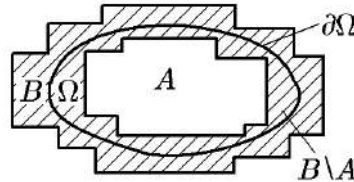
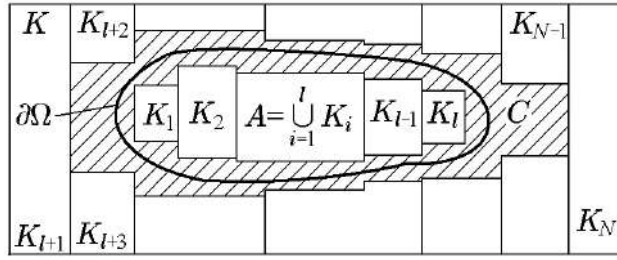


Рис. 8.  $A \subset \Omega \subset B$ ; область  $B \setminus A \supset \partial\Omega$  заштрихована

**Достаточность.** Пусть в  $\mathbb{R}^n$  множество  $\Omega$  есть ограниченное множество и  $m(\partial\Omega) = 0$ . Покажем, что этих условий достаточно для измеримости по Жордану множества  $\Omega$ . Исходя из ограниченности множества  $\Omega$ , заключим его в некоторую клетку  $K$ . Далее, выбрав произвольное  $\varepsilon > 0$ , построим клеточное множество  $C$ , такое, что  $C \supset \partial\Omega$  и  $m(C) < \varepsilon$  (на рис. 9 множество  $C$  изображено в виде заштрихованной области). Тогда клеточное множество  $K \setminus C$  не содержит граничных точек множества  $\Omega$ . Вместе с этим множество  $K \setminus C$  можно представить объединением элементарных клеток  $K_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , т. е.  $K \setminus C = \bigcup_{i=1}^n K_i$ .

Так как каждая клетка  $K_i$  не содержит граничных точек множества  $\Omega$ , то клетка  $K_i$  либо принадлежит  $\Omega$ , либо лежит вне  $\Omega$ . Все клетки  $K_i$ , которые принадлежат  $\Omega$ , пронумеруем от  $i = 1$  до  $i = l$ , т. е.  $K_i \subset \Omega$ , если  $i = \overline{1, l}$ , а все клетки, которые не принадлежат  $\Omega$ , пронумеруем от  $i = l + 1$  до  $i = N$ , т. е.  $K_i \cap \Omega = \emptyset$ , если  $i = \overline{l + 1, N}$ .

Обозначим  $A = \bigcup_{i=1}^l K_i$  и  $B = A \cup C = K \setminus \bigcup_{i=1}^l K_i$ . Тогда  $A \subset \Omega \subset B$ , причем  $m(B) = m(A \cup C) = m(A) + m(C)$ . Отсюда  $m(B) - m(A) = m(C) < \varepsilon$  и, следовательно, множество  $\Omega$  измеримо по Жордану.

Рис. 9. Структура клетки  $K$ 

◆ Множества, измеримые по Жордану, будем называть *жордановыми множествами*.

**Пример 2.11.** Показать, что на плоскости  $(x, y)$  (в пространстве  $\mathbb{R}^2$ ) множество  $x^2 + y^2 \leq r^2$  является жордановым.

**Решение.** Множество  $\Omega: x^2 + y^2 \leq r^2$  представляет собой круг радиусом  $r$  и, следовательно, является ограниченным. Вместе с этим его граница  $\partial\Omega$  – окружность  $x^2 + y^2 = r^2$  является спрямляемой кривой длиной  $l = 2\pi r$ . Как показано в примере 2.4, спрямляемая кривая на плоскости  $(x, y)$  (в  $\mathbb{R}^2$ ) имеет жорданову меру нуль, а значит,  $m(\partial\Omega) = m(x^2 + y^2 = r^2) = 0$ , поэтому в силу теоремы 2.1 множество  $x^2 + y^2 \leq r^2$  является множеством, измеримым по Жордану на плоскости  $(x, y)$ .

## 2.5. Свойства жордановых множеств

**Свойство 1.** Если множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  измеримы по Жордану, то множества

$$\Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad \Omega_1 \setminus \Omega_2 \quad (2.33)$$

являются жордановыми множествами.

Действительно, с одной стороны, жордановы множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , в силу теоремы 2.1, ограничены и  $m(\partial\Omega_1) = m(\partial\Omega_2) = 0$ , поэтому

$$m(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) = 0. \quad (2.34)$$

С другой стороны,

$$\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad \partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2,$$

откуда в силу (2.34) получим

$$m(\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)) = m(\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)) = m(\partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2)) = 0,$$

и, следовательно, в силу теоремы 2.1 множества (2.33) измеримы по Жордану.

**Свойство 2.** Если множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  измеримы по Жордану, то множество  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  является жордановым множеством, причем

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2). \quad (2.35)$$

Заметим, что формула (2.35) является обобщением аналогичной формулы (2.16) для клеточных множеств  $K$  на случай произвольных жордановых множеств  $\Omega$ . Для ее доказательства воспользуемся свойством 1, согласно которому множество  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  измеримо по Жордану. Вместе с этим из утверждения 2.1

следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существуют клеточные множества  $B_1$  и  $B_2$ , такие, что  $B_1 \supset \Omega_1$ ,  $B_2 \supset \Omega_2$  и  $m(\Omega_1) > m(B_1) - \varepsilon/2$ ,  $m(\Omega_2) > m(B_2) - \varepsilon/2$ .

Поскольку  $B_1$  и  $B_2$  – клеточные множества, то клеточным является и множество  $B_1 \cup B_2$ , содержащее множество  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , т. е.  $B_1 \cup B_2 \supset \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Воспользовавшись свойствами меры клеточных множеств, получим

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(B_1 \cup B_2) \leq m(B_1) + m(B_2) < m(\Omega_1) + m(\Omega_2) + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2),$$

что и подтверждает справедливость формулы (2.35).

**Свойство 3.** Если множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  измеримы по Жордану и не пересекаются:  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , то множество  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  является жордановым множеством с мерой

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2). \quad (2.36)$$

**Доказательство** этого свойства аналогично доказательству предыдущего, с тем лишь отличием, что учет требования  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  переводит неравенство (2.35) в строгое равенство (2.36).

◇ Все свойства, сформулированные для двух жордановых множеств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , остаются справедливыми для любого конечного числа жордановых множеств  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В этом случае формулы (2.35), (2.36) переходят в формулы

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n \Omega_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(\Omega_i); \quad (2.37)$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n \Omega_i\right) = \sum_{i=1}^n m(\Omega_i), \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.38)$$

В справедливости соотношений (2.37), (2.38) можно убедиться с помощью метода математической индукции.

◇ Если жордановы множества попарно не пересекаются, то равенство (2.38) зачастую называют *свойством конечной аддитивности меры Жордана*.

**Свойство 4.** Мера жорданова множества  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  после преобразований подобия

$$T_h \vec{x} = (h\vec{x}_1, h\vec{x}_2, \dots, h\vec{x}_n), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad h > 0, \quad (2.39)$$

определяется соотношением

$$m(T_h \Omega) = h^n m(\Omega). \quad (2.40)$$

Действительно, так как множество  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  измеримо, существуют клеточные множества  $A$  и  $B$ , такие, что  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(A) \leq m(\Omega) \leq m(B)$ , причем, согласно утверждению 2.1, справедливо равенство

$$m(\Omega) = \sup_{A \subset \Omega} m(A) = \inf_{B \supset \Omega} m(B). \quad (2.41)$$

Если учесть, что мера клетки  $m(K) = \prod_{i=1}^n |\vec{x}_i|$  и

$$m(T_h K) = \prod_{i=1}^n |h\vec{x}_i| = h^n \prod_{i=1}^n |\vec{x}_i| = h^n m(K),$$

то равенство (2.41) после преобразования подобия (2.39) переходит в равенство (2.40):

$$\begin{aligned} m(T_h\Omega) &= \sup_{T_h A \subset T_h\Omega} m(T_h A) = \inf_{T_h B \supset T_h\Omega} m(T_h B) = \\ &= h^n \sup_{A \subset \Omega} m(A) = h^n \inf_{B \supset \Omega} m(B) = h^n m(\Omega). \end{aligned}$$

**Свойство 5.** Если  $\Omega$  – жорданово множество в  $\mathbb{R}^n$ , то цилиндр

$$\Omega_h = \{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}) : (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in \Omega, 0 \leq \vec{x}_{n+1} \leq h\}$$

является жордановым множеством в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с мерой

$$m(\Omega_h) = hm(\Omega). \quad (2.42)$$

Действительно, так как  $\Omega$  является жордановым множеством в  $\mathbb{R}^n$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $A$  и  $B$ , такие, что

$$A \subset \Omega \subset B, \quad m(B) - m(A) < \frac{\varepsilon}{h}.$$

Как уже было показано, если на  $n$ -мерной клетке  $K$  как основании построить цилиндр высотой  $h$ , то получим  $n + 1$ -мерную клетку  $K_h$  с мерой

$$m(K_h) = hm(K).$$

Поэтому, если на клеточных множествах  $A$  и  $B$  построить цилиндры  $A_h$  и  $B_h$ , то это будут клеточные множества в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с мерами в  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$m(A_h) = hm(A), \quad m(B_h) = hm(B).$$

Очевидно, что  $A_h \subset \Omega_h \subset B_h$  и

$$m(B_h) - m(A_h) = hm(B) - hm(A) < h[m(B) - m(A)] < h \frac{\varepsilon}{h} = \varepsilon.$$

Это означает, что цилиндр  $\Omega_h$  является в  $\mathbb{R}^{n+1}$  измеримым по Жордану множеством, причем

$$m(A_h) \leq m(\Omega_h) \leq m(B_h),$$

или

$$hm(A) \leq m(\Omega_h) \leq hm(B).$$

Так как

$$hm(A) \leq hm(\Omega) \leq hm(B),$$

то

$$|m(\Omega_h) - hm(\Omega)| \leq h[m(B) - m(A)] < h \frac{\varepsilon}{h} = \varepsilon,$$

и в силу произвольности  $\varepsilon$  должно выполняться равенство

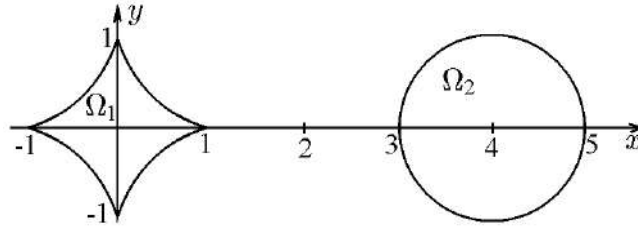
$$m(\Omega_h) = hm(\Omega),$$

совпадающее с (2.42).

**Пример 2.12.** Показать, что на плоскости  $(x, y)$  (в пространстве  $\mathbb{R}^2$ ) множества  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  измеримы по Жордану и указать их меру, если

$$\Omega_1 = \{(x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}, \quad \Omega_2 = \{(x, y) : (x - 4)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

**Решение.** Множество  $\Omega_1$  ограничено сверху астроидой  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  с максимальным лучом  $r_1 = 1$ , а множество  $\Omega_2$  – круг радиусом  $r_2 = 1$  – ограничен окружностью  $(x - 4)^2 + y^2 = 1$  (рис. 10). Оба множества являются ограниченными, а их границы  $\partial\Omega_1: x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  и  $\partial\Omega_2: (x - 4)^2 + y^2 = 1$  – спрямляемые кривые с длинами  $l_1 = 6r_1 = 6$  и  $l_2 = 2\pi r_2 = 2\pi$ . Как уже было показано, спрямляемая кривая на плоскости  $(x, y)$  имеет жорданову меру нуль, а значит,  $m(\partial\Omega_1) = m(\partial\Omega_2) = 0$ , поэтому в силу теоремы 2.1 множества  $\Omega_1, \Omega_2$  являются жордановыми. Меру каждого множества можно определить с помощью утверждения 2.1 как его площадь  $m(\Omega_1) = S_1, m(\Omega_2) = S_2$ . Формулы площадей астроиды и круга известны:  $S_1 = 3\pi r_1^2/8, S_2 = \pi r_2^2$ . Следовательно,  $m(x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1) = 3\pi/8$  и  $m((x - 4)^2 + y^2 \leq 1) = \pi$ .

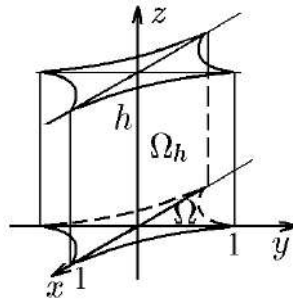
Рис. 10. Множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ 

Из рис. 10 видно, что множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не пересекаются:  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , следовательно, в силу свойства 1 множество  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  измеримо по Жордану и имеет меру

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2) = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}.$$

**Пример 2.13.** Показать, что цилиндр  $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1, 0 \leq z \leq h$  в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$  является измеримым по Жордану, и указать его меру.

**Решение.** В плоскости  $(x, y)$  множество  $\Omega: x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1$  ограничено астроидой  $\partial\Omega: x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  и, как показано в предыдущем примере 2.12, является измеримым по Жордану с мерой  $m(\Omega) = 3\pi/8$ . Следовательно, цилиндр  $\Omega_h$  с высотой  $h$  и основанием  $\Omega$  (рис. 11), согласно свойству 6, является жордановым множеством в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$  с мерой  $m(\Omega_h) = hm(\Omega) = h3\pi/8$ .

Рис. 11. Цилиндр  $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1, 0 \leq z \leq h$ 

### 3. Определение кратного интеграла Римана

Как уже отмечалось, кратный интеграл Римана мы будем рассматривать как обобщение одномерного (определенного) интеграла Римана. Для этого нам

потребуется обобщения соответствующих операций и определений на случай жордановых множеств. Во избежание некоторых формальных повторов мы без особых пояснений будем ссылаться на соответствующие формулировки, использованные в интегральном исчислении одной переменной [18].

### 3.1. Интегральные суммы и интеграл Римана для функций многих переменных

Пусть  $f(\vec{x})$  – функция многих переменных  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , определенная на измеримом по Жордану множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Введем следующие определения.

◆ Разбиением  $\tau_k$  жорданова множества  $G \subset \mathbb{R}^n$  будем называть совокупность попарно непересекающихся жордановых множеств  $\{G_i\}_{i=1}^k$ , таких, что  $\bigcup_{i=1}^k G_i = G$ .

◆ Величина

$$d(G_i) = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in G_i} \rho(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.1)$$

называется *диаметром* множества  $G_i$ .

◆ *Диаметром разбиения*  $\tau_k$  (или его *мелкостью*) называется наибольший из всех диаметров множеств  $G_i$ , обозначается

$$d = d(\tau_k) = \max_{i=1, \dots, k} d(G_i). \quad (3.2)$$

◆ Разбиение  $\tau'_k = \{G'_j\}_{j=1}^{k'}$  называется *измельчением* (или *продолжением*) разбиения  $\tau_k = \{G_i\}_{i=1}^k$ , если каждое из множеств  $G'_j$  является подмножеством некоторого множества  $G_i$ . Обозначение:  $\tau'_k \prec \tau_k$ .

◆ Последовательность разбиений  $\{\tau_{k_i}^i\}_{i=1}^{\infty}$  будем называть *основной*, если  $\tau_{k_i}^i \succ \tau_{k_{i-1}}^{i-1}$  и при этом соответствующая последовательность  $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$  является бесконечно малой:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = 0. \quad (3.3)$$

Очевидно, что из  $\tau'_{k'} \prec \tau_k$  следует, что  $d(\tau'_{k'}) \leq d(\tau_k)$ .

◆ Множество точек  $\{\vec{\xi}_i\}_{i=1}^k$ , где  $\vec{\xi}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in}) \in G_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , будем называть *выборкой разбиения*  $\tau_k = \{G_i\}_{i=1}^k$  жорданова множества  $G = \bigcup_{i=1}^k G_i$  и

обозначать  $\vec{\xi}(\tau_k)$  или просто  $\vec{\xi}$ . Для множества выборок разбиения  $\tau_k$  примем обозначение  $\mathcal{P}(\tau_k)$ .

◆ Сумму

$$S(f(\vec{x}), \tau_k, \vec{\xi}(\tau_k)) = S(f, \tau_k, \vec{\xi}) = \sum_{i=1}^k f(\vec{\xi}_i) m(G_i) \quad (3.4)$$

будем называть *интегральной суммой Римана* функции  $f(\vec{x})$  на множестве  $G$ , соответствующей разбиению  $\tau(G_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , и выборке  $\vec{\xi}(\tau)$ . Иногда для краткости сумму (3.4) будем обозначать просто  $S(f, \tau)$ .

Заметим, что основные последовательности являются расходящимися, т. к.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty. \quad (3.5)$$

### 3.2. Интеграл Римана для функций нескольких переменных и классы интегрируемых функций

◇ Для удобства будем в дальнейшем использовать полезные сокращения обозначений

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad dx_1 \cdots dx_n = d\vec{x}.$$

◆ Число  $I$  называется *интегралом Римана*, или *кратным интегралом от функции многих переменных*  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$ , по множеству  $G$  и обозначается как

$$I = \underbrace{\int \cdots \int}_G f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_G f(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^k f(\vec{\xi}_i) m(G_i), \quad (3.6)$$

т. е. кратный интеграл (3.6) определяется как предел интегральной суммы (3.4). В соответствии с определением предела функции по Коши [23] это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при любом разбиении  $\tau_k$  с диаметром  $d(\tau_k) < \delta$  и любой выборке  $\vec{\xi}(\tau_k)$  выполняется неравенство

$$|I - S(f, \tau_k, \vec{\xi}(\tau_k))| = \left| I - \sum_{i=1}^k f(\vec{\xi}_i) m(G_i) \right| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Если воспользоваться определением предела функции по Гейне [13], то предельный переход в (3.6) означает, что для любой основной последовательности разбиений  $\{\tau_{k_l}^l\}_{l=1}^\infty$ , т. е. при выполнении условий (3.3), (3.5), рассматривается предел при  $l \rightarrow \infty$ :

$$I = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_l} f(\vec{\xi}_i(\tau_{k_l}^l)) m(G_i^l). \quad (3.8)$$

В случае двух независимых переменных  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  интеграл (3.6) называется *двойным* и обозначается как

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

В случае трех независимых переменных  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  интеграл (3.6) называется *тройным* и обозначается как

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz.$$

◆ Функция  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$  называется *интегрируемой на множестве*  $G$ , если для нее существует предел  $I$ , определяемый условиями (3.6) и обозначаемый как

$$I = \int \cdots \int_G f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

### 3.3. Интегральные суммы Дарбу

Если функция  $f(\vec{x})$  ограничена на множестве  $G$ , то для любого разбиения  $\tau_k(G_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , определены числа

$$m_i = \inf_{\vec{x} \in G_i} f(\vec{x}), \quad M_i = \sup_{\vec{x} \in G_i} f(\vec{x}). \quad (3.9)$$

◆ Суммы

$$\underline{S}(f, \tau_k) = \sum_{i=1}^k m_i m(G_i), \quad \overline{S}(f, \tau_k) = \sum_{i=1}^k M_i m(G_i) \quad (3.10)$$

будем называть *нижней* и *верхней суммами Дарбу* для функции  $f(\vec{x})$  при заданном разбиении  $\tau_k$  на множестве  $G$ .

Диаметр множества  $G_i$  определяется посредством равенства (3.1) через расстояние между двумя произвольными точками  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  этого множества. Если точки  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  выбрать из разных множеств, то можно ввести понятие расстояния между двумя множествами  $G_i$  и  $G_j$ , которое нам потребуется при работе с множествами  $\tau_k(G_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , разбиения  $\tau_k$ .

◆ *Расстоянием*  $\rho(G_i, G_j)$  между двумя множествами  $G_i$  и  $G_j$  будем называть величину

$$\rho(G_i, G_j) = \inf_{\substack{\vec{x} \in G_i \\ \vec{y} \in G_j}} \rho(\vec{x}, \vec{y}). \quad (3.11)$$

Величина (3.11) позволяет сформулировать очевидные для множеств  $G_1$  и  $G_2$  свойства.

**Свойство 1.** Если  $G_1$  и  $G_2$  – непересекающиеся замкнутые множества в  $\mathbb{R}^n$  и хотя бы одно из них ограничено, то расстояние между ними не может быть равным нулю, т. е.  $\rho(G_1, G_2) > 0$ .

**Свойство 2.** Если  $G \subset G_1 \cup G_2$  и  $\rho(G_1, G_2) = \delta > 0$ , а для множества  $G$  диаметр  $d(G) < \delta$ , то либо  $G \subset G_1$ , либо  $G \subset G_2$ .

**Свойство 3.** Если жордановы множества  $G_1$  и  $G_2$  принадлежат  $\mathbb{R}^n$  и мера  $m(G_2) < \varepsilon$ , то существует число  $\delta > 0$ , такое, что для любого разбиения  $\tau_k = \{G_{1i}\}_{i=1}^k$  множества  $G_1$  с диаметром разбиения  $d(\tau) < \delta$  сумма мер множеств  $G_{1j}$ , имеющих с  $G_2$  непустое пересечение, будет меньше  $4\varepsilon$ .

Первые два свойства очевидны. Докажем третье свойство. Действительно, если для жорданова множества  $G_2$  справедлива оценка  $m(G_2) < \varepsilon$ , то его можно поместить в клеточное множество, мера которого, например, меньше  $2\varepsilon$ . Если учесть, что клеточное множество состоит из конечного числа клеток, то достаточно рассмотреть случай, когда множество  $G_2$  есть клетка  $K$ , и для наглядности ограничиться пространством  $\mathbb{R}^2$ . Для клетки  $K$  – прямоугольника в  $\mathbb{R}^2$  – построим рамку  $K_p$  с шириной всех стенок  $\delta$  (рис. 12).

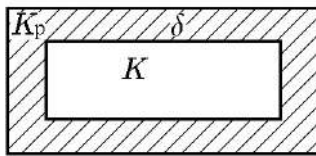


Рис. 12. Клетка  $K$  и рамка  $K_p$

Значение  $\delta$  можно подобрать так, чтобы площадь рамки  $K_p$  не превышала площади  $K$ . Тогда площадь прямоугольника  $K_\delta$ , получаемого из  $K$  добавлением рамки  $K_p$ , не будет превышать  $4\varepsilon$ . Если диаметр  $d(\tau_k)$  разбиения  $G_1$  меньше  $\delta$ , то все элементы разбиения  $G_{1j}$ , имеющие непустое пересечение с  $K$ , будут лежать в прямоугольнике  $K_\delta$ , и, следовательно, сумма их мер не будет превышать меры  $K_\delta$ , т. е.  $4\varepsilon$ .

**Теорема 3.1 (критерий интегрируемости).** Для того чтобы ограниченная функция  $f(\vec{x})$  была интегрируемой на жордановом множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,



необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  нашлось такое  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $\tau_k$  с диаметром  $d(\tau_k) < \delta$  разность сумм Дарбу была меньше  $\varepsilon$ :  $|\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k)| < \varepsilon$ , т. е.

$$\lim_{d \rightarrow 0} [\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k)] = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) m(G_i) = 0. \quad (3.12)$$

**Доказательство** этой теоремы дословно повторяет доказательство критерия Дарбу для функции одной переменной (теорема 10.3 в [18]).

Докажем интегрируемость функции  $f(\vec{x})$  при более общих условиях.

**Теорема 3.2.** *Для того чтобы функция  $f(\vec{x})$ , ограниченная на жордановом множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ , была интегрируемой на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  нашлось такое разбиение  $\tau_k$  множества  $G$ , при котором разность сумм Дарбу удовлетворяла бы неравенству*

$$\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k) < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Будем исходить из свойств 1–3 измеримых по Жордану множеств раздела 3.1 и для фигурирующих там ограниченных замкнутых множеств воспользуемся для краткости общепринятым для них термином «компакт». С учетом этого замечания перейдем к последовательному рассмотрению необходимости и достаточности утверждения теоремы.

*Необходимость* следует из теоремы 3.1.

*Достаточность.* Пусть для произвольного  $\varepsilon > 0$  существует разбиение  $\tau_k$  множества  $G$ , для которого  $|f(\vec{x})| < M$  и разность сумм Дарбу

$$|\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k)| < \varepsilon/2.$$

В процессе разбиения одна часть множеств окажется компактными, а другая – как их дополнения – открытыми жордановыми множествами. Без ограничения общности можно считать, что  $\tau = \{\overline{G}_1, G_1, \overline{G}_2, G_2, \dots, \overline{G}_p, G_p\}$ , где множества  $\{\overline{G}_i\}_{i=1}^p$  являются компактными, а множества  $\{G_i\}_{i=1}^p$  будут открытыми жордановыми множествами. Их объединение обозначим через  $A = \bigcup_{i=1}^p G_i$  и будем считать, что сумма их мер не превышает  $\varepsilon/8M$ . Это возможно по той причине, что каждое открытое измеримое множество можно вложить в компакт, сколь угодно мало отличающийся от этого множества по мере (согласно формуле (2.17) свойства 5), а при измельчении разбиения разность сумм Дарбу может только уменьшаться. В силу свойства 1 существует число  $\delta > 0$ , такое, что расстояние между любыми двумя компактными превышает  $\delta$ :  $\rho(\overline{G}_i, \overline{G}_j) > \delta$ ,  $i \neq j$ .

Пусть теперь  $\tau'_{k'}$  – произвольное разбиение множества  $G$  с диаметром

$$d(\tau'_{k'}) \leq \delta.$$

В силу свойства 3 составляющие этого множества можно разделить на две группы. Все множества из первой группы можно целиком разместить в одном из множеств  $\overline{G}_i$ , а множества второй группы будут иметь непустое пересечение с множеством  $A$ . Но тогда в силу свойства 3 сумма мер этой группы не превышает  $4\varepsilon/8M = \varepsilon/2M$ .

Теперь обратимся к суммам Дарбу. Та часть сумм, представляющая их разность

$$\overline{S}(f, \tau'_{k'}) - \underline{S}(f, \tau'_{k'}) = \sum_{i=1}^{k'} (M_i - m_i) m(G'_i),$$

которая соответствует первой группе, не превышает  $\varepsilon/2$ , поскольку при измельчении разбиения разность сумм Дарбу не увеличивается, а часть, соответствующая второй группе, не превышает, согласно свойству 3, значение  $M\varepsilon/2M = \varepsilon/2$  ( $|f\vec{x}| < M$ ). Таким образом,  $\overline{S}(f, \tau'_{k'}) - \underline{S}(f, \tau'_{k'}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ , что в силу теоремы 3.1 и означает интегрируемость  $f(\vec{x})$  на множестве  $G$ .

При исследовании интегрируемости функции  $f(\vec{x})$  по определению полезно следующее утверждение.

**Утверждение 3.1.** Пусть функция  $f(\vec{x})$  ограничена на измеримом по Жордану множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ , а  $E$  есть множество жордановой меры нуль. Если для любого разбиения  $\tau = \{G_i\}_{i=1}^k$  отбрасывать в интегральной сумме  $S(f, \tau_k, \vec{\xi}(\tau_k))$  слагаемые, соответствующие тем множествам  $G_k$ , которые имеют непустое пересечение с  $E$ , то это не повлияет ни на существование предела интегральной суммы при  $d(\tau_k) \rightarrow 0$ , ни на значение этого предела.

**Доказательство.** Если  $m(G) = 0$ , то справедливость утверждения очевидна, поскольку при любом разбиении  $S(f, \tau_k, \vec{\xi}(\tau_k)) = 0$ .

Если же  $m(G) > 0$  и функция ограничена на  $G$ , т. е.  $|f(\vec{x})| < M$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует клеточное множество  $A$ , такое, что  $m(A) \leq \varepsilon/4M$  и  $E \subset A$ . Множества разбиения  $\tau$  пронумеруем так, чтобы  $G_1, \dots, G_m$  имели непустое пересечение с  $A$ , а остальные  $G_{m+1}, \dots, G_k$  с  $A$  не пересекались. В силу свойства 3 раздела 3.1 найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $d(\tau) < \delta$  будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^m m(G_i) < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{M}.$$

В этом случае для любого разбиения  $\tau$  с диаметром  $d(\tau)$  интегральную сумму можно представить как

$$D(f, \tau, \xi) = S_1(f, \tau_k, \vec{\xi}(\tau_k)) + S_2(f, \tau_k, \vec{\xi}(\tau_k)),$$

где

$$S_1(f, \tau_m, \vec{\xi}) = \sum_{i=1}^m f(\vec{\xi}_i) m(G_i), \quad S_2(f, \tau_k, \vec{\xi}) = \sum_{i=m+1}^k f(\vec{\xi}_i) m(G_i),$$

причем первая сумма удовлетворяет неравенству

$$|S_1(f, \tau, \vec{\xi})| \leq \sum_{i=1}^m f(\xi_i) m(G_i) \leq M \sum_{i=1}^m m(G_i) < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Следовательно,  $S_1(f, \tau, \vec{\xi}) \rightarrow 0$  при  $d(\tau) \rightarrow 0$ . Поэтому предел  $S(f, \tau, \vec{\xi}) \rightarrow I$  при  $d(\tau) \rightarrow 0$  будет иметь место только в том случае, когда  $S_2(f, \tau, \xi) \rightarrow 0$  при  $d(\tau) \rightarrow 0$ .

Как показывает практика, исследование интегрируемости функции  $f(\vec{x})$  с помощью теорем 3.1, 3.2 зачастую является весьма громоздким и затруднительным. Упростить это исследование можно, используя утверждение 3.1 и две следующие теоремы.

**Теорема 3.3.** Функция  $f(\vec{x})$ , непрерывная на измеримом по Жордану компакте  $G \subset \mathbb{R}^n$ , интегрируема на этом компакте.

**Доказательство** этой теоремы, как и доказательство теоремы 3.1, формально совпадает с доказательством теоремы 10.3 в [18] для функции одной переменной, непрерывной на замкнутом множестве – отрезке  $[a, b]$ .

Докажем интегрируемость функции  $f(\vec{x})$  при более общих предположениях.

**Теорема 3.4.** *Если функция  $f(\vec{x})$  ограничена на измеримом по Жордану множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ , а множество ее точек разрыва имеет жорданову меру нуль, то функция  $f(\vec{x})$  интегрируема на  $G$ .*

**Доказательство** этой теоремы частично повторяет доказательство утверждения 3.1, поэтому это доказательство разобьем на две части.

I. Жорданово множество  $G$  является компактом.

Пусть  $E$  – множество точек разрыва функции  $f(\vec{x})$ , причем  $m(E) = 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое открытое жорданово множество  $A$ , что  $E \subset A$  и

$$m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad M = \sup_{\vec{x} \in G} |f(\vec{x})|.$$

Вместе с этим функция  $f(\vec{x})$  непрерывна на компакте  $G \setminus A$  и, следовательно, в силу теоремы 3.3, интегрируема на нем. Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение  $\tau_k = \{G_i\}_{i=2}^k$  компакта  $G \setminus A$ , такое, что

$$\bar{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k) = \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) m(G_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.13)$$

Пусть  $G_1 = A \cap G$ , тогда множества  $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  образуют разбиение  $\tau'_k$  множества  $G$ , причем

$$m(G_i) \leq m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (3.14)$$

Тогда для разбиения  $\tau'_k$ , с учетом (3.13), (3.14), имеем

$$\bar{S}(f, \tau'_k) - \underline{S}(f, \tau'_k) = (M_1 - m_1) m(G_1) + \sum_{i=2}^k (M_i - m_i) m(G_i) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Выполнение этого неравенства, в силу теоремы 3.2 и произвольности  $\varepsilon$ , означает интегрируемость функции  $f(\vec{x})$  на компакте  $G$ .

II. Жорданово множество  $G$  является открытым.

В этом случае жорданово множество  $G$  в силу критерия измеримости (теорема 2.1) является ограниченным и  $m(\partial G) = 0$ . Так как множества  $G$  и  $\partial G$  являются измеримыми по Жордану, то и их объединение  $\bar{G} = G \cup \partial G$  является множеством, измеримым по Жордану, причем замкнутым, т. е. компактом. Вместе с этим, если функцию  $f(\vec{x})$  на границе  $\partial G$  доопределить любым конечным значением, то она останется ограниченной, а множество ее точек разрыва будет иметь жорданову меру нуль, так как оно содержится в множестве  $E \cup \partial G$  меры нуль. Но тогда в силу первой части теоремы функция интегрируема на множестве  $\bar{G}$ , а следовательно, и на множестве  $G$ , что и требовалось доказать.

**Пример 3.1.** Исследовать интегрируемость функции  $f(x, y) = x^2 + y^2$  на множестве  $G \subset \mathbb{R}^2$ ,  $G: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ .

**Решение.** Исследование проведем двумя способами.

*1-й способ* является наиболее простым и исходит из требований теоремы 3.3. Множество  $G: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$  представляет собой замкнутую клетку, т. е. является измеримым по Жордану компактом. Вместе с этим функция

$f(x, y) = x^2 + y^2$  непрерывна на компакте  $G$  и, следовательно, в силу теоремы 3.3, интегрируема на множестве  $G$ . Теорема 3.3 позволяет установить интегрируемость функции  $G$ , но не дает возможности вычисления двойного интеграла

$$I = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy. \quad (3.15)$$

Следующий способ позволяет не только установить интегрируемость функции  $G$ , но и вычислить двойной интеграл (3.15).

*2-й способ.* Здесь мы будем исходить из более общих предположений, задаваемых теоремой 3.2. Очевидно, что первое требование этой теоремы выполняется: функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ограничена на множестве  $G$ . Теперь остается указать разбиение  $\tau$ , при котором разность сумм Дарбу для произвольного  $\varepsilon$  удовлетворяет неравенству

$$\overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau) < \varepsilon,$$

которое в предельной форме имеет вид

$$\lim_{d \rightarrow 0} [\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k)] = 0.$$

Для этого в качестве разбиения  $\tau_k$  выберем разбиение прямоугольника  $G$  прямыми

$$x = 1 + \frac{i}{k}, \quad y = 1 + \frac{2j}{k}, \quad i, j = \overline{1, k}.$$

В результате такого разбиения имеем множество прямоугольников, пронумерованных как

$$G_{ij} = \left\{ 1 + \frac{i}{k} \leq x \leq 1 + \frac{i+1}{k}, 1 + \frac{2j}{k} \leq y \leq 1 + \frac{2(j+1)}{k} \right\}, \quad ij = \overline{0, k-1},$$

с мерой (или площадью), равной

$$m(G_{ij}) = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} = \frac{2}{k^2}.$$

Так как функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  есть квадрат расстояния от точки  $(x, y)$  до начала координат, то наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x, y)$  в прямоугольнике  $G_{ij}$  определяются соотношениями

$$m_{ij} = f\left(1 + \frac{i}{k}, 1 + \frac{2j}{k}\right), \quad M_{ij} = f\left(1 + \frac{i+1}{k}, 1 + \frac{2(j+1)}{k}\right).$$

Чтобы найти нижнюю и верхнюю суммы Дарбу, обозначим:

$$\underline{S}_{ij} = \inf_{x, y \in G_{ij}} f(x, y) m(G_{ij}) = m_{ij} m(G_{ij}) = \left[ \left(1 + \frac{i}{k}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{k}\right)^2 \right] \frac{2}{k^2};$$

$$\overline{S}_{ij} = \sup_{x, y \in G_{ij}} f(x, y) m(G_{ij}) = M_{ij} m(G_{ij}) = \left[ \left(1 + \frac{i+1}{k}\right)^2 + \left(1 + \frac{2(j+1)}{k}\right)^2 \right] \frac{2}{k^2},$$

тогда

$$\underline{S}(f, \tau_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \underline{S}_{ij} = \frac{2}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \left(1 + \frac{i}{k}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{k}\right)^2 \right] \quad (3.16)$$

и

$$\bar{S}(f, \tau_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{S}_{ij} = \frac{2}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \left(1 + \frac{i+1}{k}\right)^2 + \left(1 + \frac{2(j+1)}{k}\right)^2 \right]. \quad (3.17)$$

Чтобы вычислить суммы (3.16), (3.17), воспользуемся известными выражениями для конечных сумм:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} 1 &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} 1 = 1 + (k-1) = k; \\ \sum_{i=0}^{k-1} i &= 0 + \sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{(k-1)k}{2}; \\ \sum_{i=0}^{k-1} i^2 &= 0 + \sum_{i=1}^{k-1} i^2 = \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

С учетом (3.18) и предварительного преобразования выражения

$$\left(1 + \frac{i}{k}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{k}\right)^2 = \left(2 + \frac{2}{k}i + \frac{1}{k^2}i^2\right) + \frac{4}{k}j + \frac{4}{k^2}j^2$$

сумма (3.16) может быть упрощена следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \tau_k) &= \frac{2}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \left(2 + \frac{2}{k}i + \frac{1}{k^2}i^2\right) + \frac{4}{k}j + \frac{4}{k^2}j^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \left(2 + \frac{2}{k}i + \frac{1}{k^2}i^2\right) \sum_{j=0}^{k-1} 1 + \frac{4}{k} \sum_{j=0}^{k-1} j + \frac{4}{k^2} \sum_{j=0}^{k-1} j^2 \right\} = \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \left(2 + \frac{2}{k}i + \frac{1}{k^2}i^2\right)k + \frac{4}{k} \frac{(k-1)k}{2} + \frac{4}{k^2} = \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} \right\} = \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \left[4k - 2 + \frac{2}{3} \frac{(k-1)(2k-1)}{k}\right] + 2i + \frac{1}{k}i^2 \right\} = \\ &= \frac{2}{k^2} \left\{ \left(4k - 2 + \frac{2}{3} \frac{(k-1)(2k-1)}{k}\right) \sum_{i=0}^{k-1} 1 + 2 \sum_{i=0}^{k-1} i + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \right\} = \\ &= \frac{2}{k^2} \left\{ \left(4k - 2 + \frac{2}{3} \frac{(k-1)(2k-1)}{k}\right)k + 2 \frac{(k-1)k}{2} + \frac{1}{k} \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} \right\} = \\ &= \frac{2}{k^2} \left\{ 4k^2 - 2k + \frac{2}{3}(k-1)(2k-1) + (k-1)k + \frac{1}{6}(k-1)(2k-1) \right\} = \\ &= \frac{2}{k^2} \left\{ 4k^2 - 2k + (k-1) \left[ \frac{2}{3}(2k-1) + k + \frac{1}{6}(2k-1) \right] \right\} = \\ &= \frac{2}{k^2} \left( \frac{20}{3}k^2 - \frac{11}{2}k + \frac{5}{6} \right) = \frac{40}{3} - \frac{11}{k} + \frac{5}{3k^2}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется сумма (3.17). Таким образом, имеем

$$\underline{S}(f, \tau_k) = \frac{40}{3} - \frac{11}{k} + \frac{5}{3k^2}, \quad \overline{S}(f, \tau) = \frac{40}{3} + \frac{11}{k} + \frac{5}{3k^2} \quad (3.19)$$

и, соответственно,

$$\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k) = \frac{40}{3} + \frac{11}{k} + \frac{5}{3k^2} - \left( \frac{40}{3} - \frac{11}{k} + \frac{5}{3k^2} \right) = \frac{22}{k},$$

причем

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} [\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{22}{k} = 0.$$

Это означает, что функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  интегрируема на множестве  $G$ , что согласуется с результатом вычисления первым способом. Кроме этого, вычисление пределов сумм Дарбу (3.19) позволяет вычислить двойной интеграл (3.15).

Действительно, принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \underline{S}(f, \tau_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{40}{3} - \frac{11}{k} + \frac{5}{3k^2} \right) = \frac{40}{3}, \\ \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \overline{S}(f, \tau_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{40}{3} + \frac{11}{k} + \frac{5}{3k^2} \right) = \frac{40}{3}, \end{aligned}$$

получаем, что

$$\lim_{d \rightarrow 0} \underline{S}(f, \tau_k) = \lim_{d \rightarrow 0} \overline{S}(f, \tau_k) = \lim_{d \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy = \frac{40}{3}.$$

Ниже этот интеграл мы вычислим методом сведения двойного интеграла к повторному.

**Пример 3.2.** Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G xy dx dy \quad (3.20)$$

по множеству  $G$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , исходя из его определения.

**Решение.** Подынтегральная функция  $f(x, y) = xy$  непрерывна на жордановом компакте  $G$ , и, следовательно, в силу теоремы 3.3, функция интегрируема на этом компакте. Это означает, что двойной интеграл (3.20) существует и может быть найден как предел интегральной суммы при любом разбиении  $\tau_k$  и любой выборке  $\vec{\xi}(\tau)$ . Для простоты вычислений разбиение компакта  $G$  на клетки  $G_{ij}$  проведем прямыми  $x = i/k$ ,  $y = j/k$ ,  $i, j = \overline{1, k-1}$ , а значения функции будем находить в каждой верхней правой вершине клетки. Поскольку мера каждой клетки  $G_{ij}$  равна  $m(G_{ij}) = 1/k^2$ , а значения функции есть

$$f(\vec{\xi}_{ij}) = f(x_i, y_j) = \frac{ij}{k^2},$$

то

$$\begin{aligned} \iint_G xy \, dx \, dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f(x_i, y_j) m(G_{ij}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{ij}{k^4} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k i \sum_{j=1}^k j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2(k+1)^2}{4k^4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Пример 3.3.** Показать, что функция  $f(x, y) = \sin(1/xy)$  интегрируема на множестве  $G: 0 < x \leq 2\pi, 0 < y \leq 2\pi$ .

**Решение.** Функция  $f(x, y) = \sin(1/xy)$  ограничена на множестве  $G$ , но имеет особенности на прямых  $x = 0$  и  $y = 0$  и, следовательно, не определена на двух промежутках:  $\{0 < x \leq 2\pi, y = 0\}$ ,  $\{x = 0, 0 < y \leq 2\pi\}$ . Если эту функцию на отрезках  $0 \leq x \leq 2\pi, y = 0$  и  $x = 0, 0 \leq y \leq 2\pi$  доопределить нулевым значением  $f(x, y) = 0$ , то доопределенная таким образом на компакт  $\bar{G}: 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$  функция будет непрерывной на  $\bar{G}$  всюду, за исключением этих двух отрезков прямых,  $x = 0$  и  $y = 0$ , представляющих собой множество точек разрыва. Поскольку каждый из этих отрезков на плоскости  $(x, y)$  (в пространстве  $\mathbb{R}^2$ ) является множеством меры нуль, то и множество точек разрыва является множеством меры нуль. Но тогда в силу теоремы 3.4 функция  $f(x, y) = \sin(1/xy)$  интегрируема на множестве  $\bar{G}$  и, следовательно, на исходном множестве  $G$ . Этот вывод с помощью утверждения 3.1 можно дополнить равенством

$$\iint_{\bar{G}} \sin \frac{1}{xy} \, dx \, dy = \iint_G \sin \frac{1}{xy} \, dx \, dy.$$

## 4. Свойства кратных интегралов

Свойства кратных интегралов, как и определенных (или одномерных (см. разд. 10.6 [18])), разделим на однородные, аддитивные и касающиеся оценок. Так как доказательства большей части этих свойств дословно повторяют соответствующие доказательства свойств определенных интегралов, такие доказательства мы будем опускать.

### 4.1. Однородные свойства кратных интегралов

**Свойство 1.** Если  $f(\vec{x}) = 1$ , а  $G \subset \mathbb{R}^n$  – жорданово множество, то справедливо равенство

$$\int \dots \int_G 1 \, d\vec{x} = m(G). \quad (4.1)$$

Действительно,

$$\int \dots \int_G 1 \, d\vec{x} = \lim_{d \rightarrow 0} G(1, \tau_k, \vec{\xi}(\tau_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k m(G_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(G) = m(G),$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 2 (линейности).** Если функции  $f_1(\vec{x})$  и  $f_2(\vec{x})$  интегрируемы на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ , то для любых вещественных чисел  $C_1$  и  $C_2$  функция

$$f(\vec{x}) = C_1 f_1(\vec{x}) + C_2 f_2(\vec{x})$$

также интегрируема на этом множестве, причем

$$\int \cdots \int_G [C_1 f_1(\vec{x}) + C_2 f_2(\vec{x})] d\vec{x} = C_1 \int \cdots \int_G f_1(\vec{x}) d\vec{x} + C_2 \int \cdots \int_G f_2(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (4.2)$$

**Свойство 3.** Произведение  $f_1(\vec{x})f_2(\vec{x})$  функций, интегрируемых на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ , будет функцией, также интегрируемой на этом множестве.

Свойства 2 и 3 остаются справедливыми для любого конечного числа подынтегральных слагаемых или интегрируемых сомножителей.

**Свойство 4.** Если функция  $f(\vec{x})$  интегрируема на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ , то и ее абсолютное значение  $|f(\vec{x})|$  также есть функция, интегрируемая на этом множестве.

**Свойство 5.** Если функция  $f(\vec{x})$  интегрируема на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$  и точные нижняя  $m$  и верхняя  $M$  грани функции  $f(\vec{x})$  имеют одинаковый знак, то и функция  $1/f(\vec{x})$  также интегрируема на этом множестве.

**Свойство 6 (о видоизменении функции).** Если ограниченную и интегрируемую на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$  функцию  $f(\vec{x})$  видоизменить на любом множестве  $E \subset G$ , имеющем жорданову меру нуль, так, что видоизмененная функция  $f^*(\vec{x})$  остается ограниченной на  $G$ , то  $f^*(\vec{x})$  будет интегрируемой на  $G$  причем

$$\int \cdots \int_G f(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_G f^*(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (4.3)$$

Это свойство следует непосредственно из утверждения 3.1 и теоремы 3.4.

#### 4.2. Аддитивные свойства кратных интегралов

Начнем с достаточно очевидного свойства.

**Свойство 7.** Если функция  $f(\vec{x})$  интегрируема на множестве  $G$ , то она интегрируема и на любом его подмножестве  $G_1 \subset G$ .

**Свойство 8.** Ограниченная функция  $f(\vec{x})$  одновременно интегрируема или нет на всех трех множествах  $G$ ,  $\overline{G}$  и  $G^{(0)}$ , где  $\overline{G}$  – замыкание множества  $G$ , а  $G^{(0)}$  – множество внутренних точек множества  $G$ , причем

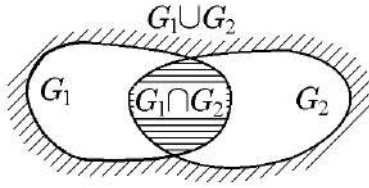
$$\int_G f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\overline{G}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{G^{(0)}} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (4.4)$$

Действительно, пересечения всех этих множеств есть множества меры нуль, и, следовательно, из существования одного из интегралов в (4.4) следует существование остальных. По этой причине при вычислении интегралов по множеству  $G$  мы зачастую будем переходить к его вычислению по замыканию  $\overline{G}$ , не оговаривая специально этот переход.

**Свойство 9.** Если функция  $f(\vec{x})$  ограничена и интегрируема на множествах  $G_1$ ,  $G_2$ , то она интегрируема и на множестве  $G = G_1 \cup G_2$ , причем

$$\int \cdots \int_G f(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{G_1} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int \cdots \int_{G_2} f(\vec{x}) d\vec{x} - \int \cdots \int_{G_1 \cap G_2} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (4.5)$$



Рис. 13. Множества  $G_1$  и  $G_2$ 

$m(G_1 \cap G_2) = 0$ , формула (4.5) упрощается к виду

$$\int \cdots \int_G f(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{G_1} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int \cdots \int_{G_2} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (4.6)$$

**Свойство 10 (свойство конечной аддитивности кратного интеграла на множестве интегрирования).** Для разбиения  $\tau_k = \{G_i\}_{i=1}^k$  множества  $G$  и функции  $f(\vec{x})$ , ограниченной на каждом  $G_i$ , справедливо равенство

$$\int \cdots \int_G f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=1}^k \int \cdots \int_{G_i} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (4.7)$$

Очевидно, что это свойство вытекает из предыдущего, являясь его обобщением.

**Пример 4.1.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G (x+y)^2 dx dy$$

по множеству  $G$ :  $1 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 3$ .

**Решение.** Преобразование подынтегральной функции и использование свойства линейности дает

$$\begin{aligned} \iint_G (x+y)^2 dx dy &= \iint_G [(x^2 + y^2) + 2xy] dx dy = \\ &= \iint_G (x^2 + y^2) dx dy + 2 \iint_G xy dx dy = I_1 + 2I_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Первый интеграл  $I_1$  был вычислен в примере 3.1:

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy = \frac{40}{3}. \quad (4.9)$$

Интеграл, аналогичный интегралу  $I_2$ , был рассмотрен в примере 3.2 по множеству  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Рассуждая, как в примере 3.2, вычислим интеграл  $I_2$ , существование которого вытекает из ограниченности и непрерывности функции  $xy$  на компакте  $G$ . Это означает, что двойной интеграл  $I_2$  может

быть найден как предел интегральной суммы при любом разбиении  $\tau_k$  и любой выборке  $\xi$ . Для простоты вычислений рассмотрим разбиение  $\tau_k$  компакта  $G$ , образованное прямыми  $x = 1 + i/k$ ,  $y = 1 + 2j/k$ ,  $i, j = \overline{1, k-1}$ , а значения функции найдем в каждой верхней правой вершине клетки. Поскольку мера каждой клетки  $G_{ij}$  равна  $m(G_{ij}) = 2/k^2$ , а значения функции есть  $f(\xi_{ij}) = f(x_i, y_j) = (1 + i/k)(1 + 2j/k)$ , то

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_G xy \, dx \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f(x_i, y_j) m(G_{ij}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(1 + \frac{i}{k}\right) \left(1 + \frac{2j}{k}\right) \frac{2}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^k \left(1 + \frac{i}{k}\right) \sum_{j=1}^k \left(1 + \frac{2j}{k}\right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^k \left(1 + \frac{i}{k}\right) \left(k + \frac{2k(k+1)}{2}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k^2} (2k+1) \sum_{i=1}^k \left(1 + \frac{i}{k}\right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k^2} (2k+1) \left(k + \frac{k(k+1)}{2k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)(3k+1)}{k^2} = 6. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Значение искомого интеграла получим подстановкой выражений (4.9) и (4.10) в (4.8):

$$\iint_G (x+y)^2 \, dx \, dy = I_1 + 2I_2 = \frac{40}{3} + 6 = \frac{58}{3}.$$

**Пример 4.2.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) \, dx \, dy$$

по множеству  $G: |x - 1/2| < 1/2, |y - 1/2| < 1/2$  для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \in G_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}; \\ xy, & x, y \in G \setminus G_1. \end{cases}$$

**Решение.** Функцию  $f(x, y)$  по периметру замкнутой клетки

$$\overline{G}: |x - 1/2| \leq 1/2, |y - 1/2| \leq 1/2$$

доопределим значением  $f(x, y) = xy$ , а на окружности  $G_1$  функцию  $f(x, y) = 0$  видоизменим значением  $f(x, y) = xy$  (рис. 14).

Поскольку периметр клетки  $\partial \overline{G}$  и окружность  $G_1$  представляют собой жордановы множества меры нуль, то в силу свойств кратных интегралов имеем равенство

$$\iint_G f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\overline{G}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Последний интеграл совпадает с интегралом из примера 3.2, поскольку

$$\left\{ \left| x - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}, \left| y - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

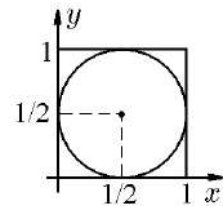


Рис. 14.  
Окружность  $G_1$

т. е. множество  $\overline{G}$  совпадает с множеством  $G$  из примера 3.2. Таким образом, использование результата примера 3.2 для исходного интеграла дает

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{\overline{G}} xy dx dy = \frac{1}{4}.$$

**Пример 4.3.** Существуют ли интегралы

$$I_1 = \iint_{G_1} f_1(x, y) dx dy, \quad I_2 = \iint_{G_2} f_2(x, y) dx dy, \quad I = \iint_{G_1 \cup G_2} f_3(x, y) dx dy$$

по указанным ниже множествам?

$$G_1: x^2 + y^2 \leq 1, \quad G_2: 1 < x < 2, y = 0$$

и  $f_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , определены как

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in G_2; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus G_2; \end{cases} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x \in G_2; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus G_2; \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \in G_2; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus G_2. \end{cases}$$

**Решение.** Для наглядности приведем графики функций  $f_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, 3$  (рис. 15).

1. График функции

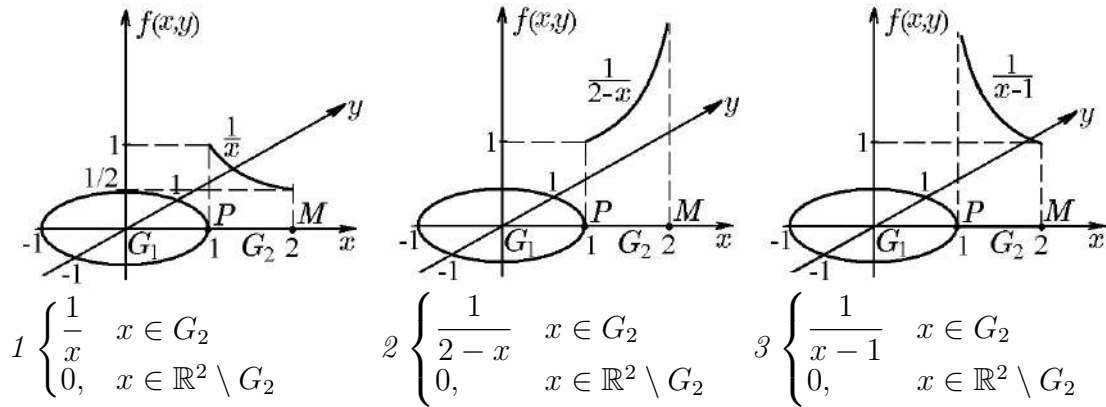
$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in G_2 = \{1 < x < 2, y = 0\}; \\ 0, & x \in G_1 \cup \{x = 2, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus G_2 \end{cases}$$

приведен на рис. 15, 1. Функция  $f_1(x, y)$  ограничена на каждом из множеств  $G_1$ ,  $G_2$  и, следовательно, на  $G_1 \cup G_2$ . Поскольку функция  $f_1(x, y)$  на жордановом множестве  $G_1$  равна нулю, то

$$I_1 = \iint_{G_1} f_1(x, y) dx dy = 0.$$

При вычислении интеграла  $I_2$  наряду с множеством  $G_2$  рассматриваем его замыкание  $\overline{G}_2$ , представляющее собой отрезок  $\{1 \leq x \leq 2, y = 0\}$  на плоскости  $xOy$ , на котором функция  $f_1(x, y)$  ограничена. Поскольку множество  $\overline{G}_2$  является жордановым множеством нулевой меры:  $m(\overline{G}_2) = 0$ , то при разбиении  $\overline{G}_2$  на элементарные множества  $\overline{G}_{2i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , их меры также равны нулю:  $m(\overline{G}_{2i}) = 0$ . Но тогда при произвольном разбиении  $\tau_k$  и произвольной выборке  $(\xi_i, 0) \in \overline{G}_i$ , согласно определению, имеем

$$\iint_G f_1(x, y) dx dy = \iint_{\overline{G}} f_1(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(\xi_i, 0) m(G_{2i}) = 0.$$

Рис. 15. Графики функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  и  $f_3(x)$ 

Чтобы вычислить интеграл  $I$ , воспользуемся свойством 10, согласно которому для функции  $f(x, y)$ , ограниченной на  $G_1 \cup G_2$ , справедливо равенство

$$I = \iint_{G_1 \cup G_2} f_1(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f_1(x, y) dx dy + \iint_{G_2} \frac{1}{x} dx dy = I_1 + I_2 = 0.$$

## 2. График функции

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x \in G_2 = \{1 < x < 2, y = 0\}; \\ 0, & x \in G_1 \cup \{x = 2, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus G_2 \end{cases}$$

приведен на рис. 15, 2. Функция  $f_2(x, y)$  ограничена на множестве  $G_1$  и не ограничена на множестве  $G_2$  и, следовательно, не ограничена на объединении множеств  $G_1 \cup G_2$ . Поскольку на жордановом множестве  $G_1$  функция  $f_2(x, y)$  равна нулю, то

$$I_1 = \iint_{G_1} f_2(x, y) dx dy = 0.$$

При вычислении интеграла  $I_2$  наряду с множеством  $G_2$  рассмотрим его замыкание  $\overline{G_2}$ , представляющее собой отрезок  $\{1 \leq x \leq 2, y = 0\}$  на плоскости  $xOy$ . Функция  $f_2(x, y)$  на концах этого отрезка равна нулю:

$$f_2(1, 0) = f_2(2, 0) = 0,$$

а во внутренних его точках имеет вид  $f_2(x, 0) = 1/(2-x)$ , т. е. является неограниченной. Поскольку множество  $\overline{G_2}$  является жордановым множеством нулевой меры:  $m(\overline{G_2}) = 0$ , то при разбиении  $\overline{G_2}$  на элементарные множества  $\overline{G_{2i}}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , их меры также равны нулю:  $m(\overline{G_{2i}}) = 0$ . Но тогда при произвольном разбиении  $\tau_k$  и произвольной выборке  $(\xi_i, 0) \in \overline{G_{2i}}$ , согласно определению, имеем

$$I_2 = \iint_{G_2} f_2(x, y) dx dy = \iint_{\overline{G_2}} f_2(x, y) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2-\xi_i} m(G_{2i}) = 0.$$

Чтобы вычислить интеграл  $I$  по множеству  $G_1 \cup G_2$ , следуя общей схеме построения интегральной суммы, рассмотрим произвольное разбиение  $\tau_k$  этого жорданова множества на элементарные множества  $G_{ij}$ . Пусть  $\vec{\xi} = (\xi_i, \eta_j)$ ,

$i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, k}$ , – некоторая выборка, отвечающая этому разбиению. Тогда соответствующая интегральная сумма имеет вид

$$S(f, \tau_k, \xi(\tau)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f_2(\xi_i, \eta_j) m(G_{ij}), \quad (\xi_i, \eta_j) \in G_{ij}. \quad (4.11)$$

Особенность этой интегральной суммы состоит в том, что элементарному множеству  $G_{nk}$  нулевой меры:  $m(G_{nk}) = 0$ , содержащему точку  $M(2, 0)$ , в окрестности которой функция  $f(x, y)$  может быть неограниченной:

$$f_2(\xi_n, 0) = \begin{cases} 0, & \xi_n = 2, \eta_k = 0, \\ \frac{1}{2 - \xi_n}, & \xi_n \neq 2, \eta_k = 0, |2 - \xi_n| < 1, \end{cases}$$

в интегральной сумме (4.11) соответствует равно нулю слагаемое

$$f(\xi_n, 0) m(G_{nk}) = 0,$$

в силу чего

$$I = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\xi_i, \eta_j) m(G_{ij}) = 0.$$

Этот пример демонстрирует возможность интегрирования неограниченных функций на некоторых жордановых множествах.

### 3. График функции

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \in G_2 = \{1 < x < 2, y = 0\}; \\ 0, & x \in G_1 \cup \{x = 1, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus G_2 \end{cases}$$

приведен на рис. 15, 3. Интегралы  $I_1, I_2$  вычисляются, как и выше, и равны

$$I_1 = \iint_{G_1} f_3(x, y) dx dy = 0, \quad I_2 = \iint_{G_2} f_3(x, y) dx dy = 0.$$

Чтобы вычислить интеграл  $I$  по жорданову множеству  $G_1 \cup G_2$ , воспользуемся его произвольным разбиением  $\tau$  на элементарные множества  $G_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Из всех элементарных множеств рассмотрим множество  $G_j$ , содержащее точку  $P(1, 0)$ , в окрестности которой функция  $f_3(x, y)$  является неограниченной. Еще одна особенность множества  $G_j$  заключается в том, что оно состоит из точек не только множества  $G_1$ , но и множества  $G_2$ , и, следовательно, его мера отлична от нуля, т. е.  $m(G_j) \neq 0$ . По этой причине соответствующее слагаемое нижней суммы Дарбу

$$\inf_{\vec{x} \in G_j} f_3(\vec{x}) m(G_j) = 0, \quad \vec{x} = (x, y),$$

и, следовательно,

$$\underline{S}(f, \tau_k) = \sum_{i=1}^k \inf_{\vec{x} \in G_j} f_3(\vec{x}) m(G_j) = 0,$$

а слагаемое

$$\sup_{\vec{x} \in G_j} f_3(\vec{x}) m(G_j)$$

верхней суммы Дарбу не определено, и, следовательно, не определена сама сумма

$$\overline{S}(f, \tau_k) = \sum_{i=1}^k \sup_{\vec{x} \in G_j} f(\vec{x}) m(G_j).$$

Это означает, что для  $d(\tau_k) < \delta$  неравенство

$$|\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau_k)| < \varepsilon$$

не выполняется, т. е. интеграл

$$I = \iint_G f_3(x, y) dx dy$$

не существует.

Таким образом, интегралы  $I_1$  и  $I_2$  существуют для всех функций  $f_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Интеграл  $I$  для ограниченной функции также существует и в силу свойства аддитивности  $I = I_1 + I_2$ . Несмотря на то, что интегралы  $I_1$  и  $I_2$  существуют, для них нельзя воспользоваться свойством аддитивности, потому что подынтегральные функции являются неограниченными. В этих случаях приходится обращаться к определению кратного интеграла, из которого следует, что для неограниченной функции  $f(x, y)$  в случае 2 интеграл  $I$  существует и  $I = I_1 + I_2$ , а в случае 3 интеграл  $I$  не существует, несмотря на существование интегралов  $I_1$  и  $I_2$  каждого в отдельности.

В заключение сформулируем свойство, связывающее однородные и аддитивные свойства кратных интегралов.

♦ *Графиком функции  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$ , называется множество  $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , такое, что  $E = \{(\vec{x}, u) : \vec{x} \in G, u = f(\vec{x})\}$ .*

**Свойство 11.** График функции  $f(\vec{x})$ , интегрируемой на измеримом в  $\mathbb{R}^n$  множестве  $G$ , имеет в  $\mathbb{R}^{n+1}$  жорданову меру нуль.

Действительно, для интегрируемой на  $G \in \mathbb{R}^n$  функции  $f(\vec{x})$  при любом  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение  $\tau = \{G_i\}_{i=1}^k$ ,  $\bigcup_{i=1}^k G_i = G$ , такое, что

$$\overline{S}(f, \tau_k) - \underline{S}(f, \tau) = \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) m(G_i) < \varepsilon.$$

Если теперь на каждом элементарном множестве  $G_i$  построить два цилиндра —  $G_{M_i}$  и  $G_{m_i}$  — с высотами

$$M_i = \sup_{\vec{x} \in G_i} f(\vec{x}), \quad m_i = \inf_{\vec{x} \in G_i} f(\vec{x}),$$

то множество

$$F = \bigcup_{i=1}^k \{G_{M_i} \setminus G_{m_i}\},$$

в силу свойства 6 жордановых множеств, будет измеримым по Жордану множеством, содержащим график функции  $f(\vec{x})$ , причем

$$m(F) = m\left(\bigcup_{i=1}^k \{G_{M_i} \setminus G_{m_i}\}\right) = \sum_{i=1}^k [G(M_i) - G(m_i)] = \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) m(G_i) < \varepsilon.$$

Это и означает, что в силу произвольности  $\varepsilon$  жорданова мера графика функции  $f(\vec{x})$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  равна нулю.

**Следствие 1 из свойства 11.** Если функция  $f(\vec{x})$  непрерывна на измеримом компакте в  $\mathbb{R}^n$ , то ее график в  $\mathbb{R}^{n+1}$  имеет жорданову меру нуль.

Справедливость утверждения очевидным образом вытекает из интегрируемости непрерывной на измеримом компакте функции  $f(\vec{x})$ .

**Следствие 2 из свойства 11 (достаточное условие измеримости множества в  $\mathbb{R}^n$  по Жордану).** Если граница области в  $\mathbb{R}^n$  представляет собой конечное объединение графиков, непрерывных на измеримом компакте в  $\mathbb{R}^{n-1}$ , то область является измеримой по Жордану в  $\mathbb{R}^n$ .

Действительно, согласно предыдущему следствию, граница области в  $\mathbb{R}^n$  является множеством меры нуль, а, значит, сама область, в силу критерия измеримости – теоремы 3.1, – является множеством, измеримым по Жордану в  $\mathbb{R}^n$ .

Достаточное условие измеримости множества в  $\mathbb{R}^n$  позволяет упростить задачу исследования измеримости множеств. Так, измеримость множеств из примеров 2.9, 2.11 можно легко установить повторно, исходя из непрерывности графиков соответствующих функций. В дополнение к этим примерам рассмотрим еще один.

**Пример 4.4.** Показать измеримость по Жордану в  $\mathbb{R}^n$   $n$ -мерного шара

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2, \quad (4.12)$$

и его границы –  $n$ -мерной сферы

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2. \quad (4.13)$$

**Решение.** При  $n = 1$  одномерный шар  $|x_1|^2 \leq r^2$  представляет собой отрезок  $-r \leq x_1 \leq r$ , который, согласно определению, является жордановым множеством в  $\mathbb{R}$  с мерой, равной его длине;  $m(|x_1|^2 \leq r^2) = 2r$  (рис. 16, *a*).

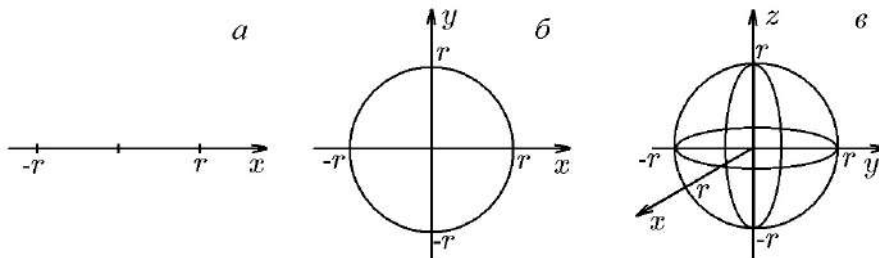


Рис. 16. Шар при  $n = 1$  (*a*);  $n = 2$  (*b*);  $n = 3$  (*в*)

При  $n = 2$  имеем круг  $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$  и его границу – окружность  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  (рис. 16, *б*), верхняя и нижняя части которой представляют собой графики непрерывных функций

$$x_2 = \pm \sqrt{r^2 - x_1^2},$$

определенных на измеримом компакте – отрезке  $-r \leq x_1 \leq r$ . По этой причине окружность, согласно следствию 1 из свойства 11, имеет в  $\mathbb{R}^2$  жорданову меру нуль. Вместе с этим окружность как множество меры нуль является границей

круга  $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ , и, следовательно, согласно следствию 2 из свойства 11, круг является в  $\mathbb{R}^2$  измеримым по Жордану множеством с мерой, равной его площади:  $m(x_1^2 + x_2^2 \leq r^2) = \pi r^2$ .

При  $n = 3$  имеем шар  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2$  и его границу – сферу (рис. 16, е)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ , верхняя и нижняя части которой представляют собой графики непрерывных функций

$$x_3 = \pm \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2},$$

определенных на измеримом компакте – круге  $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ . По этой причине сфера, согласно следствию 1 из свойства 11, имеет в  $\mathbb{R}^3$  жорданову меру нуль. Вместе с этим сфера как множество меры нуль является границей шара

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2,$$

и, следовательно, согласно следствию 2 из свойства 11, шар является в  $\mathbb{R}^3$  измеримым по Жордану множеством с мерой, равной его объему:

$$m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2) = 4\pi r^3/3.$$

Рассуждая по индукции, получим, что  $n$ -мерный шар (4.12), ограниченный сферой (4.13), является жордановым множеством с мерой

$$m\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2\right) = \frac{2\pi^{n/2}r^n}{n\Gamma(n/2)}. \quad (4.14)$$

Формулу (4.14) мы получим несколько позже. Однако, исходя из частных значений гамма-функции  $\Gamma(x)$ :  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ ,  $\Gamma(2) = 1$ ,  $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$  [1], мы можем получить из нее известные меры:  $2r$  при  $n = 1$ ,  $\pi r^2$  при  $n = 2$ ,  $4\pi r^3/3$  при  $n = 3$ , а также для четырехмерного шара  $\pi^2 r^4/2$  при  $n = 4$  и пятимерного  $8\pi^2 r^5/15$  при  $n = 5$ .

### 4.3. Оценки кратных интегралов

До сих пор мы рассматривали свойства кратных интегралов, которые можно записать через равенства. Перейдем теперь к свойствам, утверждения которых эквивалентны неравенствам. Продолжим начатую нумерацию свойств.

**Свойство 12.** Если функции  $f_1(\vec{x})$ ,  $f_2(\vec{x})$  и  $g(\vec{x})$  ограничены и интегрируемы на жордановом множестве  $G$  и

$$f_1(\vec{x}) \leq f_2(\vec{x}), \quad g(\vec{x}) \geq 0, \quad \vec{x} \in G, \quad (4.15)$$

то

$$\int \cdots \int_G f_1(\vec{x})g(\vec{x})d\vec{x} \leq \int \cdots \int_G f_2(\vec{x})g(\vec{x})d\vec{x}. \quad (4.16)$$

Действительно, из неравенств (4.15) следует, что

$$f_1(\vec{x})g(\vec{x}) \leq f_2(\vec{x})g(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G.$$

В силу этого для любого разбиения  $\tau_k$  множества  $G$  имеем

$$S(f_1g, \tau_k, \xi(\tau_k)) \leq S(f_2g, \tau_k, \xi(\tau_k)).$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу по диаметру разбиения  $d(\tau) \rightarrow 0$ , придем к (4.16).



**Свойство 13.** Для ограниченной интегрируемой на  $G$  функции  $f(\vec{x})$  справедливы оценки

$$\left| \int \cdots \int_G f(\vec{x}) d\vec{x} \right| \leq \int \cdots \int_G |f(\vec{x})| d\vec{x} \leq Mm(G), \quad M = \sup_{\vec{x} \in G} |f(\vec{x})|. \quad (4.17)$$

В самом деле, интегрируемость  $|f(\vec{x})|$  вытекает из свойства 4, а поскольку  $-|f(\vec{x})| \leq f(\vec{x}) \leq |f(\vec{x})|$  для всех  $\vec{x} \in G$ , то в силу (4.16) имеем

$$-\int \cdots \int_G |f(\vec{x})| d\vec{x} \leq \int \cdots \int_G f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int \cdots \int_G |f(\vec{x})| d\vec{x},$$

откуда и следует (4.17).

Заметим, что в оценках (4.17), как и в случае одномерного интеграла Римана, недостаточно предположить интегрируемость  $|f(\vec{x})|$ , поскольку из интегрируемости  $|f(\vec{x})|$  не следует интегрируемость  $f(\vec{x})$ , как было показано на примере функции, равной 1 в точках интервала интегрирования, координаты которых являются рациональными числами, и  $(-1)$  в точках, координаты которых являются иррациональными числами.

#### 4.4. Интегральные теоремы о среднем

**Свойство 14.** Если функции  $f(\vec{x})$  и  $g(\vec{x}) \geq 0$  интегрируемы на измеримом по Жордану множестве  $G$  и

$$\underline{M} = \inf_{\vec{x} \in G} f(\vec{x}), \quad \overline{M} = \sup_{\vec{x} \in G} f(\vec{x}), \quad (4.18)$$

то существует такое  $\mu$ , удовлетворяющее неравенству  $\underline{M} \leq \mu \leq \overline{M}$ , что справедлива формула

$$\int \cdots \int_G f(\vec{x})g(\vec{x}) d\vec{x} = \mu \int \cdots \int_G g(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (4.19)$$

Действительно, из предыдущего свойства следует оценка

$$\underline{M} \int \cdots \int_G g(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int \cdots \int_G f(\vec{x})g(\vec{x}) d\vec{x} \leq \overline{M} \int \cdots \int_G g(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (4.20)$$

из которой и вытекает равенство (4.19).

**Свойство 15 (теорема о среднем).** Если условия, необходимые для выполнения свойства 13, дополнить требованиями связности компакта  $G$  и непрерывности на нем функции  $f(\vec{x})$ , то в  $G$  найдется такая точка  $\vec{\xi}$ , в которой выполняется равенство

$$\int \cdots \int_G f(\vec{x})g(\vec{x}) d\vec{x} = f(\vec{\xi}) \int \cdots \int_G g(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (4.21)$$

В самом деле, из непрерывности  $f(\vec{x})$  на компакте  $G$  вытекает существование точек, в которых функция  $f(\vec{x})$  достигает своих наибольшего  $\overline{M}$  и наименьшего  $\underline{M}$  значений (4.18). В свою очередь, в силу связности  $G$  существует непрерывная

кривая, соединяющая эти точки, на которой непрерывная функция  $f(\vec{x})$  в точке  $\vec{\xi}$  принимает значение  $f(\vec{\xi}) = \mu$ , такое, что  $\underline{M} \leq \mu \leq \overline{M}$ , и, следовательно, вслед за (4.19) выполняется равенство (4.21).

◇ Условие связности в (4.21), как показывает следующий пример, существенно. Действительно, для функции  $f(x) = \text{sign } x$  и множества  $G: x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$  имеем

$$\int_G \text{sign } x \, dx = 0.$$

Однако не существует такой точки  $\xi$ , принадлежащей множеству  $G$ , что  $f(\xi) = 0$ .

◇ Если в (4.21) положить  $g(\vec{x}) \equiv 1$  для всех  $\vec{x} \in G$  и  $m(G) \neq 0$ , то

$$f(\vec{\xi}) = \frac{1}{m(G)} \int \cdots \int_G f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (4.22)$$

можно полагать «средним» значением функции  $f(\vec{x})$  на компакте  $G$  с мерой  $m(G)$ .

**Пример 4.5.** Оценить значение интеграла

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy$$

и найти среднее значение подынтегральной функции  $f(x, y)$  на множестве  $G$ , если

- 1)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $G: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ ;
- 2)  $f(x, y) = xy$ ,  $G: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ .

**Решение.** В случае 1 функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  есть квадрат расстояния от точки  $(x, y)$  до начала координат  $(0, 0)$ , поэтому в прямоугольнике  $G$  она имеет наименьшее значение в точке  $\underline{P}(1, 1)$ , равное  $\underline{M} = f(1, 1) = 2$ , и наибольшее в точке  $\overline{P}(2, 3)$ , равное  $\overline{M} = f(2, 3) = 13$  (рис. 17, а). Так как множество интегрирования  $G$  представляет собой прямоугольник со сторонами длиной 1 и 2, то ее мера  $m(G)$  равна площади этого прямоугольника, т. е.  $m(G) = 1 \cdot 2 = 2$ . С учетом этого  $\underline{M}m(G) = 2 \cdot 2 = 4$ ,  $\overline{M}m(G) = 13 \cdot 2 = 26$ , и в силу свойства 13 получим оценку

$$4 = \underline{M}m(G) \leq \iint_G (x^2 + y^2) dx dy \leq \overline{M}m(G) = 26,$$

которая соответствует точному значению интеграла, вычисленному в примере 3.1:

$$I = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Точное значение интеграла  $I$  позволяет по формуле (4.22) найти среднее значение функции  $f(x, y) = x^2 + y^2$  на множестве  $G$  с мерой  $m(G) = 2$ :

$$f(\xi, \eta) = \mu = \frac{I}{m(G)} = \frac{40/3}{2} = \frac{20}{3} \sim 6,7.$$

Последнее равенство, записанное в виде

$$\xi^2 + \eta^2 = 6,7 \approx (2,6)^2,$$

задает уравнение кривой, в точках которой функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  принимает значения  $(2,6)^2$ . Этой кривой является окружность радиуса  $r = 2,6$  (рис. 17, а).

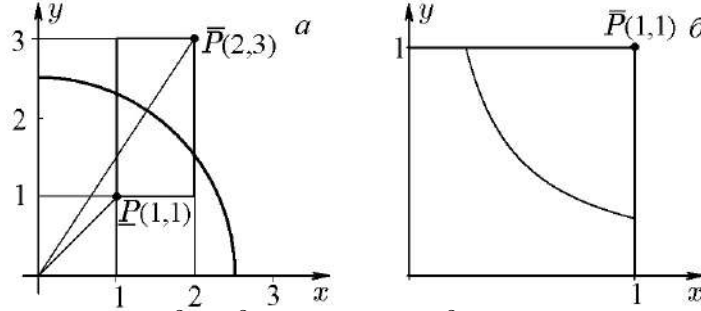


Рис. 17.  $\xi^2 + \eta^2 = 20/3 \approx (2,6)^2$  (а);  $\xi\eta = 1/4$  (б)

В случае 2 функция  $f(x, y) = xy$  достигает наименьшего значения  $\underline{M} = f(x, y) = 0$  на сторонах квадрата  $G: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , лежащих на координатных осях (рис. 17, б). В точке  $\bar{P}(1, 1)$  функция  $f(x, y) = xy$  принимает наибольшее значение:  $\bar{M} = f(1, 1) = 1 \cdot 1 = 1$ . Так как мера множества  $G$  как квадрата равна его площади, то  $m(G) = 1^2 = 1$ . Поэтому  $\underline{M}m(G) = 0 \cdot 1 = 0$ ,  $\bar{M}m(G) = 1 \cdot 1 = 1$ , и в силу свойства 13 получим оценку

$$0 = \underline{M}m(G) \leq \iint_G xy \, dx \, dy \leq \bar{M}m(G) = 1,$$

которая соответствует точному значению интеграла, вычисленному в примере 3.2:

$$I = \iint_G xy \, dx \, dy = \frac{1}{4}.$$

Точное значение интеграла  $I$  позволяет по формуле (4.22) найти среднее значение функции  $f(x, y) = xy$  на множестве  $G$  с мерой  $m(G) = 1$ :

$$f(\xi, \eta) = \mu = \frac{I}{m(G)} = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}.$$

Последнее равенство, записанное в виде  $\xi\eta = 1/4$ , задает уравнение кривой, в точках которой функция  $f(x, y) = xy$  принимает значения  $1/4$ . Этой кривой является гипербола (см. рис. 17, б).

## 5. Приведение кратных интегралов к повторным

Из примеров 3.1, 3.2 и др. следует, что вычисление даже простейших кратных интегралов, непосредственно по их определению, является задачей громоздкой и трудоемкой. Такой подход для одномерных интегралов Римана был дополнен формулой Ньютона–Лейбница, позволяющей упростить эту задачу. Вычисление кратных интегралов также можно провести с помощью формул, являющихся обобщением формулы Ньютона–Лейбница, поочередно по каждой переменной пространства  $\mathbb{R}^n$ . Именно так Эйлер впервые вычислил двойной интеграл, сведя его к повторному, когда интегрирование проводится сначала по

одной переменной, а другая считается постоянной, а затем повторно по переменной, считавшейся постоянной (как при частном дифференцировании). Результат повторного интегрирования при соответствующих правилах расстановки пределов в каждом из интегрирований не зависит от порядка выбора переменных интегрирования и равен значению исходного двойного интеграла.

Метод вычисления двойных интегралов с помощью повторных можно обобщить на случай интегралов произвольной кратности путем обобщения понятия повторного интеграла, к рассмотрению которого мы и переходим.

### 5.1. Двойной и повторные пределы интегральной суммы

Как уже отмечалось, вычисление одномерного интеграла Римана с использованием его определения было дополнено формулой Ньютона–Лейбница

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.1)$$

Как следует из (5.1), основное затруднение при использовании определения для вычисления интеграла состоит в вычислении одномерного предела при произвольном разбиении  $\tau$  одномерного компакта, т. е. отрезка  $[a, b]$ , и произвольной на нем выборке  $\xi$ . Правда, если функция  $f(x)$  является интегрируемой на компакте  $[a, b]$ , то из всех возможных разбиений и выборок можно воспользоваться теми, которые упрощают вычисление этого предела. Но и в этом случае вычисление интеграла по формуле Ньютона–Лейбница является задачей, как правило, более простой, чем вычисление даже такого предела.

Теперь рассмотрим предел интегральной суммы, представляющий двойной интеграл функции  $f(x, y)$  на жордановом множестве  $G$  плоскости  $(x, y)$ , т. е. пространстве  $\mathbb{R}^2$ :

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i) m(G_i) = \iint_G f(x, y) dx dy; \quad (\xi_i, \eta_i) \in G_i \subset G \subset \mathbb{R}^2. \quad (5.2)$$

Отличие этого предела от (5.1) состоит в том, что в данном случае к нулю устремляется диаметр разбиения  $d(\tau)$  плоских элементарных множеств  $G_i$ , который, согласно определению, находится как

$$d(\tau) = \max_{i=\overline{1, k}} d(G_i) = \max_{i=\overline{1, k}} \left( \sup_{P_i, P'_i \in G_i} \rho(P_i, P'_i) \right), \quad (5.3)$$

где  $\rho(P_i, P'_i)$  – расстояние от точки  $P_i$  до точки  $P'_i$  из множества  $G_i$ . Так как в пространстве  $\mathbb{R}^2$  расстояние между двумя точками  $P_i(x_i, y_i)$  и  $P'_i(x'_i, y'_i)$  находится как

$$\rho(P_i, P'_i) = \sqrt{(x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2}, \quad (5.4)$$

то, положив

$$d_x = d_x(\tau_k) = \max_{i=\overline{1, k}} (\sup |x_i - x'_i|), \quad d_y = d_y(\tau_k) = \max_{i=\overline{1, k}} (\sup |y_i - y'_i|), \quad (5.5)$$

можно считать эквивалентными условия

$$d(\tau_k) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d_x(\tau_k) \rightarrow 0, \\ d_y(\tau_k) \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

С учетом этого наряду с двойным пределом

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i) m(G_i) = \lim_{\substack{d_x \rightarrow 0 \\ d_y \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i) m(G_i) \quad (5.7)$$

можно рассмотреть повторные пределы в одном или другом порядках:

$$\lim_{d_x \rightarrow 0} \left[ \lim_{d_y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i) m(G_i) \right], \quad (5.8)$$

$$\lim_{d_y \rightarrow 0} \left[ \lim_{d_x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i) m(G_i) \right], \quad (5.9)$$

и установить связь между ними в терминах двойных и повторных интегралов.

## 5.2. Двойной и повторные интегралы по клеточному компакт — прямоугольнику

По аналогии с одномерным интегралом Римана (5.1) по отрезку  $[a, b]$ , представляющему собой одномерный компакт, изучение свойств двойного интеграла (5.2) также начнем с интегрирования по двумерному клеточному компакт  $K \subset \mathbb{R}^2$ . Пусть  $f(x, y)$  интегрируема на компакте

$$K = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq e\}, \quad (5.10)$$

т. е. на прямоугольнике  $[a, b] \times [c, e]$  плоскости  $(x, y)$ , вследствие чего она ограничена на этом компакте.

Для составления интегральной суммы функции  $f(x, y)$  на прямоугольнике  $K = [a, b] \times [c, e]$ , аналогичной (5.7), воспользуемся его разбиением с помощью произвольных разбиений  $\tau_x$  отрезка  $[a, b]$  и  $\tau_y$  отрезка  $[c, e]$  точками

$$\tau_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b, \quad \tau_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_l = e. \quad (5.11)$$

Соответствующие промежутки разбиения обозначим через

$$[\Delta x]_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, k}; \quad [\Delta y]_j = [y_{j-1}, y_j], \quad j = \overline{1, l}, \quad (5.12)$$

а их длины через

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1, k}; \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad j = \overline{1, l} \quad (5.13)$$

соответственно.

Теперь, проведя через точки (5.11) прямые  $x = x_i, i = \overline{1, k}$  и  $y = y_j, j = \overline{1, l}$ , получим разбиение  $\tau_{kl}$  компакта  $K$  на элементарные клетки

$$\tau : K_{ij} = [\Delta x]_i \times [\Delta y]_j, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (5.14)$$

объединение которых и составляет компакт

$$K = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^l K_{ij}. \quad (5.15)$$

Поскольку мера элементарной клетки определяется равенством

$$m(K_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j, \quad (5.16)$$

то интегральная сумма функции  $f(x, y)$  при выборке  $\vec{\xi}: (\xi_i, \eta_j) \in K_{ij}$  имеет вид

$$S(f, \tau_{kl}, \vec{\xi}(\tau_{kl})) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \quad (5.17)$$

и ограничена

$$\underline{S}(f, \tau_{kl}) \leq S(f, \tau_{kl}, \vec{\xi}(\tau_{kl})) \leq \overline{S}(f, \tau_{kl}), \quad (5.18)$$

нижней и верхней суммами Дарбу:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \tau_{kl}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \underline{M}_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, & \underline{M}_{ij} &= \inf_{(x,y) \in K_{ij}} f(x, y); \\ \overline{S}(f, \tau_{kl}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \overline{M}_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, & \overline{M}_{ij} &= \sup_{(x,y) \in K_{ij}} f(x, y). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Предельный переход в (5.18) дает оценку

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \underline{S}(f, \tau_{kl}) \leq \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} S(f, \tau_{kl}, \vec{\xi}(\tau_{kl})) \leq \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \overline{S}(f, \tau_{kl}). \quad (5.20)$$

Функция  $f(x, y)$  интегрируема на компакте  $K$ , поэтому, согласно (3.9), справедливо равенство

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} S(f, \tau_{kl}, \vec{\xi}(\tau_{kl})) = \iint_K f(x, y) dx dy. \quad (5.21)$$

Выразим двойной предел (5.21) через повторные пределы (см. [17]):

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ d_x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^k \left( \lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ d_y \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^l f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i. \quad (5.22)$$

Для его внутреннего предела сумму

$$\sum_{j=1}^l f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j = F(\xi_i) \quad (5.23)$$

можно рассматривать как интегральную сумму функции  $f(x, y)$  для разбиения  $\tau_y$  (5.11) отрезка  $[c, e]$  с соответствующей выборкой  $\eta$ . В силу ограниченности функции  $f(x, y)$  на компакте (5.10) функция  $F(x)$  ограничена своими нижней и верхней суммами Дарбу, а ее предел, соответственно, нижним и верхним интегралами Дарбу:

$$\underline{I}(x) \leq F(x) \leq \overline{I}(x). \quad (5.24)$$

Тогда внешний предел (5.22) можно рассматривать как предел интегральной суммы функции  $F(x)$  при разбиении  $\tau_x$  (5.11) на отрезке  $[a, b]$  с соответствующей выборкой  $\xi$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k F(\xi_i) \Delta x_i. \quad (5.25)$$

Существование внутреннего предела в повторном (5.22) при условии существования двойного (5.21) означает существование внешнего (5.25) как интеграла Римана, равного двойному (5.21), т. е.

$$\int_a^b F(x) dx = \iint_K f(x, y) dx dy. \quad (5.26)$$

Если теперь в повторном пределе (5.22) изменить порядок, то для внутреннего предела сумму

$$\sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i = \Phi(\eta_j) \quad (5.27)$$

можно рассматривать как интегральную сумму функции  $f(x, y)$  для разбиения  $\tau_x$  (5.11) отрезка  $[a, b]$  с соответствующей выборкой  $\xi$ . Предел интегральной суммы (5.27) ограничен нижним и верхним интегралами Дарбу:

$$\underline{J}(y) \leq \Phi(y) \leq \bar{J}(y). \quad (5.28)$$

Тогда предел интегральной суммы

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l \Phi(\eta_j) \Delta y_j \quad (5.29)$$

представляет собой интеграл Римана, равный двойному, т. е.

$$\int_c^e \Phi(y) dy = \iint_K f(x, y) dx dy. \quad (5.30)$$

Объединив формулы (5.26) и (5.30), придем к равенствам

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_c^e \Phi(y) dy.$$

Метод повторных пределов в более детальной и корректной формулировке приводит к следующему утверждению для двойного интеграла.

**Теорема 5.1 (теорема Фубини для двойного интеграла).** Пусть функция  $f(x, y)$  интегрируема на клеточном компакте  $K$  – прямоугольнике  $[a, b] \times [c, d]$ , а  $\underline{I}(x)$  и  $\bar{I}(x)$  – ее нижний и верхний интегралы Дарбу на отрезке  $[c, e]$ , представляющем проекцию компакта на ось  $Oy$ ; соответственно,  $\underline{J}(y)$  и  $\bar{J}(y)$  – ее нижний и верхний интегралы Дарбу на отрезке  $[a, b]$  – проекции

компакта на ось  $Ox$ . Если  $F(x)$  и  $\Phi(y)$  – функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\underline{I}(x) \leq F(x) \leq \bar{I}(x), \quad (5.31a)$$

$$\underline{J}(y) \leq \Phi(y) \leq \bar{J}(y), \quad (5.31б)$$

то справедливы равенства

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_c^e \Phi(y) dy. \quad (5.32)$$

◆ Интегралы

$$\int_a^b F(x) dx, \quad \int_c^e \Phi(y) dy \quad (5.33)$$

в равенствах (5.32) называются *повторными интегралами* функции  $f(x, y)$ .

Равенствами (5.32) теорема Фубини позволяет формально понизить кратность исходного интеграла, т. е. свести двумерный интеграл (5.21) к повторным (5.33). Разумеется, формулы (5.32) не являются практическим методом в силу наличия оценок (5.31). Однако в тех случаях, когда, например, в оценке (5.31a) нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают, функцию  $F(x)$  также можно записать в виде интеграла Римана от функции  $f(x, y)$ :

$$\underline{I}(x) = \bar{I}(x) = F(x) = \int_a^b f(x, y) dy,$$

по переменной  $y$ , считая переменную  $x$  постоянной. Тогда двойной интеграл, согласно (5.32), можно записать повторным интегралом:

$$\iint_{[a,b] \times [c,e]} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^e f(x, y) dy. \quad (5.34)$$

Соотношение (5.34) позволяет конструктивно вычислять двойные интегралы.

Аналогично при совпадении нижнего и верхнего интегралов Дарбу в оценке (5.31б) функцию  $\Phi(y)$  также можно представить интегралом Римана от функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$  в предположении, что переменная  $y$  постоянна:

$$\underline{J}(y) = \bar{J}(y) = \Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (5.35)$$

В этом случае двойной интеграл (5.32) можно записать повторным интегралом с другим порядком интегрирования:

$$\iint_{[a,b] \times [c,e]} f(x, y) dx dy = \int_c^e dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad (5.36)$$



Если существуют оба повторных интеграла, (5.34) и (5.36), то двойной интеграл (5.32) можно представить одновременно двумя повторными интегралами с разными порядками интегрирования:

$$\iint_{[a,b] \times [c,e]} f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^e f(x,y) dy = \int_c^e dy \int_a^b f(x,y) dx. \quad (5.37)$$

Это позволяет изменять порядок интегрирования, выбрав тот, при котором последовательное применение формулы Ньютона–Лейбница для внутреннего, а затем внешнего интегралов приводит к конечному результату наиболее просто.

Прежде чем привести примеры, иллюстрирующие вычисление двойных интегралов по формуле (5.37), отметим, что эти формулы можно рассматривать не только как следствие теоремы Фубини. Действительно, не обращаясь к теореме Фубини, можно показать, что формулы (5.37) являются прямым следствием аддитивных свойств римановых интегралов.

**Теорема 5.2.** Если функция  $f(x,y)$  интегрируема на клеточном компакте – прямоугольнике

$$K = \{(x,y) : [a,b] \times [c,e]\}$$

и при любом постоянном  $x \in [a,b]$  существует интеграл

$$F(x) = \int_c^e f(x,y) dy, \quad (5.38)$$

то интеграл (5.38) есть функция  $F(x)$ , интегрируемая на отрезке  $[a,b]$ , и справедлива формула

$$\iint_K f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^e f(x,y) dy. \quad (5.39)$$

**Доказательство.** Воспользуемся введенными выше (5.11)–(5.15) разбиениями  $\tau_x, \tau_y, \tau$  отрезков  $[a,b]$ ,  $[c,e]$  и компакта  $K$  (рис. 18), а также обозначениями (5.19) для нижней  $\underline{M}_{ij}$  и верхней  $\overline{M}_{ij}$  граней функции  $f(x,y)$  на элементарной клетке  $K_{ij}$ . Тогда для всех точек  $(x,y) \in K_{ij}$  выполняется неравенство

$$\underline{M}_{ij} \leq f(x,y) \leq \overline{M}_{ij}, \quad (x,y) \in K_{ij}, \quad i = \overline{1,k}, j = \overline{1,l}. \quad (5.40)$$

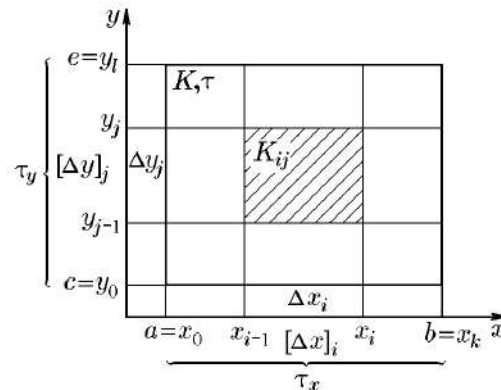


Рис. 18. Разбиение компакта  $K$

Так как в силу условия (5.38) теоремы для любого  $x \in [a, b]$  функция  $f(x, y)$  интегрируема на  $[c, e]$ , то интегрирование (5.40) на отрезке  $[y_{j-1}, y_j] \in [c, e]$  приводит к совокупности неравенств:

$$\underline{M}_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq \overline{M}_{ij} \Delta y_j; \quad (5.41)$$

$$i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, l};$$

$$\tau_x: [a, b] = \bigcup_{i=1}^k [\Delta x]_i, \quad [\Delta x]_i = [x_{i-1}, x_i], \quad m([\Delta x]_i) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \quad i = \overline{1, k};$$

$$\tau_y: [c, d] = \bigcup_{j=1}^l [\Delta y]_j, \quad [\Delta y]_j = [y_{j-1}, y_j], \quad m([\Delta y]_j) = y_j - y_{j-1} = \Delta y_j, \quad j = \overline{1, l};$$

$$\tau: \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^l K_{ij}, \quad K_{ij} = [\Delta x]_i \times [\Delta y]_j, \quad m(K_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j.$$

Просуммировав в неравенствах (5.41) по индексу  $j$  с учетом свойства аддитивности интеграла Римана, получим оценки

$$\sum_{j=1}^l \underline{M}_{ij} \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^l \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq \int_c^d f(x, y) dy \leq \sum_{j=1}^l \overline{M}_{ij} \Delta y_j, \quad i = \overline{1, k}. \quad (5.42)$$

Используя обозначения (5.38), их можно записать как

$$\sum_{j=1}^l \underline{M}_{ij} \Delta y_j \leq F(x) \leq \sum_{j=1}^l \overline{M}_{ij} \Delta y_j, \quad i = \overline{1, k}. \quad (5.43)$$

Положив

$$\underline{M}_i = \sup_{x \in [\Delta x]_i} F(x), \quad \overline{M}_i = \inf_{x \in [\Delta x]_i} F(x), \quad i = \overline{1, k},$$

с помощью неравенств

$$\underline{M}_i \leq \overline{M}_i, \quad i = \overline{1, k},$$

в силу (5.43), имеем

$$\sum_{j=1}^l \underline{M}_{ij} \Delta y_j \leq \underline{M}_i \leq \overline{M}_i \leq \sum_{j=1}^l \overline{M}_{ij} \Delta y_j, \quad i = \overline{1, k},$$

и, соответственно,

$$0 \leq \overline{M}_i - \underline{M}_i \leq \sum_{j=1}^l (\overline{M}_{ij} - \underline{M}_{ij}) \Delta y_j, \quad i = \overline{1, k}.$$

Умножив эти неравенства на  $\Delta x_i$  и просуммировав их по индексу  $i = \overline{1, k}$ , получим оценку

$$0 \leq \sum_{i=1}^k (\overline{M}_i - \underline{M}_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\overline{M}_{ij} - \underline{M}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Эту оценку можно записать в терминах сумм Дарбу как для функции  $F(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с разбиением  $\tau_x$ , так и для функции  $f(x, y)$  на компакте  $K$  с разбиением  $\tau$  и мерой  $m(K_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$ :

$$0 \leq \overline{S}(F, \tau_x) - \underline{S}(F, \tau_x) \leq \overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau). \quad (5.44)$$

Так как функция  $f(x, y)$  интегрируема на  $K$ , то

$$\overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau) \rightarrow 0 \text{ при } d(\tau) \rightarrow 0,$$

а поскольку условие  $d(\tau) \rightarrow 0$  означает и  $d(\tau_x) \rightarrow 0$ , то, в силу (5.44),

$$\overline{S}(F, \tau_x) - \underline{S}(F, \tau_x) \rightarrow 0 \text{ при } d(\tau_x) \rightarrow 0.$$

А это и означает существование повторного интеграла

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^e f(x, y) dy.$$

Осталось показать, что этот повторный интеграл совпадает с двойным. Для этого вернемся к неравенствам (5.42), которые проинтегрируем по переменной  $x$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \underline{M}_{ij} \Delta y_j \Delta x_i &= \sum_{j=1}^l \underline{M}_{ij} \Delta y_j \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_c^d f(x, y) dy \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^l \overline{M}_{ij} \Delta y_j \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \sum_{j=1}^l \overline{M}_{ij} \Delta y_j \Delta x_i, \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned}$$

и просуммируем по индексу  $i = \overline{1, k}$ :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \underline{M}_{ij} \Delta y_j \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_c^d f(x, y) dy \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \overline{M}_{ij} \Delta y_j \Delta x_i.$$

Отсюда в силу аддитивности интеграла Римана имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \underline{M}_{ij} \Delta y_j \Delta x_i \leq \int_a^b dx \int_c^e f(x, y) dy \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \overline{M}_{ij} \Delta y_j \Delta x_i.$$

Если это неравенство записать в терминах сумм Дарбу для функции  $f(x, y)$  на компакте  $K$  с разбиением  $\tau$

$$\underline{S}(f, \tau) \leq \int_a^b dx \int_c^e f(x, y) dy \leq \overline{S}(f, \tau)$$

и учесть, что при  $d(\tau) \rightarrow 0$

$$\underline{S}(f, \tau) \rightarrow \overline{S}(f, \tau) \rightarrow \iint_K f(x, y) dx dy,$$

то придем к равенству

$$\int_a^b dx \int_c^e f(x, y) dy = \iint_K f(x, y) dx dy,$$

что и требовалось доказать.

Как и для теоремы Фубини, из теоремы 5.2 вытекает очевидное и совпадающее с (5.37) следствие.

**Следствие 5.2.1.** Если условия теоремы 5.2 дополнить условием существования интеграла

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (5.45)$$

при любом постоянном  $y \in [c, e]$ , то двойной интеграл (5.39) можно представить одновременно двумя повторными интегралами с разными порядками интегрирования:

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^e f(x, y) dy = \int_c^e dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (5.46)$$

Эта формула повторяет формулу (5.37), вытекающую из теоремы Фубини.

Из объединения следствия 5.2.1 с теоремой 3.3 вытекает теорема, полезная для вычисления двойных интегралов на произвольном жордановом множестве.

**Теорема 5.3.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на клеточном компакте  $K$  – прямоугольнике  $[a, b] \times [c, e]$ , то для нее справедливы формулы (5.46).

**Пример 5.1.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_K (x^2 + y^2) dx dy$$

на прямоугольнике  $K = \{(x, y) : [1, 2] \times [1, 3]\}$ .

**Решение.** Этот интеграл уже рассматривался в примере 3.1 и был вычислен там с помощью сумм Дарбу подынтегральной функции разбиением  $\tau$  компакта  $K$  на элементарные клетки  $K_{ij}$ . Теперь этот же интеграл мы вычислим еще двумя способами: сначала с помощью теоремы Фубини, а затем с помощью теоремы 5.3 об интегрировании непрерывных функций.

*1-й способ.* Чтобы использовать формулу (5.32) теоремы Фубини, необходимо при любом постоянном значении  $y$  найти величину  $\Phi(y)$ , удовлетворяющую оценке (5.31, б). Для простоты (и оценка (5.31, б) это позволяет) найдем нижний интеграл Дарбу функции  $(x^2 + y^2)$ , проведя разбиение  $\tau_x$  отрезка  $[1, 2] \subset \mathbb{R}_x$  точками

$$1 = x_0, x_1 = 1 + \frac{1}{k}, \dots, x_i = 1 + \frac{i}{k}, \dots, x_k = 2, \quad i = \overline{0, k}$$

на  $k$  равных отрезков длиной  $(2 - 1)/k = 1/k$ . Функция  $(x^2 + y^2)$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  принимает наименьшее значение на левой границе, т. е. в точке  $x_i = 1 + 1/k$ ,  $k = \overline{0, k - 1}$ . Таким образом,

$$\underline{M}_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (x^2 + y^2) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 + y^2, \quad i = \overline{0, k - 1},$$

и, соответственно, нижняя сумма Дарбу

$$\begin{aligned}\underline{S}(x^2 + y^2, \tau_x) &= \sum_{i=0}^{k-1} M_i \frac{1}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left[ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 + y^2 \right] \frac{1}{k} = \\ &= \frac{1}{k} \left\{ (1 + y^2) \sum_{i=0}^{k-1} 1 + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} i + \frac{1}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \right\}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (5.16) для этих трех сумм, получим

$$\begin{aligned}\underline{S}(x^2 + y^2, \tau_x) &= \frac{1}{k} \left\{ (1 + y^2)k + \frac{2(k-1)k}{2} + \frac{1}{k^2} \frac{(k-1)(2k-1)}{6} \right\} = \\ &= y^2 + \frac{(2k-1)(7k-1)}{6k^2},\end{aligned}$$

тогда

$$\Phi(y) = \underline{I}(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{S}(x^2 + y^2, \tau_x) = y^2 + \frac{7}{3}.$$

Теперь, следуя формуле (5.32), найдем значение двойного интеграла:

$$\iint_K (x^2 + y^2) dx dy = \int_1^3 \left( y^2 + \frac{7}{3} \right) dy = \frac{y^3}{3} \Big|_1^3 + \frac{7}{3} y \Big|_1^3 = \frac{1}{3}(27-1) + \frac{7}{3}(3-1) = \frac{40}{3}.$$

Этот же результат был получен в примере 3.1.

*2-й способ.* Подынтегральная функция непрерывна, поэтому в силу теоремы 5.3 можно воспользоваться соотношением (5.46), согласно которому

$$\iint_K (x^2 + y^2) dx dy = \int_1^3 dy \int_1^2 (x^2 + y^2) dx.$$

Вычислим внутренний интеграл по переменной  $x$ , считая  $y$  постоянной, по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\begin{aligned}\iint_K (x^2 + y^2) dx dy &= \int_1^3 dy \left( \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + y^2 x \Big|_1^2 \right) = \int_1^3 \left[ \frac{1}{3}(8-1) + y^2(2-1) \right] dy = \\ &= \int_1^3 \left( \frac{7}{3} + y^2 \right) dy = \frac{7}{3} y \Big|_1^3 + \frac{y^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{14}{3} + \frac{26}{3} = \frac{40}{3}.\end{aligned}$$

Интегрирование в другом порядке даст тот же результат:

$$\begin{aligned}\iint_K (x^2 + y^2) dx dy &= \int_1^2 dx \int_1^3 (x^2 + y^2) dy = \int_1^2 dx \left( x^2 y \Big|_1^3 + \frac{y^3}{3} \Big|_1^3 \right) = \\ &= \int_1^2 \left( 2x^2 + \frac{1}{3} \cdot 26 \right) dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + \frac{26}{3} x \Big|_1^2 = \frac{14}{3} + \frac{26}{3} = \frac{40}{3}.\end{aligned}$$

**Пример 5.2.** На клеточном компакте  $K = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 0\}$  вычислить интегралы:

$$I_1 = \iint_K xy \, dx \, dy, \quad I_2 = \iint_K \frac{y \, dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

**Решение.** Интеграл  $I_1$  уже рассматривался в примере 3.2 и был вычислен там с помощью сумм Дарбу подынтегральной функции разбиением  $\tau$  компакта  $K$  на элементарные клетки  $K_{ij}$ . Теперь этот же интеграл мы вычислим, используя непрерывность интегрируемой функции на этом компакте. В этом случае можно воспользоваться одной из формул (5.46), которые здесь просто совпадают и представляют, по сути, одну формулу в виде обычного произведения двух одномерных римановых интегралов:

$$\iint_K xy \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_0^1 y \, dy = \int_0^1 y \, dy \cdot \int_0^1 x \, dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Вычисление интеграла  $I_2$  с помощью сумм Дарбу является весьма трудоемкой задачей, поэтому мы воспользуемся непрерывностью подынтегральной функции и формулами (5.46). В отличие от предыдущего интеграла выбор порядка интегрирования здесь имеет значение, поскольку определяет наиболее простой способ нахождения первообразных в каждом из интегралов. Начнем с порядка интегрирования

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}},$$

позволяющего сразу воспользоваться внесением под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} d(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} = - \int_0^1 dx \left( \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right)\Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| \Big|_0^1 - \ln |x + \sqrt{2 + x^2}| \Big|_0^1 = \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(1 + \sqrt{3}) + \ln \sqrt{2} = \ln \frac{(1 + \sqrt{2})\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Другой порядок интегрирования:

$$I_2 = \int_0^1 y \, dy \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (5.48)$$

– приводит к более сложным квадратурам. Так, для внутреннего интеграла, обозначив

$$1 + y^2 = a^2, \quad (5.49)$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2|x|(1+a^2/x^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{1}{2a^2 \operatorname{sign} x} \int_0^1 \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{-3/2} d\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) = -\frac{1}{2a^2 \operatorname{sign} x} \frac{(1+a^2/x^2)^{-1/2}}{-1/2} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2+1}}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (5.48) и учтя (5.49), приходим к интегралу

$$\int_0^1 \frac{y dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}},$$

который с помощью замены

$$2+y^2=t^2, \quad y dy = t dt, \quad y_1=0, \quad t_1=\sqrt{2}; \quad y_2=1, \quad t_2=\sqrt{3},$$

примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{y dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t dt}{(t^2-1)t} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}. \end{aligned}$$

Этот результат легко привести к виду (5.47), полученном при другом порядке интегрирования. Действительно, после тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} &= \frac{1}{2} \ln \frac{(3-1)(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2(2-1)} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}+1} \right)^2 = \ln \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}+1} = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

– приходим к значению (5.47).

Теперь от двойных интегралов перейдем к интегралам произвольной кратности.

### 5.3. Кратные и повторные интегралы по клеточному компакту произвольной размерности

Теорема Фубини и следствия из нее, сформулированные для двойного интеграла, допускают обобщение на случай интегралов произвольной кратности.

В пространстве размерности  $n$ ,  $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим клеточный компакт

$$K = \{\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i; \quad i = \overline{1, n}\}. \quad (5.50)$$

Через  $K_x$  обозначим проекцию компакта  $K$  на координатное подпространство точек  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ :

$$K_x = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : a_i \leq x_i \leq b_i; i = \overline{1, m}\}, \quad (5.51)$$

а через  $K_y$  – проекцию компакта  $K$  на координатное подпространство:

$$K_y = \{\vec{y} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i; i = \overline{m+1, n}\}. \quad (5.52)$$

Для удобства сравнений с двумерными интегралами, где отрезки  $[a, b]$  и  $[c, d]$  представляют собой ортогональные проекции компакта (прямоугольника)  $K$  на координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$ , т. е.  $K_x$ ,  $K_y$  соответственно, и  $K = [a, b] \times [c, d] = K_x \times K_y$ , а  $\vec{r} = (x, y)$  и  $f(\vec{r}) = f(x, y)$ , будем писать для (5.50)–(5.52) в  $\mathbb{R}^n$

$$K = K_x \times K_y, \quad \vec{r} = (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{r}) = f(\vec{x}, \vec{y}). \quad (5.53)$$

С учетом этого и следуя схеме, которая привела к теореме Фубини для двойного интеграла, приходим к следующему утверждению для  $n$ -кратного интеграла.

**Теорема 5.4 (теорема Фубини – общий случай).** Пусть функция  $f(\vec{x}, \vec{y})$  интегрируема на компакте  $K = K_x \times K_y$  (5.50), а  $\underline{I}(\vec{x})$  и  $\overline{I}(\vec{x})$  – ее нижний и верхний интегралы Дарбу на компакте  $K_y$ ; соответственно,  $\underline{J}(\vec{y})$  и  $\overline{J}(\vec{y})$  – ее нижний и верхний интегралы Дарбу на компакте  $K_x$  (5.51). Если  $F(\vec{x})$  и  $\Phi(\vec{y})$  – функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\underline{I}(\vec{x}) \leq F(\vec{x}) \leq \overline{I}(\vec{x}), \quad (5.54a)$$

$$\underline{J}(\vec{y}) \leq \Phi(\vec{y}) \leq \overline{J}(\vec{y}), \quad (5.54b)$$

то справедливы равенства

$$\int_K \dots \int f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{K=K_x \times K_y} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \int_{K_x} \dots \int F(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{K_y} \dots \int \Phi(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (5.55)$$

◆ Интегралы

$$\int_{K_x} \dots \int F(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \int_{K_y} \dots \int \Phi(\vec{y}) d\vec{y} \quad (5.56)$$

в равенствах (5.55) называются *повторными интегралами* функции  $f(\vec{r}) = f(\vec{x}, \vec{y})$ .

Равенствами (5.55) теорема Фубини позволяет формально понизить кратность исходного интеграла, т. е. свести его к повторным (5.56) кратности  $m < n$  или  $(n - m)$ . Конечно, формулы (5.55) не дают практического способа вычисления кратных интегралов, поскольку необходимым условием их использования является выполнение оценок (5.54). Однако в тех случаях, когда, например, в оценке (5.54a) нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают, функцию  $F(\vec{x})$  также можно записать интегралом Римана от функции  $f(\vec{x}, \vec{y})$  по компакту  $K_y$ :

$$\underline{I}(\vec{x}) = \overline{I}(\vec{x}) = F(\vec{x}) = \int_{K_y} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}, \quad (5.57)$$

считая переменную  $\vec{x}$  постоянной. Тогда  $n$ -кратный интеграл, согласно (5.55), можно записать в виде повторного интеграла:

$$\int_K \dots \int f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{K=K_x \times K_y} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \int_{K_x} \dots \int d\vec{x} \int_{K_y} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}. \quad (5.58)$$



Аналогично при совпадении нижнего и верхнего интегралов Дарбу в оценке (5.54б) функцию  $\Phi(\vec{y})$  также можно записать интегралом Римана от функции  $f(\vec{x}, \vec{y})$  по компакту  $K_x$ :

$$\underline{J}(\vec{y}) = \bar{J}(\vec{y}) = \Phi(\vec{y}) = \int_{K_x} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}, \quad (5.59)$$

считая переменные  $\vec{y} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$  постоянными. В этом случае  $n$ -кратный интеграл (5.55) можно записать в виде повторного интеграла с другим порядком интегрирования:

$$\int_K \dots \int f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{K=K_x \times K_y} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \int_{K_y} \dots \int d\vec{y} \int_{K_x} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}. \quad (5.60)$$

Если существуют оба повторных интеграла (5.58) и (5.60), то  $n$ -кратный интеграл (5.55) можно представить одновременно двумя повторными интегралами с разными порядками интегрирования:

$$\int_{K=K_x \times K_y} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \int_{K_x} \dots \int d\vec{x} \int_{K_y} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} = \int_{K_y} \dots \int d\vec{y} \int_{K_x} \dots \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}. \quad (5.61)$$

Это позволяет изменять порядок интегрирования, выбрав тот, который приводит к конечному результату наиболее простым способом.

Формулы (5.58), (5.60) и (5.61), как для двумерных интегралов, можно получить, исходя из аддитивных свойств римановых интегралов, как это было сделано при доказательстве теоремы 5.2. Вместе с этим справедлива теорема, обобщающая результаты теоремы 5.3.

**Теорема 5.5.** Если функция  $f(\vec{r}) = f(\vec{x}, \vec{y})$  непрерывна на клеточных компактах (5.50)–(5.52), то для нее справедлива формула (5.61).

Действительно, из непрерывности функции  $f(\vec{x}, \vec{y})$  вытекает ее интегрируемость на каждом из компактов  $K_x$ ,  $K_y$  и  $K = K_x \times K_y$  отдельно и, следовательно, справедливость формулы (5.61).

Фигурирующие в (5.61) кратные интегралы по  $K_x$  и  $K_y$  по возможности могут быть представлены своими повторными интегралами еще меньшей кратности. Последовательное применение теоремы 5.4 к повторным интегралам (5.61) приводит к следующему утверждению.

**Теорема 5.6.** Пусть функция  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  интегрируема не только на клеточном компакте

$$K = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (5.62)$$

но и на всех его проекциях  $K^s$  на координатные подпространства

$$\vec{y}^s = (x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n), \quad s = \overline{1, n-1}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_K \dots \int f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_K \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n. \quad (5.63)$$

**Доказательство.** Действительно, последовательное применение теоремы 5.4 с учетом  $\vec{y}^{n-1} = (x_n)$ ,  $K^{n-1} = [a_n, b_n]$  дает

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_K f(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int \cdots \int_{K^1} f(x_1, \vec{y}^1) d\vec{y}^1 = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int \cdots \int_{K^2} f(x_1, x_2, \vec{y}^2) d\vec{y}^2 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned} \quad (5.64)$$

**Пример 5.3.** Вычислить интегралы

$$I = \int \cdots \int_K f(\vec{x}) d\vec{x}$$

от функций

$$1) f_1(\vec{x}) = x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2); \quad 2) f_2(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

по единичному четырехмерному кубу

$$K = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, 4}\}. \quad (5.65)$$

**Решение.** Четырехмерный куб (5.65) представляет собой четырехмерный клеточный компакт, на котором функции  $f_1(\vec{x})$  и  $f_2(\vec{x})$  непрерывны. Условия теоремы 5.6 выполнены, поэтому для каждой из функций можно воспользоваться формулой (5.64):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cdots \int_K f_1(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_K x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2) dx_4. \end{aligned}$$

Поскольку при интегрировании по одной переменной другие переменные считаются постоянными, то

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^1 x_2 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 (x_3^2 + x_4^2) dx_4 = \\ &= \left(\frac{x_1^2}{2} \Big|_0^1\right) \left(\frac{x_2^2}{2} \Big|_0^1\right) \int_0^1 dx_3 \left[ x_3^2 \left(x_4 \Big|_0^1\right) + \left(\frac{x_4^3}{3} \Big|_0^1\right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(x_3^2 + \frac{1}{3}\right) dx_3 = \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{x_3^3}{3} \Big|_0^1\right) + \frac{1}{3} \left(x_3 \Big|_0^1\right) \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$I_2 = \int \cdots \int_K f_2(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_K (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_4.$$

Использование приема внесения под знак дифференциала дает

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) d(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \frac{1}{2} [(x_1 + x_2 + x_3 + 1)^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2] = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 \left(x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}\right) d\left(x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{1}{2} \left(x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}\right)^2 \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{1}{2} \left[\left(x_1 + x_2 + 1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\right)^2\right] = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 (x_1 + x_2 + 1) d(x_1 + x_2 + 1) = \int_0^1 dx_1 \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + 1)^2 \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 dx_1 \frac{1}{2} [(x_1 + 1 + 1)^2 - (x_1 + 1)^2] = \int_0^1 \left(x_1 + \frac{3}{2}\right) d\left(x_1 + \frac{3}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2. \end{aligned}$$

Рассмотренные примеры иллюстрируют возможность вычислять кратные интегралы путем последовательного интегрирования по каждой переменной в отдельности, правда, пока лишь на клеточном компакте. Рассмотрим возможность перехода от клеточного компакта к произвольному измеримому множеству.

#### 5.4. Кратные и повторные интегралы по произвольным жордановым множествам

Пусть  $G$  – ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ , а  $E_1$  – его проекция на ось  $Ox_1$ . Если  $G$  – область, то  $E_1$  будет интервалом, если же  $\overline{G}$  – компакт с краем  $\partial G$ , то  $\overline{E_1} = [a, b]$  – отрезок оси  $Ox_1$ , где

$$a_1 = \min_{\vec{x} \in G} x_1, \quad b_1 = \max_{\vec{x} \in G} x_1.$$

Обозначим через  $\overline{G}(c_1) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  сечение  $\overline{G}$  координатной плоскостью  $x_1 = c_1$ ,  $c_1 \in [a_1, b_1]$ , т. е. множество точек  $(c_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{G}$ . В рамках таких построений справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.7.** Если функция  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  интегрируема на измеримом компакте  $\bar{G} = G \cup \partial G$  и его сечения  $\bar{G}(x_1)$  для любого  $x_1 \in \bar{E}$ , где  $E_1$  – проекция  $\bar{G}$  на ось  $Ox_1$ , то выполняется равенство

$$\int_G \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\bar{E}_1} dx_1 \int_{\bar{G}(x_1)} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n. \quad (5.66)$$

**Доказательство.** Поместим  $G$  в некоторый  $n$ -мерный компакт  $K = [a_1, b_1] \times K_1$ , где  $(n-1)$ -мерное клеточное множество  $K_1 = \{a_j \leq x_j \leq b_j, j = \overline{2, n}\}$ . Это возможно, потому что  $G$  измеримо и, следовательно, конечно. Продолжим  $f(\vec{x})$  с  $G$  на  $K$ , положив

$$\mathcal{F}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \vec{x} \in G, \\ 0, & \vec{x} \in K \setminus G. \end{cases} \quad (5.67)$$

Так как функция  $\mathcal{F}(\vec{x})$  интегрируема на  $\bar{G}$  и  $K \setminus \bar{G}$ , существует кратный интеграл

$$\int_K \dots \int \mathcal{F}(\vec{x}) d\vec{x},$$

причем в силу свойства аддитивности и (5.67) выполняется равенство

$$\int_G \dots \int f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_K \dots \int \mathcal{F}(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (5.68)$$

Интеграл в правой части (5.68) удовлетворяет условиям теоремы 5.4, и, следовательно, согласно (5.61),

$$\int_K \dots \int \mathcal{F}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{K_1} \dots \int \mathcal{F}(\vec{x}) dx_2 dx_3 \dots dx_n.$$

Поскольку  $\bar{E}_1$  измеримо, а  $\mathcal{F}(\vec{x}) = 0$  для  $x_1 \notin E_1$  и для  $x_1 \in E_1$ , когда  $(x_2, x_3, \dots, x_n) \notin G(x_1)$ , то приходим к утверждению (5.66):

$$\int_G \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\bar{E}_1} dx_1 \int_{\bar{G}(x_1)} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

**Следствие 5.7.1.** Если внутренний интеграл (5.66) также удовлетворяет условиям теоремы 5.7, то справедливо равенство

$$\int_G \dots \int f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\bar{E}_1} dx_1 \int_{\bar{E}_2(x_1)} dx_2 \int_{\bar{G}(x_1, x_2)} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n, \quad (5.69)$$

где  $\bar{E}_2(x_1)$  – проекция сечения  $\bar{G}(x_1)$  на ось  $Ox_2$ , а  $\bar{G}(x_1, c_2)$  – сечение  $(n-1)$ -мерного множества  $\bar{G}(x_1)$  координатной плоскостью  $x_2 = c_2$ .

**Следствие 5.7.2.** Если все внутренние интегралы при последовательном применении формулы (5.69) удовлетворяют условиям теоремы 5.7, то справедливо равенство

$$\int_{\overline{G}} \dots \int f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\overline{E}_1} dx_1 \int_{\overline{E}_2(x_1)} dx_2 \int_{\overline{E}_3(x_1, x_2)} dx_3 \cdots \int_{\overline{E}_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n, \quad (5.70)$$

где  $\overline{E}_1, \overline{E}_2(x_1), \dots, \overline{E}_n(x_1, \dots, x_{n-1})$  – одномерные проекции множества  $\overline{G}$  на координатные оси  $Ox_n$  и его сечений координатными плоскостями  $x_j = c_j, j = \overline{2, n}$ .

**Следствие 5.7.3.** Если функция  $f(\vec{x})$  ограничена и непрерывна на жордановом множестве  $\overline{G}$ , то для нее справедлива формула (5.70).

Действительно, для ограниченных и непрерывных на  $\overline{G}$  функций условия предыдущего следствия соблюдены и, следовательно, выполняется равенство (5.70).

Формула (5.70) является основой практики вычислений кратных интегралов, позволяя сводить их к последовательному интегрированию по каждой переменной в отдельности. Поскольку при вычислении интеграла по соответствующей переменной другие переменные считаются постоянными, то это позволяет использовать все методы и способы вычисления неопределенных интегралов для функции одной переменной. С другой стороны, так как каждое интегрирование ведется по одномерному множеству  $\overline{E}_i, i = \overline{1, n}$ , то это позволяет использовать формулу Ньютона–Лейбница. В результате вычисление кратного интеграла по формуле (5.70) сводится к последовательному применению формулы Ньютона–Лейбница по каждой переменной. При этом порядок интегрирования выбирается таким, который приводит к конечному результату наиболее простыми выкладками.

## РАЗДЕЛ 2

# Вычисление кратных интегралов

Как уже отмечалось, формула (5.70) сводит вычисление кратных интегралов к последовательному применению формулы Ньютона–Лейбница. И здесь основной задачей является расстановка пределов в каждом из интегралов на одномерных множествах  $\bar{E}_i$ , являющихся проекциями множества  $G$  и его сечений координатными плоскостями на координатные оси  $x_i = c_i$ .

### 6. Вычисление двойных интегралов

Для двумерного пространства  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  формула (5.70) имеет вид

$$\iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\bar{E}_1} dx_1 \int_{\bar{G}(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2, \quad (6.1)$$

где  $\bar{E}_1$  – проекция множества  $\bar{G}$  на ось  $x_1$ , а  $\bar{G}(x_1)$  – сечение множества  $G$  «координатной плоскостью» – прямой  $x_1 = c_1$ ,  $c_1 \in \bar{E}_1$ :  $\bar{G}(x_1) = \bar{G} \cap (x_1 = c_1)$ ,  $c_1 \in \bar{E}_1$  (рис. 19).

Как следует из рис. 19, сечения множества  $G$  зависят от его формы и могут состоять из одного, двух и более отрезков. Так как характер сечений определяет порядок расстановки пределов во внутреннем интеграле интеграла (6.1), остановимся на более подробном рассмотрении этого вопроса.

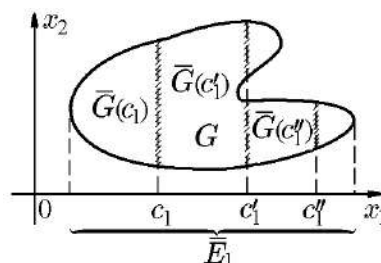


Рис. 19.  $G, \bar{E}, \bar{G}(x_1) = \bar{G} \cap (x_1 = c_1)$ ,  $c_1 \in \bar{E}_1$

#### 6.1. Расстановка пределов в повторных интегралах двойного

Для удобства изложения перейдем в двумерном случае от цифровых обозначений  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  к стандартным:  $(x, y)$  на плоскости  $xOy$ .

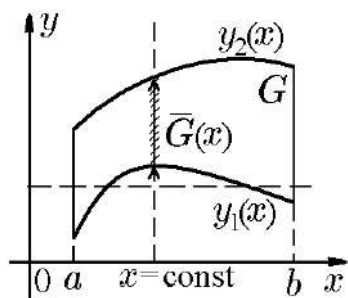


Рис. 20. Элементарная область относительно оси  $Oy$

♦ Элементарной областью относительно оси  $Oy$  будем называть такую область  $G$  на плоскости  $xOy$ , которая ограничена прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и графиками непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , причем

$$y_1(x) < y_2(x) \quad \forall x : a < x < b. \quad (6.2)$$

Другими словами, любая прямая  $x = \text{const}$ , параллельная оси  $Oy$ ,  $a < \text{const} < b$ , пересекает границу  $\partial G$  области  $G$  не более двух раз (рис. 20).

В конденсированных обозначениях определение элементарной относительно оси  $Oy$  области может быть записано следующим образом:

$$G = \{(x, y) : y_1(x) < y < y_2(x), a < x < b\}. \quad (6.3)$$

Так как граница  $\partial G$  области  $G$  состоит из прямых и графиков непрерывных функций, то, согласно теореме 2.1 (а также следствию 11.2 свойства 11),  $G$  есть область, измеримая по Жордану. В рамках этой терминологии справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.1.** Если  $G$  – элементарная относительно оси  $Oy$  область, а  $f(x, y)$  интегрируема на  $\overline{G} = G \cup \partial G$  и при любом  $x \in [a, b]$  существует интеграл

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (6.4)$$

то справедлива формула вычисления двойного интеграла

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (6.5)$$

**Доказательство.** Данная теорема является частным случаем теоремы 5.7 при  $n = 2$ , сформулированной в оговоренных выше терминах. В формуле (6.5), согласно (6.1), проекцией  $E_1$  является отрезок  $[a, b]$ , а сечением  $\overline{G}(x)$  – отрезок  $[y_1(x), y_2(x)]$  (рис. 20). Концы этих отрезков и определяют пределы во внешнем и внутреннем интегралах соответственно.

**Следствие 6.1.1.** Для функции  $f(x, y)$ , непрерывной на  $\overline{G}$ , справедлива формула (6.5).

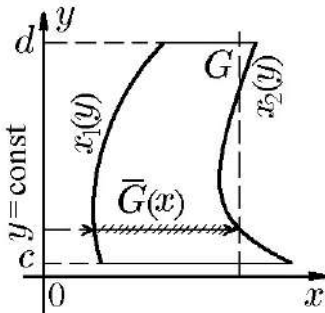


Рис. 21. Элементарная область относительно оси  $Ox$

Мы уже отмечали (см. пример 5.2), что удачный выбор порядка интегрирования может значительно упростить вычисление кратных интегралов. Поэтому дадим еще одно определение элементарной области.

♦ Пусть функции  $x_1(y)$  и  $x_2(y)$  непрерывны на отрезке  $[c, d]$  и  $x_1(y) < x_2(y)$  для всех  $y \in [c, d]$ . Область

$$G = \{(x, y) : x_1(y) < x < x_2(y), c < y < d\}, \quad (6.6)$$

границу  $\partial G$  которой любая прямая  $y = \text{const}$ , параллельная оси  $Ox$ ,  $c < \text{const} < d$ , пересекает не более двух раз (рис. 21), будем называть *элементарной областью относительно оси  $Ox$*  (рис. 21).

Данное определение позволяет переформулировать теорему 6.1 с другим порядком интегрирования.

**Теорема 6.2.** Если  $G$  – элементарная область относительно оси  $Ox$ , а  $f(x, y)$  интегрируема на  $\overline{G} = G \cup \partial G$  и при любых  $y \in [c, d]$  существует интеграл

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx, \quad (6.7)$$

то справедлива формула вычисления двойного интеграла:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (6.8)$$

**Следствие 6.2.1.** Для функции  $f(x, y)$ , непрерывной на  $\overline{G}$ , справедлива формула (6.8).

**Следствие 6.2.2.** Если  $G$  – область, элементарная и относительно оси  $Ox$ , и относительно оси  $Oy$ , а функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условиям теорем 6.1 и 6.2, то двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  по области  $G$  можно вычислить двумя способами: через повторные интегралы (6.5) и (6.8), т. е.

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (6.9)$$

◇ Если область интегрирования  $G$  не относится к рассмотренным случаям, то ее можно разбить на таковые, как это показано на рис. 22. Так, в случае рис. 22, а прямая  $x = x_0$  разбивает область  $G$  на три области,  $G_1, G_2, G_3$ , являющиеся элементарными относительно оси  $Oy$ . В случае рис. 22, б прямая  $y = y_0$  разбивает область  $G$  на три области, элементарные относительно оси  $Ox$ . Далее, используя свойство аддитивности двойного интеграла, исходный интеграл можно представить суммой трех:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy.$$

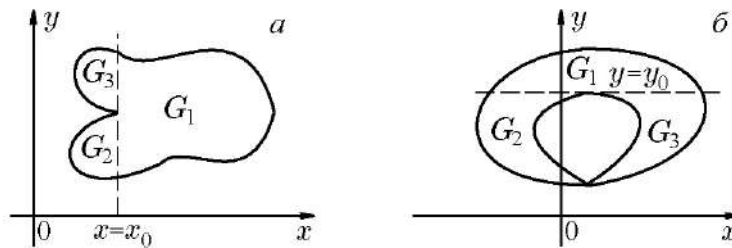


Рис. 22. Области, не являющиеся элементарными

При необходимости возможно разбиение области интегрирования  $G$  на любое конечное число областей, так, что

$$G = \bigcup_{i=1}^n G_i.$$

**Пример 6.1.** Расставить пределы в двумерном интеграле

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

по области  $G$ :  $-1 < x < 2$ ,  $x - 1 < y < x^2 + 1$ .

**Решение.** Граница  $\partial G$  области  $G$  представляет собой замкнутую кривую, состоящую из графиков четырех функций: трех отрезков прямых,  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x - 1$ , и части параболы,  $y = x^2 + 1$  (рис. 23). Это означает, что, согласно свойству 11, область  $G$  является измеримой по Жордану. Вместе с этим из рис. 23 следует, что область  $G$  является элементарной относительно оси



$Oy$  и не является таковой относительно оси  $Ox$ , поскольку, например, прямая  $y = 3/2$  (рис. 23, а) пересекает границу области в четырех точках. Тем не менее рассмотрим оба варианта расстановки пределов в двойном интеграле. Начнем с самого простого, воспользовавшись элементарностью области интегрирования относительно оси  $Oy$ .

I. Проекцией замкнутой области  $\bar{G}$  на ось  $Ox$  является отрезок  $[-1, 2]$ , а любая прямая  $x = \text{const}$ ,  $\text{const} \in ]-1, 2[$ , пересекает  $\bar{G}$  по отрезку, концы которого лежат на прямой  $y = x - 1$  и на параболы  $y = x^2 + 1$  так, что  $y \in [x - 1, x^2 + 1]$  (рис. 23, а). Это означает, что при сведении двойного интеграла к повторным – внешний интеграл вычисляется по переменной  $x$  в пределах от  $x = -1$  до  $x = 2$ , а внутренний – по  $y$  в пределах от  $y = x - 1$  до  $y = x^2 + 1$ , т. е.

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x-1}^{x^2+1} f(x, y) dy. \quad (6.10)$$

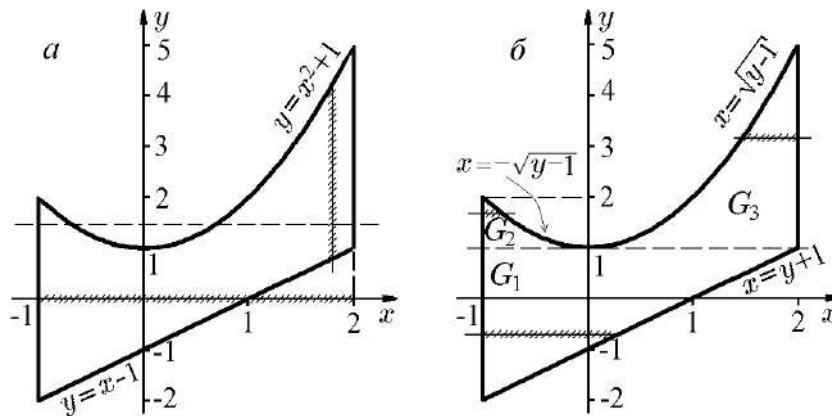


Рис. 23. Область  $G$  (а),  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$  (б)

II. Поменяем в (6.10) порядок интегрирования: внешний интеграл будем вычислять по переменной  $y$ , а внутренний – по переменной  $x$ . В этом случае область  $\bar{G}$  следует спроектировать на ось  $Oy$ . Его проекцией будет отрезок  $[-2, 5]$ . Область  $G$  не является элементарной относительно оси  $Ox$ , но ее можно представить объединением таких областей. Действительно, прямая  $y = 1$  разбивает  $G$  на три области:  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , каждая из которых является элементарной. Свойство аддитивности позволяет исходный интеграл представить суммой трех:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy. \quad (6.11)$$

Теперь последовательно запишем повторные интегралы для каждой области. Как следует из рис. 23, б, проекцией области  $\bar{G}_1$  на ось  $Oy$  является отрезок  $[-2, 1]$ , а любая прямая  $y = \text{const}$ ,  $\text{const} \in ]-2, 1[$ , пересекает  $\bar{G}_1$  по отрезку, концы которого лежат на прямых  $x = -1$  и  $x = y + 1$ , так, что  $x \in [-1, y + 1]$  (рис. 23, б). Это означает, что для двойного интеграла по  $G_1$  в его повторном интеграле внешний вычисляется по переменной  $y$  в пределах от  $y = -2$  до  $y = 1$ , а внутренний – по  $x$  в пределах от  $x = -1$  до  $x = y + 1$ , т. е.

$$\iint_{G_1} f(x, y) dx dy = \int_{-2}^1 dy \int_{-1}^{y+1} f(x, y) dx. \quad (6.12)$$

В свою очередь, проекцией области  $\overline{G_2}$  на ось  $Oy$  является отрезок  $[1, 2]$ , а любая прямая  $y = \text{const}$ ,  $\text{const} \in ]1, 2[$ , пересекает  $\overline{G_2}$  по отрезку, концы которого лежат на прямой  $x = -1$  и полупараболе  $x = -\sqrt{y-1}$  так, что  $x \in [-1, -\sqrt{y-1}]$  (рис. 23, б). Это означает, что для двойного интеграла по  $G_2$  в его повторном интеграле внешний вычисляется по переменной  $y$  в пределах от  $y = 1$  до  $y = 2$ , а внутренний – по  $x$  в пределах от  $x = -1$  до  $x = -\sqrt{y-1}$ , т. е.

$$\iint_{G_2} f(x, y) dx dy = \int_1^2 dy \int_{-1}^{-\sqrt{y-1}} f(x, y) dx. \quad (6.13)$$

И наконец, проекцией области  $\overline{G_3}$  на ось  $Oy$  является отрезок  $[1, 5]$ , а любая прямая  $y = \text{const}$ ,  $\text{const} \in ]1, 5[$ , пересекает  $\overline{G_3}$  по отрезку, концы которого лежат на полупараболе  $x = \sqrt{y-1}$  и прямой  $x = 2$  так, что  $x \in [\sqrt{y-1}, 2]$  (рис. 23, б). Это означает, что для двойного интеграла по  $G_3$  в его повторном интеграле внешний вычисляется по переменной  $y$  в пределах от  $y = 1$  до  $y = 5$ , а внутренний – по  $x$  в пределах от  $x = \sqrt{y-1}$  до  $x = 2$ , т. е.

$$\iint_{G_3} f(x, y) dx dy = \int_1^5 dy \int_{\sqrt{y-1}}^2 f(x, y) dx. \quad (6.14)$$

Подставив (6.12)–(6.14) в (6.11), получим

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_{-2}^1 dy \int_{-1}^{y+1} f(x, y) dx + \\ &+ \int_1^2 dy \int_{-1}^{-\sqrt{y-1}} f(x, y) dx + \int_1^5 dy \int_{\sqrt{y-1}}^2 f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Из формул (6.10) и (6.15) следует, что из двух возможных порядок интегрирования (6.10) приводит к конечному результату по совокупности выкладок наиболее простым способом.

**Пример 6.2.** Расставить пределы в двойном интеграле

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

по области  $G$ , ограниченной параболой  $y = x^2$  и  $y^2 = 8x$ .

**Решение.** Для наглядности пояснений расстановки пределов в повторных интегралах двойного построим графики парабол

$$p_1: y = x^2, \quad p_2: y^2 = 8x \quad (6.16)$$

и найдем точки их пересечения, решив совместно уравнения (6.16):

$$\begin{aligned} x^4 &= 8x, & x(x^3 - 8) &= 0; & \Rightarrow \\ x_1 &= 0, & x_2 &= 2; & \Rightarrow & y_1 = 0, & y_2 = 4. \end{aligned}$$

Получим две точки пересечения:  $O(0, 0)$  и  $O'(2, 4)$  (рис. 24). Так как область  $G$  ограничена графиками непрерывных функций, то она измерима по Жордану и, как следует из рис. 24, является элементарной относительно и оси  $Ox$ , и оси  $Oy$ .

Исходя из этого, перейдем к расстановке пределов. И начнем с внешнего интегрирования по переменной  $x$ . В этом случае проекцией области интегрирования  $\bar{G}$  на ось  $Ox$  является отрезок  $[0, 2]$ , а любая прямая  $x = x_0$ ,  $x_0 \in ]0, 2[$ , пересекает  $\bar{G}$  по отрезку, концы которого лежат на параболе  $p_1$  ( $y = x^2$ ) и на положительной ветви параболы  $p_2$ :  $y = \sqrt{8x}$  так, что  $y \in [x^2, \sqrt{8x}]$  (рис. 24). Это означает, что для двойного интеграла в повторном – внешний интеграл вычисляется по переменной  $x$  в пределах от  $x = 0$  до  $x = 2$ , а внутренний – по переменной  $y$  в пределах от  $y = x^2$  до  $y = \sqrt{8x}$ , т. е.

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} f(x, y) dy. \quad (6.17)$$

Если внешнее интегрирование производить по переменной  $y$ , то проекцией области интегрирования  $\bar{G}$  на ось  $Oy$  будет являться отрезок  $[0, 4]$ , а любая прямая  $y = y_0$  будет пересекать  $\bar{G}$  по отрезку, концы которого лежат на параболе  $p_2$ :  $x = y^2/8$  и на положительной ветви параболы  $p_1$ :  $x = \sqrt{y}$ , так, что  $x \in [y^2/8, \sqrt{y}]$  (рис. 24). Это означает, что для двойного интеграла в повторном внешний интеграл вычисляется по переменной  $y$  в пределах от  $y = 0$  до  $y = 4$ , а внутренний – по переменной  $x$  в пределах от  $x = y^2/8$  до  $x = \sqrt{y}$ , т. е.

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^4 dy \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx. \quad (6.18)$$

Формулы (6.17) и (6.18) представляют два возможных варианта вычисления двойного интеграла:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} f(x, y) dy = \int_0^4 dy \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

Выбор порядка интегрирования здесь будет зависеть от явного вида подынтегральной функции  $f(x, y)$  и связан с простотой вычисления ее первообразной.

**Пример 6.3.** Расставить пределы в двойном интеграле

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

по области  $G$ , ограниченной четырехугольником с вершинами в точках  $A(2, 1)$ ,  $B(5, 2)$ ,  $C(6, 4)$ ,  $D(3, 3)$ .

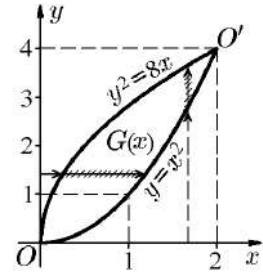


Рис. 24. Область интегрирования  $G$  из примера 6.2

**Решение.** Для удобства расстановки пределов составим уравнения прямых, на которых лежат стороны четырехугольника  $ABCD$ , внутренность которого является измеримым множеством  $G$  (рис. 25). Воспользуемся уравнениями прямых, проходящих через две заданные точки:

$$AD: \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow y = 2x - 3 \text{ или } x = \frac{y+3}{2}; \quad (6.19a)$$

$$AB: \frac{x-2}{5-2} = \frac{y-1}{2-1} \Rightarrow y = \frac{x+1}{3} \text{ или } x = 3y - 1; \quad (6.19б)$$

$$CD: \frac{x-6}{6-3} = \frac{y-4}{4-3} \Rightarrow y = \frac{x+6}{3} \text{ или } x = 3y - 6; \quad (6.19в)$$

$$CB: \frac{x-6}{6-5} = \frac{y-4}{4-2} \Rightarrow y = 2x - 8 \text{ или } x = \frac{y+8}{2}. \quad (6.19г)$$

Как следует из рис. 25, область  $G$  является элементарной как относительно оси  $Ox$ , так и оси  $Oy$ . Однако затруднение здесь возникает по другой причине, а именно той, что на различных промежутках осей  $Ox$  и  $Oy$  граница области задается различными аналитическими выражениями: уравнениями прямых (6.19). Поэтому, несмотря на элементарность области  $G$ , ее все равно приходится разбивать на составляющие, структура которых зависит от выбора порядка интегрирования.

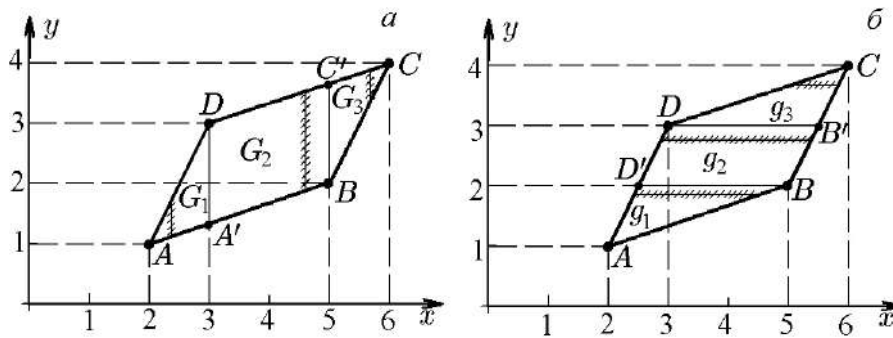


Рис. 25.  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3: [2, 6] = [2, 3] \cup [3, 5] \cup [5, 6]$  (а);  
 $G = g_1 \cup g_2 \cup g_3: [1, 4] = [1, 2] \cup [2, 3] \cup [3, 4]$  (б)

Как и выше, рассмотрим оба варианта порядка интегрирования.

I. Внешнее интегрирование по переменной  $x$ .

В этом случае проекцией четырехугольника  $ABCD$  на ось  $Ox$  является отрезок  $[2, 6]$  (рис. 25, а). Однако, как уже отмечалось, на трех отрезках,  $[2, 3]$ ,  $[3, 5]$ ,  $[5, 6]$ , границы области задаются различными парами уравнений прямых (6.19). По этой причине разобьем область  $G$  прямыми  $x = 3$  и  $x = 5$  на три области:  $G_1$  – внутренность треугольника  $AA'D$ ,  $G_2$  – внутренность параллелограмма  $A'BC'D$  и  $G_3$  – внутренность треугольника  $BCC'$  (рис. 25, а). Свойство аддитивности позволяет исходный интеграл представить суммой трех:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^3 \iint_{G_i} f(x, y) dx dy. \quad (6.20)$$

Теперь последовательно запишем повторные интегралы для каждой области. Как следует из рис. 25, а, проекцией области  $\overline{G_1}$  на ось  $Ox$  является отрезок  $[2, 3]$ . Любая прямая  $x = x_0$ ,  $x_0 \in ]2, 3[$ , пересекает  $\overline{G_1}$  по отрезку, концы

которого лежат на прямых  $AB$  и  $AD$ . Таким образом, согласно уравнениям (6.19а) и (6.19б),  $y \in [(x+1)/3, 2x-3]$ . Это означает, что для двойного интеграла по  $\bar{G}_1$  в его повторном интеграле внешний вычисляется по переменной  $x$  в пределах от  $x = 2$  до  $x = 3$ , а внутренний – по  $y$  в пределах от  $y = (x+1)/3$  до  $y = 2x-3$ , т. е.

$$\iint_{G_1} f(x, y) dx dy = \int_2^3 dx \int_{(x+1)/3}^{2x-3} f(x, y) dy. \quad (6.21)$$

В свою очередь, проекцией области  $\bar{G}_2$  на ось  $Ox$  является отрезок  $[3, 5]$ . Любая прямая  $x = x_0$ ,  $x_0 \in ]3, 5[$ , пересекает  $\bar{G}_2$  по отрезку, концы которого лежат на прямых  $AB$  и  $CD$ . Согласно уравнениям (6.19б), (6.19в),  $y \in [(x+1)/3, (x+6)/3]$ . Это означает, что внешний интеграл вычисляется по переменной  $x$  в пределах от  $x = 3$  до  $x = 5$ , а внутренний – по  $y$  в пределах от  $y = (x+1)/3$  до  $y = (x+6)/3$ , т. е.

$$\iint_{G_2} f(x, y) dx dy = \int_3^5 dx \int_{(x+1)/3}^{(x+6)/3} f(x, y) dy. \quad (6.22)$$

Наконец, проекцией области  $\bar{G}_3$  на ось  $Ox$  является отрезок  $[5, 6]$ . Любая прямая  $x = x_0$ ,  $x_0 \in ]5, 6[$ , пересекает  $\bar{G}_3$  по отрезку, концы которого лежат на прямых  $CB$  и  $CD$ . Согласно уравнениям (6.19в), (6.19г),  $y \in [2x-8, (x+6)/3]$ . Это означает, что внешний интеграл вычисляется по переменной  $x$  в пределах от  $x = 5$  до  $x = 6$ , а внутренний – по  $y$  в пределах от  $y = 2x-8$  до  $y = (x+6)/3$ , т. е.

$$\iint_{G_3} f(x, y) dx dy = \int_5^6 dx \int_{2x-8}^{(x+6)/3} f(x, y) dy. \quad (6.23)$$

Подставив (6.21)–(6.23) в (6.20), получим

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_2^3 dx \int_{(x+1)/3}^{2x-3} f(x, y) dy + \int_3^5 dx \int_{(x+1)/3}^{(x+6)/3} f(x, y) dy + \int_5^6 dx \int_{2x-8}^{(x+6)/3} f(x, y) dy. \quad (6.24)$$

II. Внешнее интегрирование по переменной  $y$ .

В этом случае проекцией четырехугольника  $ABCD$  на ось  $Oy$  является отрезок  $[1, 4]$  (рис. 25, б). Однако, как уже отмечалось, на трех отрезках,  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[3, 4]$ , границы области задаются различными парами уравнений прямых (6.19). По этой причине разобьем область  $G$  прямыми  $y = 2$  и  $y = 3$  на три области:  $\bar{g}_1$  – внутренность треугольника  $ABD'$ ,  $g_2$  – внутренность параллелограмма  $D'BB'D$  и  $g_3$  – внутренность треугольника  $DB'C$  (рис. 25, б). Свойство аддитивности позволяет исходный интеграл представить суммой трех:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^3 \iint_{g_i} f(x, y) dx dy. \quad (6.25)$$

Теперь последовательно запишем повторные интегралы для каждой области. Как следует из рис. 25, б, проекцией области  $g_1$  на ось  $Oy$  является отрезок  $[1, 2]$ . Любая прямая  $y = y_0$ ,  $y_0 \in ]1, 2[$ , пересекает  $g_1$  по отрезку, концы

которого лежат на прямых  $AD$  и  $AB$ . Согласно уравнениям (6.19a), (6.19б),  $x \in [(y+3)/2, 3y-1]$ . Это означает, что для двойного интеграла по  $g_1$  в его повторном интеграле внешний вычисляется по переменной  $y$  в пределах от  $y = 1$  до  $y = 2$ , а внутренний – по  $x$  в пределах от  $x = (y+3)/2$  до  $x = 3y-1$ , т. е.

$$\iint_{g_1} f(x, y) dx dy = \int_1^2 dy \int_{(y+3)/2}^{3y-1} f(x, y) dx. \quad (6.26)$$

В свою очередь, проекцией области  $\bar{g}_2$  на ось  $Oy$  является отрезок  $[2, 3]$ . Любая прямая  $y = y_0$ ,  $y_0 \in ]2, 3[$ , пересекает  $\bar{g}_2$  по отрезку, концы которого лежат на прямых  $AD$  и  $CB$ . Таким образом, согласно уравнениям (6.19a), (6.19з),  $x \in [(y+3)/2, (y+8)/2]$ . Это означает, что внешний интеграл по  $y$  вычисляется в пределах от  $y = 2$  до  $y = 3$ , а внутренний – по  $x$  в пределах от  $x = (y+3)/2$  до  $x = (y+8)/2$ , т. е.

$$\iint_{g_2} f(x, y) dx dy = \int_2^3 dy \int_{(y+3)/2}^{(y+8)/2} f(x, y) dx. \quad (6.27)$$

Наконец, проекцией области  $\bar{g}_3$  на ось  $Oy$  является отрезок  $[3, 4]$ . Любая прямая  $y = y_0$ ,  $y_0 \in ]3, 4[$ , пересекает  $\bar{g}_3$  по отрезку, концы которого лежат на прямой  $CD$ . Тогда согласно уравнениям (6.19в), (6.19з),  $x \in [3y-6, (y+8)/2]$ . Это означает, что внешний интеграл по  $y$  вычисляется в пределах от  $y = 3$  до  $y = 4$ , а внутренний – по  $x$  в пределах от  $x = 3y-6$  до  $x = (y+8)/2$ , т. е.

$$\iint_{g_3} f(x, y) dx dy = \int_3^4 dy \int_{2y-6}^{(y+8)/2} f(x, y) dx. \quad (6.28)$$

Подставив (6.26)–(6.28) в (6.25), получим

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_1^2 dy \int_{(y+3)/2}^{3y-1} f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_{(y+3)/2}^{(y+8)/2} f(x, y) dx + \int_3^4 dy \int_{2y-6}^{(y+8)/2} f(x, y) dx. \quad (6.29)$$

Формулы (6.24) и (6.29) представляют два возможных варианта вычисления двойного интеграла. Выбор порядка интегрирования здесь будет зависеть от явного вида подынтегральной функции  $f(x, y)$  и связан с простотой нахождения ее первообразной.

**Пример 6.4.** Двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

по области  $G$ , ограниченной линиями  $L: x^2 + y^2 = 4$  и  $l: x^2 - 2x + y^2 = 0$ , свести к повторному.

**Решение.** Так как контур  $L$  представляет собой окружность с центром в начале координат  $O(0, 0)$  и радиусом  $R = 2$ , а  $l: (x - 1)^2 + y^2 = 1$  представляет окружность с центром в точке  $O'(1, 0)$  и радиусом  $r = 1$ , то область интегрирования заключена между двумя этими окружностями (рис. 26). Как следует из рис. 26, эта область не является элементарной ни относительно оси  $Ox$ , ни относительно оси  $Oy$ , поэтому ее необходимо разбить на составляющие. Действительно, прямой  $x = 0$  область  $G$  можно разбить на три области  $G_i, i = \overline{1, 3}$ , являющиеся элементарными относительно оси  $Oy$  (рис. 26, а), а двумя прямыми  $y = 1$  и  $y = -1$  её можно разбить на пять областей  $G_i, i = \overline{1, 5}$ , элементарных относительно оси  $Ox$  (рис. 26, б).

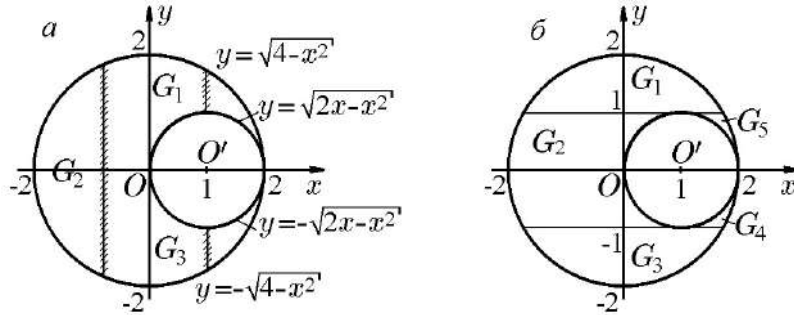


Рис. 26. Разбиения области  $G$  из примера 6.4

Очевидно, что первый вариант разбиения предпочтительнее, поэтому, опустив весьма подробные пояснения, приведенные в примере 6.5, запишем уравнения границ области

$$y = \pm\sqrt{4-x^2}, \quad y = \pm\sqrt{2x-x^2}.$$

Тогда двойной интеграл сведется к повторным:

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned} \quad (6.30)$$

При другом порядке интегрирования уравнения границ области  $G$  разрешим относительно переменной  $x$ :

$$x = \pm\sqrt{4-y^2}, \quad x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}.$$

Тогда для двойного интеграла запишем

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \\ &+ \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

**Пример 6.5.** Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \iint_{G_1} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy; \\
 \text{б) } \iint_{G_2} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.
 \end{aligned}$$

**Решение.** В интеграле *a* пределы интегрирования читаются следующим образом: когда переменная внешнего интегрирования  $x$  изменяется от  $x = 0$  до  $x = 1$ , переменная внешнего интегрирования  $y$  для каждого  $x$  из отрезка  $[0, 1]$  изменяется от  $y = 1 - x$  до  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , так, что

$$1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

Геометрически для всех  $x \in [0, 1]$  первое уравнение определяет отрезок прямой

$$x + y = 1, \quad (6.31)$$

а второе – часть единичной окружности

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (6.32)$$

Таким образом, область интегрирования  $G_1$  представляет собой область, ограниченную отрезком (6.31) и дугой окружности (6.32) (рис. 27, *a*), т. е.  $G_1 = \{x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Чтобы изменить порядок интегрирования, область  $G_1$  спроектируем на ось  $Oy$ . Ее проекцией будет отрезок  $[0, 1]$ . Это означает, что переменная внешнего интегрирования  $y$  будет изменяться от  $y = 0$  до  $y = 1$ .

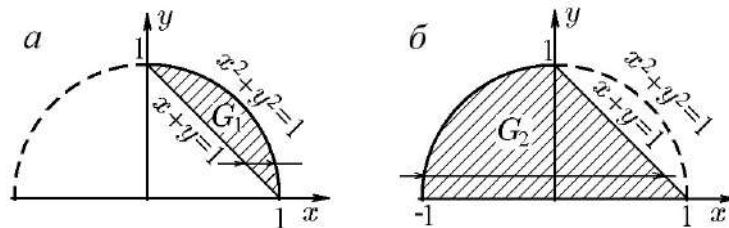


Рис. 27. Области из примера 6.5: а)  $G_1$ ; б)  $G_2$

Чтобы найти пределы внутреннего интегрирования по переменной  $x$ , проведем прямую  $y = y_0$ ,  $y_0 \in ]0, 1[$ . Как следует из рис. 27, *a*, эта прямая входит в область интегрирования  $G_1$  на отрезке (6.31), а выходит на окружности (6.32). Разрешив эти уравнения относительно переменной  $x$ , найдем  $x = 1 - y$  и  $x = \sqrt{1 - y^2}$ . Именно эти значения переменной  $x$  будут нижним и, соответственно, верхним пределами внутреннего интеграла. Таким образом, имеем повторный интеграл с измененным порядком интегрирования

$$\iint_{G_1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$



и, следовательно, равенство

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \quad (6.33)$$

В первом слагаемом интеграла  $b$  пределы интегрирования читаются следующим образом: когда переменная внешнего интегрирования  $x$  изменяется от  $x = -1$  до  $x = 0$ , переменная внешнего интегрирования  $y$  для каждого  $x$  из отрезка  $[-1, 0]$  изменяется от  $y = 0$  до  $y = \sqrt{1-x^2}$ , так, что

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Геометрически для всех  $x \in [-1, 0]$  первое уравнение определяет отрезок прямой  $y = 0$ , а второе – часть единичной окружности (6.32), расположенных во II четверти (рис. 27, б).

Во втором слагаемом интеграла  $b$ , когда переменная внешнего интегрирования  $x$  изменяется от  $x = 0$  до  $x = 1$ , переменная внешнего интегрирования  $y$  для каждого  $x$  из отрезка  $[0, 1]$  изменяется от  $y = 0$  до  $y = 1 - x$ , так, что

$$0 \leq y \leq 1 - x.$$

Геометрически для всех  $x \in ]0, 1[$  первое уравнение определяет отрезок прямой  $y = 0$ , а второе – отрезок прямой (6.31), расположенных в I четверти (рис. 27, б). Таким образом, область интегрирования  $G_2$  ограничена отрезком  $[-1, 1]$  оси  $Oy$  с одной стороны, а с другой – частью дуги окружности (6.32) из II четверти и отрезка прямой  $x + y = 1$  из первой четверти (рис. 27, б), т. е.  $G_2 = \{y \geq 0, x + y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Чтобы изменить порядок интегрирования в этом случае, область интегрирования  $G_2$  спроектируем на ось  $Oy$ . Ее проекцией будет отрезок  $[0, 1]$ . Это означает, что переменная внешнего интегрирования  $y$  будет изменяться от  $y = 0$  до  $y = 1$ .

Чтобы определить пределы внутреннего интегрирования по переменной  $x$ , проведем прямую  $y = y_0$ ,  $y_0 \in ]0, 1[$ . Как следует из рис. 27, б, эта прямая входит в область интегрирования  $G_2$  на окружности (6.32) во II четверти, а выходит на прямой (6.31) в I четверти. Разрешив эти уравнения относительно переменной  $x$ , найдем  $x = \sqrt{1-y^2}$  и  $x = 1 - y$ . Именно эти значения переменной  $x$  будут нижним и, соответственно, верхним пределами внутреннего интеграла.

Таким образом, имеем повторный интеграл с измененным порядком интегрирования

$$\iint_{G_2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$$

и, следовательно, равенство

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx. \quad (6.34)$$

**Пример 6.6.** Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x, y) dx.$$

**Решение.** Существуют различные способы решения задачи. Например, можно изменить порядок интегрирования в каждом из трех интегралов отдельно. А можно построить целиком область интегрирования  $G$  и уже затем, исходя из ее особенностей, записать для двойного интеграла новый порядок интегрирования. Первый способ мы уже использовали выше, поэтому воспользуемся здесь вторым способом. Для этого последовательно опишем аналитическими выражениями области  $G_1, G_2, G_3$  – области интегрирования каждого интеграла отдельно.

Итак, для первого интеграла имеем

$$G_1 = \{0 \leq y \leq 1, y^2/2 \leq x \leq 1 - \sqrt{1 - y^2}\}.$$

Здесь равенство  $x = y^2/2$  определяет часть параболы в полосе  $0 \leq y \leq 1$ , а  $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$  – четвертинку окружности  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  в квадрате  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  (рис. 28).

Для второго интеграла имеем

$$G_2 = \{0 \leq y \leq 1, 1 + \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 2\}.$$

Здесь равенство  $x = 2$  определяет отрезок прямой  $x = 2$  в полосе  $0 \leq y \leq 1$ , а  $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$  – четвертинку окружности  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  в квадрате  $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$  (рис. 28).

И, наконец, для третьего интеграла

$$G_3 = \{1 \leq y \leq 2, y^2/2 \leq x \leq 2\}.$$

Здесь равенство  $x = 2$  определяет отрезок прямой  $x = 2$  в полосе  $1 \leq y \leq 2$ , а  $x = y^2/2$  – часть параболы в этой же полосе  $1 \leq y \leq 2$  (рис. 28). Таким образом, область интегрирования  $G$  представляет собой объединение  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ . Как следует из рис. 28, область  $G$  в целом представляет собой область между параболой  $x = y^2/2$  и полуокружностью  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  в квадрате  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ . Эта область является элементарной относительно оси  $Oy$ .

Для изменения порядка интегрирования область  $G$  спроектируем на ось  $Ox$ . Ее проекцией будет отрезок  $[0, 2]$ . Это означает, что переменная внешнего интегрирования  $x$  будет меняться от  $x = 0$  до  $x = 2$ .

Чтобы найти пределы внутреннего интегрирования по переменной  $y$ , проведем прямую  $x = x_0, x_0 \in [0, 2]$ . Как следует из рис. 28, эта прямая входит в область интегрирования  $G$  на полуокружности  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , а выходит на параболу  $x = y^2/2$ . Разрешив эти уравнения относительно переменной  $y$ , найдем  $y = \sqrt{2x - x^2}, y = \sqrt{2x}$ . Именно эти значения переменной  $y$  будут нижним

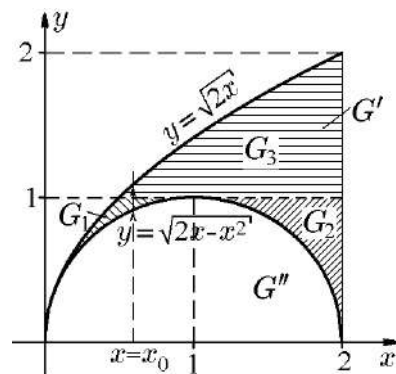


Рис. 28.

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 = G' \setminus G''$$

и, соответственно, верхним пределами внутреннего интеграла. Таким образом, имеем повторный интеграл с измененным порядком интегрирования

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$$

и, следовательно, равенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx + \\ + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy. \end{aligned} \quad (6.35)$$

◇ Отметим, что в рассмотренном примере 6.6 область интегрирования  $G$  в этом примере можно рассматривать не только как объединение множеств  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ , но и как разность  $G = G' \setminus G''$  множеств  $G'$ ,  $G''$ , где (рис. 28)

$$G' = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x}\}$$

и

$$G'' = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\}.$$

Это, вообще говоря, позволяет формально записать исходный двойной интеграл в виде разности

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G'} f(x, y) dx dy - \iint_{G''} f(x, y) dx dy. \quad (6.36)$$

Однако в общем случае условие интегрируемости функции  $f(x, y)$  только по области  $G$  не дает права интегрировать функцию  $f(x, y)$  по множеству  $G' \supset G$ , и это не позволяет формальное соотношение (6.36) считать равенством. Если же из условия задачи можно утверждать, что функция  $f(x, y)$  интегрируема на  $G'$ , то представление (6.36) законно и может быть использовано для упрощения вычислений.

**Пример 6.7.** Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

**Решение.** Область интегрирования  $G$  представляет собой область между отрезком  $[0, 2\pi]$  оси  $Ox$  и графиком синусоиды  $y = \sin x$  на этом отрезке (рис. 29). В силу свойства аддитивности интеграла Римана исходный повторный интеграл можно записать в виде суммы:

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy,$$

которую в силу свойств определенного интеграла можно представить разностью

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy - \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy. \quad (6.37)$$

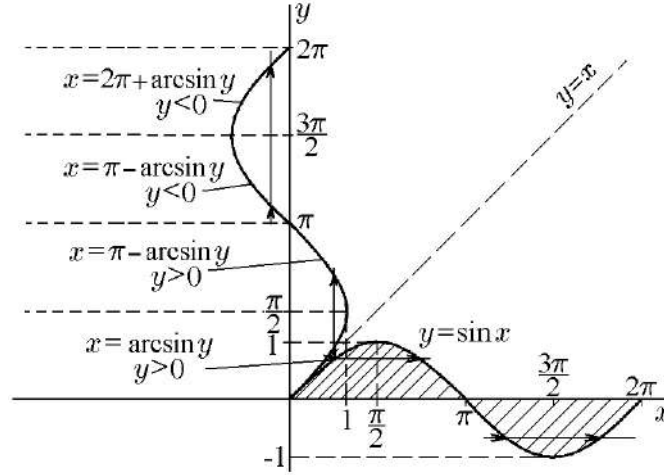


Рис. 29. Область интегрирования из примера 6.7

Изменим порядок интегрирования в каждом из интегралов (6.37) отдельно. Для первого интеграла проекцией области интегрирования на ось  $Oy$  является отрезок  $[0, 1]$ , а любая прямая  $y = y_0$ ,  $y_0 \in [0, 1]$ , входит в область интегрирования на графике  $y = \sin x$  для  $x \in ]0, \pi/2[$  и выходит из нее на том же графике  $y = \sin x$ , но для  $x \in ]\pi/2, \pi[$ . Разрешив эти уравнения относительно  $x$ , найдем однозначные ветви обратной функции  $x = \arcsin y$  для  $x \in ]0, \pi/2[$  и  $x = \pi - \arcsin y$  для  $x \in ]\pi/2, \pi[$ . Именно эти значения переменной  $x$  будут нижним и, соответственно, верхним пределами внутреннего интеграла по переменной  $x$ . Таким образом, имеем повторный интеграл с измененным порядком интегрирования

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx. \quad (6.38)$$

Здесь мы учли, что графики прямой  $y = \varphi(x)$  и обратной  $x = \varphi^{-1}(y)$  функций симметричны относительно биссектрисы прямого угла I четверти, т. е. прямой  $y = x$  (рис. 29).

Аналогично второй интеграл из (6.37) представим через повторный интеграл с измененным порядком интегрирования:

$$\int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx. \quad (6.39)$$

Подстановка (6.38) и (6.39) в (6.37) позволяет записать оба порядка интегрирования для двойного интеграла:

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$$

В следующем примере рассмотрим двойной интеграл по области, ограниченной замкнутой кривой, заданной параметрически. В силу свойства аддитивности двойного интеграла достаточно разбить область интегрирования на элементарные области, например, относительно оси  $Oy$ .

**Пример 6.8.** Пусть  $G$  – плоская область, элементарная относительно оси  $Oy$ , а ее граница  $\partial G$  есть замкнутая гладкая кривая  $L$ , заданная параметрически. Записать двойной интеграл по этой области

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

одномерным интегралом Римана по параметру.

**Решение 1.** Пусть граница  $\partial G$  области интегрирования  $G$  задана параметрически уравнениями

$$\partial G = \{x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]\}, \quad (6.40)$$

причем

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2) \quad (6.41)$$

в силу ее замкнутости.

Поскольку область  $G$  элементарна относительно оси  $Oy$ , должны существовать две точки  $A$  и  $B$  на ее границе, проекциями которых на ось  $Ox$  являются граничные точки отрезка  $[a, b]$ , представляющего собой проекцию  $\partial G$  на ось  $Ox$  (рис. 30).

Так как граница области является замкнутой кривой, то начальной и одновременно конечной точкой обхода границы можно выбрать точку  $A$  с абсциссой  $a = x(t_1) = x(t_2)$ . Тогда абсциссу  $b$  точки  $B$  будет задавать некоторое промежуточное значение параметра  $t = \tau$  такое, что  $t_1 < \tau < t_2$ ,  $b = x(\tau)$ . В силу элементарности области  $G$  и замкнутости  $\partial G$  границу можно разбить на две части: дугу  $\overline{AB}$  и дугу  $\overline{BA}$ , направление обхода которых определяется ростом  $t$ , так, чтобы область  $G$  оставалась слева (рис. 30). При этом дуга  $\overline{AB}$  описывается уравнением

$$y = y_1(x) = y_1(x(t)), \quad t \in [t_1, \tau], \quad (6.42)$$

а дуга  $\overline{BA}$ , соответственно,

$$y = y_2(x) = y_2(x(t)), \quad t \in [\tau, t_2], \quad (6.43)$$

и, как следует из рис. 30,

$$y_1(x) < y_2(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

С учетом этого исходный двойной интеграл можно записать повторным:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

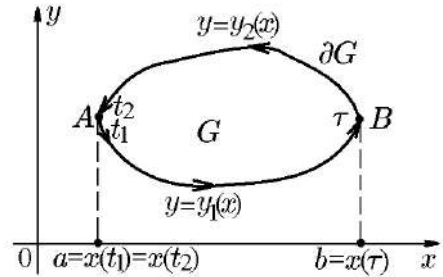


Рис. 30.  $\partial G = \overline{AB} \cup \overline{BA}$

Пусть  $F(x, y)$  есть первообразная для функции  $f(x, y)$  по переменной  $y$ , т. е.  $F'_y(x, y) = f(x, y)$ , тогда

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left( F(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) = \int_a^b [F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x))] dx,$$

а с учетом (6.41)–(6.43), соответственно,

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{x(t_2)}^{x(\tau)} F(x, y_2(x)) dx - \int_{x(t_1)}^{x(\tau)} F(x, y_1(x)) dx.$$

В каждом из полученных однократных интегралов сделаем замену  $x = x(t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_{t_2}^{\tau} F(x(t), y(t)) x'_t(t) dt - \int_{t_1}^{\tau} F(x(t), y(t)) x'_t(t) dt = \\ &= - \left[ \int_{t_1}^{\tau} F(x(t), y(t)) x'_t(t) dt + \int_{\tau}^{t_2} F(x(t), y(t)) x'_t(t) dt \right] = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), y(t)) x'_t(t) dt. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\iint_G f(x, y) dx dy = - \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), y(t)) x'_t(t) dt. \quad (6.45)$$

2. Формула (6.45) остается справедливой и в том случае, когда одна часть границы  $\partial G$  по-прежнему задается параметрическими уравнениями (6.40), а другая – отрезком  $AA'$  прямой (рис. 31), при условии сохранения направления обхода границы  $\partial G$ . Действительно, в этом случае на отрезке  $AA'$  величина  $x'_t = a'_t = 0$  и, следовательно, формула (6.45) остается справедливой.

◇ Если в условии примера 6.8 элементарность границы  $G$  относительно оси  $Oy$  заменить на элементарность относительно оси  $Ox$ , то, сохранив направление обхода границы, в результате аналогичных рассуждений придем к формуле

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(x(t), y(t)) y'_t dt, \quad (6.46)$$

отличающейся от (6.45) знаком, заменой функции  $x'_t(t)$  на  $y'_t(t)$  и заменой  $F(x, y)$  на  $\Phi(x, y)$ , являющейся первообразной функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$ , т. е.  $\Phi'_x(x, y) = f(x, y)$ .

Формула (6.46) остается справедливой и в том случае, когда одна часть границы  $\partial G$  задается кривой (6.40), а другая – отрезком прямой  $y = c$  при том же условии прохождения  $\partial G$ .

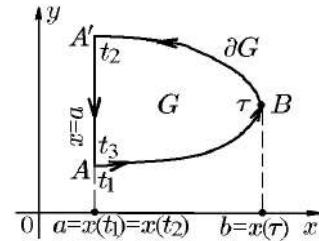


Рис. 31.  $\partial G = ABA' \cup AA'$

### 6.2. Примеры вычисления двойных интегралов

Задачи о вычислении кратных интегралов по клеточным множествам и, в частности, двойных интегралов по прямоугольнику были рассмотрены в примерах 5.1–5.3. В примерах 6.1–6.8 был рассмотрен порядок и особенности расстановки пределов в повторных интегралах по произвольной плоской области. Исходя из этого, перейдем к рассмотрению примеров вычисления двойных интегралов по этим областям. Начнем с интегралов, расстановка пределов в повторных интегралах которых уже рассмотрена в предыдущих примерах.

**Пример 6.9.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

от функции  $f(x, y) = x^2 + y$  по области  $G$ , ограниченной параболой  $y = x^2$  и  $y^2 = 8x$ .

**Решение.** Расстановка пределов в повторных интегралах для него была рассмотрена в примере 6.3 и задается формулами (6.17) и (6.18). Рассмотрим оба варианта. Начнем с формул (6.17), имея в этом случае (см. рис. 24)

$$\begin{aligned} I &= \iint_G (x^2 + y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} (x^2 + y) dy = \int_0^2 dx \left( x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{8x}} = \\ &= \int_0^2 \left( 2\sqrt{2}x^{5/2} - \frac{3}{2}x^4 + 4x \right) dx = \left( \frac{4\sqrt{2}}{7}x^{7/2} - \frac{3}{10}x^5 + 2x^2 \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{4 \cdot 16}{7} - \frac{3 \cdot 16}{5} + 8 = 16 \left( \frac{4}{7} - \frac{3}{5} \right) + 8 = -\frac{16}{35} + 8 = \frac{280 - 16}{35} = \frac{264}{35}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Формула (6.18) задает повторный интеграл с другим порядком интегрирования:

$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + y) dx dy &= \int_0^4 dy \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx = \int_0^4 dy \left( \frac{x^3}{3} + yx \right) \Big|_{y^2/8}^{\sqrt{y}} = \\ &= \int_0^4 \left( \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{y^3}{8} - \frac{y^6}{3 \cdot 8^3} \right) dy = \frac{8 \cdot 2^5}{3 \cdot 5} - \frac{4^2}{2} - \frac{4^7}{7 \cdot 3 \cdot 8^3} = \\ &= \frac{32}{3} \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{7} \right) - 8 = \frac{32}{3} \cdot \frac{51}{35} - 8 = \frac{32 \cdot 17}{35} - 8 = \frac{544 - 280}{35} = \frac{264}{35}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Как видим, оба повторных интеграла, (6.47) и (6.48), дают одно и то же значение двойного интеграла.

**Пример 6.10.** Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy$$

от функции  $f(x, y) = (x + y)$  по области  $G = \{-1 < x < 2, x - 1 < y < x^2 + 1\}$ .

**Решение.** Имеем двойной интеграл  $I = \iint_G (x + y) dx dy$ . Расстановка пределов в повторных интегралах для интеграла  $I$  была рассмотрена в примере 6.1 и задается формулами (6.10) и (6.15). Очевидно, что формула (6.10) приводит к наиболее простым вычислениям. Поэтому воспользуемся именно этой формулой:

$$\begin{aligned} I &= \iint_G (x + y) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x-1}^{x^2+1} (x + y) dy = \int_{-1}^2 dx \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x-1}^{x^2+1} = \\ &= \int_{-1}^2 \left\{ x[(x^2 + 1) - (x - 1)] + \frac{1}{2}[(x^2 + 1)^2 - (x - 1)^2] \right\} dx = \\ &= \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) dx = \left( \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{10}(32 + 1) + \frac{1}{4}(16 - 1) - \frac{1}{6}(8 + 1) + \frac{3}{2}(4 - 1) = 10,05. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что использование другого порядка интегрирования, задаваемого формулой (6.15), в результате гораздо большего объема вычислений приводит к тому же значению.

**Пример 6.11.** Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy$$

от функции  $f(x, y) = 1$  по области  $G$ , ограниченной четырехугольником с вершинами в точках  $A(2, 1)$ ,  $B(5, 2)$ ,  $C(6, 4)$ ,  $D(3, 3)$ .

**Решение.** Расстановка пределов в повторных интегралах для интеграла  $I$  была рассмотрена в примере 6.3 и задается формулами (6.24) и (6.29), которые мало чем отличаются друг от друга. Воспользуемся, например, формулой (6.24):

$$I = \iint_G dx dy = I_1 + I_2 + I_3, \quad (6.49)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_2^3 dx \int_{(x+1)/3}^{2x-3} dy = \int_2^3 \left( 2x - 3 + \frac{x+1}{3} \right) dx = \int_2^3 \left( \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} \right) dx = \\ &= \left( \frac{5}{6}x^2 - \frac{10}{3}x \right) \Big|_2^3 = \frac{5}{6}(9 - 4) - \frac{10}{3}(3 - 2) = \frac{5}{6}; \\ I_2 &= \int_3^5 dx \int_{(x+1)/3}^{(x+6)/3} dy = \int_3^5 \left( \frac{x+6}{3} - \frac{x+1}{3} \right) dx = \int_3^5 \frac{5}{3} dx = \frac{5}{3}x \Big|_3^5 = \frac{5}{3}(5 - 3) = \frac{10}{3}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_5^6 dx \int_{2x-8}^{(x+6)/3} dy = \int_5^6 \left( \frac{x+6}{3} - 2x + 8 \right) dx = \int_5^6 \left( 10 - \frac{5}{3}x \right) dx = \left( 10 - \frac{5}{6}x^2 \right) \Big|_5^6 = \\
 &= 10(6-5) - \frac{5}{6}(36-25) = 10 - \frac{55}{6} = \frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

Подставив эти значения интегралов в (6.49), получим

$$I = \iint_G dx dy = \frac{5}{6} + \frac{10}{3} + \frac{5}{6} = 5. \quad (6.50)$$

Этот результат можно перепроверить вычислением двойного интеграла по формуле (6.29). Однако, если учесть, что двойной интеграл (6.50), согласно его геометрическому смыслу, задает меру области интегрирования  $G$ , т. е. ее площадь и, следовательно, площадь четырехугольника  $ABCD$ , то результат (6.50) можно легко проверить методами векторной алгебры.

Действительно, поскольку координаты векторов

$$\overrightarrow{AD} = \vec{a} = (1, 2), \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} = (3, 1),$$

то с помощью определителя Грама вычислим площадь

$$S_{ABCD} = \sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})} = \left| \begin{pmatrix} \vec{a}, \vec{a} & \vec{a}, \vec{b} \\ \vec{b}, \vec{a} & \vec{b}, \vec{b} \end{pmatrix} \right|^{1/2} = \left| \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \right|^{1/2} = \sqrt{50 - 25} = 5,$$

и это же значение получим, исходя из геометрического смысла векторного произведения:

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |-5\vec{k}| = |-5||\vec{k}| = 5 \cdot 1 = 5.$$

**Пример 6.12.** Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G \frac{\sin x}{x} dx dy \quad (6.51)$$

по области  $G$ , ограниченной прямыми  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \pi/2$ .

**Решение.** Данный пример примечателен тем, что порядок интегрирования в повторных интегралах здесь имеет принципиальное значение для вычисления исходного интеграла. Действительно, область интегрирования  $G$  ограничена прямыми (рис. 32).

Так как функция  $(\sin x)/x$  в точке  $O(0, 0)$  не определена, но имеет предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то интеграл (6.51) существует и может быть записан повторным интегралом любого порядка интегрирования:

$$\iint_G \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy.$$

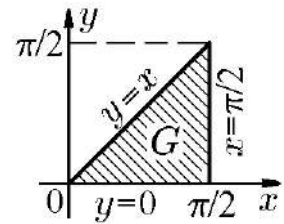


Рис. 32. Область  $G$  из примера 6.12

Оказывается, однако, что выбор внешнего интегрирования по переменной  $y$  здесь приводит к тому, что внутренний интеграл

$$\int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$$

не имеет первообразной в элементарных функциях. При другом порядке повторный интеграл легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\sin x}{x} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} (y|_0^x) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $I = 1$ .

**Пример 6.13.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G x\sqrt{2x^2 + xy} dx dy \quad (6.52)$$

по области  $G$ , ограниченной кривой  $L$ , заданной параметрически:

$$L = \{(x, y): x = R \cos t, y = R \sin 2t, x \geq 0\}. \quad (6.53)$$

**Решение.** Из параметрических уравнений (6.53) следует, что  $|x| \leq R$ ,  $|y| \leq R$ , т. е. кривая располагается в квадрате  $-R \leq x \leq R$ ,  $-R \leq y \leq R$ , симметрична относительно координатных осей и проходит через начало координат  $O(0, 0)$ . При изменении параметра  $t$  от  $t = 0$  до  $t = \pi/2$  кривая в первой четверти имеет вид, показанный на рис. 33.

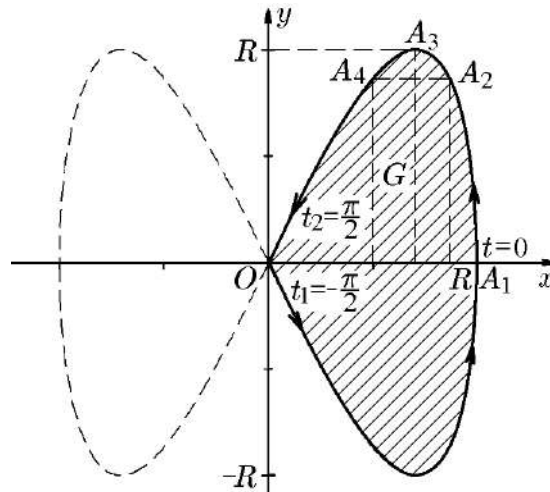


Рис. 33. Область  $G$  из примера 6.13

Достроим кривую для других значений параметра  $t$  исходя из симметрии параметрических уравнений кривой (6.53). Правая петля кривой  $L$ , расположенная в правой полуплоскости  $x \geq 0$  с положительным направлением обхода (область  $G$  слева), получается при изменении параметра от  $t_1 = -\pi/2$  до  $t_2 = \pi/2$ . Для любой точки  $M(x, y) \in G$  справедливо неравенство

$$|y| < R \sin\left(2 \arcsin \frac{x}{R}\right) = 2R \cos\left(2 \arccos \frac{x}{R}\right) \sin\left(2 \arccos \frac{x}{R}\right) = 2x \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$$

и, следовательно,

$$x^2 + xy \geq 2x^2 - x|y| = 2x^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}\right) > 0,$$

поэтому функция  $f(x, y)$  (6.52) определена и непрерывна в  $G$ . С другой стороны, так как первообразная функции  $f(x, y)$  по переменной  $y$  есть функция

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int f(x, y) dy = \int x \sqrt{2x^2 + xy} dy = \\ &= \int (2x^2 + xy)^{1/2} d(xy + 2x^2) = \frac{2}{3} (2x^2 + xy)^{3/2}, \end{aligned}$$

то, используя формулу (6.44), получим

$$\begin{aligned} \iint_G x \sqrt{2x^2 + xy} dx dy &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(x(t), y(t)) x'_t(t) dt = \\ &= - \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [2x^2(t) + x(t)y(t)]^{3/2} x'_t(t) dt. \end{aligned}$$

Подставив сюда (6.53), получим интеграл

$$\iint_G x \sqrt{2x^2 + xy} dx dy = \frac{4\sqrt{2}}{3} R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 + \sin t]^{3/2} \cos^3 t \sin t dt,$$

который заменой

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - t = s, \quad t = \frac{\pi}{2} - s, \quad dt = -ds, \quad t_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad s_1 = \pi; \quad t_2 = \frac{\pi}{2}, \quad s_2 = 0, \\ \sin t = \cos s, \quad \cos t = \sin s, \end{aligned}$$

приводится к виду

$$\iint_G x \sqrt{2x^2 + xy} dx dy = \frac{4\sqrt{2}}{3} R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 + \cos s]^{3/2} \sin^3 s \cos s ds.$$

С помощью известных тригонометрических соотношений

$$\sqrt{1 + \cos s} = \sqrt{2} \cos \frac{s}{2}, \quad \sin s = 2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}, \quad \cos s = \cos^2 \frac{s}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}$$

запишем

$$\iint_G x \sqrt{2x^2 + xy} dx dy = -\frac{256}{3} R^4 \int_0^\pi \cos^6 \frac{s}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{s}{2}\right) \left(2 \cos^2 \frac{s}{2} - 1\right) d\left(\cos \frac{s}{2}\right).$$

Положив теперь  $\cos(s/2) = z$ , получим

$$\begin{aligned} \iint_G x \sqrt{2x^2 + xy} dx dy &= \frac{512}{3} R^4 \int_0^1 (3z^8 - z^6 - 2z^{10}) dz = \\ &= \frac{512}{3} R^4 \left( \frac{1}{3} z^9 - \frac{1}{7} z^7 - \frac{2}{11} z^{11} \right) \Big|_0^1 = \frac{512}{3} R^4 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{2}{11} \right) = \frac{512}{3} R^4. \end{aligned}$$

Мы вернемся к задаче о вычислении двойных интегралов после рассмотрения метода замены переменных в кратных интегралах. Здесь же заметим, что, как и для одномерных интегралов, учет симметрии области интегрирования  $G$  относительно координатных осей совместно с четностью или нечетностью функции  $f(x, y)$  по своим переменным также позволяет упростить задачу вычисления двойных интегралов. Например, если область интегрирования  $G$  является симметричной относительно оси  $Oy$ , т. е.  $G = G^- \cup G^+$  (рис. 34), то:

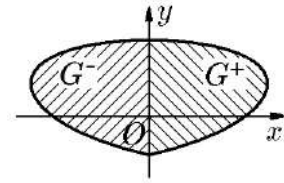


Рис. 34.  $G = G^- \cup G^+$

а) для четной по переменной  $x$  функции

$$\begin{aligned} f(-x, y) &= f(x, y) \\ \iint_G f(x, y) dx dy &= 2 \iint_{G^+} f(x, y) dx dy; \end{aligned} \quad (6.54)$$

б) для нечетной по переменной  $x$  функции

$$\begin{aligned} f(-x, y) &= -f(x, y) \\ \iint_G f(x, y) dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Аналогичные равенства справедливы, если область  $G$  симметрична относительно оси  $Ox$ , а функция  $f(x, y)$  четна или нечетна относительно переменной  $y$ .

**Пример 6.14.** Вычислить интеграл

$$\iint_{x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2} x^7 (1 + x^2 + \cos^2 y) dx dy.$$

**Решение.** Сразу можно утверждать, что этот интеграл равен нулю в силу (6.55), поскольку подынтегральная функция  $x^7(1 + x^2 + \cos^2 y)$  нечетна по переменной  $x$ , а область интегрирования  $x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2$  симметрична относительно координатных осей.

В заключение рассмотрим два примера о вычислении интегралов от разрывных функций.

**Пример 6.15.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$$

по области  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

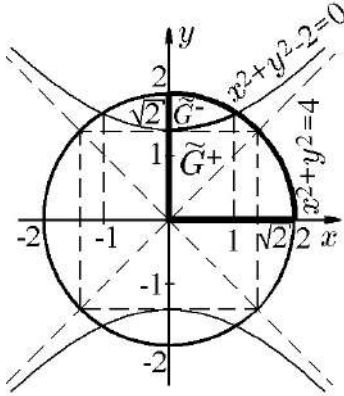


Рис. 35.  $\tilde{G} = \tilde{G}^+ \cup \tilde{G}^-$

**Решение.** Область интегрирования  $G$  представляет собой круг радиусом  $r = 2$  (рис. 35). В этой же системе координат  $xOy$  построим множество точек, для которых аргумент функции

$$f(x, y) = \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2)$$

обращается в нуль, т. е.

$$x^2 - y^2 + 2 = 0.$$

Каноническое уравнение этой кривой имеет вид

$$\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \quad (6.56)$$

и представляет равнобочную гиперболу с полуосями, равными  $\sqrt{2}$  (рис. 35). Совместное решение уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

позволяет найти абсциссы точек пересечения этих гипербол с границей области  $G$ :  $2x^2 = 2$ ,  $x^2 = 1$ ,  $x_{1,2} = \pm 1$ .

Из четности подынтегральной функции  $f(x, y)$  и симметрии области интегрирования  $G$  относительно координатных осей следует равенство

$$\iint_G \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy = 4 \iint_{\tilde{G}} \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy,$$

где  $\tilde{G}$  – четверть круга  $G$ , расположенная в квадранте I (рис. 35):

$$\tilde{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Подынтегральная функция  $f(x, y) = \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2)$  на множестве  $\tilde{G}$  является разрывной в каждой точке гиперболы (6.56) (рис. 35), разделяя это множество на два множества:  $\tilde{G}^-$  и  $\tilde{G}^+$ , на которых

$$f(x, y) = \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) = \begin{cases} -1, & \text{если } (x, y) \in \tilde{G}^-, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \{x^2 - y^2 + 2 = 0\}, \\ +1, & \text{если } (x, y) \in \tilde{G}^+, \end{cases}$$

где

$$\tilde{G}^- = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x^2 + 2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}, \quad \tilde{G}^+ = \tilde{G} \setminus \tilde{G}^-.$$

Исходя из этого и с учетом того, что  $m(\tilde{G} \setminus \tilde{G}^-) = m(\tilde{G}) - m(\tilde{G}^-)$ , имеем

$$\begin{aligned}
& \iint_G \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy = 4 \iint_{\tilde{G}} \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy = \\
& = 4 \left\{ \iint_{\tilde{G}^-} \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy + \iint_{\tilde{G}^+} \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy \right\} = \\
& = 4 \left\{ \iint_{\tilde{G}^-} (-1) dx dy + \iint_{\tilde{G}^+} 1 \cdot dx dy \right\} = 4 \left\{ - \iint_{\tilde{G}^-} dx dy + \iint_{\tilde{G}^+} dx dy \right\} = \quad (6.57) \\
& = 4 \{ -m(\tilde{G}^-) + m(\tilde{G}^+) \} = 4 \{ -m(\tilde{G}^-) + m(\tilde{G} \setminus \tilde{G}^-) \} = \\
& = 4 \{ m(\tilde{G}) - 2m(\tilde{G}^-) \}.
\end{aligned}$$

Меры  $m(\tilde{G})$  и  $m(\tilde{G}^-)$ , т. е. площади областей  $\tilde{G}$  и  $\tilde{G}^-$ , равны:

$$\begin{aligned}
m(\tilde{G}) &= \frac{1}{4} S_{\text{кр}} = \frac{\pi r^2}{4} = \pi, \\
m(\tilde{G}^-) &= \iint_{\tilde{G}^-} dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \int_0^1 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2+2}) dx = I_1 - I_2,
\end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx.$$

Воспользовавшись свойством неопределенного интеграла (интегрированием по частям), запишем

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{3} + 4 \arcsin \frac{1}{2} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}; \\
I_2 &= \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{x^2+2} + 2 \ln |x + \sqrt{x^2+2}| \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{3} + 2 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right].
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$m(\tilde{G}^-) = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \right] - \frac{1}{2} \left[ \sqrt{3} + 2 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right] = \frac{\pi}{3} - \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда в силу свойства (4.1)

$$\begin{aligned}
& \iint_G \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy = 4 \{ m(\tilde{G}) - 2m(\tilde{G}^-) \} = \\
& = 4 \left\{ \pi - \frac{2\pi}{3} + 2 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{4\pi}{3} + 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

**Пример 6.16.** Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G [x + y] dx dy$$

по множеству  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ , где функция  $f(x, y) = [x + y]$  – целая часть  $(x + y)$ .

**Решение.** Отрезками трех прямых, задаваемых уравнениями

$$x + y = n, \quad n = 1, 2, 3,$$

разобьем компакт  $G$  на четыре множества (рис. 36):  $G_l, l = \overline{1, 4}$ , так, что

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4.$$

Если точка  $P(x, y)$  – внутренняя точка  $G_l$ , то

$$\begin{aligned} [x + y] \Big|_{P \in G_1} &= 0, & [x + y] \Big|_{P \in G_2} &= 1, \\ [x + y] \Big|_{P \in G_3} &= 2, & [x + y] \Big|_{P \in G_4} &= 3. \end{aligned}$$

С учетом этого и в силу свойства аддитивности исходный двойной интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} I &= \iint_G [x + y] dx dy = \iint_{G_1} [x + y] dx dy + \iint_{G_2} [x + y] dx dy + \\ &+ \iint_{G_3} [x + y] dx dy + \iint_{G_4} [x + y] dx dy = \\ &= 0 + \iint_{G_2} dx dy + 2 \iint_{G_3} dx dy + 3 \iint_{G_4} dx dy = \\ &= m(G_2) + 2m(G_3) + 3m(G_4). \end{aligned}$$

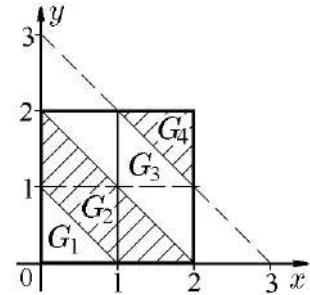


Рис. 36.  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$

Так как меры  $m(G_l)$  есть площади множеств  $G_l$ , то

$$I = \iint_G [x + y] dx dy = m(G_2) + 2m(G_3) + 3m(G_4) = \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

## 7. Вычисление тройных интегралов

Как следует из теоремы Фубини и следствий из нее, тройной интеграл по измеримой по Жордану области  $G$  можно представить повторными интегралами вида (5.66) и (5.70):

$$\iiint_G f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\bar{E}_1} dx_1 \iint_{\bar{G}(x_1)} f(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 =$$

$$= \int_{\bar{E}_1} dx_1 \int_{\bar{E}_2(x_1)} dx_2 \int_{\bar{E}(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) dx_3. \quad (7.1)$$

Для того чтобы эти формулы привести к виду, позволяющему использовать формулы Ньютона–Лейбница, из фигурирующих в них множеств интегрирования необходимо извлечь информацию для расстановки пределов в каждом из интегралов, исходя из аналитических выражений, задающих область  $G$ .

### 7.1. Расстановка пределов в повторных интегралах тройного

Для удобства изложения, как и в предыдущем параграфе, перейдем от обозначений  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$  к стандартным  $x, y, z$  в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$ . Вместе с этим, как и на плоскости, относительно трехмерной области интегрирования  $G$  придется делать некоторые предположения. Для этого свойство элементарности области распространим на трехмерный случай.

◆ Область  $G$  будем называть *элементарной относительно оси  $Oz$* , если

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in G(z) \subset \mathbb{R}^2, z_1(x, y) < z < z_2(x, y)\}, \quad (7.2)$$

где  $G(z)$  – проекция области  $G$  на плоскость, ортогональную оси  $Oz$ , а функции  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  непрерывны на  $\bar{G}(z)$ .

Геометрически это означает, что прямая, проходящая параллельно оси  $Oz$  через точку  $M(x, y) \in G(z)$ , пересекает ее границу  $\partial G$  не более двух раз (рис. 37).

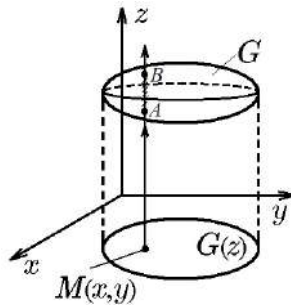


Рис. 37. Элементарная область относительно оси  $Oz$

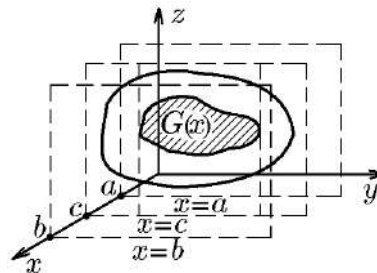


Рис. 38. Множество сечений  $G(x)$

В стандартных обозначениях тройной интеграл (7.1) по области  $G$ , ограниченной замкнутой кусочно-гладкой поверхностью без самопересечений, для функции  $f(x, y, z)$ , непрерывной на  $\bar{G}$ , может быть записан как

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\bar{E}_x} dx \iint_{\bar{G}(x)} f(x, y, z) dy dz = \\ &= \int_{\bar{E}_x} dx \int_{\bar{E}_y(x)} dy \int_{\bar{E}_z(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (7.3)$$

В первом повторном интеграле (7.3)  $\bar{E}_x$  есть ортогональная проекция множества  $\bar{G}$  на ось  $Ox$ , т. е. некоторый отрезок  $[a, b]$  оси  $Ox$ , а  $\bar{G}(x)$  являются сечениями  $\bar{G}$  координатными плоскостями  $x = c$ ,  $c \in ]a, b[$ . Это означает, что



тройной интеграл можно записать повторным интегралом с внешним интегрированием по переменной  $x$  в пределах от  $x = a$  до  $x = b$  и внутренним двойным интегралом по  $\overline{G}(x)$  (рис. 38), т. е.

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{\overline{G}(x)} f(x, y, z) dy dz. \quad (7.4)$$

В данных условиях плоское множество  $G(x)$ ,  $x \in ]a, b[$ , в формуле (7.4), ограниченное кусочно-гладкими замкнутыми кривыми без пересечений, является жордановым (причем не обязательно связным). Вместе с этим двойной интеграл

$$F(x) = \iint_{\overline{G}(x)} f(x, y, z) dy dz \quad (7.5)$$

определяет функцию  $F(x)$ , интегрируемую (хотя и не обязательно непрерывную) на  $[a, b[$ . Таким образом, оба интеграла, входящие в повторный интеграл (7.4), имеют смысл и, следовательно, согласно теореме Фубини, представляют тройной интеграл (7.4).

Таким образом, если нахождение отрезка  $[a, b]$  – проекции  $\overline{G}$  на ось  $Ox$  – и нахождение для всех  $x \in ]a, b[$  аналитических выражений для границы  $G(x)$  не вызывает затруднений (см. примеры ниже), то вычисление тройного интеграла (7.4) сводится к вычислению известными уже методами двойного интеграла (7.5) с последующим его интегрированием по переменной  $x$ :

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{\overline{G}(x)} f(x, y, z) dy dz = \int_a^b F(x) dx. \quad (7.6)$$

Наряду с этим, а также для областей более сложного вида всегда можно воспользоваться следствием 5.7.2 из теоремы Фубини, т. е. последним в соотношениях (7.3) интегралом:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\overline{E}_x} dx \int_{\overline{E}_y(x)} dy \int_{\overline{E}_z(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (7.7)$$

Чтобы проиллюстрировать геометрически фигурирующие здесь множества интегрирования  $\overline{E}_x$ ,  $\overline{E}_y(x)$ ,  $\overline{E}_z(x, y)$ , проведем геометрическое построение, позволяющее заменить интегрирование по этим множествам одномерными интегралами с соответствующими пределами интегрирования.

Итак, область интегрирования  $G$  спроектируем не на ось  $Ox$ , а на плоскость  $xOy$  (т. е.  $z = 0$ ), обозначив ее проекцию как  $\overline{G}_{xy}$  (рис. 39). Ортогональная проекция этого двумерного множества  $\overline{G}_{xy}$  на ось  $Ox$  очевидным образом дает отрезок  $[a, b]$  оси  $Ox$  (рис. 39). Теперь проведем координатную плоскость  $X$ : ( $x = c_x$ ),  $c_x \in ]a, b[$ . Эта плоскость, с одной стороны, в сечении с  $G$  дает плоское множество  $\overline{G}(x)$ , а с другой – в сечении с проекцией  $\overline{G}_{xy}$  дает одномерное множество  $\overline{E}(x)$ , состоящее из одного или нескольких отрезков. Проекцию множества  $\overline{E}(x)$  на ось  $Oy$  обозначим как  $\overline{E}_y(x)$  (рис. 39). Но в этом случае в интеграле (7.7) повторное интегрирование по переменным  $x$  и  $y$  можно записать двойным

интегралом по области  $\bar{G}_{xy}$ , т. е.

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\bar{G}_{xy}} dx dy \int_{\bar{E}_z(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (7.8)$$

где  $\bar{E}_z(x, y)$  – проекция на ось  $Oz$  части прямой  $L$ , являющейся пересечением координатных плоскостей  $X: (x = c_x)$ ,  $c_x \in [a, b]$  и  $Y: (y = c_y)$ ,  $c_y \in \bar{E}_y(x)$ , с границей области  $\bar{G}$  (или  $\bar{G}(x)$ ), т. е.  $\bar{E}_z(x, y) = \text{пр}_z \bar{E}(x, y)$ ,  $\bar{E}(x, y) = X \cap Y \cap G$  (рис. 39).

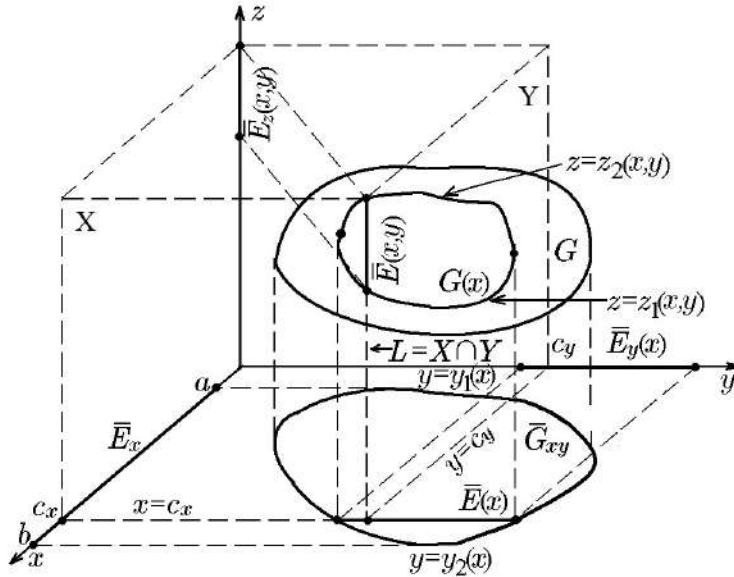


Рис. 39.  $c_x \in \bar{E}_x$ ,  $c_y \in \bar{E}_y(x)$ ,  $X: (x = c_x)$ ,  $Y: (y = c_y)$ ,  $L = X \cap Y$ ,  $\bar{E}(x, y) = \bar{G}(x) \cap L = \bar{G} \cap L$ ,  $\bar{E}_z(x, y) = \text{пр}_z \bar{E}(x, y)$

Формулы (7.4) и (7.8) есть следствие теоремы Фубини применительно к трехмерному пространству  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ , разложение которого осуществляется двумя способами:  $\mathbb{R}^3_{xyz} = \mathbb{R}^1_x \times \mathbb{R}^2_{yz}$  и  $\mathbb{R}^3_{xyz} = \mathbb{R}^2_{xy} \times \mathbb{R}^1_z$ . В общем случае эти формулы не дают способ практического вычисления тройных интегралов, но для областей определенного типа их можно сделать таковыми.

Пусть область  $G$  является элементарной относительно оси  $Oz$  (в противном случае ее всегда можно рассматривать как совокупность таковых), т. е., согласно определению (7.3),

$$G = \{(x, y, z): (x, y) \in G_{xy} \subset \mathbb{R}^2, z_1(x, y) < z < z_2(x, y)\}.$$

Это означает, что множество  $\bar{E}_z(x, y)$  представляет собой отрезок  $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$  оси  $Oz$  (рис. 39) и, следовательно, (7.8) можно привести к виду

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\bar{G}_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (7.9)$$

который позволяет записать равенство

$$\int_a^b dx \iint_{\bar{G}(x)} f(x, y, z) dy dz = \iint_{\bar{G}_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (7.10)$$

Это равенство задает два способа сведения тройного интеграла «фактически» к двойным. В первом область интегрирования  $G$  изначально проектируется на ось  $Ox$ , во втором – на плоскость  $xOy$ .

Если теперь предположить, что область  $G_{xy}$  является элементарной относительно оси  $Oy$  (рис. 39), т. е. согласно определению (6.6)

$$G_{xy} = \{(x, y) : x \in ]a, b[ \subset \mathbb{R}, y_1(x) < y < y_2(x)\},$$

то это позволяет двойной интеграл в правой части соотношения (7.10), в свою очередь, представить повторным интегралом. В результате для тройного интеграла приходим к равенству

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\overline{G}_{xy}} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (7.11)$$

◆ Представление тройного интеграла в виде последовательности трех одномерных, как (7.11), называется *расстановкой пределов в тройном интеграле*.

Путем изменения порядка интегрирования можно получить шесть (число перестановок из трех элементов = 3!) таких последовательностей. Такую же последовательность можно получить, преобразовав интеграл в левой части равенства (7.10). Такая двойственность, на первый взгляд, является избыточной. Однако она оказывается весьма полезной, позволяя свести задачу о перестановке порядка интегрирования в тройном интеграле к задаче о перестановке порядка интегрирования в двойных интегралах (7.11), меняя местами либо последние две, либо первые две из трех координат. Преимущество такого метода в том, что решение задачи о перестановке пределов интегрирования в двойном интеграле существенно облегчается наглядным геометрическим представлением соответствующего множества на плоскости, а геометрическое изображение пространственной области на плоскости из-за неизбежных искажений зачастую не облегчает, а затрудняет переход к нужным неравенствам на координаты точек рассматриваемого множества (см. примеры ниже).

Все результаты и выводы, рассмотренные выше, сформулируем в виде теоремы, полезной для расстановки пределов при вычислении тройных интегралов. Эта теорема является формулировкой общей теоремы Фубини для пространства  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ .

**Теорема 7.1.** Пусть  $G$  – область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью без самопересечений, и  $f(x, y, z)$  – функция, непрерывная в замкнутой области  $\overline{G}$ , тогда тройной интеграл от этой функции существует и его можно записать повторным интегралом

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{\overline{G}(x)} f(x, y, z) dy dz, \quad (7.12)$$

где  $[a, b]$  – отрезок оси  $Ox$ , являющийся проекцией  $\overline{G}$  на ось  $Ox$ , а  $\overline{G}(x)$  – сечения  $\overline{G}$  координатными плоскостями  $x = c_x$ ,  $c_x \in [a, b]$ .

Если область  $G$  является элементарной, например, относительно оси  $Oz$ , т. е.

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_{xy} \subset \mathbb{R}^2, z_1(x, y) < z < z_2(x, y)\},$$

а  $\overline{G}_{x,y}$  – проекцией  $\overline{G}$  на плоскость  $xOy$ , то справедлива формула

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\overline{G}_{xy}} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (7.13)$$

И наконец, если  $G_{xy}$  – элементарная, например, относительно оси  $Oy$ , т. е.

$$G_{xy} = \{(x, y) : x \in ]a, b[ \subset \mathbb{R}, y_1(x) < y < y_2(x)\},$$

то тройной интеграл можно представить повторным интегралом в виде последовательности трех одномерных интегралов:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (7.14)$$

Проиллюстрируем утверждения этой теоремы конкретными примерами. Начнем с наиболее простых.

**Пример 7.1.** Расставить пределы в тройном интеграле

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz,$$

где  $G$  – область в первом октанте, ограниченная поверхностями  $x = y = z = 0$  и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.15)$$

**Решение.** Область интегрирования, ограниченная координатными плоскостями

$$x = y = z = 0$$

и эллипсоидом (7.15) в первом октанте (рис. 40), является кусочно-гладкой. Кроме этого, область  $G$  является выпуклой, т. е. элементарной относительно всех координатных осей.

Согласно теореме 7.1, существуют два способа расстановки пределов, задаваемых формулами (7.12) и (7.13).

*1-й способ.* Воспользуемся формулой (7.12), которая исходит из проекций области интегрирования  $G$  на координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Рассмотрим последовательно все три случая.

1. Спроектируем область  $\overline{G}$  на ось  $Ox$ . Ее проекцией является отрезок  $[0, a]$  оси  $Ox$  (рис. 40), что непосредственно вытекает из свойств эллипсоида (7.15).

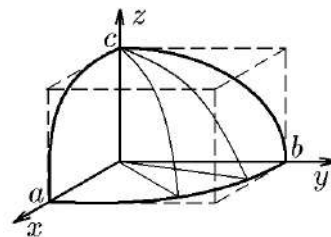


Рис. 40. Область  $G$  из примера 7.1

Следовательно, для тройного интеграла, согласно соотношению (7.12), имеем повторный интеграл

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dx \iint_{\overline{G}(x)} f(x, y, z) dy dz, \quad (7.16)$$

где  $\overline{G}(x)$  является двумерным сечением трехмерной области  $\overline{G}$  координатной плоскостью  $x = x_0$ ,  $0 < x_0 < a$  (рис. 41, а). Сечение  $\overline{G}(x)$  изображено на рис. 41, б: оно ограничено четвертью эллипса

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad \frac{y^2}{b^2(1-x^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1-x^2/a^2)} = 1, \quad 0 < x < a \quad (7.17)$$

и отрезками  $\left[0, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]$  на оси  $Oy$  и  $\left[0, c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]$  на оси  $Oz$ . Чтобы расставить пределы в двойном интеграле (7.16), необходимо определиться с порядком интегрирования. Сначала внешнее интегрирование проведем по переменной  $y$ , а внутреннее – по переменной  $z$ . При таком выборе, как следует из (7.17), при  $z = 0$  внешняя переменная интегрирования  $y$  изменяется в пределах от  $y = 0$  до  $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ , а переменная внутренняя, как следует из той же формулы,

изменяется в пределах от  $z = 0$  до  $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ .

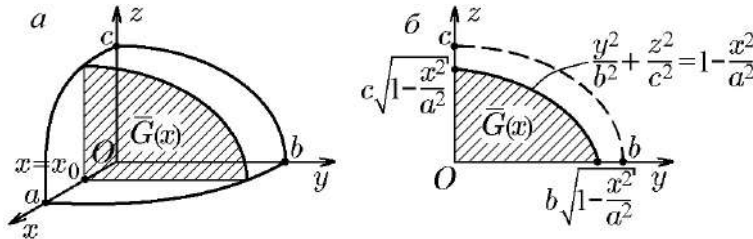


Рис. 41. Сечение области  $G$  плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ :

а)  $\overline{G}(x) = X \cap G$ ,  $X = (x = x_0)$ ; б) сечение плоскостью  $x = x_0$ :

$$\left\{ y \in \left[0, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right], z \in \left[0, c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right] \right\},$$

$$\left\{ z \in \left[0, c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right], y \in \left[0, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}\right] \right\}$$

Таким образом, тройной интеграл (7.16) сводится к последовательности трех одномерных интегралов:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} f(x, y, z) dz. \quad (7.18)$$

Теперь поменяем порядок интегрирования. Внешнее интегрирование проведем по переменной  $z$ , а внутреннее – по  $y$ . При таком выборе, как следует из (7.17), при  $y = 0$  переменная  $z$  изменяется в пределах от  $z = 0$  до  $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ ,

а переменная  $y$  – от  $y = 0$  до  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ . Таким образом, тройной интеграл (7.16) сводится к последовательности трех одномерных интегралов:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2}} dz \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2-z^2/c^2}} f(x, y, z) dy. \quad (7.19)$$

2. Спроектируем область  $\bar{G}$  на ось  $Oy$ . Ее проекцией является отрезок  $[0, b]$  оси  $Oy$  (рис. 40), что непосредственно вытекает из свойств эллипсоида (7.15). Следовательно, для тройного интеграла, согласно (7.12), имеем повторный интеграл

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^b dy \iint_{\bar{G}(y)} f(x, y, z) dx dz, \quad (7.20)$$

где  $\bar{G}(y)$  является двумерным сечением трехмерной области  $\bar{G}$  координатной плоскостью  $y = y_0$ ,  $0 < y_0 < b$  (рис. 42, а). Вид сечения изображен на рис. 42, б.  $\bar{G}(y)$  ограничена четвертью эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2(1 - y^2/b^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - y^2/b^2)} = 1, \quad 0 < y < b, \quad (7.21)$$

и отрезками  $\left[0, a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right]$  оси  $Ox$  и  $\left[0, c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right]$  оси  $Oz$ . Причем для всех  $x$  из отрезка  $\left[0, a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right]$  переменная  $z$  изменяется от  $z = 0$  до  $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ , а для всех  $z$  из отрезка  $\left[0, c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right]$  переменная  $x$  изменяется от  $x = 0$  до  $x = c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ .

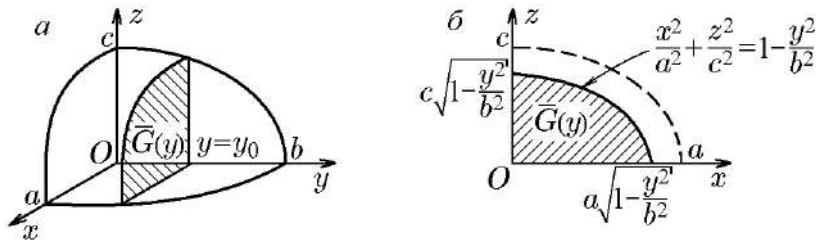


Рис. 42. Сечение области  $G$  плоскостью, перпендикулярной оси  $Oy$ :

а)  $\bar{G}(y) = Y \cap G$ ,  $Y = (y = y_0)$ ; б) сечение плоскостью  $y = y_0$ :

$$\left\{ x \in \left[0, a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right], z \in \left[0, c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right] \right\},$$

$$\left\{ z \in \left[0, c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right], x \in \left[0, a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}\right] \right\}$$

Теперь, следуя рассуждениям предыдущего пункта 1, имеем два представления тройного интеграла с разным порядком интегрирования:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^b dy \int_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}} dx \int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} f(x, y, z) dz; \quad (7.22)$$

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^b dy \int_0^{c\sqrt{1-y^2/b^2}} dz \int_0^{b\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}} f(x, y, z) dx. \quad (7.23)$$

3. Спроектируем область  $\bar{G}$  на ось  $Oz$ . Ее проекцией является отрезок  $[0, c]$  оси  $Oz$  (рис. 40). Поэтому, согласно (7.12), для тройного интеграла имеем повторный интеграл

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^c dz \iint_{\bar{G}(z)} f(x, y, z) dx dy, \quad (7.24)$$

где  $\bar{G}(z)$  является двумерным сечением трехмерной области  $\bar{G}$  координатной плоскостью  $z = z_0$ ,  $0 < z_0 < c$  (рис. 43, а). Сечение  $\bar{G}(z)$  изображено на рис. 43, б. Оно ограничено четвертью эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}, \quad \frac{x^2}{a^2(1-z^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1-z^2/c^2)} = 1, \quad 0 < z < c, \quad (7.25)$$

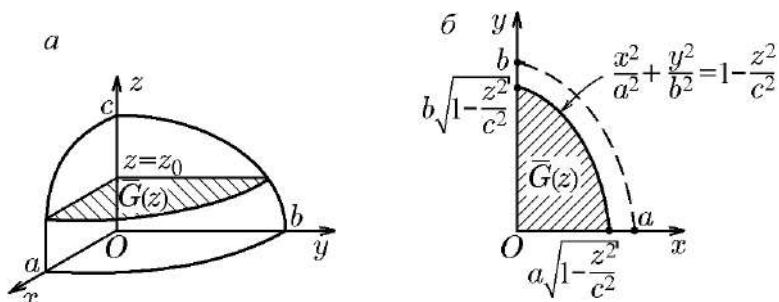
и отрезками  $\left[0, a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right]$  оси  $Ox$  и  $\left[0, b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right]$  оси  $Oy$ . Причем для всех  $x$  из отрезка  $\left[0, a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right]$  переменная  $y$  изменяется от  $y = 0$  до  $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}$ , а для всех  $y$  из отрезка  $\left[0, b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right]$  переменная  $x$  изменяется от  $x = 0$  до  $x = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$ .

Теперь, по аналогии с тем как были получены повторные интегралы (7.18), (7.19), можем получить два представления тройного интеграла с разным порядком интегрирования:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^c dz \int_0^{a\sqrt{1-z^2/c^2}} dx \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2-z^2/c^2}} f(x, y, z) dy; \quad (7.26)$$

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^c dz \int_0^{b\sqrt{1-z^2/c^2}} dy \int_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}} f(x, y, z) dx. \quad (7.27)$$

Эти формулы замыкают перечень из шести возможных расстановок пределов в тройном интеграле по заданной области (7.15).

Рис. 43. Сечение области  $G$  плоскостью, перпендикулярной оси  $Oz$ :а)  $\bar{G}(z) = Z \cap G$ ,  $Z = (z = z_0)$ ; б) сечение плоскостью  $z = z_0$ :

$$\left\{ x \in \left[ 0, a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \right], y \in \left[ 0, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}} \right] \right\},$$

$$\left\{ y \in \left[ 0, b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \right], x \in \left[ 0, a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}} \right] \right\}$$

2-й способ. Используем формулу (7.13), в которой воспользуемся проекцией области интегрирования  $G$  не на координатные оси, а на координатные плоскости  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$ .

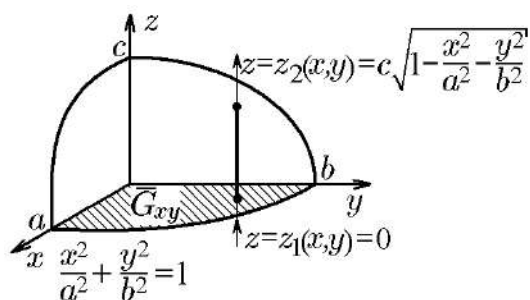
1. Проектируем область  $\bar{G}$  на плоскость  $xOy$ . Ее проекцией является двумерная область  $\bar{G}_{xy}$  (рис. 44). Следовательно, для тройного интеграла, согласно (7.13), имеем повторный интеграл

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\bar{G}_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

где  $\bar{G}_{xy}$  – двумерная проекция ограничена четвертью эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и отрезками  $[0, a]$  оси  $Ox$  и  $[0, b]$  оси  $Oy$  (рис. 44).

Рис. 44. Проекция области  $G$  на плоскость  $xOy$ 

Поскольку  $\bar{G}$  является элементарной областью относительно оси  $Oz$ , то для всех точек  $P(x, y) \in G_{xy}$  выполняется неравенство  $z_1(x, y) < z < z_2(x, y)$ , где  $z_1 = 0$  и  $z_2 = c\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$ , и, следовательно,

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\bar{G}_{xy}} dx dy \int_0^{c\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}} f(x, y, z) dz. \quad (7.28)$$



Расстановка пределов во внешнем двойном интеграле (7.28) затруднений не вызывает. Действительно, внешнее интегрирование по  $x$ , а внутреннее по  $y$  дают

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} f(x, y, z) dz. \quad (7.29)$$

В свою очередь, изменение порядка интегрирования в двойном интеграле по  $G_{xy}$  дает

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^b dy \int_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}} dx \int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} f(x, y, z) dz. \quad (7.30)$$

Формулы (7.29) и (7.30) совпадают, соответственно, с формулами (7.18) и (7.22), полученными первым способом. Очевидно, что использование второго способа, т. е. формулы (7.13), требующей проектирования на координатные плоскости, приводит к конечному результату при помощи наиболее простых геометрических построений. Поэтому зачастую использование этого способа является более предпочтительным. Хотя имеются и исключения (см. примеры ниже).

Оставшиеся два пункта рассмотрим совсем коротко, так как все выкладки дословно повторяют предыдущие.

2. Проектирование области  $G$  на плоскость  $xOz$  дает формулы (7.19) и (7.26).
3. Проектирование области  $G$  на плоскость  $yOz$  дает формулы (7.23) и (7.27).

**Пример 7.2.** Изменить порядок интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz. \quad (7.31)$$

**Решение.** В соответствии с пределами одномерных интегралов в (7.31) область интегрирования  $G$  можно описать следующим образом:

$$\bar{G} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq x + y\}. \quad (7.32)$$

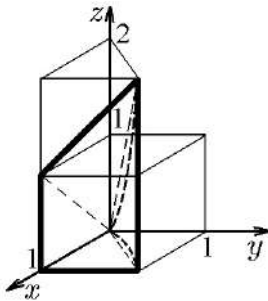


Рис. 45. Область  $G$  в примере 7.2

Чтобы изменить порядок интегрирования, можно построить чертеж этой трехмерной области  $G$  (рис. 45) и с его помощью расставить пределы в одномерных интегралах тройного, выбрав требуемый порядок, как это было сделано в предыдущем примере.

Можно, однако, поступить по-другому. Исходя из смысла формул (7.12) и (7.13), интеграл (7.31) следует записать как

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_{G_{xy}} dx dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz, \quad (7.33)$$

или, соответственно,

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz, \quad (7.34)$$

где  $G_{xy}$  – проекция области  $G$  на плоскость  $xOy$  (т. е.  $z = 0$ ), а  $G(x)$  – двумерное сечение трехмерной области координатной плоскостью  $x = x_0$ ,  $0 < x_0 < 1$ . Это позволяет в интегралах (7.33) и (7.34) воспользоваться известной уже процедурой изменения порядка интегрирования в фигурирующих в них двойных интегралах по двумерным областям  $G_{xy}$  и  $G(x)$ . В этом случае можно ограничиться геометрическими построениями двумерных областей, избежав необходимости трехмерных построений, что существенно упрощает задачу расстановки новых пределов при изменении порядка интегрирования.

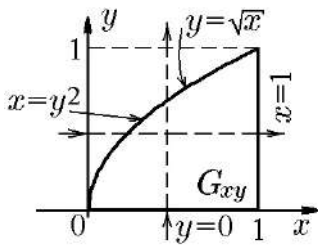


Рис. 46. Область  $G_{xy}$

Рассмотрим сначала интеграл (7.33). Как следует из (7.32), область интегрирования  $G_{xy}$  (рис. 46) описывается неравенствами

$$G_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}. \quad (7.35)$$

Если в двойном интеграле в (7.33) внешнее интегрирование выбрать по переменной  $x$ , а внутреннее по  $y$ , то мы придем к исходному порядку интегрирования (7.31). Изменение порядка интегрирования, т. е. выбор внешнего интегрирования по переменной  $y$ , а внутреннего – по  $x$ , заставляет неравенства (7.35) записать в виде (см. рис. 46)

$$G_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1\}. \quad (7.36)$$

Исходя из этого, приходим к равенству интегралов с измененным порядком интегрирования по переменным  $x$  и  $y$ :

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz. \quad (7.37)$$

Теперь рассмотрим интеграл (7.34). Как следует из равенств (7.32) и (7.34), область интегрирования  $G(x)$  при фиксированном  $x \in ]0, 1[$  (рис. 47) описывается неравенствами

$$G(x) = \{(y, z) : 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq x + y\}. \quad (7.38)$$

Если в двойном интеграле в (7.34) внешнее интегрирование выбрать по переменной  $y$ , а внутреннее – по  $z$ , то мы придем к исходному порядку интегрирования (7.31). Изменение порядка интегрирования, т. е. выбор внешнего интегрирования по переменной  $z$ , а внутреннего – по  $y$ , приводит к неравенствам (см. рис. 47):

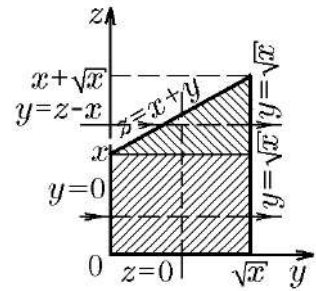


Рис. 47. Область  $G(x)$

$$G_{xy} = \{(y, z) : 0 \leq z \leq x, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\} \cup \{(y, z) : x \leq z \leq x + \sqrt{x}, z - x \leq y \leq \sqrt{x}\}, \quad (7.39)$$

из которых следует равенство интегралов с измененным порядком интегрирования по переменным  $y$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \\ & = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \int_x^{x+\sqrt{x}} dz \int_{z-x}^{\sqrt{x}} f(x, y, z) dy. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Таким образом, формулы (7.37) и (7.40) задают интегралы с измененным порядком интегрирования. Так, в (7.37) изменен порядок интегрирования по переменным  $x$  и  $y$ , а в (7.40) изменен порядок интегрирования по переменным  $y$  и  $z$ . В результате формулы (7.37) и (7.40) совместно с исходной (7.31) раскрывают три из шести возможных порядков интегрирования тройной области. Применяв рассмотренные выше приемы к интегралам (7.37) и (7.40) с уже измененными порядками, можем получить все шесть формул, определяющих порядок интегрирования в тройном интеграле. Ограничимся рассмотрением еще одной итерации, например для интеграла в правой части равенства (7.37), представив его в виде

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dy \iint_{G(y)} f(x, y, z) dx dz, \quad (7.41)$$

где область  $G(y)$  – двумерное сечение трехмерной области  $G$  координатной плоскостью  $y = y_0$ ,  $y_0 \in ]0, 1[$  и, как следует из пределов одномерных интегралов в (7.41), при фиксированном  $y \in ]0, 1[$  (рис. 48) описывается неравенствами

$$G(y) = \{(x, z): y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x + y\}. \quad (7.42)$$

Чтобы изменить порядок интегрирования в двойном интеграле (7.41) по переменным  $x$  и  $z$ , выберем внешнее интегрирование по  $z$ , а внутреннее по  $x$ . Такой выбор приводит к неравенствам (см. рис. 48)

$$G(y) = \{(x, z): 0 \leq z \leq y + y^2, y^2 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, z): y + y^2 \leq z \leq y + 1, y - z \leq x \leq 1\}, \quad (7.43)$$

из которых следует равенство интегралов с измененным порядком интегрирования по переменным  $x$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \\ & = \int_0^1 dy \int_0^{y+y^2} dz \int_{y^2}^1 f(x, y, z) dx + \int_0^1 dy \int_{y+y^2}^{y+1} dz \int_{y-z}^1 f(x, y, z) dx. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Таким образом, из шести возможных вариантов представления тройной области последовательностью одномерных мы получили четыре. Остальные два варианта можно получить еще двумя итерациями, действуя аналогично.

На практике, как правило, нужного порядка интегрирования можно добиться одной или двумя итерациями. Зачастую именно этот способ является наиболее простым.

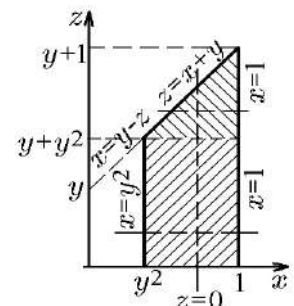


Рис. 48. Область  $G(y)$

**Пример 7.3.** Доказать равенство

$$\int_0^R dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz = \int_0^R dz \int_z^R dy \int_y^R f(x, y, z) dx. \quad (7.45)$$

**Решение.** Доказательство состоит в обосновании справедливости изменения порядка интегрирования в тройном интеграле. Если проводить изменение порядка методом перестановки соседних переменных, как в предыдущем примере, то потребуется три перестановки:

$$xyz \Rightarrow (xzy \rightarrow zxy \rightarrow zyx) \text{ или } (yxz \rightarrow yzx \rightarrow zyx).$$

В тех же случаях, когда промежуточные перестановки интереса не представляют, а условия на переменные  $x, y, z$  достаточно просты, можно провести перестановку аналитически, не прибегая к геометрическим построениям. Данная ситуация имеет место и для области интегрирования рассматриваемого интеграла (7.3), которая может быть задана следующим образом:

$$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\} \quad (7.46)$$

*1-й способ.* Для этого, исходя из системы неравенств (7.46), найдем оценки для переменных интегрирования в требуемом порядке:  $z, y, x$ . Из трех неравенств (7.46) для переменной  $z$  справедливы оценки  $0 \leq z \leq y \leq x \leq R$ , т. е.  $0 \leq z \leq R$ . Для переменной  $y$  имеем  $y \leq x \leq R$  и при фиксированном  $z$ , соответственно,  $z \leq y$ , следовательно,  $z \leq y \leq R$ . Наконец, для  $x$  имеем  $x \geq y$  и  $x \leq R$ , т. е.  $y \leq x \leq R$ . Таким образом, аналогом (7.46) будет система неравенств

$$G = \{(x, y, z): 0 \leq z \leq R, z \leq y \leq R, y \leq x \leq R\}, \quad (7.47)$$

из которой и следует равенство (7.45), т. е.

$$\int_0^R dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz = \int_0^R dz \int_z^R dy \int_y^R f(x, y, z) dx.$$

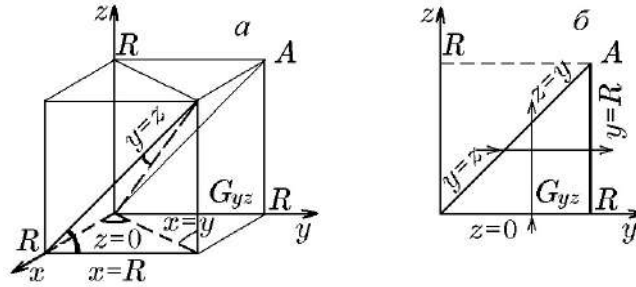
Заметим, что аналогично можно достаточно просто получить остальные четыре варианта расстановки пределов в тройном интеграле по области (7.47).

*2-й способ.* Для сравнения приведем доказательство равенства (7.45) с помощью геометрических построений области (7.46). Основной трудностью здесь является построение поверхностей, задаваемых системой неравенств (7.46), и особенно их линий пересечения. Так как в нашем случае поверхностями являются плоскости, а их линии пересечения – прямыми, то область  $G$  в данном случае будет четырехгранником (рис. 49, а). Поскольку область  $G$  является элементарной относительно оси  $Ox$  (рис. 49, а), то исходный интеграл можно записать как

$$\begin{aligned} & \int_0^R dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz = \\ & = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{G_{yz}} dy dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) dx, \end{aligned} \quad (7.48)$$

где  $x_1(y, z) = y$ ,  $x_2(y, z) = R$ , а  $G_{yz}$  – проекция  $G$  на плоскость  $yOz$  (рис. 49, б). Если внешнее интегрирование по  $G_{yz}$  в (7.48) выбрать по  $z$ , а внутреннее по  $y$ , то (7.48) можно записать в виде

$$\int_0^R dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz = \int_0^R dz \int_z^R dy \int_y^R f(x, y, z) dx,$$

Рис. 49. Области интегрирования: а)  $G$ ; б)  $G_{yz}$ 

совпадающем с (7.45). Здесь мы учли, что  $0 \leq z \leq R$  и  $z \leq y \leq R$  при фиксированном  $z$  (рис. 49, б).

Заметим, что если внешнее интегрирование по  $G_{yz}$  в (7.48) выбрать по  $y$ , а внутреннее – по  $z$ , то из (7.48) следует еще одно равенство

$$\int_0^R dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz = \int_0^R dy \int_0^y dz \int_y^R f(x, y, z) dx, \quad (7.49)$$

дополняющее (7.45). Здесь мы учли то, что  $0 \leq y \leq R$  и  $0 \leq z \leq y$  при фиксированном  $y$  (рис. 49, б).

## 7.2. Примеры вычисления тройных интегралов

На основании рассмотренной выше процедуры расстановки пределов в тройных интегралах перейдем к их вычислению для конкретных подынтегральных функций. Начнем с интегралов, расстановка пределов в которых уже рассмотрена в примерах 7.1–7.3.

**Пример 7.4.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

по области  $G$ , расположенной в I октанте и ограниченной плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  и эллипсоидом  $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$  для функций

$$1) f_1(x, y, z) = 1, \quad 2) f_2(x, y, z) = x^2, \quad 3) f_3(x, y, z) = z^2.$$

**Решение 1.** Запишем тройной интеграл:

$$I_1 = \iiint_G dx dy dz.$$

Расстановка пределов в повторных интегралах для этого интеграла по области  $G$  была рассмотрена в примере 7.1. Если воспользоваться одной из шести полученных там формул, например (7.29), то из нее следует

$$I_1 = \iiint_G dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} dz.$$

Последовательное вычисление одномерных интегралов дает

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy \left( z \Big|_0^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} \right) = c \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dy = \\ &= cb \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] - \left(\frac{y}{b}\right)^2} d\left(\frac{y}{b}\right). \end{aligned}$$

Здесь для вычисления внутреннего интеграла можно воспользоваться известной формулой для нахождения первообразной (см. пример 3.18 [18]):

$$\int \sqrt{A^2 - t^2} dt = \frac{1}{2} \left[ t\sqrt{A^2 - t^2} + A^2 \arcsin \frac{t}{A} \right] + C,$$

тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= cb \int_0^a dx \left[ \frac{y}{b} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{y}{b\sqrt{1 - x^2/a^2}} \right] \Big|_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} = \\ &= \frac{cb}{2} \int_0^a \left[ 0 + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \right] dx = \frac{cb\pi}{4} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \\ &= \frac{\pi}{4} cb \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a = \frac{\pi}{4} cba \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6} abc. \end{aligned} \quad (7.50)$$

◇ Заметим, что интеграл  $I_1$  (7.50) определяет меру области  $G$ , т. е. ее объем  $V_G$ . Так как область  $G$  представляет собой восьмую часть тела, ограниченно-го трехосным эллипсоидом с полуосями  $a, b, c$ , то, согласно (7.50), объем тела, ограниченного всем эллипсоидом, определяется равенством

$$V = 8V_G = 8 \cdot \frac{\pi}{6} abc = \frac{4}{3} \pi abc.$$

2. Запишем тройной интеграл от функции  $f_2(x, y, z) = x^2$ :

$$I_2 = \iiint_G x^2 dx dy dz.$$

Воспользуемся тем же вариантом расстановки пределов в повторных интегралах, т. е.

$$I_2 = \iiint_G x^2 dx dy dz = \int_0^a x^2 dx \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} dz,$$

и заодно результатом вычисления двух внутренних интегралов:

$$I_2 = \int_0^a x^2 dx \frac{cb\pi}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{cb\pi}{4} \int_0^a \left(x^2 - \frac{x^4}{a^2}\right) dx = \frac{cb\pi}{4} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{a^3 b c \pi}{4} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{a^3 b c \pi}{30}.$$

3. Имеем тройной интеграл от функции  $f_3(x, y, z) = z^2$ :

$$I_3 = \iiint_G z^2 dx dy dz.$$

Если воспользоваться тем же вариантом расстановки пределов, что и в двух предыдущих случаях, то будем иметь

$$I_3 = \iiint_G z^2 dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} z^2 dz.$$

Нетрудно заметить, что вычисление интегралов в таком порядке связано с громоздкими выкладками. Во избежание этого и исходя из элементарности области  $G$  относительно всех координатных осей, воспользуемся проекцией области  $G$  на ось  $Oz$ . В этом случае, согласно представлению тройного интеграла в виде (7.24), можем записать

$$\iiint_G z^2 dx dy dz = \int_0^c z^2 dz \iint_{G(z)} dx dy, \quad (7.51)$$

где отрезок  $[0, c]$  оси  $Oz$  является проекцией области  $G$  на ось  $Oz$ ,  $G(z)$  есть сечение области  $G$  координатной плоскостью  $z = z_0$ ,  $0 < z_0 < c$ , и представляет собой плоскую область, ограниченную прямыми  $x = y = 0$  и частью эллипса

$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2}{\tilde{b}^2} = 1, \quad \tilde{a} = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad \tilde{b} = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \quad (7.52)$$

из первой четверти.

Чтобы найти двойной интеграл

$$\iint_{G(z)} dx dy,$$

можно свести его к повторному, а можно воспользоваться тем, что он равен площади  $G(z)$ , т. е. четверти площади области, ограниченной эллипсом (7.52) с полуосями  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ . Исходя из этого, получим

$$\iint_{G(z)} dx dy = \frac{1}{4} \pi \tilde{a} \tilde{b} = \frac{1}{4} \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

Подстановка этого выражения в (7.51) дает значение тройного интеграла:

$$\begin{aligned} I_3 &= \iiint_G z^2 dx dy dz = \int_0^c z^2 dz \frac{1}{4} \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) = \frac{ab\pi}{4} \int_0^c \left( z^2 - \frac{z^4}{c^2} \right) dz = \\ &= \frac{ab\pi}{4} \left( \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5c^2} \right) \Big|_0^c = \frac{abc^3\pi}{30}. \end{aligned}$$

**Пример 7.5.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_G (x + y) dx dy dz$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $z = 0$ ,  $z = x + y$ .

**Решение.** Область  $G$  уже рассматривалась в примере 7.2 и изображена на рис. 45. В этом примере приведены четыре варианта расстановки пределов в тройном интеграле по этой области. Воспользуемся наиболее простым из рассмотренных вариантов (7.31), согласно которому

$$\iiint_G (x + y) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x+y} (x + y) dz. \quad (7.53)$$

Так как подынтегральная функция  $x + y$  ограничена и непрерывна на  $G$ , то тройной интеграл (7.52) существует, и последовательное вычисление его повторных интегралов дает

$$\begin{aligned} \iiint_G (x + y) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x + y) dy \int_0^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x + y) dy \left( z \Big|_0^{x+y} \right) = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x + y)^2 dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x + y)^2 d(x + y) = \int_0^1 dx \left( \frac{(x + y)^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{x}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 [(x + \sqrt{x})^3 - x^3] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (3x^{5/2} + 3x^2 + x^{3/2}) dx = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{6}{7} x^{7/2} + x^3 + \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{79}{105}. \end{aligned}$$

**Пример 7.6.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz \quad (7.54)$$

по области  $G$ , определенной системой неравенств:  $y \leq \sqrt{x}$ ,  $2x + 4z \leq \pi$ ,  $z \geq 0$ .

**Решение.** Чтобы выбрать порядок интегрирования в тройном интеграле (7.54), построим поверхности, ограничивающие область интегрирования  $G$  и состоящие из трех плоскостей и цилиндрической поверхности (рис. 50, а). Из этого рисунка следует, что область  $G$  имеет простые проекции на плоскости  $xOy$  (рис. 50, б),  $xOz$  (рис. 50, в) и элементарные относительно осей  $Oz$  и  $Oy$ .

Рассмотрим два варианта расстановки пределов.

1. Область  $G$  проектируется на плоскость  $xOy$ . В этом случае внутреннее интегрирование осуществляется по переменной  $z$  и тройной интеграл (7.54) можно представить как

$$I = \iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz = \iint_{G_{xy}} dx dy \int_0^{(\pi-2x)/4} y \cos(x + 2z) dz. \quad (7.55)$$



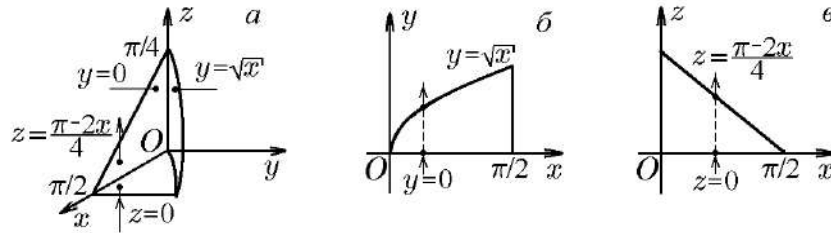


Рис. 50. Область  $G$  (а) и ее проекции:  $G_{xy}$  на плоскость  $xOy$  (б) и  $G_{xz}$  на плоскость  $xOz$  (в)

Теперь, выбрав внешнее интегрирование в двойном интеграле по области  $G_{xy}$  (рис. 50, б) по переменной  $x$ , получим

$$\iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{(\pi-2x)/4} y \cos(x + 2z) dz. \quad (7.56)$$

Последовательное вычисление одномерных интегралов в (7.56) дает

$$\begin{aligned} I &= \iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{(\pi-2x)/4} \cos(x + 2z) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{(\pi-2x)/4} \cos(x + 2z) d(x + 2z) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \left( \sin(x + 2z) \Big|_0^{(\pi-2x)/4} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin x \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx \left( \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{x}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} x(1 - \sin x) dx. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Проведя в (7.57) интегрирование по частям, получим

$$\iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz = \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{\pi/2} x dx - \int_0^{\pi/2} x \sin x dx \right\} = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right).$$

2. Область  $G$  проецируется на плоскость  $xOz$ . В этом случае внутреннее интегрирование осуществляется по переменной  $y$  и тройной интеграл (7.54) можно представить как

$$I = \iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz = \iint_{G_{xz}} dx dz \int_0^{\sqrt{y}} y \cos(x + 2z) dy. \quad (7.58)$$

Теперь, выбрав внешнее интегрирование в двойном интеграле по области  $G_{xz}$  (рис. 50, в) по переменной  $x$ , получим

$$I = \iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{(\pi-2x)/4} dz \int_0^{\sqrt{x}} y \cos(x + 2z) dy. \quad (7.59)$$

Последовательное вычисление одномерных интегралов в (7.59) дает

$$\begin{aligned} I &= \iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{(\pi-2x)/4} \cos(x + 2z) dz \int_0^{\sqrt{x}} y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{(\pi-2x)/4} x \cos(x + 2z) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{(\pi-2x)/4} \cos(x + 2z) dz = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} x(1 - \sin x) dx. \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с (7.57) и, следовательно,

$$I = \iiint_G y \cos(x + 2z) dx dy dz = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right).$$

**Пример 7.7.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_G \frac{dx dy dz}{2R + x} \quad (7.60)$$

по области  $G$ , ограниченной цилиндрами  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x^2 + z^2 = R^2$ .

**Решение.** Так как область интегрирования  $G$  лежит внутри обоих цилиндров, то координаты точек  $P(x, y, z) \in G$  удовлетворяют неравенствам  $x^2 + y^2 < R^2$ ,  $x^2 + z^2 < R^2$  или  $|x| < \sqrt{R^2 - y^2}$ ,  $|x| < \sqrt{R^2 - z^2}$ . Это означает, что ортогональной проекцией замкнутой области  $G$  на ось  $Ox$  (при  $y = z = 0$ ,  $|x| < R$ ) является отрезок  $[-R, R]$ .

Учитывая, что подынтегральная функция  $f(x, y, z) = 1/(2R + x)$  зависит только от переменной  $x$ , тройной интеграл (7.60) удобно представить в виде

$$I = \iiint_G \frac{dx dy dz}{2R + x} = \int_{-R}^R \frac{dx}{2R + x} \iint_{G(x)} dy dz, \quad (7.61)$$

где область  $G(x)$  является плоским сечением области  $G$  координатной плоскостью  $x = x_0$ ,  $|x_0| < R$ , и при фиксированном  $x$  определяется неравенствами  $|y| < \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $|z| < \sqrt{R^2 - x^2}$ . Плоская область, определяемая этими неравенствами, представляет собой квадрат со стороной  $l = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ , т. е. площадью  $S(x) = l^2 = (2\sqrt{R^2 - x^2})^2 = 4(R^2 - x^2)$ . Приняв во внимание, что

$$\iint_{G(x)} dy dz = m(G(x)) = S(x) = 4(R^2 - x^2),$$

из (7.61) найдем

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{dx dy dz}{2R+x} &= \int_{-R}^R \frac{4(R^2-x^2)}{2R+x} dx = 4 \left\{ -3R^2 \int_{-R}^R \frac{dx}{2R+x} + \int_{-R}^R (2R-x) dx \right\} = \\ &= 4 \left( 2Rx \Big|_{-R}^R - \frac{x^2}{2} \Big|_{-R}^R \right) - 12R^2 \ln |2R+x| \Big|_{-R}^R = 4R^2(4-3 \ln 3). \end{aligned} \quad (7.62)$$

Для сравнения вычислим интеграл (7.60) с помощью геометрических построений. Область, ограниченная двумя цилиндрами с одним радиусом  $R$ , изображена на рис. 51, а.

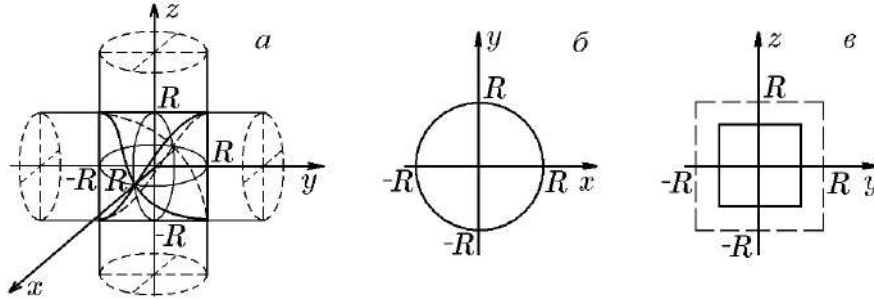


Рис. 51. Область  $G$  (а); ее проекция:  $G_{xy}$   $x^2 + y^2 \leq R^2$  на плоскость  $xOy$  (б); сечение  $G(x)$ :  $|z| \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $|y| \leq \sqrt{R^2 - x^2}$  (в)

Из рис. 51 следует, что область  $G$  имеет простую проекцию  $G_{xy}$  на плоскость  $xOy$  в виде круга радиусом  $R$ :  $x^2 + y^2 \leq R^2$  (рис. 51, б). Сама область  $G$  является элементарной относительно оси  $Oz$  и ограничена сверху цилиндрической поверхностью  $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ , а снизу – цилиндрической поверхностью  $z = -\sqrt{R^2 - x^2}$ . С учетом этого тройной интеграл (7.60) можно записать как

$$\iiint_G \frac{dx dy dz}{2R+x} = \iint_{G_{xy}} dx dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dz}{2R+x}. \quad (7.63)$$

Если внешнее интегрирование в двойном интеграле в (7.63) выбрать по переменной  $x$ , а внутреннее – по  $y$ , то с учетом того, что

$$G_{xy} = \{(x, y) : -R < x < R, -\sqrt{R^2 - x^2} < y < \sqrt{R^2 - x^2}\},$$

формула (7.63) преобразуется к виду

$$\iiint_G \frac{dx dy dz}{2R+x} = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dz}{2R+x}. \quad (7.64)$$

Вычисление двух внутренних интегралов (7.64) сводит тройной интеграл к одномерному

$$\iiint_G \frac{dx dy dz}{2R+x} = \int_{-R}^R \frac{dx}{2R+x} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz =$$

$$= \int_{-R}^R \frac{dx}{2R+x} \left( y \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) \left( z \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) = 4 \int_{-R}^R \frac{(R^2-x^2)dx}{2R+x},$$

совпадающему с (7.62) и дающему то же значение тройного интеграла (7.60).

Заметим, что двойной интеграл

$$\iint_{G(x)} dy dz$$

в (7.61) мы определили как площадь квадрата  $S(x) = 4(R^2 - x^2)$ . Этот же результат можно получить, исходя из неравенств

$$G(x) = \{(y, z): -\sqrt{R^2-x^2} < y < \sqrt{R^2-x^2}, -\sqrt{R^2-x^2} < z < \sqrt{R^2-x^2}\},$$

определяющих сечение  $G(x)$  при фиксированном  $x$  (рис. 51, в), и, следовательно,

$$\iint_{G(x)} dy dz = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz = \left( y \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) \left( z \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) = 4(R^2 - x^2).$$

**Пример 7.8.** Вычислить интеграл

$$I = \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \int_0^{3-y-z} \frac{dx}{(x+y+z)^2} \quad (7.65)$$

и проверить полученный результат, проведя изменение порядка интегрирования.

**Решение.** Из значений пределов одномерных интегралов (7.65) следует, что область интегрирования  $G$  задается системой неравенств

$$G = \{(x, y, z): 1 < z < 3, 1-z < y < 2-z, 0 < x < 3-y-z\}. \quad (7.66)$$

Подынтегральная функция  $f(x, y, z) = 1/(x+y+z)^2$  непрерывна и ограничена на множестве  $G$ . Это означает, что тройной интеграл (7.65) существует, и последовательное вычисление его одномерных интегралов дает

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \int_0^{3-y-z} \frac{dx}{(x+y+z)^2} = \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \frac{1}{(x+y+z)} \Big|_0^{3-y-z} = \\ &= - \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{z+y} \right) dy = - \int_1^3 dz \left( \frac{y}{3} - \ln|z+y| \right) \Big|_{1-z}^{3-z} = \\ &= - \int_1^3 \left( \frac{2}{3} - \ln 3 \right) dz = - \left( \frac{2}{3} - \ln 3 \right) z \Big|_1^3 = 2 \left( \ln 3 - \frac{2}{3} \right). \end{aligned} \quad (7.67)$$

Чтобы изменить порядок интегрирования, можно воспользоваться возможностью замены двух соседних переменных, подробно рассмотренной в примере 7.2. А можно воспользоваться геометрическим представлением множества  $G$ , позволяющим выбрать любой порядок интегрирования. Область  $G$ , задаваемая системой (7.66), представляет собой треугольную призму (рис. 52, а). Как следует из этого рисунка, первоначальная расстановка пределов (7.65) соответствует проекции области  $G$  на плоскость  $yOz$ . Поэтому

$$I = \iiint_G \frac{dx \, dy \, dz}{(x + y + z)^2} = \iint_{G_{yz}} dz \, dy \int_0^{3-y-z} \frac{dx}{(x + y + z)^2},$$

где  $G_{yz}$  – проекция области  $G$  на плоскость  $yOz$  (рис. 52, б), которая задается системой неравенств

$$G_{yz} = \{(y, z): 1 < z < 3, 1 - z < y < 3 - z\},$$

что и соответствует порядку интегрирования в (7.65).

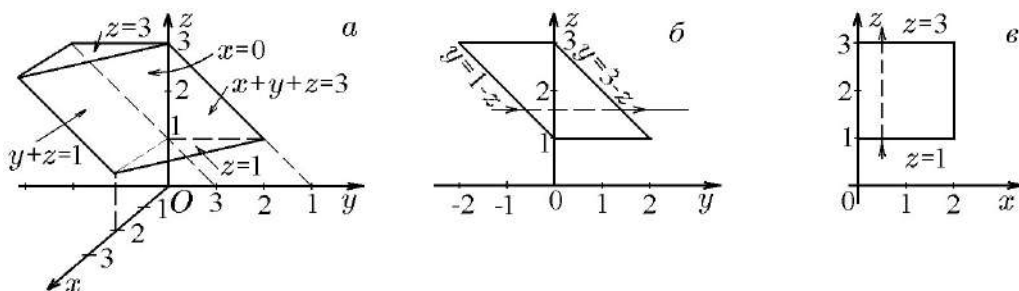


Рис. 52. Область  $G$  (а);  $G_{yz}$  – проекция  $G$  на плоскость  $yOz$  (б);  $G_{xz}$  – проекция  $G$  на плоскость  $xOz$  (в)

Из рис. 52,а следует, что область  $G$  имеет простую проекцию  $G_{xz}$  на плоскость  $xOz$ , представляющую собой прямоугольник (рис. 52, в):

$$G_{xz} = \{(x, y, z): 0 < x < 2, 1 < z < 3\}.$$

С учетом этого и приняв во внимание, что область  $G$  является элементарной относительно оси  $Oy$  (рис. 52,а) и  $1 - z < y < 3 - x - z$ , имеем результат, подтверждающий (7.67):

$$\begin{aligned} I &= \iiint_G \frac{dx \, dy \, dz}{(x + y + z)^2} = \iint_{G_{xz}} dx \, dz \int_0^{3-x-z} \frac{dy}{(x + y + z)^2} = \\ &= - \int_0^2 dx \int_1^3 \frac{1}{(x + y + z)} \Big|_0^{3-x-z} dz = \int_0^2 dx \int_1^3 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \right) dz = \\ &= \int_0^2 dx \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \right) \int_1^3 dz = \left[ \ln|x+1| \Big|_0^2 - \frac{x}{3} \Big|_0^2 \right] \left( z \Big|_1^3 \right) = 2 \left( \ln 3 - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Следующий пример иллюстрирует вычисление тройных интегралов от разрывной функции.

**Пример 7.9.** Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_G z \, dx \, dy \, dz, \quad (7.68)$$

где  $G$  — область, ограниченная параболоидом  $x^2 + y^2 = R(2R - z)$  между координатными осями  $z = 0$ ,  $z = R$  и конусом  $z^2 = 3(x^2 + y^2)$  между плоскостями  $z = R$ ,  $z = 3R$ .

**Решение.** Область  $G$  изображена на рис. 53, а, из которого следует, что ее ортогональной проекцией на ось  $Oz$  является отрезок  $[0, 3R]$ . Вместе с этим координатная плоскость  $z = z_0$  пересекает  $G$  по кругу  $G(z)$  с радиусом  $r_1 = \sqrt{3R^2 - Rz}$  для  $0 < z < R$  и радиусом  $r_2 = z/\sqrt{3}$  для  $R \leq z < 3R$ . Исходя из этого тройной интеграл (7.68) можно представить повторным вида:

$$\iiint_G z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{3R} dz \iint_{G(z)} z \, dx \, dy = \int_0^{3R} F(z) dz,$$

где

$$F(z) = z \iint_{G(z)} dx \, dy = z \cdot \pi z^2 = \begin{cases} z \cdot \pi r_1^2 = \pi z(2R^2 - Rz), & 0 < z < R; \\ z \cdot \pi r_2^2 = \pi z \cdot \frac{z^2}{3} = \frac{\pi z^3}{3}, & R \leq z < 3R. \end{cases} \quad (7.69)$$

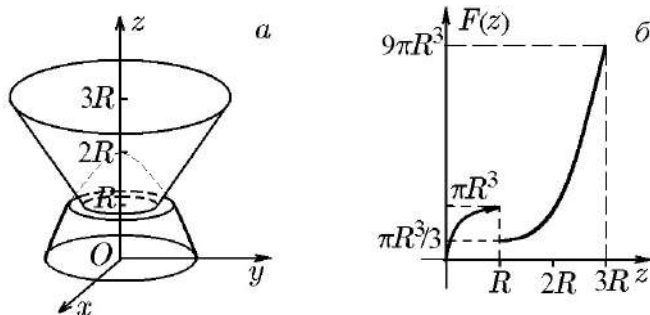


Рис. 53. Область  $G$  (а) и первообразная  $F(z)$  (б)

Откуда следует, что функция  $F(z)$  разрывна в точке  $z = R$ , но интегрируема на  $[0, 3R]$ . Учитывая вид функции  $F(z)$  (7.69), вычислим тройной интеграл (7.68):

$$\begin{aligned} \iiint_G z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{3R} F(z) dz = \int_0^R (2\pi R^2 z - \pi R z^2) dz + \int_R^{3R} \frac{\pi z^3}{3} dz = \\ &= \left( 2\pi R^2 z^2 - \pi R \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^R + \frac{\pi z^4}{12} \Big|_R^{3R} = \pi \left( R^4 - \frac{R^4}{3} + \frac{\pi R^4}{12} (3^4 - 1^4) \right) = \frac{22\pi R^4}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 7.10.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \int_1^2 dy \int_y^2 dx \int_0^{1/xy} \frac{dz}{x(1 + x^2 y^2 z^2)}. \quad (7.70)$$

**Решение.** Из значений пределов одномерных интегралов следует, что область интегрирования  $G$  задается системой неравенств

$$G: \left\{ (x, y, z): 1 < y < 2, y < x < 2, 0 < z < \frac{1}{xy} \right\},$$

из которых следует, что подынтегральная функция  $f(x, y, z) = 1/[x(1 + x^2y^2z^2)]$  является непрерывной и ограниченной на множестве  $G$ . Это означает, что тройной интеграл  $I$  существует, и последовательное вычисление его одномерных интегралов дает

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dy \int_y^2 dx \int_0^{1/xy} \frac{dz}{x[1 + (xyz)^2]} = \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{dx}{x} \int_0^{1/xy} \frac{1}{1 + (xyz)^2} dxyz = \\ &= \int_1^2 \frac{dy}{y} \int_y^2 \frac{dx}{x^2} \operatorname{arctg}(xyz) \Big|_0^{1/xy} = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{dy}{y} \int_y^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{dy}{y} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_y^2 = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{y} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{\pi}{4} \left( -\frac{1}{y} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln |y| \Big|_1^2 \right) = \frac{\pi}{8} (1 - \ln 2). \end{aligned}$$

### 7.3. Примеры вычисления $n$ -кратных интегралов

Общие правила вычисления  $n$ -кратных интегралов по произвольным жордановым множествам задаются теоремой 5.7: ее основной формулой (5.66) и следствиями из нее. Если понятие области, элементарной относительно выбранной оси, с двух- и трехмерных пространств распространить на пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$ , то эти общие формулы также можно будет дополнить полезными для практики вычислений равенствами.

◆ Область  $G \subset \mathbb{R}^n$  называется *элементарной относительно оси  $Ox_n$* , если

$$G = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in G_{x_1 \dots x_{n-1}} \subset \mathbb{R}^{n-1}, \right. \\ \left. \underline{X}_n(x_1, \dots, x_{n-1}) < x_n < \overline{X}_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \right\}, \quad (7.71)$$

где  $G_{x_1 \dots x_{n-1}}$  – ограниченная в  $\mathbb{R}^{n-1}$  область и  $\underline{X}_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $\overline{X}_n(x_1, \dots, x_{n-1})$  – функции, непрерывные в замкнутой области  $\overline{G}_{x_1 \dots x_{n-1}}$ .

Если область интегрирования  $G \subset \mathbb{R}^n$  является элементарной относительно оси  $Ox_n$ , то формулу (5.66) можно представить двойным равенством:

$$\begin{aligned} \int_G \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\overline{G}(x_1)} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{\overline{G}_{x_1 \dots x_{n-1}}} \dots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\underline{X}_n(x_1 \dots x_{n-1})}^{\overline{X}_n(x_1 \dots x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n, \quad (7.72) \end{aligned}$$

где во втором интеграле отрезок  $[a_1, b_1]$  является проекцией  $\overline{G}$  на ось  $Ox_1$  и  $\overline{G}(x_1)$  есть  $(n-1)$ -мерное сечение области  $\overline{G}$  координатной гиперплоскостью  $x_1 = x_{10}$ ,  $a_1 < x_{10} < b_1$ , а в третьем область  $\overline{G}_{x_1 \dots x_{n-1}}$  является проекцией  $G$  на пространство  $\mathbb{R}^{n-1}$ , ортогональное координатной оси  $Ox_n$ .

**Пример 7.11.** Найти в пространстве  $\mathbb{R}^4$  меру симплекса

$$G = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_4}{a_4} \leq 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \right\}. \quad (7.73)$$

**Решение.** Меру симплекса  $G$  определяет четырехкратный интеграл

$$m(G) = \int \cdots \int_G dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \quad (7.74)$$

Для удобства расстановки пределов в (7.74) напомним, что нульмерный симплекс есть просто одна точка. Одномерный симплекс в  $\mathbb{R}$  есть отрезок. Двумерный симплекс в  $\mathbb{R}^2$  есть треугольник, который, в частности, в ортогональном базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  можно определить как  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1/a_1 + x_2/a_2 \leq 1$ . Трехмерный симплекс в  $\mathbb{R}^3$  есть тетраэдр, который в ортогональном базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  можно определить как  $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3; x_1/a_1 + x_2/a_2 + x_3/a_3 \leq 1$ . Его проекциями на координатные плоскости являются его грани – прямоугольные треугольники, т. е. двумерные симплексы, а проекциями тетраэдра на координатные оси являются его ребра – отрезки, т. е. одномерные симплексы. Аналогично проектируется на координатные плоскости симплекс в  $n$ -мерном пространстве  $n \geq 4$  [15]. Четырехмерный интеграл (7.74) по симплексу (7.73), согласно (7.3.), можно представить двумя повторными интегралами:

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_G dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= \int_0^{a_1} dx_1 \int \cdots \int_{G(x_1)} dx_2 dx_3 dx_4 = \\ &= \int \cdots \int_{G_{x_1 x_2 x_3}} dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{a_4(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3})} dx_4, \end{aligned} \quad (7.75)$$

где  $[0, a_1]$  – отрезок, являющийся проекцией симплекса  $G$  на ось  $Ox_1$  (т. е. его соответствующее ребро), и  $G(x_1)$  – трехмерное сечение симплекса  $G$  координатной гиперплоскостью  $x_1 = c_1, 0 < c_1 < a_1$ . В свою очередь, область  $G_{x_1 x_2 x_3}$  – проекция  $G$  на пространство  $\mathbb{R}^3$ , перпендикулярное оси  $Ox_4$ . Промежуток интегрирования по переменной  $x_4$  определяется неравенствами

$$0 \leq x_4 \leq a_4(1 - x_1/a_1 - x_2/a_2 - x_3/a_3),$$

вытекающими из неравенств (7.73), определяющих симплекс.

Следующим шагом в вычислении интегралов (7.75) является расстановка пределов в тройных интегралах по областям  $G(x_1)$  и  $G_{x_1 x_2 x_3}$ . Начнем с интеграла

$$\int \cdots \int_{G_{x_1 x_2 x_3}} dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{a_4(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3})} dx_4,$$

в котором  $G_{x_1 x_2 x_3}$  есть трехмерный симплекс, определяемый неравенствами

$$G_{x_1 x_2 x_3} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \right\}. \quad (7.76)$$



В силу этого

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_G dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= \int \cdots \int_{G_{x_1 x_2 x_3}} dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{a_4 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right)} dx_4 = \\ &= \iint_{G_{x_1 x_2}} dx_1 dx_2 \int_0^{a_3 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)} dx_3 \int_0^{a_4 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right)} dx_4, \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_G dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= \\ &= \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \int_0^{a_3 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)} dx_3 \int_0^{a_4 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right)} dx_4. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Теперь выполним последовательное вычисление одномерных интегралов:

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_G dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \int_0^{a_3 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)} dx_3 \left( x_4 \Big|_0^{a_4 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right)} \right) = \\ &= -a_4 a_3 \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \int_0^{a_3 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)} \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right) d\left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right) = \\ &= -a_4 a_3 \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right)^2 \Big|_0^{a_3 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)} = \\ &= -\frac{a_4 a_3}{2} \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \left[0 - \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)^3\right] = \\ &= -\frac{a_4 a_3 a_2}{2} \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)^2 d\left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right) = \\ &= -\frac{a_4 a_3 a_2}{2} \int_0^{a_1} dx_1 \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)^3 \Big|_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} = -\frac{a_4 a_3 a_2}{2 \cdot 3} \int_0^{a_1} dx_1 \left[0 - \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^3\right] = \\ &= -\frac{a_4 a_3 a_2}{2 \cdot 3} \int_0^{a_1} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^3 d\left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) = -\frac{a_4 a_3 a_2 a_1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^4 \Big|_0^{a_1} = \\ &= -\frac{a_4 a_3 a_2 a_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (0 - 1) = \frac{a_4 a_3 a_2 a_1}{4!}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

◇ Формула (7.78) определяет объем четырехмерной «пирамиды», ортогональные ребра  $a_1, a_2, a_3, a_4$  которой выходят из одной вершины.

Покажем, что результат (7.78) следует и из другого повторного интеграла, а именно из представления (7.75):

$$\int_G \dots \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int_0^{a_1} dx_1 \int_{G(x_1)} \dots \int dx_2 dx_3 dx_4, \quad (7.79)$$

где  $G(x_1)$  – трехмерный симплекс, являющийся трехмерным сечением четырехмерного симплекса  $G$  координатной гиперплоскостью  $x_1 = c_1$ ,  $0 < c_1 < a_1$ . Он описывается системой неравенств

$$G_{x_1} = \left\{ (x_2, x_3, x_4) : 0 < x_2 < a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right); 0 < x_3 < a_3 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right); \right. \\ \left. 0 < x_4 < a_4 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right) \right\}. \quad (7.80)$$

С учетом неравенств (7.80) расстановка пределов в интеграле (7.79) дает интеграл

$$\int_G \dots \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \int_0^{a_3 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)} dx_3 \int_0^{a_4 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right)} dx_4,$$

совпадающий с интегралом (7.77) и, соответственно, с (7.78).

**Пример 7.12.** Вычислить четырехкратный интеграл

$$\int_G \dots \int x_1 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (7.81)$$

по симплексу (7.73) из предыдущего примера.

**Решение.** Для расстановки пределов в (7.81) можно воспользоваться соотношением (7.77), тогда

$$\int_G \dots \int x_1 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int_0^{a_1} x_1 dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \int_0^{a_3 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)} dx_3 \int_0^{a_4 \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3}\right)} dx_4.$$

Последовательное вычисление трех внутренних интегралов, как и в предыдущем примере, приводит к одномерному интегралу вида

$$\int_G \dots \int x_1 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = -\frac{a_4 a_3 a_2 a_1}{2 \cdot 3} \int_0^{a_1} x_1 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^3 d\left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right).$$

Для его вычисления удобнее воспользоваться методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
 \int \cdots \int_G x_1 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= -\frac{a_4 a_3 a_2 a_1}{2 \cdot 3} \int_0^{a_1} x_1 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^3 d\left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) = \\
 &= \left| dv = \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^3 d\left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) \quad v = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^4 \right| = \\
 &= -\frac{a_4 a_3 a_2 a_1}{2 \cdot 3} \left\{ \frac{x_1}{4} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^4 \Big|_0^{a_1} - \int_0^{a_1} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^4 dx_1 \right\} = \quad (7.82) \\
 &= -\frac{a_4 a_3 a_2 a_1}{2 \cdot 3} \left\{ 0 + \frac{a_1}{4} \int_0^{a_1} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^4 d\left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) \right\} = \\
 &= -\frac{a_4 a_3 a_2 a_1}{2 \cdot 3} \frac{a_1}{4} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^5 \Big|_0^{a_1} = -\frac{a_4 a_3 a_2 a_1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (0 - 1) = \frac{a_4 a_3 a_2 a_1^2}{5!}.
 \end{aligned}$$

**Пример 7.13.** Вычислить четырехкратный интеграл (7.82)

$$\int \cdots \int_G (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

по области

$$G = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4: 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3; \right. \\
 \left. x_1 + x_2 - x_3 \leq x_4 \leq x_1 + x_2 + x_3 \right\}. \quad (7.83)$$

**Решение.** Исходя из способа задания области интегрирования (7.83), проще всего воспользоваться следующим представлением:

$$\begin{aligned}
 \int \cdots \int_G (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= \\
 &= \int \cdots \int_{G_{x_1 x_2 x_3}} dx_1 dx_2 dx_3 \int_{x_1 + x_2 - x_3}^{x_1 + x_2 + x_3} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_4,
 \end{aligned}$$

где  $G_{x_1 x_2 x_3}$  – проекция  $G$  на трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$ , ортогональное координатной оси  $Ox_4$ . Поскольку

$$\begin{aligned}
 &\int_{x_1 + x_2 - x_3}^{x_1 + x_2 + x_3} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_4 = \\
 &= 2x_3(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{2}[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_2 - x_3)^2] = 2x_3[x_3 + 2(x_1 + x_2)],
 \end{aligned}$$

то с учетом того, что  $G_{x_1x_2x_3}$  есть единичный трехмерный куб, имеем

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_G (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 2x_3 [x_3 + 2(x_1 + x_2)] dx_3 = \\ &= 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \left[ (x_1 + x_2) \frac{x_3^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} \right]_0^1 dx_2 = 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \left( \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{3} \right) dx_2 = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left( 3x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_2 \right) \Big|_0^1 dx_1 = \frac{1}{3} \int_0^1 \left( 3x_1 + \frac{7}{2} \right) dx_1 = \frac{1}{3} \left[ \frac{3x_1^2}{2} + \frac{7}{2}x_1 \right]_0^1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

В заключение рассмотрим примеры вычисления интегралов произвольной кратности  $n$ .

**Пример 7.14.** Найти в  $\mathbb{R}^n$  меру стандартного симплекса

$$G^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i < 1, x_i > 0, i = \overline{1, n} \right\}. \quad (7.84)$$

**Решение.** Меру симплекса  $G^n$  определяет  $n$ -кратный интеграл

$$m(G^n) = \int \cdots \int_{G^n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \quad (7.85)$$

Поскольку проекцией стандартного симплекса  $G^n$  на подпространство  $\mathbb{R}^{n-1}$ , перпендикулярное координатной оси  $Ox_n$ , снова является симплекс  $G^{n-1}$  размерности  $(n-1)$ , то интеграл (7.85) можно записать в виде

$$\begin{aligned} m(G^n) &= \int \cdots \int_{G^n} dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{G^{n-1}} dx_1 \cdots dx_{n-1} \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Поскольку внутренние интегралы в (7.86) задают меру симплекса  $G^{n-1}$  с ребром  $(1-x_1)$ , т. е.  $m(G_{1-x_1}^{n-1})$ , то, воспользовавшись свойством 5 жордановых множеств – формулой (2.40), можем записать

$$m(G_{1-x_1}^{n-1}) = (1-x_1)^{n-1} m(G^{n-1}). \quad (7.87)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} m(G^n) &= \int_0^1 dx_1 m(G_{1-x_1}^{n-1}) = \int_0^1 (1-x_1)^{n-1} m(G^{n-1}) dx_1 = \\ &= -m(G^{n-1}) \int_0^1 (1-x_1)^{n-1} d(1-x_1) = -m(G^{n-1}) \left. \frac{(1-x_1)^n}{n} \right|_0^1 = \frac{1}{n} m(G^{n-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, получили рекуррентное соотношение

$$m(G^n) = \frac{1}{n}m(G^{n-1}). \quad (7.88)$$

Так как одномерный стандартный симплекс  $G^1$  есть отрезок единичной длины, то из рекуррентных соотношений (7.88) и (7.87) по индукции получим

$$m(G^n) = \frac{1}{n!}. \quad (7.89)$$

◇ Если вместо стандартного симплекса (7.84) рассматривать симплекс с ребрами длиной  $h$ :

$$G_h^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i < h, x_i > 0, i = \overline{1, n} \right\}, \quad (7.90)$$

то, в силу свойства 5, мера этого симплекса находится по формуле (2.40):

$$m(G_h^n) = h^n m(G^n) = \frac{h^n}{n!}. \quad (7.91)$$

Эта формула полностью коррелирует с формулой (7.78) при  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = h$ , которая в этом случае примет вид

$$m(G_h^n) = h^n m(G^n) = \frac{h^n}{n!} \quad (7.92)$$

и представляет собой частный случай (7.91) при  $n = 4$ .

**Пример 7.15.** Вычислить  $n$ -кратный интеграл

$$I_n = \int \cdots \int_G (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

где  $G$  – единичный  $n$ -мерный куб

$$G^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, n}\}. \quad (7.93)$$

**Решение.** Исходя из известных соотношений

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j$$

и свойства линейности кратных интегралов, запишем

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cdots \int_G \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 dx_1 \cdots dx_n = \sum_{i=1}^n \int \cdots \int_G x_i^2 dx_1 \cdots dx_n + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int \cdots \int_G x_i x_j dx_1 \cdots dx_n = \sum_{i=1}^n J_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n J_{ij}, \end{aligned} \quad (7.94)$$

где

$$J_i = \int \cdots \int_G x_i^2 dx_1 \cdots dx_n \quad (7.95)$$

и

$$J_{ij} = \int \cdots \int_G x_i x_j dx_1 \cdots dx_n, \quad i \neq j. \quad (7.96)$$

Интеграл (7.95) можно представить повторным интегралом вида

$$J_i = \int \cdots \int_G x_i^2 dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{G_i} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \int_0^1 x_i^2 dx_i,$$

где  $G_i$  – проекция  $n$ -мерного куба  $G$  на подпространство  $\mathbb{R}^{n-1}$ , перпендикулярное оси  $Ox_i$ , и, следовательно,

$$\begin{aligned} J_i &= \int \cdots \int_{G_i} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \left( \frac{x_i^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{i-1} \int_0^1 dx_{i+1} \cdots \int_0^1 dx_n = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (7.97)$$

В свою очередь, интеграл (7.96) можно представить повторным интегралом вида

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \int \cdots \int_G x_i x_j dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \int \cdots \int_{G_{ij}} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n \int_0^1 x_i dx_i \int_0^1 x_j dx_j, \end{aligned}$$

где  $G_{ij}$  – проекция  $n$ -мерного куба  $G$  на подпространство  $\mathbb{R}^{n-2}$ , перпендикулярное осям  $Ox_i$  и  $Ox_j$  ( $i \neq j$ ), и, следовательно,

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \int \cdots \int_G x_i x_j dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \int \cdots \int_{G_{ij}} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n \left( \frac{x_i^2}{2} \right) \Big|_0^1 \left( \frac{x_j^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{i-1} \int_0^1 dx_{i+1} \cdots \int_0^1 dx_{j-1} \int_0^1 dx_{j+1} \cdots \int_0^1 dx_n = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Подстановка (7.97), (7.98) в (7.94) дает

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cdots \int_G \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 dx_1 \cdots dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{4} = \\ &= \frac{n}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 + n}{12}. \end{aligned}$$

◇ Если учесть, что проекции  $G_i$  и  $G_{ij}$  представляют собой единичные кубы размерности  $(n-1)$  и  $(n-2)$  соответственно, то вычисление интегралов (7.97), (7.98) упрощается использованием равенств  $m(G_i) = m(G_{ij}) = 1$ .

**Пример 7.16.** Для функции  $f(\vec{x})$ , непрерывной на компакте

$$K = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq a, i = \overline{1, n}\},$$

доказать равенство

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(\vec{x}) dx_n = \int_0^a dx_n \int_{x_n}^a dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^a f(\vec{x}) dx_1. \quad (7.99)$$

**Решение.** Эта задача является обобщением задачи 7.3 в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Здесь множество интегрирования  $G$   $n$ -кратного интеграла в левой части определяется системой неравенств

$$G = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq x_1, \\ 0 \leq x_3 \leq x_2, \dots, 0 \leq x_n \leq x_{n-1}\}. \quad (7.100)$$

Поскольку  $G \subset K$ , то функция  $f(\vec{x})$  непрерывна на  $G$  и, следовательно, интеграл в левой части соотношения (7.99) существует. Представив множества  $G$  (7.100) (см. пример 7.3) системой неравенств:

$$G = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_n \leq a, x_{n+1} \leq x_n \leq a, i = (n-1), (n-2), \dots, 1\},$$

изменим порядок интегрирования:

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(\vec{x}) dx_n = \int_0^a dx_n \int_{x_n}^a dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^a f(\vec{x}) dx_1.$$

Таким образом, справедливость (7.99) доказана.

**Пример 7.17.** Доказать, что

$$I(a) = \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!} \left( \int_0^a f(t) dt \right)^n, \quad (7.101)$$

где  $f(t)$  – непрерывная функция.

**Решение.** Запишем  $I(a)$  в виде

$$I(a) = \int_0^a f(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2) dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$$

и обозначим

$$F(x_{n-2}) = \int_0^{x_{n-2}} f(x_{n-1}) dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n.$$

Представив  $F(x_{n-2})$  в виде

$$F(x_{n-2}) = \frac{1}{2} \int_0^{x_{n-2}} d \left( \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \right)^2,$$

получим

$$F(x_{n-2}) = \frac{1}{2} \left( \int_0^{x_{n-2}} f(t) dt \right)^2.$$

Воспользуемся методом математической индукции и предположим, что справедливо равенство

$$F(x_1) = \int_0^{x_1} f(x_2) dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \left( \int_0^{x_1} f(t) dt \right)^{n-1},$$

тогда следующая итерация:

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a f(x_1) dx_1 \left( \int_0^{x_1} f(t) dt \right)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^a d \left( \int_0^{x_1} f(t) dt \right)^n = \frac{1}{n!} \left( \int_0^a f(t) dt \right)^n, \end{aligned}$$

доказывает справедливость (7.101).

**Пример 7.18.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} (x_1 x_2 \cdots x_n)^2 dx_n.$$

**Решение.** Значение интеграла легко найти, воспользовавшись формулой (7.101):

$$I = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} (x_1 x_2 \cdots x_n)^2 dx_n = \frac{1}{n!} \left( \int_0^1 t^2 dt \right)^n = \frac{1}{n!} \left( \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 \right)^n = \frac{1}{3^n n!}.$$

**Пример 7.19.** Доказать равенство

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a (a-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (7.102)$$

где  $f(t)$  – непрерывная функция.



**Решение.** Согласно формуле (7.99) из примера 7.16, имеем

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^a f(x_n) dx_n \int_{x_n}^a dx_{n-1} \cdots \int_{x_3}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_1.$$

Приняв во внимание, что

$$\int_{x_3}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_1 = \frac{(a - x_3)^2}{2},$$

можно предположить, что справедливо равенство

$$\int_{x_{n-1}}^a dx_{n-2} \int_{x_{n-2}}^a dx_{n-3} \cdots \int_{x_3}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_1 = \frac{(a - x_{n-1})^{n-2}}{(n-2)!}.$$

тогда следующая итерация дает

$$\begin{aligned} \int_{x_{n-1}}^a dx_{n-2} \cdots \int_{x_3}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_1 &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_n}^a (a - x_{n-1})^{n-2} dx_{n-2} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} (a - x_{n-1})^{n-1} \Big|_{x_{n-1}=a}^{x_{n-1}=x_n} = \frac{(a - x_n)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Таким образом, применив метод математической индукции, получим формулу

$$\begin{aligned} \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n &= \int_0^a f(x_n) \frac{(a - x_n)^{n-1}}{(n-1)!} dx_n = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a (a - t)^{n-1} f(t) dt, \end{aligned}$$

совпадающую с (7.102).

◇ Равенство (7.102) допускает полезное обобщение вида

$$\int_{a_0}^a dx_1 \int_{a_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{a_0}^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{a_0}^a (a - t)^{n-1} f(t) dt. \quad (7.103)$$

**Пример 7.20.** Вычислить

$$I = \int_0^2 dx_1 \int_1^{x_1} dx_2 \cdots \int_1^{x_7} f(x_8) dx_8. \quad (7.104)$$

**Решение.** Согласно формуле (7.102), имеем

$$I = \int_0^2 dx_1 \int_1^{x_1} dx_2 \cdots \int_1^{x_7} f(x_8) dx_8 = \frac{1}{7!} \int_1^2 (2 - t)^7 t dt.$$

Однократное интегрирование по частям дает

$$I = \frac{1}{7!} \int_1^2 (2-t)^7 t dt = \left| \begin{array}{l} u = t, \quad du = dt \\ dv = (2-t)^7 dt, \quad v = -\frac{1}{8}(2-t)^8 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{t(2-t)^8}{8} \Big|_1^2 + \frac{1}{8} \int_1^2 (2-t)^8 dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \frac{(2-t)^9}{9} \Big|_1^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{36}.$$

## 8. Замена переменных в кратных интегралах

Одним из самых распространенных методов вычисления одномерных интегралов Римана является метод замены переменной:

$$x = \varphi(u), \quad (8.1)$$

упрощающей использование формулы Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_\alpha^\beta \bar{f}(u) du = F(\beta) - F(\alpha). \quad (8.2)$$

Как следует из формулы (8.2), ее практическое применение сводится к двум операциям: нахождению связей между дифференциалами переменных

$$dx = \varphi'(u) du \quad (8.3)$$

и их интервалами интегрирования  $[a, b]$  и  $[\alpha, \beta]$ . Это означает, что функция  $\varphi(u)$  должна быть непрерывно дифференцируемой (гладкой), оставляя произведение  $f(\varphi(u))\varphi'(u)$  интегрируемым по  $u$  на промежутке  $[\alpha, \beta]$ . Вместе с этим функция  $x = \varphi(u)$ , являясь в геометрическом смысле гладким отображением множеств  $[a, b]$  и  $[\alpha, \beta]$ , должна осуществлять взаимно однозначное отображение, т. е. должна обладать однозначно определяемой обратной функцией.

При вычислении кратных интегралов применяется аналогичная схема с использованием отображений в  $n$ -мерных пространствах  $\mathbb{R}^n$ .

### 8.1. Лемма о якобиане непрерывно дифференцируемого отображения

Следуя схеме замены переменной для одномерных интегралов по аналогии с (8.1), в пространстве  $\mathbb{R}^n$  введем систему соотношений, связывающих старые  $x_i$  и новые  $u_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , переменные:

$$x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_n), \quad x_2 = \varphi_2(u_1, \dots, u_n), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(u_1, \dots, u_n). \quad (8.4)$$

С геометрической точки зрения система (8.4) определяет отображение ограниченной в  $\mathbb{R}^n$  области  $G$  в область  $G' \subset \mathbb{R}^n$ , т. е.  $F: G \rightarrow G' \subset \mathbb{R}^n$ . Если в (8.4) функции  $\varphi_i$  рассматривать как непрерывно дифференцируемые, а их частные производные  $\partial\varphi_i/\partial u_j$  – как ограниченные и равномерно непрерывные в  $G$  с якобианом

$$J(u) = \det \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad |J(u)| \geq \mu > 0 \quad \forall u \in G, \quad (8.5)$$

то отображение  $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  будет взаимно однозначным и непрерывно дифференцируемым.

Напомним, что множество  $X = F(U)$ , получаемое отображением множества  $U \subset G$ , называется его *образом*. Взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение обладает рядом важных свойств. Выделим два из них, которые нам потребуются при выводе формулы замены переменных в кратных интегралах. Во-первых, образ  $\Gamma' = F(\Gamma)$  является непрерывно дифференцируемой кривой, если  $\Gamma$  является таковой в  $G$ . Во-вторых, образ  $\Omega' = F(\Omega)$  является областью, если  $\Omega$  – область и  $\bar{\Omega} \subset G$ . Образ границы  $\Omega$  является границей  $\Omega'$ . По сути дела, первое свойство есть простое следствие нахождения производных сложных функций, а второе – следствие теоремы о неявных функциях.

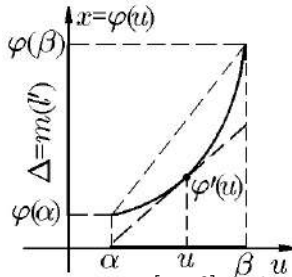


Рис. 54.  $[\alpha, \beta] = l$ ,  
 $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] = l'$ ,  $l' = \varphi(l)$ ,  
 $\beta - \alpha = h$ ,  
 $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \Delta = m(l')$

Прежде чем сформулировать лемму о якобиане отображения в общем случае, рассмотрим осуществляемое функцией  $x = \varphi(u)$  (8.1) взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение промежутка  $l = [a, b]$  при  $u \in l$  на промежуток  $l' = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$ , положив  $l'$  образом  $l$ , т. е.  $l' = \varphi(l)$ .

Для функции  $\varphi(u)$ , осуществляющей это отображение, справедлива формула Лагранжа:

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \varphi'(\bar{u})(\beta - \alpha), \quad \bar{u} \in l,$$

которую с помощью обозначений  $|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| = \Delta$  и  $|\beta - \alpha| = h$  (рис. 54) можно записать как

$$|\varphi'(\bar{u})| = \frac{\Delta}{h}.$$

Если в этой формуле промежуток  $l$  «сжимать» в точку  $u$ , устремив  $h \rightarrow 0$ , то в результате получим соотношение

$$|\varphi'(u)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta}{h}. \quad (8.6)$$

Поскольку величину  $\Delta$  можно выразить через меру промежутка  $l'$ , т. е.  $\Delta = m(l')$ , то (8.6) можно записать как характеристику отображения  $l' = \varphi(l)$ :

$$|\varphi'(u)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(l')}{h}, \quad (8.7)$$

где  $m(l')$  – длина промежутка  $l'$ ;  $h$  – длина промежутка  $l$ .

Для убывающей функции  $\varphi(u)$  выбирается отрезок  $[\varphi(\beta), \varphi(\alpha)]$ .

От пространства  $\mathbb{R}$  перейдем к пространству  $\mathbb{R}^2$ , рассматривая отображение плоскости  $(u, v)$  в плоскость  $(x, y)$ .

**Лемма 8.1.** Пусть  $K$  – замкнутый квадрат в  $\mathbb{R}^2$  со сторонами длиной  $h$  и вершинами в точках  $A(u_0, v_0)$ ,  $B(u_0 + h, v_0)$ ,  $C(u_0 + h, v_0 + h)$ ,  $D(u_0, v_0 + h)$ . Тогда образ квадрата  $K' = F(K)$  при взаимно однозначном и непрерывно дифференцируемом отображении  $F: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ , осуществляемом функциями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (8.8)$$

является измеримой по Жордану областью, и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(K')}{h^2} = |J(u_0, v_0)|, \quad (8.9)$$

причем разность

$$\frac{m(K')}{h^2} - |J(u_0, v_0)|$$

при  $h \rightarrow 0$  стремится к нулю равномерно по  $(u_0, v_0)$  на множестве  $G$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$ , такое, что при любом  $h < \delta$  и для любого квадрата  $K$  со стороной длиной  $h$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{m(K')}{h^2} - |J(u_0, v_0)| \right| < \varepsilon. \quad (8.10)$$

**Доказательство.** Строгое доказательство этой леммы выходит за рамки данного курса и приведено в [30]. Здесь же мы поясним вывод формулы (8.9) и ее геометрический смысл, исходя из простых и наглядных геометрических построений, иллюстрирующих отображение с помощью функций (8.8). Пусть  $K' = F(K)$  есть образ квадрата  $K$  (рис. 55). Множество  $K'$  будем называть *криволинейным параллелограммом*. Покажем, что  $K'$  есть измеримая область. Действительно, стороны квадрата  $K$  являются отрезками. Поэтому их образы при отображении  $F: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  будут гладкими кривыми. Так как образ границы есть граница образа, то  $\partial K'$  есть кусочно-гладкая кривая – периметр криволинейного параллелограмма  $K'$ , а поэтому  $m(\partial K') = 0$  (пример 2.4). Это означает, что, согласно теореме 2.1,  $K'$  есть измеримое множество.

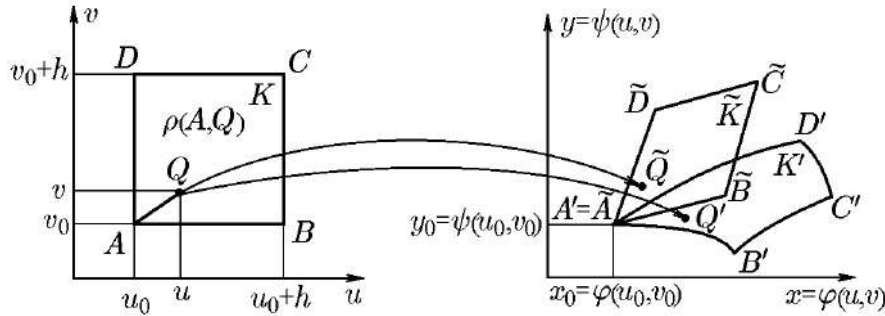


Рис. 55. Отображение  $K' = F(K)$

Для вывода формулы (8.9) рассмотрим точки  $G(u, v)$ , достаточно близкие к вершине квадрата  $A(u_0, v_0)$ , для которых отображение  $F: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  можно приблизительно задать как аффинное, т. е.

$$\begin{aligned} x - x_0 &= a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ y - y_0 &= a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0), \end{aligned} \quad (8.11)$$

где

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0), \\ a_{ij} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Точка  $A'(x_0, y_0)$  есть прообраз точки  $A(u_0, v_0)$ , а матрицу аффинного отображения  $a_{ij}$  можно получить, если функции  $\varphi(u, v)$  и  $\psi(u, v)$  из (8.8) разложить по формуле Тейлора в окрестности точки  $A(u_0, v_0)$  и отбросить слагаемые, являющиеся  $o(\rho(A, Q))$ , когда расстояние  $\rho(A, Q)$  между точками  $A$  и  $Q$  стремится к нулю.

Аффинное отображение, определяемое формулами (8.11), будем обозначать  $\tilde{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Как известно из курса аналитической геометрии, при аффинном отображении образом прямой является прямая, образом пересекающихся прямых будут пересекающиеся прямые, а параллельных – параллельные. Это означает, что образом квадрата  $K$  при аффинном отображении будет обычный параллелограмм  $\tilde{K} = \tilde{F}(K)$  вместо криволинейного параллелограмма  $K' = F(K)$  (см. рис. 55). Площади  $S_{\tilde{K}}$  и  $S_K$  связывает известное из аналитической геометрии соотношение

$$S_{\tilde{K}} = |\det a_{ij}| S_K,$$

где  $a_{ij}$  – матрица аффинного отображения (8.12). Учитывая, что  $S_{\tilde{K}} = m(\tilde{K})$ , а  $S_K = h^2$ , найдём меру параллелограмма:

$$m(\tilde{K}) = |\det a_{ij}| h^2.$$

Отсюда в силу (8.12) можем записать:

$$\frac{m(\tilde{K})}{h^2} = |\det a_{ij}| = \text{mod} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = |J(u_0, v_0)|. \quad (8.13)$$

Строгое доказательство леммы в дополнение к этому выводит асимптотическую оценку

$$m(\tilde{K}) \stackrel{h \rightarrow 0}{\sim} m(K') + o(h^2),$$

с помощью которой равенство (8.13) допускает предельный переход

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(\tilde{K})}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(\tilde{K}) + o(h^2)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(K')}{h^2} = |J(u_0, v_0)|,$$

приводящий к заявленному леммой равенству (8.9).

Сравнение формул (8.7) и (8.9) позволяет предположить, что существует аналогичное им равенство для пространства  $\mathbb{R}^n$ . Действительно, если  $K$  – замкнутый  $n$ -мерный куб с ребром длиной  $h$ , то при выполнении всех требований леммы 8.1 к отображению  $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , осуществляемому функциями

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad i = \overline{1, n},$$

с якобианом

$$J(\vec{u}) = \det \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(\vec{u}), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

образ куба  $K' = F(K)$  является измеримой по Жордану областью, причем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(K')}{h^n} = |J(\vec{u}_0)|, \quad (8.14)$$

где  $\vec{u}_0 = (u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0})$  – координаты вершины  $A(\vec{u}_0)$  куба  $K$  и разность

$$\frac{m(K')}{h^n} - |J(\vec{u}_0)| \quad (8.15)$$

при  $h \rightarrow 0$  стремится к нулю равномерно по  $\vec{u}_0$  на множестве  $G$ .

Якобиан в (8.14), как и (8.7) и (8.9), есть коэффициент увеличения (уменьшения) элементарного  $n$ -мерного объема (меры), сконцентрированного возле вершины  $A(\vec{u}_0)$  куба  $K$  при отображении  $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

## 8.2. Формула замены переменных в кратном интеграле

**Теорема 8.1.** Пусть  $\Omega$  – открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ , содержащее измеримое множество  $G$  с кусочно-гладкой границей, а  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  является взаимно однозначным и непрерывно дифференцируемым отображением, аналитически задаваемым непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.16)$$

Тогда, если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  непрерывна на множестве  $G' = F(G)$ , то справедлива следующая формула замены переменных в кратном интеграле:

$$\int_{G'} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_G \dots \int f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) |J(u_1, \dots, u_n)| du_1 \dots du_n. \quad (8.17)$$

**Доказательство.** Начнем наше рассмотрение с пространства  $\mathbb{R}^2$ , воспользовавшись для удобства записи вместо (8.16) буквенными обозначениями:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \quad (8.18)$$

В этом случае формула (8.17) запишется как

$$\iint_{G'} f(x, y) dx dy = \iint_G f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (8.19)$$

При взаимно однозначном и непрерывно дифференцируемом отображении образ  $G' = F(G)$  компакта  $G$  также является компактом с кусочно-гладкой границей  $\partial G'$ . Так как кусочно-гладкая кривая имеет меру нуль:  $m(\partial G') = 0$ , то в силу теоремы 2.1 компакт  $G'$  измерим. Это означает, что оба интеграла в (8.19) существуют как интегралы от функций, непрерывных на компактах.

Поскольку в силу условий теоремы компакт  $G$  лежит в открытом множестве  $\Omega$ , то границы этих множеств не пересекаются. Так как граница любого множества замкнута, а граница ограниченного множества ограничена, то в силу свойства 1 для расстояния между множествами (3.11) расстояние между  $\partial G$  и  $\partial \Omega$  есть положительное число  $\delta > 0$ .

Пусть множество  $K$  из области  $\Omega$  есть замкнутый квадрат, содержащий компакт  $G$ . Если стороны квадрата  $K$  разбить на равные части длиной  $h < \delta$ , то сам квадрат  $K$  разобьется на элементарные квадраты  $K_i$ ,  $i = \overline{1, s}$ , площадью  $h^2$ . Такое разбиение квадрата  $K$  порождает разбиение  $\tau$  компакта  $G$ . При этом одна часть элементарных квадратов будет принадлежать компакт  $G$  полностью, а другая, содержащая граничные точки  $G$ , – частично (рис. 56). Элементарные квадраты из первой части  $K_i$  пронумеруем от  $i = 1$  до  $i = N$ , а элементарные квадраты из второй части  $K_i$  пронумеруем от  $i = N + 1$  до  $i = s$ .

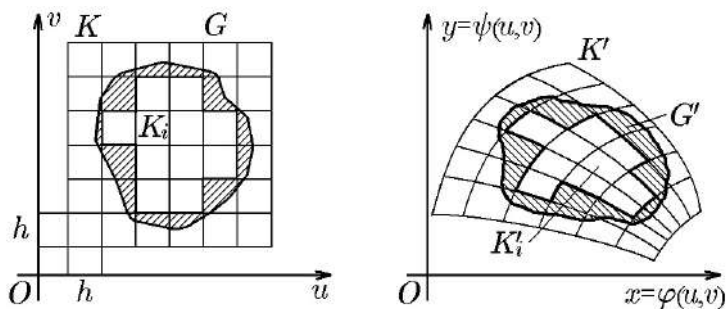


Рис. 56.  $K, K_i, G; K' = F(K), K'_i = F(K_i), G' = F(G)$

Отображение  $F$  порождает образ  $K' = F(K)$  и образ  $G' = F(G)$ . При этом разбиение квадрата  $K$  на элементарные квадраты  $K_i$  порождает и их образы  $K'_i = F(K_i)$ , которые также будут состоять из двух частей. Первая часть  $K'_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , будет состоять из тех, которые целиком принадлежат образу  $G'$ , а вторая часть  $K'_i$ ,  $i = \overline{N+1, s}$ , – из тех, которые будут содержать граничные точки  $G'$  и принадлежать  $G'$  частично (рис. 56). Совокупность  $K'_i$  будет составлять разбиение  $\tau'$  образа  $G'$ .

Теперь воспользуемся утверждением 3.1, согласно которому при написании интегральных сумм можно учитывать только слагаемые, соответствующие целым квадратам, входящим в данное разбиение. Мы воспользуемся этим свойством для написания интегральных сумм как для разбиения  $\tau$  компакта  $G$ , так и для разбиения  $\tau'$  компакта  $G'$ . Вместе с этим мы воспользуемся равномерной непрерывностью отображения  $F$ , при котором диаметр разбиения  $\tau'$  компакта  $G'$  стремится к нулю, когда к нулю стремится диаметр разбиения  $\tau$  компакта  $G$ , т. е.  $h \rightarrow 0$ .

Пусть  $(u_i, v_i)$  – координаты точки, лежащей в левом нижнем углу элементарного квадрата  $K_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , а  $(x_i, y_i)$  – образ этой точки при отображении  $F$ .

Запишем интегралы, входящие в формулу (8.19) как пределы интегральных сумм:

$$\begin{aligned} \iint_{G'} f(x, y) dx dy &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) m(K'_i), \\ \iint_G f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| m(K_i). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Чтобы доказать формулу (8.19), достаточно показать, что разность этих интегральных сумм стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ . В силу формулы (8.10) леммы 8.1 и с учетом того, что  $h^2 = m(K_i)$ , имеем

$$|m(K'_i) - |J(u_i, v_i)| m(K_i)| \leq m(K_i) \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Приняв во внимание, что  $\varphi(u_i, v_i) = x_i$ ,  $\psi(u_i, v_i) = y_i$  и  $|f(x, y)| < M$ , получим оценку

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) m(K'_i) - \sum_{i=1}^N f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| m(K_i) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N |f(x_i, y_i)| |m(K'_i) - |J(u_i, v_i)| m(K_i)| \leq M \varepsilon(h) \sum_{i=1}^N m(K_i) \leq M \varepsilon(h) m(G), \end{aligned}$$

из которой следует, что эта разность стремится к нулю, подтверждая справедливость формулы (8.19).

Доказательство формулы (8.17) для пространства  $\mathbb{R}^n$  аналогично доказательству для пространства  $\mathbb{R}^2$  с той лишь разницей, что вместо замкнутого квадрата рассматривается замкнутый  $n$ -мерный куб со стороной длины  $h$ . В результате вместо интегральных сумм (8.20) используются интегральные суммы,

соответствующие формуле (8.17):

$$\begin{aligned} \int_{G'} \dots \int f(\vec{x}) d\vec{x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i) m(K'_i), \\ \int_G \dots \int f(\vec{\varphi}(\vec{u})) |J(\vec{u})| d\vec{u} &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\vec{\varphi}(\vec{u}_i)) |J(\vec{u}_i)| m(K_i). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Здесь для упрощения записи приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, \dots, x_n), \quad \vec{u} = (u_1, \dots, u_n), \quad d\vec{x} = dx_1 \dots dx_n, \quad d\vec{u} = du_1 \dots du_n, \\ \vec{\varphi}(\vec{u}) &= (\varphi_1(\vec{u}), \dots, \varphi_n(\vec{u})), \quad \vec{\varphi}'(\vec{u}) = \vec{x}. \end{aligned}$$

При оценке разности интегральных сумм (8.21) будем использовать формулу (8.15) леммы 8.1, согласно которой

$$|m(K'_i) - |J(\vec{u}_i)|m(K_i)| \leq m(K_i)\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Тогда с учетом  $\varphi(\vec{u}_i) = \vec{x}_i$ ,  $|f(\vec{x})| < M$  приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i) m(K'_i) - \sum_{i=1}^N f(\vec{\varphi}(\vec{u}_i)) |J(\vec{u}_i)| m(K_i) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N |f(\vec{x}_i)| |m(K'_i) - |J(\vec{u}_i)|m(K_i)| \leq M\varepsilon(h) \sum_{i=1}^N m(K_i) \leq M\varepsilon(h)m(G), \end{aligned}$$

из которого следует, что разность интегральных сумм (8.21) стремится к нулю, подтверждая справедливость формулы замены переменных (8.17).

◇ Нарушение условия взаимной однозначности на множестве меры нуль и обращение якобиана отображения в нуль на множестве меры нуль не влияет на справедливость формулы (8.17) замены переменных в кратном интеграле. Действительно, множество  $E$  меры нуль всегда можно накрыть клеточным множеством  $A \subset G$  сколь угодно малой меры, разбивающейся на  $n$ -мерные кубы (квадраты). Из доказательства теоремы 8.1 следует, что при отображении  $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  мера множества  $A$  возрастает не более чем в  $c\varepsilon$  раз. Поэтому найдутся такие постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , что

$$\left| \int_{A'} \dots \int f(\vec{x}) d\vec{x} \right| < c_1\varepsilon, \quad A' = F(A), \quad (8.22)$$

$$\left| \int_A \dots \int f(\vec{\varphi}(\vec{u})) |J(\vec{u})| d\vec{u} \right| < c_2\varepsilon. \quad (8.23)$$

На множестве же  $G \setminus A$  выполнены все условия теоремы 8.1 и формула (8.17) замены переменных справедлива. Так как интегралы

$$\int_{G'} \dots \int f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \int_G \dots \int f(\vec{\varphi}(\vec{u})) |J(\vec{u})| d\vec{u}$$

отличаются на произвольно малое число в силу (8.22), (8.23), то они совпадают.



## 9. Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных в двойном интеграле, как следует из теоремы 8.1, приводит как к изменению подынтегрального выражения, так и к изменению области интегрирования (множества, по которому берется интеграл). В отличие от одномерного интеграла, где связь двух промежутков интегрирования устанавливается зачастую просто, для двойного интеграла нередко найти измененную область интегрирования достаточно трудно, поэтому главное внимание при выборе новых переменных обращено именно на определение новой области интегрирования.

### 9.1. Отображение множеств на плоскости

Начнем с наиболее простого случая, когда границами множества интегрирования  $G$  являются линии уровня достаточно гладких функций  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$ , т. е.

$$G' = \{(x, y): a_1 \leq \varphi_1(x, y) \leq b_1, a_2 \leq \varphi_2(x, y) \leq b_2\}, \quad (9.1)$$

причем отображение  $\varphi: G \rightarrow G' \subset \mathbb{R}^2: u = \varphi_1(x, y), v = \varphi_2(x, y)$  является непрерывно дифференцируемым. В этом случае отображение  $\varphi$  переводит множество  $G$  в прямоугольник

$$G = \{(u, v): a_1 \leq u \leq b_1, a_2 \leq v \leq b_2\}. \quad (9.2)$$

**Пример 9.1.** Указать отображение, переводящее область  $G'$ , ограниченную линиями  $2y = x, y = 2x, xy = 1, xy = 2$ , в прямоугольник

$$G = \left\{ (u, v): \frac{1}{2} \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2 \right\}.$$

**Решение.** Граница области  $G'$  состоит из линий уровня гладких функций:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \frac{y}{x}, & \varphi_1(x, y) &= \frac{1}{2}, & \varphi_1(x, y) &= 2, \\ \varphi_2(x, y) &= xy, & \varphi_2(x, y) &= 1, & \varphi_2(x, y) &= 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое при  $x > 0$  отображение

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy. \quad (9.3)$$

Образом замкнутой области

$$\overline{G'} = \{(x, y): 1 \leq xy \leq 2, 0 < x \leq 2y \leq 4x\}$$

в силу (9.3) является прямоугольник

$$\overline{G} = \left\{ (u, v): \frac{1}{2} \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2 \right\},$$

которые изображены на рис. 57.

Отображение (9.3) является взаимно однозначным, поскольку уравнения (9.3) однозначно разрешимы относительно  $x$  и  $y$ :

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}}, \quad y = \sqrt{uv}, \quad (x, y) \in \overline{G'}. \quad (9.4)$$

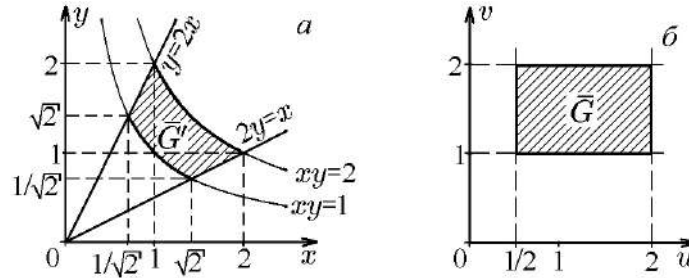


Рис. 57.  $G' = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 0 < x \leq 2y \leq 4x\}$  (а),  
 $G = \{(u, v) : 1/2 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$  (б)

Найдем якобиан преобразования (9.3). Используя формулы (9.4), получим

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{u}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} = -\frac{1}{2u}.$$

Отметим, что для всех  $(u, v) \in \bar{G}$

$$|J(u, v)| = \frac{1}{2u} > 0.$$

**Пример 9.2.** Найти прообраз множества

$$G' = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 4x^2 - 3y^2 \leq 4, 4y^2 - 3x^2 \leq 4\},$$

полученного отображением  $\varphi: (u, v) \rightarrow (x, y)$  вида

$$u = 4x^2 - 3y^2, \quad v = 4y^2 - 3x^2. \tag{9.5}$$

**Решение.** Область  $G'$ , ограниченная прямыми  $x = 0, y = 0$  и гиперболами  $4x^2 - 3y^2 = 4, 4y^2 - 3x^2 = 4$ , изображена на рис. 58, б.

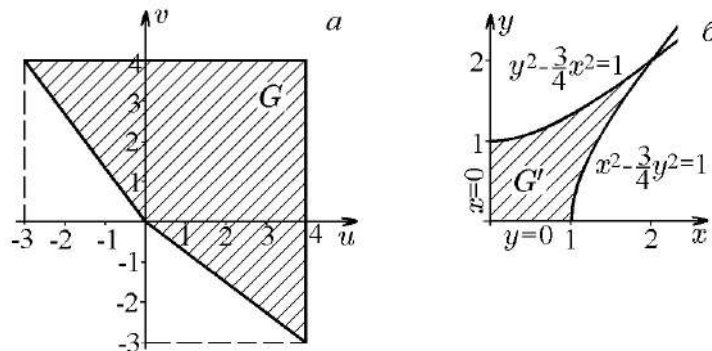


Рис. 58.  $G = \{(u, v) : u \leq 4, v \leq 4, 4u + 3v \geq 0, 3u + 4v \geq 0\}$  (а),  
 $G' = \{(x, y) : x = y = 0, x^2 - \frac{3}{4}y^2 = 1, y^2 - \frac{3}{4}x^2 = 1\}$  (б)

Для  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$  из уравнений (9.5) выразим  $x$  и  $y$ :

$$x = \sqrt{\frac{4u + 3v}{7}}, \quad y = \sqrt{\frac{3u + 4v}{7}}. \tag{9.6}$$

Откуда следует:  $4u+3v \geq 0$ ,  $3u+4v \geq 0$ . Вместе с этим из неравенств  $4x^2 - 3y^2 \leq 4$ ,  $4y^2 - 3x^2 \leq 4$  следуют неравенства

$$4\left(\frac{4u+3v}{7}\right) - 3\left(\frac{3u+4v}{7}\right) \leq 4, \quad 4\left(\frac{3u+4v}{7}\right) - 3\left(\frac{4u+3v}{7}\right) \leq 4$$

или

$$u \leq 4, \quad v \leq 4.$$

Объединив все полученные оценки, сделаем заключение, что прообразом  $G'(\varphi(G))$  является множество

$$G = \{(u, v): u \leq 4, v \leq 4, 4u + 3v \geq 0, 3u + 4v \geq 0\},$$

изображенное на рис. 58, а. Найдем якобиан преобразования (9.5). Используя формулы (9.6), получим

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{7(4u+3v)}} & \frac{3}{2\sqrt{7(4u+3v)}} \\ \frac{3}{2\sqrt{7(3u+4v)}} & \frac{2}{\sqrt{7(4u+3v)}} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{(4u+3v)(3u+4v)}}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

◇ Если связь переменных  $(x, y)$  и  $(u, v)$  задается соотношениями  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , то для вычисления якобиана  $J(u, v)$  необходимо найти зависимости  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$ . В тех случаях, когда дифференцирование выражений  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$  технически сложнее, чем дифференцирование  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , то проще найти якобиан  $J(x, y)$  и воспользоваться равенством

$$J(u, v)J(x, y) = 1, \quad (9.8)$$

поскольку последовательное применение двух взаимно однозначных отображений: прямого  $\varphi$  и обратного  $\varphi^{-1}$ , оставляет область  $G$  без изменений.

Например, в примере 9.2 технически проще продифференцировать выражения (9.5):

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8x & -6y \\ -6x & 8y \end{vmatrix} = 28xy.$$

Откуда, с учетом (9.6) и (9.8), следует выражение

$$J(u, v) = \frac{1}{J(x, y)} = \frac{1}{28xy} = \frac{1}{28\sqrt{\frac{4u+3v}{7}}\sqrt{\frac{3u+4v}{7}}} = \frac{1}{4\sqrt{(4u+3v)(3u+4v)}},$$

совпадающее с (9.7).

**Пример 9.3.** Показать, что замена переменных  $x+y = u$ ,  $y = uv$  переводит треугольник (симплекс)

$$G' = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$$

в квадрат (клетку)

$$G = \{(u, v): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$

**Решение.** Исходя из условий задачи, найдем выражения, связывающие одни координаты с другими:

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{u} = \frac{y}{x + y} \quad (9.9)$$

и

$$x = u - y = u - uv = u(1 - v), \quad y = uv. \quad (9.10)$$

Как следует из рис. 59, граница области  $G'$  состоит из трех отрезков – сторон треугольника, а граница области  $G$  – из четырех отрезков – сторон квадрата.

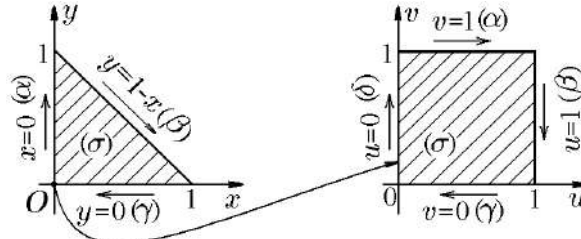


Рис. 59. Отображение треугольника (симплекса) в квадрат (клетку)

Найдем соответствие между частями границ  $G'$  и  $G$ .

1. Рассмотрим отображение катета ( $\alpha$ ) треугольника (рис. 59), соответствующего значениям  $x = 0$  и  $0 \leq y \leq 1$ , для которого  $u = x + y = 0 + y = y$  и  $v = y/u = y/y = 1$ , т. е.  $u = y$ ,  $v = 1$ . При возрастании  $y$  от 0 до 1  $u$  также возрастает от нуля до 1.

2. Найдем отображение гипотенузы ( $\beta$ )  $y = 1 - x$  для  $0 \leq x \leq 1$  (рис. 59). Так как  $x + y = x + 1 - x = u = 1$ , а  $y = uv = v = 1 - x$ , то  $u = 1$ ,  $v = 1 - x$ . При возрастании  $x$  от нуля до 1 значение  $v$  убывает от 1 до нуля, сохраняя направление обхода ( $\alpha$ ).

3. Найдем отображение катета ( $\gamma$ ), соответствующего значениям  $y = 0$  и  $0 \leq x \leq 1$  (рис. 59), для которых  $u = x$ ,  $uv = 0$ ,  $v = 0$ , т. е.  $v = 0$ ,  $u = x$ . При убывании  $x$  от 1 до нуля значения  $u$  также убывают от 1 до нуля, сохраняя направление обхода ( $\beta$ ).

4. Четвертой стороной квадрата ( $\delta$ ) (рис. 59) является отображение точки  $O(0,0)$ , соответствующей началу координат плоскости  $xOy$ , для которой  $u = 0$  и  $y = 0 = 0 \cdot v$ , из чего следует, что  $v$  принимает значения от нуля до 1.

Найдем якобианы отображений (9.9) и (9.10):

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = \frac{(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y}; \quad (9.11)$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u + uv = u.$$

Легко проверить, что в силу (9.9), (9.10) и (9.11) выполняется равенство

$$J(x, y)J(u, v) = \frac{1}{x+y}u = \frac{x+y}{x+y} = 1.$$

Наряду с заменами переменных общего вида, рассмотренными в примерах выше, большое значение имеют замены переменных, связывающие известные системы координат, например декартовы, полярные и др.

Из аналитической геометрии известно, что декартовы и полярные координаты связаны соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (9.12)$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  – полярный радиус, а  $\varphi$  – азимутальный угол (рис. 60).

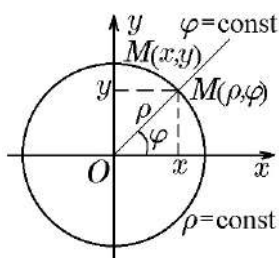


Рис. 60. Полярная система координат

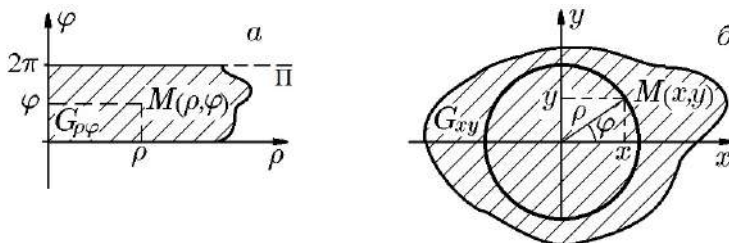
Координатными линиями в полярных координатах являются окружности  $\rho = \text{const}$  и лучи  $\varphi = \text{const}$ , поэтому точка  $M(\rho, \varphi)$  в полярных координатах есть точка пересечения этих координатных линий. Для точки  $O$  полярный радиус  $\rho = 0$ , а азимутальный угол не определен.

В аналитической геометрии переход (9.12) от переменных  $x$  и  $y$  к переменным  $\rho$  и  $\varphi$  рассматривается как переход к полярной системе координат, согласованной с декартовой, а не как отображение некоторого множества. Для рассмотрения соотношений (9.12) как отображения заданного множества введем в рассмотрение наряду с плоскостью  $(x, y)$  вспомогательную плоскость

$(\rho, \varphi)$ , в которой  $\rho$  и  $\varphi$  являются декартовыми координатами.

В плоскости  $(\rho, \varphi)$  рассмотрим полулобус  $\Pi$  (рис. 61, а), определенную неравенствами

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (9.13)$$

Рис. 61.  $G_{\rho\varphi} \subset \Pi$  (а),  $\dot{G}_{xy} \subset \dot{E}_{xy}$  (б)

Тогда формулы (9.12) определяют непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение  $F: \Pi \rightarrow \dot{E}_{xy}$ , где  $\dot{E}_{xy}$  есть плоскость  $E_{xy}$ , проколота в точке  $O$  (рис. 61, б). Взаимную однозначность отображения  $F$  легко установить геометрически. Действительно, каждая точка  $M(x, y) \in \dot{E}_{xy}$  однозначно определяется как пересечение окружности  $\rho = R$  и луча  $\varphi = \alpha$ , поэтому у каждой точки  $M(x, y)$  есть единственный прообраз  $M(\rho, \varphi)$  в полулобусе  $\Pi$ .

Якобиан отображения (9.12) равен  $\rho$ , поскольку

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho. \quad (9.14)$$

В полулобусе  $\Pi$  якобиан (9.14) в нуль не обращается. Если полулобус  $\Pi$  объединить с отрезком  $\rho = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ , то мы получим полулобус

$$\Pi_0 = \{(\rho, \varphi): \rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

При отображении (9.13) полулобуса  $\Pi_0$  – прообраз всей плоскости  $E_{xy}$ , но взаимная однозначность отображения и условие  $J(\rho, \varphi) \neq 0$  будут нарушены на отрезке  $\rho = 0, \varphi \in [0, 2\pi[$ , плоская мера Жордана которого равна нулю. Это замечание мы будем учитывать при переходе к полярным координатам в двойных интегралах.

Вместе с этим в двойных интегралах при переходе от декартовых координат к полярным область  $G_{xy}$  в координатах  $x, y$  зачастую приходится рассматривать как прообраз области  $G_{\rho\varphi}$  в координатах  $\rho, \varphi$ . Так, на рис. 61, а изображен прообраз  $G_{xy}$  на плоскости  $E_{xy}$ , а на рис. 61, б – его образ  $G_{\rho\varphi}$  в полулобусе  $\Pi$ . В дополнение к этому на рис. 62, 63 представлены образы  $G_{\rho\varphi}$  некоторых прообразов  $G_{xy}$  частного вида. Так, на рис. 62, а представлена область  $G_{xy}$ , ограниченная двумя лучами,  $y = x \operatorname{tg} \alpha, y = x \operatorname{tg} \beta$  ( $\alpha < \beta$ ), и двумя кривыми:  $y = f_1(x)$

и  $y = f_2(x)$ . Образом этой области является область  $G_{\rho\varphi}$ , элементарная относительно оси  $\rho$  (рис. 62, б).

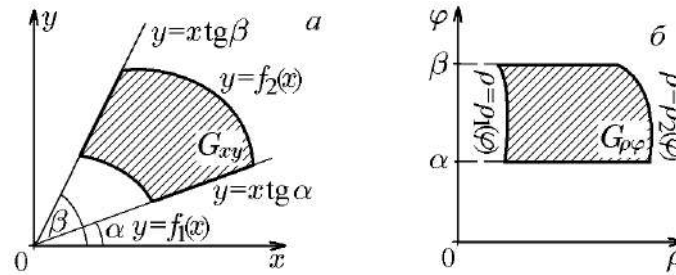


Рис. 62. Область, элементарная относительно оси  $\rho$

На рис. 63, а представлена область  $G_{xy}$ , ограниченная двумя концентрическими окружностями,  $x^2 + y^2 = r_1^2$ ,  $x^2 + y^2 = r_2^2$  ( $\alpha < \beta$ ), и двумя кривыми,  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ . Образом этой области является область  $G_{\rho\varphi}$ , элементарная относительно оси  $\varphi$  (рис. 63, б).

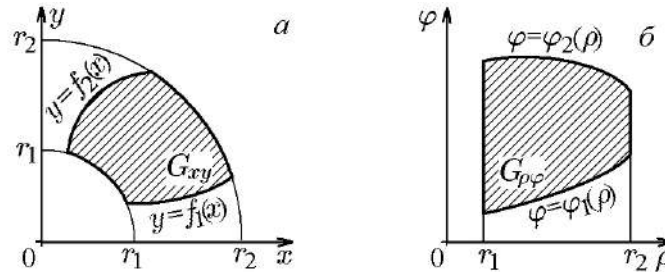


Рис. 63. Область, элементарная относительно оси  $\varphi$

Области  $G_{xy}$  более сложного вида в плоскости  $E_{xy}$  нужно при помощи лучей  $y = x \operatorname{tg} \alpha$  и концентрических окружностей  $x^2 + y^2 = r^2$  разбивать на простейшие области рассмотренного выше типа. Проиллюстрируем это примерами.

**Пример 9.4.** Найти образ области  $G_{xy}$ , изображенной на рис. 64, а, с помощью отображения  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ .

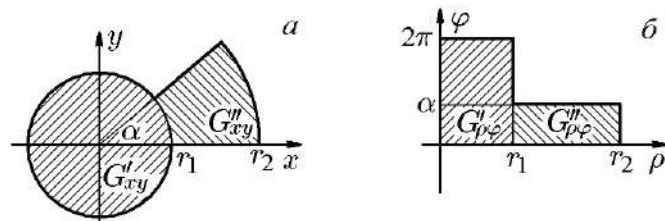


Рис. 64. Область интегрирования  $G_{xy} = G'_{xy} \cup G''_{xy}$  (а) и ее образ  $G_{\rho\varphi} = G'_{\rho\varphi} \cup G''_{\rho\varphi}$  (б)

**Решение.** Область  $G_{xy}$ , изображенную на рис. 64, а, можно представить объединением областей  $G_{xy} = G'_{xy} \cup G''_{xy}$ , где

$$\begin{aligned} G'_{xy} &= \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2\}, \\ G''_{xy} &= \{(x, y) : r_1^2 < x^2 + y^2 \leq r_2^2, 0 \leq y \leq x \operatorname{tg} \alpha\}. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Следуя схеме построения образов на рис. 62, б и рис. 63, б, имеем образом  $G'_{xy}$  прямоугольник

$$G'_{\rho\varphi} \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \tag{9.16a}$$

а образом  $G''_{xy}$  – ещё один прямоугольник:

$$G''_{\rho\varphi} \{(\rho, \varphi): r_1 < \rho \leq r_2, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}, \quad (9.16б)$$

объединение которых и дает образ

$$G_{\rho\varphi} = G'_{\rho\varphi} \cup G''_{\rho\varphi},$$

представленный на рис. 64, б.

**Пример 9.5.** Найти образ области  $G_{xy}$ , изображенной на рис. 65, а, перейдя к полярным координатам.

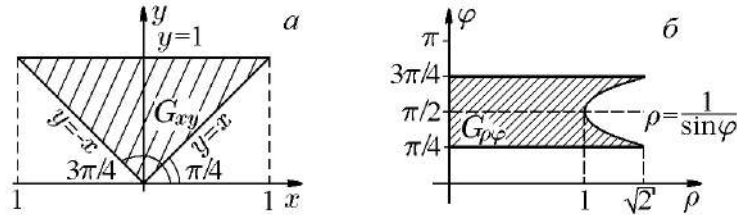


Рис. 65. Область интегрирования  $G_{xy} = \{(x, y): |x| \leq y \leq 1\}$  (а) и ее образ  $G_{\rho\varphi} = \left\{(\rho, \varphi): \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \varphi}\right\}$  (б)

**Решение.** Область  $G_{xy}$ , изображенную на рис. 65, а, можно описать как

$$G_{xy} = \{(x, y): |x| \leq y \leq 1\}.$$

С учетом того, что

$$y = x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \quad y = -x = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}, \quad y = \rho \sin \varphi = 1,$$

ее образ будет представлен криволинейной трапецией

$$G_{\rho\varphi} = \left\{(\rho, \varphi): \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \varphi}\right\}, \quad (9.17)$$

являющейся областью, элементарной относительно оси  $\rho$  (рис. 65, б).

При необходимости область  $G_{xy}$  можно представить объединением трех областей (рис. 66, а):

$$G_{xy} = G_{xy}^- \cup G_{xy}' \cup G_{xy}^+,$$

где

$$G_{xy}^- = \{(x, y): x^2 + y^2 > 1, 0 < -x < y < 1\},$$

$$G_{xy}' = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1, |x| < 1\},$$

$$G_{xy}^+ = \{(x, y): x^2 + y^2 > 1, 0 < x < y < 1\}.$$

Их образами являются области

$$G_{\rho\varphi}^- = \left\{(\rho, \varphi): 1 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi - \arcsin \frac{1}{\rho}\right\},$$

$$G'_{\rho\varphi} = \left\{ (\rho, \varphi) : 1 \leq \rho < \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} < \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right\}, \quad (9.18)$$

$$G_{\rho\varphi}^+ = \left\{ (\rho, \varphi) : 1 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} < \varphi \leq \arcsin \frac{1}{\rho} \right\},$$

элементарные относительно оси  $\rho$  (рис. 66, б).

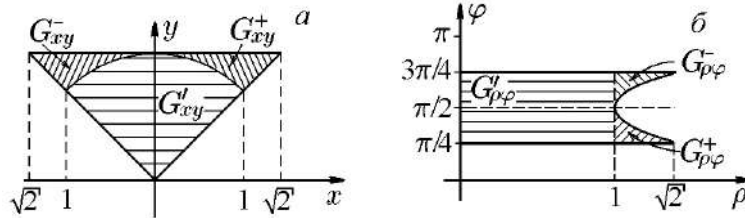


Рис. 66. Области  $G_{xy}^-$ ,  $G_{xy}'$ ,  $G_{xy}^+$  (а) и их образы  $G_{\rho\varphi}^-$ ,  $G_{\rho\varphi}'$ ,  $G_{\rho\varphi}^+$  (б)

Наряду с полярными координатами полезными оказываются и их обобщения.

◆ *Обобщенными полярными координатами* называется пара  $(\rho, \varphi)$ , связанная с декартовыми координатами  $x, y$  формулами

$$x = a\rho \cos^\mu \varphi, \quad y = b\rho \sin^\mu \varphi. \quad (9.19)$$

Здесь  $\rho \geq 0$ , а  $\varphi$  пробегает либо промежуток  $[0, 2\pi[$  (как вариант,  $] - \pi, \pi]$ ), либо промежуток  $[0, \pi/2]$  в зависимости от значений постоянной  $\mu$ , так, чтобы функции  $\cos^\mu \varphi$  и  $\sin^\mu \varphi$  имели смысл и оба равенства,

$$\sin^\mu \varphi_0 = \sin^\mu \varphi_1, \quad \cos^\mu \varphi_0 = \cos^\mu \varphi_1,$$

одновременно выполнялись только при

$$\varphi_0 = 0 \text{ и } \varphi_1 = 2\pi \text{ (как вариант, } \varphi_0 = -\pi, \varphi_1 = \pi) \text{ или } \varphi_0 = 0, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Переход к обобщенным полярным координатам (9.19) делается в основном тогда, когда уравнения кривых, ограничивающих область интегрирования  $G_{xy}$ , в новых переменных при соответствующем выборе постоянных  $a, b$  и  $\mu$  становятся существенно более простыми. В общем случае обобщенные полярные координаты не имеют наглядного геометрического смысла, поэтому границы образа  $G_{\rho\varphi}$  приходится определять аналитическими способами. Справедливости ради следует отметить, что для частных случаев (9.19) образы  $G_{\rho\varphi}$  можно получить некоторой последовательностью наглядных отображений.

Якобиан при переходе к обобщенным координатам равен:

$$\begin{aligned} J(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos^\mu \varphi & -a\mu\rho \cos^{\mu-1} \varphi \sin \varphi \\ b \sin^\mu \varphi & b\mu\rho \sin^{\mu-1} \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= ab\mu\rho(\cos^{\mu+1} \varphi \sin^{\mu-1} \varphi + \sin^{\mu+1} \varphi \cos^{\mu-1} \varphi) = \\ &= ab\mu\rho \sin^{\mu-1} \varphi \cos^{\mu-1} \varphi [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi] = ab\mu\rho \sin^{\mu-1} \varphi \cos^{\mu-1} \varphi. \end{aligned} \quad (9.20)$$

**Пример 9.6.** Найти образ области

$$G_{xy} = \left\{ (x, y) : r_1^2 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq r_2^2, y \geq \frac{b}{a}|x| \right\} \quad (9.21)$$

при переходе к обобщенным полярным координатам.



**Решение.** Без ограничения общности будем считать постоянные  $r_1 < r_2$ ,  $a > b$  положительными. Область  $G_{xy}$  (9.21) (рис. 67, а) представляет собой область, ограниченную эллипсами с полуосями  $ar_1, br_1$   $ar_2, br_2$  и двумя лучами  $y = bx/a$ ,  $y = -bx/a$ .

Область  $G_{xy}$  с помощью линейного преобразования  $x = au$ ,  $y = bv$  отображается в область  $G_{uv}$  (рис. 67, б), которая представляет собой область, ограниченную двумя окружностями,  $r_1^2 \leq u^2 + v^2 \leq r_2^2$ , и двумя лучами,  $v = u$ ,  $v = -u$ . В свою очередь, преобразование  $u = \rho \cos \varphi$ ,  $v = \rho \sin \varphi$  отображает область  $G_{uv}$  в прямоугольник  $G_{\rho\varphi} = \{(\rho, \varphi): r_1 \leq \rho \leq r_2, \pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4\}$  (рис. 67, в).

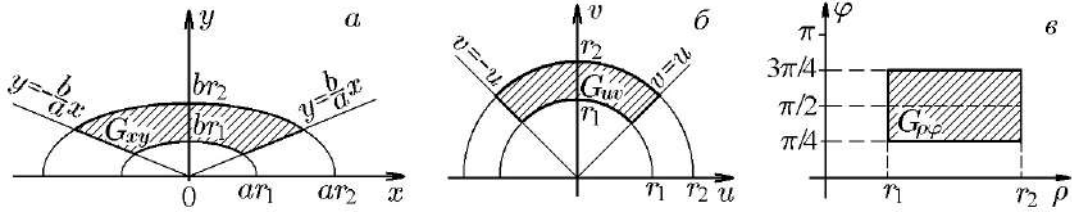


Рис. 67.  $G_{xy} = \left\{ (x, y): r_1^2 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq r_2^2, y \geq \frac{b}{a}|x| \right\}$  (а)  
и ее образы  $G_{uv} = \{(u, v): r_1^2 \leq u^2 + v^2 \leq r_2^2, v = |u|\}$  (б),  
 $G_{\rho\varphi} = \left\{ (\rho, \varphi): r_1 \leq \rho \leq r_2, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$  (в)

Таким образом, исходная область  $G_{xy}$  переходом к обобщенным полярным координатам вида

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi \quad (9.22)$$

с якобианом

$$J(\rho, \varphi) = ab\rho \quad (9.23)$$

отображается в прямоугольник  $G_{\rho\varphi}$ .

**Пример 9.7.** Найти образ области  $G_{xy}$ , ограниченной осями координат и параболой  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{r}$ , при переходе к обобщенным полярным координатам.

**Решение.** Область  $G_{xy}$  представляет собой криволинейный треугольник, расположенный в первой четверти (рис. 68, а). Явный вид уравнения параболы  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{r}$  подсказывает возможность использования обобщенной полярной системы координат вида

$$x = \rho \cos^4 \varphi, \quad y = \rho \sin^4 \varphi, \quad \mu = 4. \quad (9.24)$$

В силу (9.23) начало координат  $x = y = 0$  отображается в отрезок  $\rho = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ , катет  $x = 0$ ,  $0 < y \leq r$  отображается в отрезок  $\varphi = \pi/2$ ,  $0 < \rho \leq r$ , другой катет  $-y = 0$ ,  $0 < x \leq r$  — отображается в отрезок  $\varphi = 0$ ,  $0 < \rho \leq r$  и, наконец, парабола  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{r}$  отображается в отрезок  $\rho = r$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ , поскольку

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\rho}(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \sqrt{\rho} = \sqrt{r}.$$

Таким образом, исходная область  $G_{xy}$  отображается в прямоугольник  $G_{\rho\varphi}$  (рис. 68, б) при переходе к обобщенным координатам вида (9.23) с якобианом (9.20) при  $\mu = 4$ :

$$J(\rho, \varphi) = 4\rho \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi.$$

Кроме обобщенной полярной системы координат существуют и другие специальные системы координат, на которых мы не будем здесь останавливаться, а воспользуемся ими по мере необходимости непосредственно при вычислении двойных интегралов методом замены переменных.

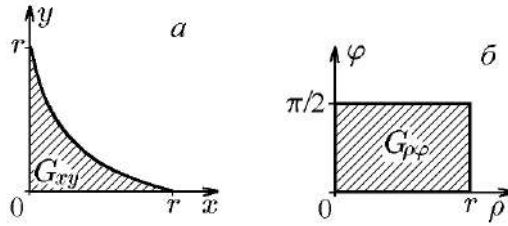


Рис. 68. Область  $G_{xy} = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{r}\}$  (а)  
и ее образ  $G_{\rho\varphi} = \{(\rho, \varphi): 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq r\}$  (б)

## 9.2. Вычисление двойных интегралов методом замены переменных. Примеры

**Пример 9.8.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{G'} (x^2 + y^2) dx dy \quad (9.25)$$

по области  $G'$ , ограниченной двумя гиперболами,  $y = 1/x$ ,  $y = 2/x$ , и двумя прямыми:  $2y = x$ ,  $y = 2x$ .

**Решение.** Область интегрирования  $G'$ , ограниченная этими линиями, рассматривалась в примере 9.1 и изображена на рис. 57, а. Из этого рисунка следует, что область  $G'$  не является элементарной относительно обеих координатных осей, поэтому для расстановки пределов в интеграле (9.25) ее следует разбить на три области, элементарные относительно, например, оси  $Oy$ :  $G' = G'_1 \cup G'_2 \cup G'_3$ , где

$$G'_1 = \left\{ (x, y): \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq 2x \right\},$$

$$G'_2 = \left\{ (x, y): 1 \leq x \leq \sqrt{2}, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\},$$

$$G'_3 = \left\{ (x, y): \sqrt{2} \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \right\},$$

и представить (9.25) тремя интегралами по этим областям:

$$\iint_{G'} (x^2 + y^2) dx dy = \sum_{i=1}^3 \iint_{G'_i} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Можно, однако, воспользоваться заменой переменных (9.4) из примера 9.1:

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = xy,$$

которая отображает область  $G'$  в прямоугольник

$$G = \left\{ (x, y): \frac{1}{2} \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 1 \right\}$$

(рис. 57, б). В этом прямоугольнике якобиан перехода к новым координатам, найденный в примере 9.1, отличен от нуля:

$$|J(u, v)| = \frac{1}{2u} > 0.$$

Вместе с этим расстановка пределов по области  $G$ , представляющей собой прямоугольник, затруднений не вызывает, а если учесть, что

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}}, \quad y = \sqrt{uv},$$

то переход к новым переменным дает

$$\begin{aligned} \iint_{G'} (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{G'} \left[ \frac{v}{u} + uv \right] \frac{1}{2u} du dv = \frac{1}{2} \iint_{G'} \left( \frac{v}{u^2} + v \right) du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 v dv \int_{1/2}^2 \left( \frac{1}{u^2} + 1 \right) du = \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{2} \Big|_1^2 \right) \left( -\frac{1}{u} + u \right) \Big|_{1/2}^2 = \frac{3}{4} \left( -\frac{1}{2} + 2 + 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

**Пример 9.9.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{G'} (x^3 y + xy^3) dx dy,$$

где

$$G' = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, 4x^2 - 3y^2 \leq 4, 4y^2 - 3x^2 \leq 4\}.$$

**Решение.** 1-й способ. Область интегрирования  $G'$  рассматривалась в примере 9.2 (см. рис. 58, б). Из этого рисунка следует, что в декартовых координатах интеграл можно свести к двум повторным интегралам, вычисление которых является задачей несложной, но очень громоздкой:

$$\begin{aligned} \iint_{G'} (x^3 y + xy^3) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1+3x^2/4}} (x^3 y + xy^3) dy + \int_1^2 dx \int_{2\sqrt{(x^2-1)/3}}^{\sqrt{1+3x^2/4}} (x^3 y + xy^3) dy = \\ &= \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{2} x^3 y^2 + \frac{1}{4} x y^4 \right] \Big|_0^{\sqrt{1+3x^2/4}} + \int_1^2 dx \left[ \frac{1}{2} x^3 y^2 + \frac{1}{4} x y^4 \right] \Big|_{2\sqrt{(x^2-1)/3}}^{\sqrt{1+3x^2/4}} = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^3 \left( 1 + \frac{3}{4} x^2 \right) + \frac{1}{4} x \left( 1 + \frac{3}{4} x^2 \right)^2 \right] dx + \\ &+ \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} x^3 \left( 1 + \frac{3}{4} x^2 \right) + \frac{1}{4} x \left( 1 + \frac{3}{4} x^2 \right)^2 - \frac{2}{3} x^3 (x^2 - 1) - \frac{4}{9} x (x^2 - 1)^2 \right] dx = 3. \end{aligned}$$

2-й способ. Воспользуемся заменой переменных (9.6) из примера 9.2:

$$x = \sqrt{\frac{4u + 3v}{7}}, \quad y = \sqrt{\frac{3u + 4v}{7}},$$

которая отображает область  $G'$  в область  $G = G_1 \cup G_2$  (см. рис. 58, а), описываемую неравенствами

$$G_1 = \left\{ (u, v) : -3 < u < 0, -\frac{4}{3}u < v < 4 \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (u, v) : 0 < u < 4, -\frac{3}{4}u < v < 4 \right\}.$$

Якобианы этой замены найдены в том же примере 9.2 и равны

$$J(x, y) = 28xy, \quad J(u, v) = \frac{1}{4}(4u + 3v)^{-1/2}(3u + 4v)^{-1/2}.$$

Особенностью используемой замены является то, что условие взаимной однозначности отображений  $G'$  и  $G$  нарушается на части их границ. Однако, поскольку часть границы представляет собой множество меры нуль, то, согласно замечанию к теореме 8.1, используемая замена оставляет справедливой формулу (8.19) замены переменных, позволяя записать исходный интеграл в переменных  $(u, v)$  как

$$\begin{aligned} \iint_{G'} (x^3y + xy^3) dx dy &= \frac{1}{28} \iint_G (u + v) du dv = \\ &= \frac{1}{28} \left[ \iint_{G_1} (u + v) du dv + \iint_{G_2} (u + v) du dv \right] = \\ &= \frac{1}{28} \left[ \int_{-3}^0 du \int_{-4u/3}^4 (u + v) dv + \int_0^4 du \int_{-3u/4}^4 (u + v) dv \right] = \\ &= \frac{1}{28} \left[ \int_{-3}^0 du \left( uv + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_{-4u/3}^4 + \int_0^4 du \left( uv + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_{-3u/4}^4 \right] = \\ &= \frac{1}{28} \left\{ \int_{-3}^0 \left[ (8 + 4u) + \frac{4}{9}u^2 \right] du + \int_0^4 \left[ (8 + 4u) + \frac{15}{32}u^2 \right] du \right\} = \\ &= \frac{1}{28} \left[ \int_{-3}^4 (8 + 4u) du + \frac{4}{9} \int_{-3}^0 u^2 du + \frac{15}{32} \int_0^4 u^2 du \right] = \\ &= \frac{1}{28} \left[ (8u + 2u^2) \Big|_{-3}^4 + \frac{4}{9} \frac{u^3}{3} \Big|_{-3}^0 + \frac{15}{32} \frac{u^3}{3} \Big|_0^4 \right] = \frac{1}{28} (70 + 4 + 10) = 3. \end{aligned}$$

**Пример 9.10.** Вычислить двойные интегралы

$$1) \iint_{G'} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dx dy, \quad 2) \iint_{G'} e^{(x+y)^2} dx dy$$

по области

$$G' = \{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

**Решение 1.** Подынтегральная функция непрерывна и ограничена на множестве  $G'$ , которое рассматривалось в примере 9.3 (см. рис. 59, а). Из этого примера следует, что в декартовых координатах исходный интеграл можно записать двумя повторными интегралами:

$$\iint_{G'} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dx,$$

внутренние интегралы которых не имеют первообразных в элементарных функциях. Подынтегральную функцию в двойном интеграле можно изменить заменой переменных (9.9) из примера 9.3:

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x + y}.$$

При этом относительно той же самой замены область  $G'$  отображается в прямоугольник (см. рис. 58, б)

$$G = \{(u, v): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Якобианы этой замены найдены в том же примере 9.3 и равны:

$$J(x, y) = \frac{1}{x + y}, \quad J(u, v) = u.$$

Особенностью используемой замены является то, что условие взаимной однозначности отображений  $G'$  и  $G$  нарушается на части их границ. Однако, поскольку часть границы представляет собой множество меры нуль, то, согласно замечанию к теореме 8.1, используемая замена оставляет справедливой формулу (8.19) замены переменных, позволяя записать исходный интеграл в переменных  $(u, v)$  как

$$\begin{aligned} \iint_{G'} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dx dy &= \iint_G \frac{\sin u}{u} u du dv = \iint_G \sin u du dv = \\ &= \int_0^1 dv \int_0^1 \sin u du = (v|_0^1) (-\cos u|_0^1) = 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

Этот же интеграл мы вычислим позднее, используя переход в полярную систему координат.

2. Как и в предыдущем случае, двойной интеграл можно свести к повторным интегралам:

$$\iint_{G'} e^{(x+y)^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{(x+y)^2} dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} e^{(x+y)^2} dx,$$

внутренние интегралы которых не имеют первообразных в элементарных функциях. Используя ту же замену переменных, запишем двойной интеграл в переменных  $(u, v)$ :

$$\iint_{G'} e^{(x+y)^2} dx dy = \int_0^1 dv \int_0^1 e^{u^2} u du = (v|_0^1) \left( \frac{1}{2} e^{u^2} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2} (e - 1).$$

**Пример 9.11.** Найти площади криволинейных четырехугольников:

1) ограниченного параболлами

$$y^2 = a_1x, \quad y^2 = a_2x, \quad 0 < a_1 < a_2 \quad \text{и} \quad x^2 = b_1y, \quad x^2 = b_2y, \quad 0 < b_1 < b_2; \quad (9.26)$$

2) ограниченного параболлами

$$y^2 = a_1x, \quad y^2 = a_2x, \quad 0 < a_1 < a_2, \quad (9.27)$$

и гиперболами

$$xy = b_1, \quad xy = b_2, \quad 0 < b_1 < b_2. \quad (9.28)$$

**Решение 1.** Криволинейный четырехугольник  $G'_1$ , ограниченный параболлами (9.26), изображен на рис. 69, а. Его площадь  $S_1$  как плоская мера определяется двойным интегралом

$$S_1 = \iint_{G'_1} dx dy,$$

для вычисления которого область интегрирования  $G'_1$  необходимо разбить на три области, элементарные относительно оси  $Oy$ . Этого можно избежать, если воспользоваться заменой переменных

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \frac{x^2}{y} \quad \text{или} \quad x = u^{1/3}v^{2/3}, \quad y = u^{2/3}v^{1/3}. \quad (9.29)$$

При таком преобразовании криволинейный четырехугольник  $G'_1$  отображается на прямоугольник  $G_1$  (рис. 69, б), в переменных  $(u, v)$  описываемый неравенствами

$$G_1 = \{(u, v) : 0 < a_1 \leq u \leq a_2, 0 < b_1 \leq v \leq b_2\}. \quad (9.30)$$

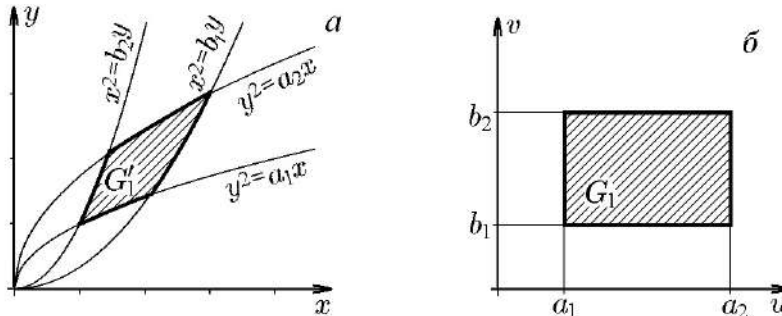


Рис. 69. Отображение криволинейного четырехугольника  $G'_1$  на прямоугольник  $G_1$

Найдем якобиан замены (9.29):

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

С учетом этого равенства и соотношений (9.29) интеграл, определяющий площадь  $S_1$ , преобразуется к виду

$$S_1 = \iint_{G'_1} dx dy = \iint_{G_1} |J(u, v)| du dv = \frac{1}{3} \int_{a_1}^{a_2} du \int_{b_1}^{b_2} dv = \frac{1}{3} (a_2 - a_1)(b_2 - b_1).$$

2. Криволинейный четырехугольник  $G'_2$ , ограниченный параболлами (9.27) и гиперболами (9.28), изображен на рис. 70, а. Его площадь  $S_2$  как плоская мера определяется двойным интегралом

$$S_2 = \iint_{G'_2} dx dy,$$

для вычисления которого область интегрирования  $G'_2$  необходимо разбить на три области, элементарные относительно оси  $Oy$ . Этого можно избежать, если воспользоваться заменой переменных:

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = xy \quad \Leftrightarrow \quad x = u^{-1/3}v^{2/3}, \quad y = u^{1/3}v^{1/3}. \quad (9.31)$$

При такой замене криволинейный четырехугольник  $G'_2$  отображается на прямоугольник  $G_2$  (рис. 70, б), в переменных  $(u, v)$  описываемый неравенствами

$$G_2 = \{(u, v): 0 < a_1 \leq u \leq a_2, 0 < b_1 \leq v \leq b_2\}. \quad (9.32)$$

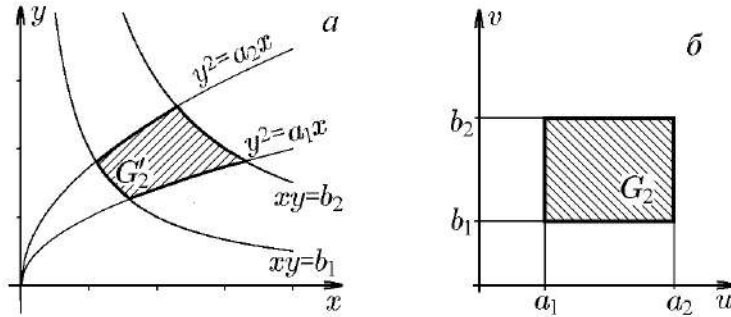


Рис. 70. Отображение криволинейного четырехугольника  $G'_2$  на прямоугольник  $G_2$

Найдем якобиан замены (9.31):

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

С учетом этого равенства и соотношений (9.31) интеграл, определяющий площадь  $S_2$ , примет вид

$$\begin{aligned} S_2 &= \iint_{G'_2} dx dy = \iint_{G_2} |J(u, v)| du dv = \frac{1}{3} \int_{a_1}^{a_2} \frac{du}{u} \int_{b_1}^{b_2} dv = \\ &= \frac{1}{3} \left( \ln u \Big|_{a_1}^{a_2} \right) \left( v \Big|_{b_1}^{b_2} \right) = \frac{1}{3} (b_2 - b_1) \ln \frac{a_2}{a_1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Пример 9.12.** Вычислить интеграл

$$\iint_{G'} \frac{y^2}{x} e^{(y^5+x^4)/x^2y} \cos \frac{x^2}{y} dx dy$$

по области  $G'$ , ограниченной параболлами  $y^2 = a_1x$ ,  $y^2 = a_2x$ ,  $0 < a_1 < a_2$  и  $x^2 = b_1y$ ,  $x^2 = b_2y$ ,  $0 < b_1 < b_2$ .

**Решение.** Область  $G'$ , ограниченная этими парабололами, рассматривалась в примере 9.11 (см. рис. 69, а). Так как подынтегральная функция в этой области непрерывна и ограничена, то двойной интеграл существует и для его вычисления можно воспользоваться заменой (9.29):

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \frac{x^2}{y}$$

с якобианом

$$|J(u, v)| = \frac{1}{3}$$

(см. пример 9.11). Преобразование (9.29) отображает область  $G'$  на прямоугольник (9.30) (см. рис. 69, б). С учетом этого искомый интеграл в переменных  $(u, v)$  примет вид

$$\iint_{G'} \frac{y^2}{x} e^{(y^5+x^4)/x^2y} \cos \frac{x^2}{y} dx dy = \iint_G u e^{u^2+v} \cos v \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_{a_1}^{a_2} u e^{u^2} du \int_{b_1}^{b_2} e^v \cos v dv.$$

Воспользовавшись во внешнем интеграле методом подведения под знак дифференциала, а во внутреннем – двукратным интегрированием по частям, найдем значение двойного интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_{G'} \frac{y^2}{x} e^{(y^5+x^4)/x^2y} \cos \frac{x^2}{y} dx dy &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} e^{u^2} \Big|_{a_1}^{a_2} \right) \left[ \frac{1}{2} e^v (\cos v + \sin v) \Big|_{b_1}^{b_2} \right] = \\ &= \frac{1}{12} e^{a_2^2 - a_1^2} [e^{b_2} (\cos b_2 - \sin b_2) - e^{b_1} (\cos b_1 - \sin b_1)]. \end{aligned}$$

**Пример 9.13.** Вычислить интеграл

$$\iint_{G'} \frac{y^2}{x} e^{y(y+x^2)/x} \cos xy dx dy$$

по области  $G'$ , ограниченной парабололами  $y^2 = a_1x$ ,  $y^2 = a_2x$ ,  $0 < a_1 < a_2$ , и гиперболами  $xy = b_1$ ,  $xy = b_2$ ,  $0 < b_1 < b_2$ .

**Решение.** Область  $G'$ , ограниченная этими парабололами и гиперболами, рассматривалась в примере 9.11 (см. рис. 70, а). Так как подынтегральная функция в этой области непрерывна и ограничена, то двойной интеграл существует и для его вычисления можно воспользоваться заменой (9.31)

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = xy$$

с якобианом

$$|J(u, v)| = \frac{1}{3u}$$

(см. пример 9.11). Эта замена отображает область  $G'$  в прямоугольник (9.32) (см. рис. 70, б). С учетом этого искомый интеграл в переменных  $(u, v)$  запишется как

$$\iint_{G'} \frac{y^2}{x} e^{y(y+x^2)/x} \cos xy dx dy = \iint_G u e^{u+v} \cos v \frac{du dv}{3u} = \frac{1}{3} \int_{a_1}^{a_2} e^u du \int_{b_1}^{b_2} e^v \cos v dv.$$



Проведя во внутреннем интеграле двукратное интегрирование по частям, найдем значение двойного интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_{G'} \frac{y^2}{x} e^{y(y+x^2)/x} \cos xy \, dx \, dy &= \frac{1}{3} \left( e^u \Big|_{a_1}^{a_2} \right) \left[ \frac{1}{2} e^v (\cos v + \sin v) \Big|_{b_1}^{b_2} \right] = \\ &= \frac{1}{6} e^{a_2 - a_1} [e^{b_2} (\cos b_2 - \sin b_2) - e^{b_1} (\cos b_1 - \sin b_1)]. \end{aligned}$$

**Пример 9.14.** Вычислить интеграл

$$\iint_{G'} \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \, dx \, dy$$

по области  $G'$ , ограниченной четырьмя окружностями:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad x^2 + (y-1)^2 = 1. \quad (9.33)$$

**Решение.** На рис. 71, а изображена область  $G'$ , ограниченная окружностями (9.33). Подынтегральная функция в этой области непрерывна и ограничена, следовательно, двойной интеграл существует. Для его вычисления в декартовых координатах область интегрирования  $G'$  необходимо разбить на три области, элементарные относительно одной из координатных осей. Этого можно избежать, если воспользоваться заменой переменных

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad (9.34)$$

в силу которой границы области  $G'$  запишутся как

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} &\Rightarrow x^2 + y^2 = x, \quad \frac{x}{x^2 + y^2} = 1; \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 2x, \quad \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}; \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} &\Rightarrow x^2 + y^2 = y, \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = 1; \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 2y, \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

т. е. отображаются в прямые

$$u = \frac{1}{2}, \quad u = 1; \quad v = \frac{1}{2}, \quad v = 1.$$

На плоскости  $(u, v)$  область  $G'$ , ограниченная этими прямыми, представляет собой квадрат  $G$  (рис. 71, б).

Якобиан замены (9.34)

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} & -\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2} \\ -\frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} & \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(v^2 - u^2)(u^2 - v^2) - 4u^2v^2}{(u^2 + v^2)^2} = -\frac{(u^2 + v^2)^2}{(u^2 + v^2)^4} = -\frac{1}{(u^2 + v^2)^2}, \end{aligned}$$

отличен от нуля в области  $G$ , поэтому исходный интеграл в переменных  $(u, v)$  запишется как

$$\begin{aligned} \iint_{G'} \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} dx dy &= \iint_G (u^2 + v^2)^3 \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} du dv = \iint_G (u^2 + v^2) du dv = \\ &= \int_{1/2}^1 du \int_{1/2}^1 (u^2 + v^2) dv = \int_{1/2}^1 \left( u^2 v \Big|_{1/2}^1 + \frac{v^3}{3} \Big|_{1/2}^1 \right) du = \int_{1/2}^1 \left( \frac{u^2}{2} + \frac{7}{24} \right) du = \\ &= \frac{u^3}{6} \Big|_{1/2}^1 + \frac{7}{24} u \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{8} \right) + \frac{7}{24} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{48} + \frac{7}{48} = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

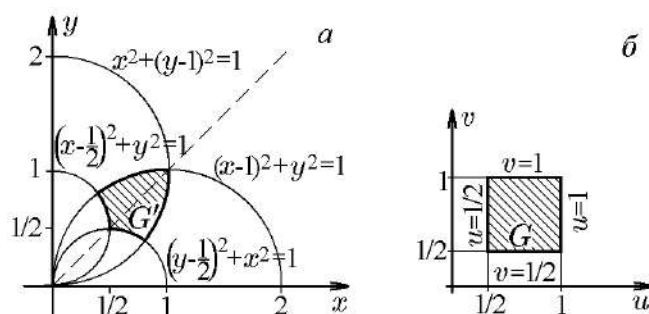


Рис. 71. Область интегрирования

$$G' = \{(x, y) : 0 < x \leq x^2 + y^2 \leq 2x, 0 < y \leq x^2 + y^2 \leq 2y\} \quad (a)$$

$$\text{и ее образ } G = \left\{ (u, v) : \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \right\} \quad (б)$$

◇ Ниже мы вычислим этот же интеграл с помощью перехода к полярным координатам.

## 10. Использование полярных и обобщенных полярных координат для вычисления двойных интегралов

Как следует из общей формулы замены переменных в двойном интеграле и рассмотренных выше примеров, переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формуле

$$\iint_{G_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{G_{\rho\varphi}} \bar{f}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (10.1)$$

где  $\bar{f}(\rho, \varphi)$  – функция  $f(x, y)$ , записанная в полярных координатах  $\rho, \varphi$ , а  $G_{\rho\varphi}$  – прообраз области  $G_{xy}$  при отображении  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ . Выбор порядка интегрирования по переменным  $\rho$  и  $\varphi$  определяется как видом функции  $\bar{f}(\rho, \varphi)$ , так и видом области  $G_{\rho\varphi}$ .

**Пример 10.1.** Вычислить интеграл

$$\iint_{G_{xy}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \quad (10.2)$$

по области  $G_{xy}$ , состоящей из кольцевого сектора  $r_1^2 < x^2 + y^2 \leq r_2^2$  между лучами  $0 \leq x \leq y$  и круга  $x^2 + y^2 \leq r_1^2$ .

**Решение.** Область интегрирования  $G_{xy}$  изображена на рис. 72, а. Для расстановки пределов в интеграле (10.2) по этой области ее необходимо разбить на четыре области:

$$G_{xy} = (G_{xy})_1 \cup (G_{xy})_2 \cup (G_{xy})_3 \cup (G_{xy})_4$$

(см. рис. 72, а). Этому можно избежать, перейдя к полярным координатам  $\rho, \varphi$ .

В результате область  $G_{xy}$  отобразится в область  $G_{\rho\varphi}$ . Такой переход был рассмотрен в примере 9.4. Согласно результатам этого примера, область  $G_{\rho\varphi}$  состоит из двух прямоугольников (рис. 72, б):

$$(G_{\rho\varphi})_1 = \{(\rho, \varphi): 0 \leq \rho \leq r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

$$(G_{\rho\varphi})_2 = \left\{(\rho, \varphi): r_1 < \rho \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

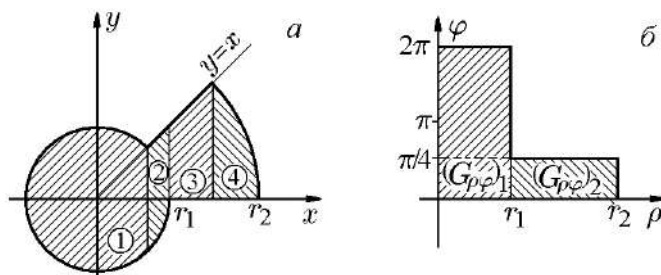


Рис. 72. Область интегрирования  $G_{xy} = (G_{xy})_1 \cup (G_{xy})_2 \cup (G_{xy})_3 \cup (G_{xy})_4$  (а) и ее образ  $G_{\rho\varphi} = (G_{\rho\varphi})_1 \cup (G_{\rho\varphi})_2$  (б)

Вычислим двойной интеграл (10.2) при помощи перехода к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \iint_{G_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy &= \iint_{(G_{\rho\varphi})_1} \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho d\varphi + \iint_{(G_{\rho\varphi})_2} \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_1} \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho + \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho = \\ &= \left(\varphi \Big|_0^{2\pi}\right) \left[\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{3/2} \Big|_0^{r_1}\right] + \left(\varphi \Big|_0^{\pi/4}\right) \left[\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{3/2} \Big|_{r_1}^{r_2}\right] = \\ &= \frac{2\pi}{3}(1+r_1^2)^{3/2} + \frac{\pi}{12}[(1+r_2^2)^{3/2} - (1+r_1^2)^{3/2}] = \frac{\pi}{12}[(1+r_2^2)^{3/2} + 7(1+r_1^2)^{3/2}]. \end{aligned}$$

В рассмотренном примере мы следовали общей схеме расстановки пределов в повторных интегралах в новых переменных с помощью построения прообраза области интегрирования  $G_{xy}$ : области  $G_{\rho\varphi}$  в полярных координатах  $(\rho, \varphi)$ . Однако в силу очевидной геометрической наглядности полярных координат замену переменных декартовых координат  $(x, y)$  на полярные  $(\rho, \varphi)$  можно рассматривать не как преобразование множеств, а как переход от декартовой системы координат к полярной, естественно связанной с декартовой (когда полярный полюс совпадает с началом декартовой системы координат, а полярная ось направлена вдоль оси  $Ox$ ). В таком подходе обозначение  $G$  удобнее использовать для обеих областей интегрирования, полагая  $G$  заданной поочередно в переменных

двух естественно связанных системах координат: декартовой  $G = \{(x, y): \dots\}$  и полярной  $G = \{(\rho, \varphi): \dots\}$ .

Следующий пример иллюстрирует подход, позволяющий записать расстановку пределов при переходе к полярным координатам, причем с любым порядком интегрирования.

**Пример 10.2.** В двойном интеграле

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

по области

$$G = \{(x, y): |x| \leq y \leq 1\} \quad (10.3)$$

перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования двумя возможными способами.

**Решение.** Задача об отображении области интегрирования (10.3) (рис. 73, а) при переходе к полярным координатам была рассмотрена в примере 9.5. Там же построена область, являющаяся ее прообразом в полярной системе координат (рис. 65). Исходя из вида этого прообраза, расставить пределы в повторных интегралах, представляющих исходный двойной в переменных  $\rho, \varphi$ , труда не составляет. Можно, однако, вместо этого воспользоваться неравенствами

$$G = \left\{ (\rho, \varphi): \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}, 0 < \rho < \frac{1}{\sin \varphi} \right\}, \quad (10.4)$$

определяющими область (10.3) (рис. 73, а) в полярных координатах. С помощью этих неравенств получим

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\sin \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (10.5)$$

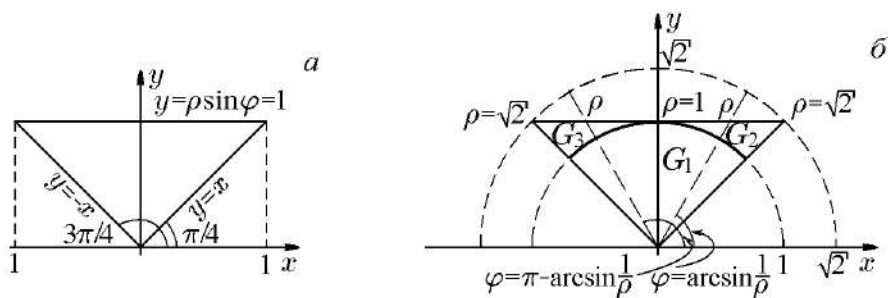


Рис. 73. Область интегрирования  $\left\{ (\rho, \varphi): \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}, 0 < \rho < \frac{1}{\sin \varphi} \right\}$  (а) и ее образ  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$  (б)

Чтобы расставить пределы интегрирования в (10.5) в другом порядке, разобьем область  $G$  (рис. 73, б) дугой окружности  $\rho = 1$  на круговой сектор

$$G_1 = \left\{ (\rho, \varphi): 0 < \rho < 1, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4} \right\}$$

и два криволинейных треугольника:

$$G_2 = \left\{ (\rho, \varphi) : 1 < \rho < \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} < \varphi < \arcsin \frac{1}{\rho} \right\},$$

$$G_3 = \left\{ (\rho, \varphi) : 1 < \rho < \sqrt{2}, \pi - \arcsin \frac{1}{\rho} < \varphi < \arcsin \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

С учетом этого придем к другому порядку интегрирования в (10.3):

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\sin \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \int_0^1 d\rho \int_{\pi/4}^{3\pi/4} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi +$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\pi/4}^{\arcsin(1/\rho)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\pi - \arcsin(1/\rho)}^{3\pi/4} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi.$$

**Пример 10.3.** В двойном интеграле

$$\iint_G \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy$$

по области

$$G = \{(x, y) : R^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2Ry\} \quad (10.6)$$

перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования двумя возможными способами. Вычислить интеграл, используя наиболее простой из них.

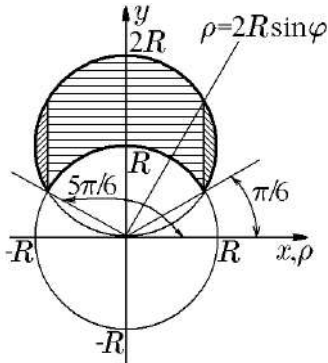


Рис. 74. Область  $G$

**Решение.** Область интегрирования (10.6) представляет собой пересечение внешней части одного круга  $x^2 + y^2 = R^2$  с внутренней частью другого круга  $x^2 + y^2 \leq 2Ry$  (рис. 74). Так как подынтегральная функция в области интегрирования (10.6) непрерывна, то двойной интеграл существует.

Переход к полярным координатам здесь обусловлен тем, что расстановка пределов в повторных интегралах по переменным  $(x, y)$  требует разбиения области  $G$  на три части (рис. 74), а их вычисление – интегрирования дифференциальных биномов. Все это в совокупности значительно усложняет вычисление

двойного интеграла. Переход к полярным координатам упрощает эту задачу. Действительно, условие (10.6) в полярных координатах примет вид

$$G = \{(\rho, \varphi) : R \leq \rho \leq 2R \sin \varphi\}. \quad (10.6')$$

Точки пересечения окружностей  $\rho = R$  и  $\rho = 2R \sin \varphi$  имеют азимутальные углы  $\varphi_1 = \pi/6$  и  $\varphi_2 = 5\pi/6$ , что следует из цепочки равенств

$$R = 2R \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{Arcsin} \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Вся область  $G$ , как следует из рис. 74, располагается в полярном секторе  $\pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6$ . Из этого же рис. 74 следует, что каждый луч, выходящий из полюса, пересекает область  $G$  по отрезку  $[R, 2R \sin \varphi]$ , что соответствует неравенствам  $R \leq \rho \leq 2R \sin \varphi$ . С учетом этого неравенства (10.7) запишутся как

$$G = \left\{ (\rho, \varphi) : \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}, R \leq \rho \leq 2R \sin \varphi \right\}. \quad (10.7)$$

В полярных координатах исходный интеграл преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy = \\ \iint_G \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^5} \rho d\rho d\varphi = \iint_G \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \rho d\rho d\varphi. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Последний, двойной, интеграл можно свести к повторным интегралам с внешним интегрированием по  $\varphi$ :

$$\iint_G \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\rho d\varphi = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_R^{2R \sin \varphi} d\rho. \quad (10.9)$$

Чтобы расставить пределы интегрирования в другом порядке, снова обратимся к рис. 74. Минимальное расстояние от точек области интегрирования  $G$  до полюса равно  $R$ , а максимальное –  $2R$ , что соответствует неравенствам  $R \leq \rho \leq 2R$ . Окружность  $\rho = \rho_0$  как окружность радиусом  $\rho_0 \in ]R, 2R[$  пересекает  $G$  по дуге от  $\alpha$  до  $\pi - \alpha$ , где  $\alpha = \arcsin(\rho/2R)$ . Это позволяет вместо (10.7) записать  $G$  неравенствами

$$G = \left\{ (\rho, \varphi) : R \leq \rho \leq 2R, \arcsin \frac{\rho}{2R} \leq \varphi \leq \pi - \arcsin \frac{\rho}{2R} \right\}, \quad (10.10)$$

согласно которым получим другой, чем в (10.9), порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \iint_G \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\rho d\varphi &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_R^{2R \sin \varphi} d\rho = \\ &= \int_R^{2R} d\rho \int_{\arcsin(\rho/2R)}^{\pi - \arcsin(\rho/2R)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Формулы (10.11) дают два варианта расстановки пределов интегрирования для исходного интеграла в полярной системе координат.

Интеграл в (10.11), соответствующий (10.9), в силу простоты внутреннего интегрирования по  $\rho$  легко сводится к обычному интегрированию тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_R^{2R \sin \varphi} d\rho = \\ = R \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (2 \sin \varphi - 1) d\varphi = R(2J_1 - J_2), \end{aligned} \quad (10.12)$$

где

$$J_1 = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi, \quad J_2 = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi. \quad (10.13)$$

Последовательное вычисление интегралов (10.13) дает

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \\ &= - \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi) d(\cos \varphi) = - \left( \frac{\cos^3 \varphi}{3} - \frac{\cos^5 \varphi}{5} \right) \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} = \\ &= -\frac{1}{5} \left( \cos^5 \frac{\pi}{6} - \cos^5 \frac{5\pi}{6} \right) + \frac{1}{3} \left( \cos^3 \frac{\pi}{6} - \cos^3 \frac{5\pi}{6} \right) = \\ &= -\frac{2}{5} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 + \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{11}{80} \sqrt{3}; \\ J_2 &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{8} \varphi \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{1}{32} \sin \varphi \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{32} \left( \sin \frac{20\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{16} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{32}, \end{aligned}$$

отсюда в силу (10.13)

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_R^{2R} d\rho &= R(2J_1 - J_2) = R \left( 2 \cdot \frac{11}{80} \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{32} \right) = \\ &= R \left( \frac{39}{160} \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} \right) \simeq 0,16R. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\iint_G \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy = R \left( \frac{39}{160} \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} \right) \approx 0,16R.$$

Следующий пример иллюстрирует то, что переход к полярной системе координат полезен, когда часть границы области интегрирования задана в полярных координатах уравнениями более простыми, чем в декартовых. В этом же примере, в дополнение к предыдущим, проиллюстрируем разницу в вычислении двойных интегралов с разным порядком расстановки пределов в повторных интегралах по полярным координатам.

**Пример 10.4.** В двойном интеграле

$$\iint_G dx dy \quad (10.14)$$

по области, заданной неравенствами  $\rho \leq R(1 + \cos \varphi)$ ,  $x^2 + y^2 \geq xR$  ( $R > 0$ ), перейти к полярным координатам. Вычислить интеграл двумя способами, соответствующими двум вариантам расстановки пределов в повторных интегралах по полярным координатам. Результат проверить вычислением интеграла, представив область интегрирования разностью двух областей.

**Решение.** Область интегрирования  $G$  представляет собой пересечение внутренней области кардиоиды  $\rho = R(1 + \cos \varphi)$  с внешней областью окружности  $(x - R/2)^2 + y^2 = (R/2)^2$  (рис. 75). В заданном интеграле (10.14), в силу простоты подынтегральной функции  $f(x, y) = 1$ , переход к полярным координатам обусловлен следующим. Уравнение кардиоиды в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \rho = R(1 + \cos \varphi) &\Rightarrow \rho^2 = R(\rho + \rho \cos \varphi) \Rightarrow (x^2 + y^2) = R(\sqrt{x^2 + y^2} + x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 + y^2 - Rx)^2 = R^2(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

является громоздким, что затрудняет расстановку пределов в повторных интегралах в декартовых координатах. Однако уравнение окружности  $x^2 + y^2 = Rx$  легко записывается в полярных координатах:  $\rho = R \cos \varphi$ . Добавим к этому, что в силу свойств симметрии подынтегральной функции и области интегрирования исходный интеграл (10.14) можно записать в виде

$$\iint_G dx dy = 2 \iint_{G^+} dx dy,$$

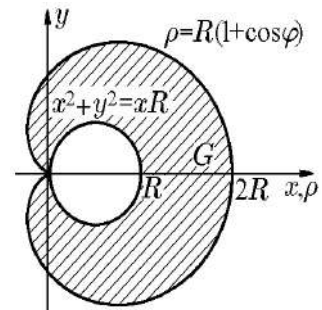


Рис. 75. Область  $G$

где  $G^+$  – часть области интегрирования, расположенная в верхней полуплоскости ( $G^+ = G \cap \{(x, y) : y > 0\}$ ). В полярных координатах этот двойной интеграл запишется как

$$I = \iint_G dx dy = 2 \iint_{G^+} dx dy = 2 \iint_{G^+} \rho d\rho d\varphi. \quad (10.15)$$

Рассмотрим два варианта расстановки пределов в повторных интегралах (10.15) по полярным координатам  $\rho, \varphi$ .

I. Внешнее интегрирование по переменной  $\varphi$ .

Всю область  $G^+$ , расположенную между двумя лучами  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , разобьем лучом  $\varphi = \pi/2$  на две области:  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 76, а). Тогда в области  $G_1$  любой луч под углом  $0 < \varphi < \pi/2$  пересечет область  $G$  по отрезку луча от  $\rho = R \cos \varphi$  до  $\rho = R(1 + \cos \varphi)$ , так, что  $R \cos \varphi < \rho \leq R(1 + \cos \varphi)$  (рис. 76, а). Откуда следует, что область  $G_1$  задается неравенствами

$$G_1 = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, R \cos \varphi \leq \rho \leq R(1 + \cos \varphi) \right\}. \quad (10.16)$$

Соответственно, в области  $G_2$  любой луч под углом  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$  пересечет область  $G$  по отрезку луча от  $\rho = 0$  до  $\rho = R(1 + \cos \varphi)$ , так, что  $0 < \rho \leq R(1 + \cos \varphi)$  (рис. 76, а). Откуда следует, что область  $G_2$  задается неравенствами

$$G_2 = \left\{ (\rho, \varphi) : \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi, 0 < \rho \leq R(1 + \cos \varphi) \right\}. \quad (10.17)$$



С учетом этого интеграл (10.15) можно записать в виде суммы

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_G dx dy = 2 \iint_{G^+} \rho d\rho d\varphi = 2 \left( \iint_{G_1} \rho d\rho d\varphi + \iint_{G_2} \rho d\rho d\varphi \right) = \\
 &= 2 \left\{ \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{R \cos \varphi}^{R(1+\cos \varphi)} \rho d\rho + \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^{R(1+\cos \varphi)} \rho d\rho \right\} = \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \left( \rho^2 \Big|_{R \cos \varphi}^{R(1+\cos \varphi)} \right) + \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \left( \rho^2 \Big|_0^{R(1+\cos \varphi)} \right) = \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\varphi [R(1 + \cos \varphi)]^2 - \int_0^{\pi/2} d\varphi [R \cos \varphi]^2 + \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi [R(1 + \cos \varphi)]^2.
 \end{aligned} \tag{10.18}$$

Из трех последних интегралов в (10.18) первый и третий можно объединить. В результате получим разность

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi [R(1 + \cos \varphi)]^2 - \int_0^{\pi/2} d\varphi [R \cos \varphi]^2 = I_1 - I_2, \tag{10.19}$$

где

$$I_1 = \int_0^{\pi} [R(1 + \cos \varphi)]^2 d\varphi; \tag{10.20}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} [R \cos \varphi]^2 d\varphi. \tag{10.21}$$

Последовательное вычисление этих интегралов дает

$$\begin{aligned}
 I_1 &= R^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = R^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\
 &= R^2 \int_0^{\pi} \left( \frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \\
 &= R^2 \left( \frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi R^2}{2};
 \end{aligned} \tag{10.22}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{R^2}{2} \left( \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.
 \end{aligned} \tag{10.23}$$

Подставив (10.22), (10.23) в (10.19), получим значение исходного двойного интеграла

$$I = I_1 - I_2 = \frac{3\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{5\pi R^2}{4} \quad (10.24)$$

с выбранным порядком интегрирования по переменным  $\rho, \varphi$  в виде (10.18).

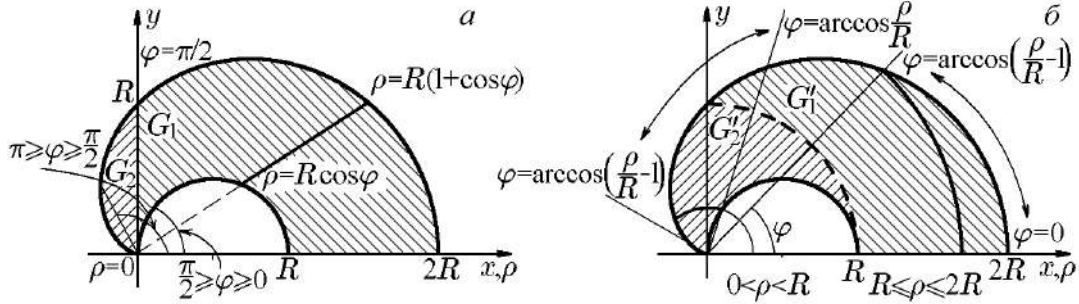


Рис. 76.  $G^+ = G_1 \cup G_2$  (а);  $G^+ = G'_1 \cup G'_2$  (б)

### II. Внешнее интегрирование по переменной $\rho$ .

Всю область  $G^+$ , расположенную между двумя окружностями с радиусами  $\rho = 0$  и  $\rho = 2R$ , окружностью  $\rho = R$  разобьем на две области —  $G'_1$  и  $G'_2$  (рис. 76, б). Тогда в области  $G'_1$  любая окружность с радиусом  $\rho$ :  $R \leq \rho \leq 2R$  пересечет область  $G$  по дуге этой окружности от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \arccos(\rho/R - 1)$ , так, что  $0 \leq \varphi \leq \arccos(\rho/R - 1)$ . Это означает (рис. 76, б), что область  $G'_1$  задается неравенствами

$$G'_1 = \left\{ (\rho, \varphi) : R \leq \rho \leq 2R, 0 \leq \varphi \leq \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) \right\}. \quad (10.25)$$

Соответственно, в области  $G'_2$  любая окружность с радиусом  $\rho$ :  $0 < \rho < R$  пересечет область  $G$  по дуге этой окружности от  $\varphi = \arccos(\rho/R)$  до  $\varphi = \arccos(\rho/R - 1)$ , так, что  $\arccos(\rho/R) \leq \varphi \leq \arccos(\rho/R - 1)$ . Это означает (рис. 76, б), что область  $G'_2$  задается неравенствами

$$G'_2 = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 < \rho < R, \arccos \frac{\rho}{R} \leq \varphi \leq \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) \right\}. \quad (10.26)$$

С учетом этого интеграл (10.14') можно записать в виде еще одной суммы

$$\begin{aligned} I &= \iint_G dx dy = 2 \iint_{G^+} \rho d\rho d\varphi = 2 \left( \iint_{G'_1} \rho d\rho d\varphi + \iint_{G'_2} \rho d\rho d\varphi \right) = \\ &= 2 \left\{ \int_0^R \rho d\rho \int_{\arccos(\rho/R)}^{\arccos(\rho/R-1)} d\varphi + \int_R^{2R} \rho d\rho \int_0^{\arccos(\rho/R-1)} d\varphi \right\} = \\ &= 2 \left\{ \int_0^R \rho d\rho \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) - \int_0^R \rho d\rho \arccos \frac{\rho}{R} + \int_R^{2R} \rho d\rho \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) \right\}. \quad (10.27) \end{aligned}$$

Из трех последних интегралов в (10.19) первый и третий можно объединить. В результате получим разность

$$I = 2 \left\{ \int_0^{2R} \rho d\rho \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) - \int_0^R \rho d\rho \arccos \frac{\rho}{R} \right\} = I'_1 - I'_2, \quad (10.28)$$

где

$$I'_1 = 2 \int_0^{2R} \rho \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) d\rho; \quad (10.29)$$

$$I'_2 = 2 \int_0^R \rho \arccos \frac{\rho}{R} d\rho. \quad (10.30)$$

Вычислим последовательно эти интегралы. Для  $I'_1$  заменой

$$z = \frac{\rho}{R} - 1, \quad \rho = R(z + 1)$$

с последующим громоздким интегрированием по частям найдем

$$\begin{aligned} I'_1 &= 2 \int_0^{2R} \rho \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) d\rho = 2R^2 \int_{-1}^1 (z + 1) \arccos z dz = \\ &= 2R^2 \left[ \int_{-1}^1 z \arccos z dz + \int_{-1}^1 \arccos z dz \right] = \\ &= 2R^2 \left\{ \left[ \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arccos z - \frac{z}{4} \sqrt{1 - z^2} \right] + \left[ z \arccos z - \sqrt{1 - z^2} \right] \right\} \Big|_{-1}^1 = \\ &= 2R^2 \left\{ \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \arccos 1 - 0 \right] + [\arccos 1 - 0] - \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \arccos(-1) - 0 \right] - \right. \\ &\quad \left. - [\arccos(-1) - 0] \right\} = 2R^2 \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi \right\} = \frac{3\pi R^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Соответственно, для  $I'_2$  заменой

$$\frac{\rho}{R} = z, \quad \rho = Rz$$

и еще одним громоздким интегрированием по частям получим

$$\begin{aligned} I'_2 &= 2 \int_0^R \rho \arccos \frac{\rho}{R} d\rho = 2R^2 \int_0^1 z \arccos z dz = \\ &= 2R^2 \left[ \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arccos z - \frac{z}{4} \sqrt{1 - z^2} \right] \Big|_0^1 = \\ &= 2R^2 \left\{ \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \arccos 1 - 0 \right] - \left[ -\frac{1}{4} \arccos(0) - 0 \right] \right\} = 2R^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\pi R^2}{4}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Подставив (10.31), (10.32) в (10.28), получим значение исходного двойного интеграла:

$$I = I'_1 - I'_2 = \frac{3\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{5\pi R^2}{4},$$

совпадающее с результатом (10.24), но полученное благодаря другому порядку интегрирования, представленному формулой (10.27).

Сравнение вычисления интегралов  $I_1$  (10.22),  $I_2$  (10.23) и интегралов  $I'_1$  (10.31),  $I'_2$  (10.32) показывает, что вычисление интегралов  $I_1, I_2$  с внешним интегрированием по  $\varphi$  является более простым. При другом порядке интегрирования вычисление интегралов  $I'_1, I'_2$  становится более громоздким из-за необходимости использования интегрирования по частям.

III. Представление области интегрирования разностью множеств.

Наряду с рассмотренными выше способами представления области интегрирования  $G^+$  двумя объединениями:  $G^+ = G_1 \cup G_2$  и  $G^+ = G'_1 \cup G'_2$ , ее можно рассматривать и как разность множеств  $G^+ = G_{\text{кар}} \setminus G_{\text{окр}}$ , где  $G_{\text{кар}}$  – область, расположенная в верхней полуплоскости и ограниченная кривой  $\rho = R(1 + \cos \varphi)$  и прямой  $y = 0$  (рис. 77, а), а  $G_{\text{окр}}$  – область, расположенная также в верхней полуплоскости и ограниченная окружностью  $\rho = R \cos \varphi$  и прямой  $y = 0$  (рис. 77, б).

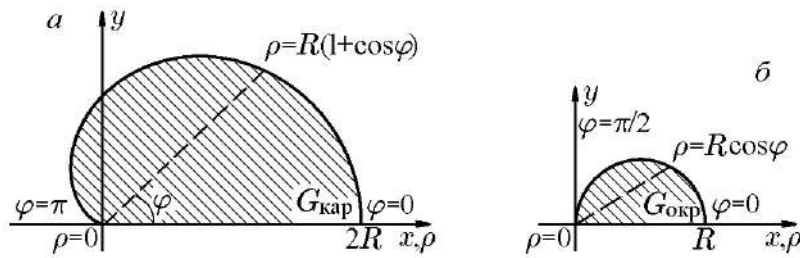


Рис. 77.  $G_{\text{кар}}$  (а);  $G_{\text{окр}}$  (б)

Если принять во внимание, что функция  $f(x, y) = 1$  и интегрируема как в области  $G_{\text{кар}}$ , так и в области  $G_{\text{окр}}$ , то исходный интеграл (10.14) можно представить разностью двойных интегралов:

$$\begin{aligned} \iint_G dx dy &= 2 \iint_{G^+} dx dy = 2 \iint_{G_{\text{кар}} \setminus G_{\text{окр}}} \rho d\rho d\varphi = \\ &= 2 \left\{ \iint_{G_{\text{кар}}} \rho d\rho d\varphi - \iint_{G_{\text{окр}}} \rho d\rho d\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Чтобы вычислить двойные интегралы в (10.33), нужно задать порядок постановки пределов для их повторных интегралов, как это было сделано выше. Рассмотрим последовательно оба варианта.

1. Внешнее интегрирование по переменной  $\varphi$ .

В этом случае область  $G_{\text{кар}}$  располагается между двумя лучами,  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Любой луч, выпущенный под углом  $\varphi \in [0, \pi]$ , пересечет область  $G_{\text{кар}}$  по отрезку этого луча от  $\rho = 0$  до  $\rho = R(1 + \cos \varphi)$  (рис. 77, а), что соответствует заданию области  $G_{\text{кар}}$  неравенствами

$$G_{\text{кар}} = \{(\rho, \varphi): 0 < \varphi \leq \pi, 0 < \rho \leq R(1 + \cos \varphi)\}. \quad (10.34)$$

Соответственно, в области  $G_{\text{окр}}$ , расположенной между двумя лучами,  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ , любой луч между ними пересечет область  $G_{\text{окр}}$  по отрезку луча от  $\rho = 0$  до  $\rho = R \cos \varphi$  (рис. 77, б), что соответствует заданию области  $G_{\text{окр}}$  неравенствами

$$G_{\text{окр}} = \left\{ (\rho, \varphi): 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \rho \leq R \cos \varphi \right\}. \quad (10.35)$$

Как видим, система неравенств (10.34), (10.35) проще использованной ранее системы неравенств (10.16), (10.17). С помощью неравенств (10.34), (10.35) разность интегралов (10.33) запишется в виде

$$\begin{aligned} \iint_G dx dy &= 2 \iint_{G^+} dx dy = 2 \left\{ \iint_{G_{\text{кар}}} \rho d\rho d\varphi - \iint_{G_{\text{окр}}} \rho d\rho d\varphi \right\} = \\ &= 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{R(1+\cos\varphi)} \rho d\rho - 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \rho d\rho = S_{\text{кар}} - S_{\text{окр}}, \end{aligned} \quad (10.36)$$

где

$$S_{\text{кар}} = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{R(1+\cos\varphi)} \rho d\rho = \int_0^\pi [R(1+\cos\varphi)]^2 d\varphi; \quad (10.37)$$

$$S_{\text{окр}} = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\pi/2} [R\cos\varphi]^2 d\varphi. \quad (10.38)$$

Но эти интегралы совпадают с уже вычисленными интегралами (10.20), (10.21), а следовательно, в силу (10.22), (10.23):

$$S_{\text{кар}} = I_1 = \frac{3\pi R^2}{2}; \quad (10.39)$$

$$S_{\text{окр}} = I_2 = \frac{\pi R^2}{4}, \quad (10.40)$$

и, стало быть, как и в (10.24),

$$I = S_{\text{кар}} - S_{\text{окр}} = \frac{3\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{5\pi R^2}{4}. \quad (10.41)$$

## 2. Внешнее интегрирование по переменной $\rho$ .

В этом случае будем рассматривать области  $G_{\text{кар}}$ , расположенную между двумя окружностями:  $\rho = 0$  и  $\rho = 2R$ . Тогда любая окружность с радиусом  $\rho$ :  $0 < \rho < 2R$  будет пересекать область  $G_{\text{кар}}$  по дуге этой окружности, расположенной между лучами  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \arccos(\rho/R - 1)$  (рис. 78, а). Это соответствует заданию области  $G_{\text{кар}}$  неравенствами

$$G_{\text{кар}} = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 2R, 0 \leq \varphi \leq \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) \right\}. \quad (10.42)$$

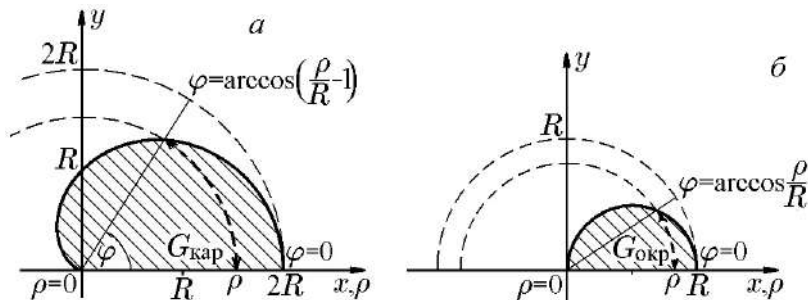


Рис. 78.  $G_{\text{кар}}$  (а);  $G_{\text{окр}}$  (б)

Наряду с этим будем рассматривать область  $G_{\text{окр}}$ , расположенную между двумя окружностями  $\rho = 0$  и  $\rho = R$ . Тогда любая окружность радиусом  $\rho$  ( $0 < \rho < 2R$ ) будет пересекать область  $G_{\text{окр}}$  по дуге этой окружности, расположенной между лучами  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \arccos(\rho/R)$  (рис. 78, б). Это соответствует заданию области  $G_{\text{окр}}$  неравенствами

$$G_{\text{окр}} = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \arccos \frac{\rho}{R} \right\}. \quad (10.43)$$

С помощью неравенств (10.42), (10.43) разность интегралов (10.33) запишется в виде

$$\begin{aligned} \iint_G dx dy &= 2 \iint_{G^+} dx dy = 2 \left\{ \iint_{G_{\text{кар}}} \rho d\rho d\varphi - \iint_{G_{\text{окр}}} \rho d\rho d\varphi \right\} = \\ &= 2 \int_0^{2R} \rho d\rho \int_0^{\arccos(\rho/R-1)} d\varphi - 2 \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\arccos(\rho/R)} d\varphi = S_{\text{кар}} - S_{\text{окр}}, \end{aligned} \quad (10.44)$$

где

$$S_{\text{кар}} = 2 \int_0^{2R} \rho d\rho \int_0^{\arccos(\rho/R-1)} d\varphi = 2 \int_0^{2R} \rho \arccos\left(\frac{\rho}{R} - 1\right) d\rho; \quad (10.45)$$

$$S_{\text{окр}} = 2 \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\arccos(\rho/R)} d\varphi = 2 \int_0^R \rho \arccos \frac{\rho}{R} d\rho. \quad (10.46)$$

Но эти интегралы совпадают с уже вычисленными интегралами (10.29), (10.30), а следовательно, в силу (10.31), (10.32),

$$S_{\text{кар}} = I'_1 = \frac{3\pi R^2}{2}; \quad (10.47)$$

$$S_{\text{окр}} = I_2 = \frac{\pi R^2}{4}, \quad (10.48)$$

и, стало быть, как и выше,

$$I = S_{\text{кар}} - S_{\text{окр}} = \frac{3\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{5\pi R^2}{4}.$$

Таким образом, представление исходного интеграла (10.14) разностью интегралов вида (10.36) или (10.44) имеет простой геометрический смысл, определяя площадь (меру) области интегрирования  $G$  как разности площадей кардиоиды  $S_{\text{кар}} = 3\pi R^2/2$  и расположенной внутри нее окружности  $S_{\text{окр}} = \pi R^2/4$ :

$$m(G) = I = S = S_{\text{кар}} - S_{\text{окр}} = \frac{5\pi R^2}{4}.$$

Следующий пример иллюстрирует возможность использования полярных координат, когда изменение азимутального угла  $\varphi$  формально превышает значение  $2\pi$ .

**Пример 10.5.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

по области  $G$ , расположенной между двумя кривыми:

$$\rho = \frac{R\varphi}{4\pi}, \quad \rho = R \sin \frac{\varphi}{8}.$$

**Решение.** Область  $G$  изображена на рис. 79, из которого следует, что наиболее простые условия для координат точки  $(\rho, \varphi) \in G$  выглядят как

$$0 < \varphi < 4\pi, \quad \frac{R\varphi}{4\pi} < \rho < R \sin \frac{\varphi}{8}. \quad (10.49)$$

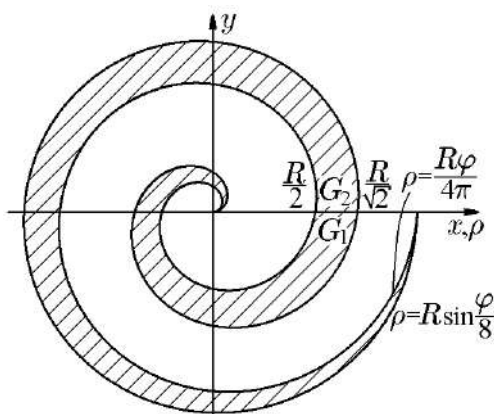


Рис. 79.  $G = G_1 \cup G_2$

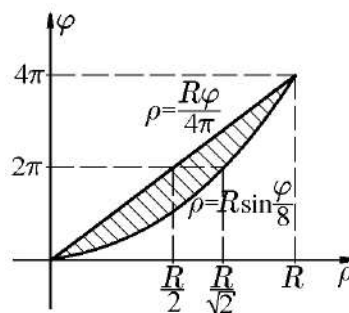


Рис. 80. Пробраз  $G'$  области  $G$

Но такая запись формально нарушает требование, чтобы азимутальный угол  $\varphi$  не превышал  $2\pi$ . Возможность использования здесь полярных координат можно обосновать аналитически. Для этого представим множество  $G$  объединением  $G = G_1 \cup G_2$ , где

$$G_1 = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{R\varphi}{4\pi} \leq \rho \leq R \sin \frac{\varphi}{8} \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (\rho, \varphi) : 2\pi \leq \varphi \leq 4\pi, \frac{R\varphi}{4\pi} \leq \rho \leq R \sin \frac{\varphi}{8} \right\}.$$

Для каждого из этих множеств переход к полярной системе координат уже не имеет формальных препятствий, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_G \rho^2 d\rho d\varphi = \iint_{G_1} \rho^2 d\rho d\varphi + \iint_{G_2} \rho^2 d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R\varphi/4\pi}^{R \sin(\varphi/8)} \rho^2 d\rho + \int_{2\pi}^{4\pi} d\varphi \int_{R\varphi/4\pi}^{R \sin(\varphi/8)} \rho^2 d\rho. \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что внутренние интегралы в обоих слагаемых одинаковы, и используя аддитивность одномерного интеграла, получим

$$\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_G \rho^2 d\rho d\varphi = \int_0^{4\pi} d\varphi \int_{R\varphi/4\pi}^{R\sin(\varphi/8)} \rho^2 d\rho. \quad (10.50)$$

Этот результат можно было получить сразу, исходя из прообраза  $G'$  области  $G$  (рис. 80) по соотношениям (10.49), наглядно иллюстрирующего взаимную однозначность отображений  $G'$  и  $G$ .

Продолжив вычисления интеграла (10.50), найдем

$$\begin{aligned} \iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_G \rho^2 d\rho d\varphi = \int_0^{4\pi} d\varphi \int_{R\varphi/4\pi}^{R\sin(\varphi/8)} \rho^2 d\rho = \int_0^{4\pi} d\varphi \left( \frac{\rho^3}{3} \Big|_{R\varphi/4\pi}^{R\sin(\varphi/8)} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{4\pi} \left( R^3 \sin^3 \frac{\varphi}{8} - \frac{R^3 \varphi}{(4\pi)^3} \right) d\varphi = \frac{R^3}{3} \left( I_1 - \frac{1}{(4\pi)^3} I_2 \right), \end{aligned} \quad (10.51)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{4\pi} \sin^3 \frac{\varphi}{8} d\varphi = \left| \begin{array}{l} \varphi = 8t, \quad \varphi_1 = 0, \quad t_1 = 0 \\ d\varphi = dt, \quad \varphi_2 = 4\pi, \quad t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = 8 \left( \frac{\cos^3 t}{3} - \cos t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

и

$$I_2 = \int_0^{4\pi} \varphi^3 d\varphi = \frac{\varphi^4}{4} \Big|_0^{4\pi} = \frac{(4\pi)^4}{4}.$$

С учетом этого из (10.51) следует:

$$\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{R^3}{3} \left( \frac{16}{3} - \frac{1}{(4\pi)^3} \frac{(4\pi)^4}{4} \right) = \frac{R^3}{3} \left( \frac{16}{3} - \pi \right) = \frac{R^3}{9} (16 - 3\pi).$$

Следующие примеры иллюстрируют различия в вычислении двойных интегралов, возникающие при использовании различных видов замены переменных.

**Пример 10.6.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} dx dy$$

по области  $G$ , ограниченной четырьмя окружностями:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{4}, & (x - 1)^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}, & x^2 + (y - 1)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (10.52)$$



**Решение.** Этот интеграл уже рассматривался в примере 9.14, где был вычислен с помощью замены переменных (преобразования инверсии) (9.34), отображающей  $G$  в квадрат (см. рис. 71). Здесь этот же интеграл вычислим, перейдя к полярным координатам. В полярной системе координат окружности (10.52), ограничивающие область  $G$ , определяются уравнениями (рис. 81):

$$\rho = \cos \varphi, \quad \rho = 2 \cos \varphi, \quad \rho = \sin \varphi, \quad \rho = 2 \sin \varphi. \quad (10.53)$$

На рис. 81 точка  $A$  – точка пересечения окружности  $\rho = \cos \varphi$  с окружностью  $\rho = \sin \varphi$  и точка  $B$  – точка пересечения окружности  $\rho = 2 \cos \varphi$  с окружностью  $\rho = 2 \sin \varphi$ . Обе точки лежат на одном луче –  $\varphi = \pi/4$ . Точка  $C$  является точкой пересечения окружности  $\rho = \cos \varphi$  с окружностью  $\rho = 2 \sin \varphi$  и расположена на луче  $\varphi = \text{arcctg} 2$ , что следует из равенства  $\cos \varphi = 2 \sin \varphi$ . Точка  $D$  является точкой пересечения окружности  $\rho = 2 \cos \varphi$  с окружностью  $\rho = \sin \varphi$  и расположена на луче  $\varphi = \text{arcctg}(1/2)$ , поскольку в этой точке  $2 \cos \varphi = \sin \varphi$ .

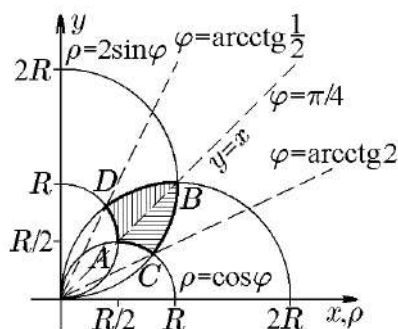


Рис. 81.  $G = G_{ABC} \cup G_{ABD}$

Чтобы упростить вычисление интеграла, воспользуемся тем, что луч  $\varphi = \pi/4$ , на котором  $y = x$ , является осью симметрии области интегрирования. Отрезок  $AB$  делит ее на две симметричные области:  $G_{ABC}$  и  $G_{ABD}$ . Во всех точках этих областей, симметричных относительно луча  $\varphi = \pi/4$ , подынтегральная функция  $1/(x^2 + y^2)^3$  имеет равные значения. Это позволяет записать исходный интеграл в виде

$$\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^3} = 2 \iint_{G_{ABC}} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^3} = 2 \iint_{G_{ABC}} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^5}. \quad (10.54)$$

Область  $G_{ABC}$  в полярных координатах можно определить равенствами

$$G_{ABC} = \left\{ (\rho, \varphi) : \text{arcctg} 2 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \cos \varphi < \rho < 2 \sin \varphi \right\}.$$

В силу этого двойной интеграл (10.53) запишется в виде повторных интегралов вида

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^3} &= 2 \iint_{G_{ABC}} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^5} = 2 \int_{\text{arcctg} 2}^{\pi/4} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \sin \varphi} \frac{d\rho}{\rho^5} = -\frac{1}{2} \int_{\text{arcctg} 2}^{\pi/4} \left( \frac{1}{\rho^4} \Big|_{\cos \varphi}^{2 \sin \varphi} \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{arcctg} 2}^{\pi/4} \left( \frac{1}{\cos^4 \varphi} - \frac{1}{16 \sin^4 \varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \left( I_1 - \frac{1}{16} I_2 \right), \end{aligned} \quad (10.55)$$

где

$$I_1 = \int_{\text{arcctg} 2}^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi}, \quad I_2 = \int_{\text{arcctg} 2}^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi}.$$

Вычислив эти интегралы,

$$I_1 = \int_{\text{arcctg} 2}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 \varphi} d\varphi = \int_{\text{arcctg} 2}^{\pi/4} \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi = \left( \text{tg} \varphi + \frac{\text{tg}^3 \varphi}{3} \right) \Big|_{\text{arcctg} 2}^{\pi/4} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{(1/2)^3}{3}\right) = \frac{19}{24}; \\
I_2 &= \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\pi/4} \frac{1}{\sin^4 \varphi} d\varphi = \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\pi/4} \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} d\varphi = \left(-\operatorname{ctg} \varphi - \frac{\operatorname{ctg}^3 \varphi}{3}\right) \Big|_{\operatorname{arctg} 2}^{\pi/4} = \\
&= -\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{10}{3},
\end{aligned}$$

и подставив их в (10.55), получим

$$\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^3} = 2 \iint_{G_{ABC}} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^5} = \frac{1}{2} \left(\frac{19}{24} - \frac{1}{16} \frac{10}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{48} = \frac{7}{24}$$

– значение интеграла, совпадающее с найденным в примере 9.14.

**Пример 10.7.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G |\cos(x + y)| dx dy$$

по области  $G$ :

$$G = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}. \quad (10.56)$$

**Решение.** В точках квадрата  $G$ , симметричных относительно его диагонали, определяемой уравнением  $x + y = \pi$ , подынтегральная функция принимает равные значения:  $|\cos(\pi \pm a)| = |\cos a|$  (рис. 82, *a*). В силу этого справедливо равенство

$$\iint_G |\cos(x + y)| dx dy = 2 \iint_{G^-} |\cos(x + y)| dx dy, \quad (10.57)$$

где

$$G^- = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x\}. \quad (10.58)$$

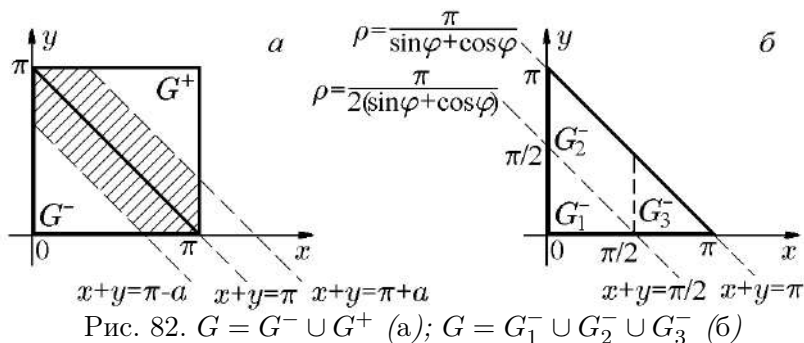


Рис. 82.  $G = G^- \cup G^+$  (а);  $G = G_1^- \cup G_2^- \cup G_3^-$  (б)

Для сравнения вычислим интеграл (10.57) в декартовых, а затем в полярных координатах.

1. В декартовых координатах для расстановки пределов в повторных интегралах область  $G^-$  представим объединением  $G^- = G_1^- \cup G_2^- \cup G_3^-$ , где

$$\begin{aligned} G_1^- &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} - x \right\}, \\ G_2^- &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - x \leq y \leq \pi - x \right\}, \\ G_3^- &= \left\{ (x, y) : \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x \right\}. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &\geq 0 \quad \forall (x, y) \in G_1^-, \\ \cos(x + y) &< 0 \quad \forall (x, y) \in G_2^- \cup G_3^-, \end{aligned}$$

интеграл (10.56) можно записать разностью двойных интегралов

$$\begin{aligned} J &= 2 \iint_{G^-} |\cos(x + y)| dx dy = \\ &= 2 \left\{ \iint_{G_1^-} \cos(x + y) dx dy - \iint_{G_2^- \cup G_3^-} \cos(x + y) dx dy \right\}, \end{aligned} \quad (10.60)$$

переход в которых к повторным интегралам дает

$$\begin{aligned} J &= 2 \iint_{G^-} |\cos(x + y)| dx dy = \\ &= 2 \left\{ \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2-x} \cos(x + y) dy - \int_0^{\pi/2} dx \int_{\pi/2-x}^{\pi-x} \cos(x + y) dy - \right. \\ &\left. - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{\pi-x} \cos(x + y) dy \right\} = 2 \left\{ \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx + \int_0^{\pi/2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx \right\} = 2\pi. \end{aligned}$$

2. В полярных координатах для расстановки пределов в повторных интегралах (10.57) область  $G^-$  представим объединением  $G^- = G_1^- \cup (G_2^- \cup G_3^-)$ , где

$$\begin{aligned} G_1^- &= \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2\psi} \right\}, \\ G_2^- \cup G_3^- &= \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\psi} \leq \rho \leq \frac{\pi}{\psi} \right\}. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Здесь для удобства введено обозначение

$$\psi = \sin \varphi + \cos \varphi. \quad (10.62)$$

С учетом (10.61), (10.62) из (10.60) имеем

$$\begin{aligned} J &= 2 \iint_{G^-} |\cos(x + y)| dx dy = 2 \left\{ \iint_{G_1^-} \cos[\rho(\cos \varphi + \sin \varphi)] \rho d\rho d\varphi - \right. \\ &\left. - \iint_{G_2^- \cup G_3^-} \cos[\rho(\cos \varphi + \sin \varphi)] \rho d\rho d\varphi \right\} = 2(J_1 - J_2), \end{aligned} \quad (10.63)$$

где

$$J_1 = \iint_{G_1^-} \cos[\rho(\cos \varphi + \sin \varphi)] \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2\psi} \rho \cos(\rho\psi) d\rho,$$

и

$$J_2 = \iint_{G_2^- \cup G_3^-} \cos[\rho(\cos \varphi + \sin \varphi)] \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/2\psi}^{\pi/\psi} \rho \cos(\rho\psi) d\rho.$$

Вычисление интеграла  $J_1$  с помощью известного равенства

$$\int \rho \cos(\rho\psi) d\rho = \frac{1}{\psi^2} (\cos \psi \rho + \psi \rho \sin \psi \rho)$$

дает

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\psi^2} (\cos \psi \rho + \psi \rho \sin \psi \rho) \Big|_0^{\pi/2\psi} d\varphi = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\psi^2} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) J_0.$$

Вычислим вспомогательный интеграл:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\psi^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi + \pi/4)} = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\psi^2} (\cos \psi \rho + \psi \rho \sin \psi \rho) \Big|_{\pi/2\psi}^{\pi/\psi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\psi^2} \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} + \pi \sin \pi - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}\right) d\varphi = \\ &= -\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\psi^2} = -\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) J_0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J_1 = \frac{\pi}{2} - 1, \quad J_2 = -\frac{\pi}{2} - 1.$$

Подстановка этих значений в (10.63):

$$\iint_G |\cos(x+y)| dx dy = 2(J_1 - J_2) = 3 \left[ \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \right] = 2\pi,$$

дает значение исходного интеграла, совпадающее с найденным при интегрировании в декартовых координатах.

**Пример 10.8.** Вычислить интеграл

$$\iint_G xy \, dx \, dy$$

по области  $G$ , определяемой неравенствами (рис. 83)

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 2R^2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (10.64)$$

**Решение.** Область интегрирования представляет собой внутреннюю часть лемнискаты, расположенную в 1-й четверти. Уравнение лемнискаты в полярных координатах имеет вид

$$\rho = R\sqrt{2 \cos 2\varphi}. \quad (10.65)$$

С учетом этого неравенство (10.64) в полярных координатах запишется как

$$G = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq R\sqrt{2 \cos 2\varphi} \right\}. \quad (10.66)$$

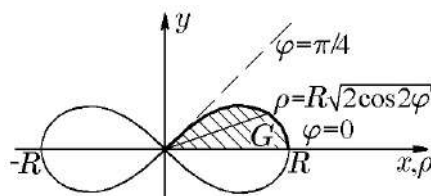


Рис. 83. Область  $G$

Перейдя к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , с учетом уравнения (10.65) исходный интеграл запишем в виде

$$\begin{aligned} \iint_G xy \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{R\sqrt{2 \cos 2\varphi}} \rho^3 \, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi \left( \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{R\sqrt{2 \cos 2\varphi}} \right) d\varphi = \\ &= \frac{R^4}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi \sin 2\varphi \, d\varphi = -\frac{R^4}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi \, d(\cos 2\varphi) = -\frac{R^4}{4} \frac{\cos^3 2\varphi}{3} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{R^2}{12}. \end{aligned}$$

**Пример 10.9.** Вычислить интеграл

$$\iint_G \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

по области  $G$ , определяемой неравенствами

$$x^2 + y^2 \geq \left(\frac{R}{4}\right)^2, \quad (x^2 + y^2)^2 \leq 2Rx^3. \quad (10.67)$$

**Решение.** Наличие слагаемых  $x^2 + y^2$ , как и выше, наводит на мысль об использовании полярных координат. Первая линия из (10.67) представляет собой окружность радиусом  $R/4$  и в полярных координатах имеет вид  $\rho = R/4$ . Вторая кривая из (10.67) симметрична относительно оси  $Ox$ , поскольку уравнение

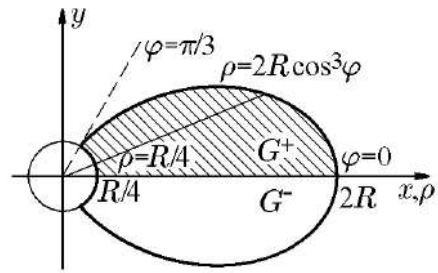
$$(x^2 + y^2)^2 \leq 2Rx^3 \quad (10.68)$$

не меняется при замене  $y$  на  $-y$  и располагается в правой полуплоскости  $x \geq 0$ , поскольку  $x$  не может быть отрицательным. Вместе с этим кривая (10.68) пересекает ось  $Ox$  в точках  $x = 0$  и  $x = 2R$  и к тому же является ограниченной. Действительно, из уравнения (10.68) вытекает оценка  $x^4 \leq 2Rx^3$  или  $x \leq 2R$ . Но из этой оценки следует еще одна, а именно  $y^4 \leq 2Rx^3$ , и, следовательно,  $|y| \leq 2R$ . Уравнение кривой (10.68) в полярных координатах имеет вид

$$\rho = 2R \cos^3 \varphi, \quad (10.69)$$

где азимутальный угол изменяется от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ .

Чтобы построить области интегрирования  $G$ , найдем точки пересечения окружности с кривой  $\rho = 2R \cos^3 \varphi$ . Из равенства полярных радиусов следует:  $R/4 = 2R \cos^3 \varphi$  или  $\cos^3 \varphi = 1/8$ . Отсюда  $\cos \varphi = 1/2$  и, следовательно,  $\varphi = \pm \pi/3$ , и область интегрирования будет иметь вид, изображенный на рис. 84, где  $G = G^+ \cup G^-$ . Поскольку точка  $\rho = 0$  не входит в область интегрирования  $G$ , то подынтегральная функция в этой области ограничена и непрерывна. В силу этого двойной интеграл существует. Его вычисление можно упростить, если воспользоваться симметрией подынтегральной функции и области интегрирования относительно оси  $Ox$ . Тогда исходный интеграл можно записать как

Рис. 84.  $G = G^+ \cup G^-$ 

$$\iint_G \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \iint_{G^+} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \iint_{G^+} \frac{1}{\rho} \rho d\rho d\varphi = 2 \iint_{G^+} d\rho d\varphi.$$

Так как область  $G^+$  в полярных координатах определена неравенствами

$$G^+ = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \frac{R}{4} \leq \rho \leq 2R \cos^3 \varphi \right\},$$

то

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 2 \iint_{G^+} d\rho d\varphi = 2 \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_{R/4}^{2R \cos^3 \varphi} d\rho = 2 \int_0^{\pi/3} \left( 2R \cos^3 \varphi - \frac{R}{4} \right) d\varphi = \\ &= 4R \int_0^{\pi/3} \left( \cos^3 \varphi - \frac{1}{8} \right) d\varphi = 4R \left[ \int_0^{\pi/3} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) - \frac{1}{8} \int_0^{\pi/3} d\varphi \right] = \\ &= 4R \left[ \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} - \frac{1}{8} \varphi \right] \Big|_0^{\pi/3} = 4R \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - \frac{\pi}{24} \right] = \frac{R}{6} (9\sqrt{3} - \pi). \end{aligned}$$

**Пример 10.10.** Вычислить интеграл

$$\iint_G |xy| dx dy$$

по области  $G$ , ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^3 = R^2(x^4 + y^4). \quad (10.70)$$

**Решение.** Чтобы построить область интегрирования  $G$ , установим некоторые свойства кривой (10.70). Во-первых, кривая (10.70) симметрична относительно обеих координатных осей и, следовательно, относительно начала координат. Во-вторых, сама точка  $O(0, 0)$ , соответствующая началу координат, формально «принадлежит» кривой, но является ее изолированной точкой. В этом можно убедиться, положив  $x \geq y > 0$ , тогда из уравнения (10.70) следует оценка  $(2x^2)^3 \geq 2R^2x^4$ , из которой вытекает еще одна:  $x \geq R/2$ , означающая, что вблизи начала координат точек кривой (10.70) нет. Таким образом, точку  $O(0, 0)$  из рассмотрения исключаем. Вместе с этим можно убедиться, что кривая (10.70)

является ограниченной. Действительно, при  $x \geq y$  очевидно, что  $x^6 \leq 2R^2 x^4$ , т. е.  $|x| \leq \sqrt{2}R$ . А так как при  $y \geq x$  очевидно, что  $y^6 \leq 2R^2 x^4$ , то и  $|y| \leq \sqrt{2}R$ . В дополнение к этому найдем точки пересечения кривой с координатными осями. Положив  $y = 0$ , находим  $x = \pm R$ , соответственно,  $x = 0$  дает  $y = \pm R$ . Если при этом учесть, что полярное уравнение (10.70) имеет вид

$$\rho = R\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}, \quad (10.71)$$

то можно построить кривую, описываемую уравнением (10.70) (рис. 85).

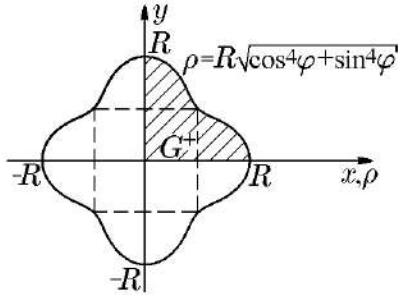


Рис. 85. Кривая (10.70)

Переходя к вычислению двойного интеграла, отметим, что его можно упростить, воспользовавшись симметрией подынтегральной функции и области интегрирования относительно координатных осей. В силу этого исходный интеграл можно записать как

$$\begin{aligned} \iint_G |xy| dx dy &= 4 \iint_{G^+} xy dx dy = \\ &= 4 \iint_{G^+} \sin \varphi \cos \varphi \rho^3 d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Так как область  $G^+$  в полярных координатах определена неравенствами

$$G^+ = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq R\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi} \right\},$$

то

$$\begin{aligned} \iint_G |xy| dx dy &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{R\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}} \rho^3 d\rho = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \left( \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{R\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}} \right) = \frac{R^4}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)^2 \sin 2\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью известного тригонометрического соотношения

$$\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2\varphi)$$

имеем

$$\begin{aligned} \iint_G |xy| dx dy &= \frac{R^4}{16} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 2\varphi)^2 \sin 2\varphi d(2\varphi) = \\ &= -\frac{R^4}{16} \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos^2 2\varphi + \sin^4 2\varphi) d(\cos 2\varphi) = \\ &= -\frac{R^4}{16} \left( \cos 2\varphi + \frac{2}{3} \cos^3 2\varphi + \frac{1}{5} \sin^5 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^4}{8} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{7}{30} R^4. \end{aligned}$$

◇ В предыдущих примерах переход от сложного уравнения кривой в декартовых координатах к простому уравнению в полярных координатах строится, по существу, на использовании тригонометрического тождества  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ . Действительно, заменой  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  сумма  $x^2 + y^2$  упрощалась:  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . Следуя этой идее, заменой  $x = a\rho \cos \varphi$ ,  $y = b\rho \sin \varphi$  сумму  $(x/a)^2 + (y/b)^2$  можно записать таким же образом:  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = \rho^2$ . Аналогично этому другая замена,  $x = \rho \cos^2 \varphi$ ,  $y = \rho \sin^2 \varphi$ , позволяет упростить другую сумму:  $x + y = \rho$ . Соответственно, замена  $x = a\rho \cos^2 \varphi$ ,  $y = b\rho \sin^2 \varphi$  позволяет записать  $(x/a) + (y/b) = \rho$ . В общем случае замена переменных

$$x = a\rho \cos^{2\mu} \varphi, \quad y = b\rho \sin^{2\mu} \varphi \quad (10.72)$$

позволяет записать

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1/\mu} + \left(\frac{y}{b}\right)^{1/\mu} = \rho^{1/\mu}.$$

Замена переменных (10.72) соответствует переходу к криволинейным координатам (9.19), введенным выше и названным *обобщенными полярными координатами*, с якобианом (9.20):

$$J(\rho, \varphi) = ab\mu\rho \sin^{\mu-1} \varphi \cos^{\mu-1} \varphi. \quad (10.73)$$

Так как обобщенные полярные координаты, как уже отмечалось, в общем случае не имеют наглядной геометрической интерпретации, то границы области интегрирования  $G$  в этих координатах определяются аналитически с построением, при необходимости, прообраза  $G'$  области  $G$  в координатах с осями  $\rho, \varphi$ , как и в общем случае замены переменных.

**Пример 10.11.** Вычислить интеграл

$$\iint_G \frac{dx dy}{x^2 y^2}$$

по области  $G$ , определяемой неравенствами

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} \leq 1, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1, \quad 0 < \frac{2x}{3\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

**Решение.** Область интегрирования представляет собой часть эллиптического кольца

$$1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 4, \quad (10.74)$$

заклученного между прямыми

$$\frac{2x}{3\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{2x}{\sqrt{3}} \quad (10.75)$$

в полуплоскости  $x > 0$  (рис. 86, а).

Так как подынтегральная функция  $1/x^2 y^2$  ограничена и непрерывна в области  $G$ , то двойной интеграл существует. При вычислении его в декартовых координатах трудности возникают как при расстановки пределов в повторных интегралах, так и при нахождении первообразной во внешнем интеграле. Этого можно избежать, воспользовавшись обобщенными полярными координатами

$$x = 3\rho \cos \varphi, \quad y = 2\rho \sin \varphi. \quad (10.76)$$



В этих координатах уравнения эллипсов (10.74) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 &\Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 = 1 \quad \rho = 1, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4 &\Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 = 4 \quad \rho = 2, \end{aligned} \quad (10.77)$$

а из уравнений прямых (10.75) находятся пределы интегрирования для величины  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} y = \frac{2x}{3\sqrt{3}} &\Rightarrow 2\rho \sin \varphi = \frac{2 \cdot 3\rho \cos \varphi}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ или } \varphi = \frac{\pi}{6}, \\ y = \frac{2x}{\sqrt{3}} &\Rightarrow 2\rho \sin \varphi = \frac{2 \cdot 3\rho \cos \varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \text{ или } \varphi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned} \quad (10.78)$$

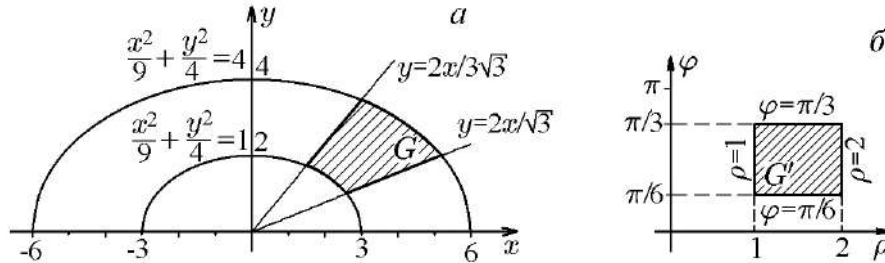


Рис. 86.  $G$  (а);  $G'$  (б)

Исходя из (10.77), (10.78), в обобщенных полярных координатах (10.76) преобраз  $G'$  области интегрирования  $G$  можно записать неравенствами

$$G' = \left\{ (\rho, \varphi) : \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 1 \leq \rho \leq 2 \right\}, \quad (10.79)$$

которые определяют прямоугольник  $G'$  (рис. 86, б).

Благодаря (10.79), исходный двойной интеграл с учетом выражения (10.73) для якобиана

$$J(\rho, \varphi) = 6\rho$$

можно записать следующими повторными интегралами:

$$\iint_G \frac{dx dy}{x^2 y^2} = \iint_{G'} \frac{6\rho d\rho d\varphi}{(3\rho \cos \varphi)^2 (2\rho \sin \varphi)^2} = \frac{1}{6} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi \sin \varphi)^2} \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho^3},$$

вычисление которых дает

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{x^2 y^2} &= \frac{1}{6} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi \sin \varphi)^2} \left( \frac{1}{2\rho^2} \Big|_1^2 \right) = \frac{1}{16} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi \sin \varphi)^2} = \frac{1}{8} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d(2\varphi)}{\sin^2 2\varphi} = \\ &= \frac{1}{8} (-\operatorname{ctg} 2\varphi) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{4\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (10.80)$$

**Пример 10.12.** Вычислить интеграл

$$\iint_G \frac{dx dy}{(x-1)^2 y^2}$$

по области  $G$ , определяемой системой неравенств

$$\begin{aligned} 16x^2 - 32x + 36y^2 &\leq 560, & 4x^2 - 8x + 9y^2 &\geq 32, \\ 0 < \frac{2(x-1)}{3\sqrt{3}} &\leq y \leq \frac{2(x-1)}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (10.81)$$

**Решение.** Чтобы построить область интегрирования  $G$ , уравнения кривых 2-го порядка из (10.81) приведем к каноническому виду:

$$\begin{aligned} 16x^2 - 32x + 36y^2 = 560 &\Rightarrow 16(x-1)^2 + 36y^2 = 576 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1; \\ 4x^2 - 8x + 9y^2 = 32 &\Rightarrow 4(x-1)^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Исходя из этого, расстановку пределов в повторных интегралах можно упростить, перейдя к переменным  $x' = x - 1$ ,  $y' = y$ . В новых переменных граница области  $G_1$  будет определена как

$$G_1 = \left\{ (x', y') : 1 \leq \frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} \leq 4, 0 < \frac{2x'}{3\sqrt{3}} \leq y' \leq \frac{2x'}{\sqrt{3}} \right\},$$

а сам интеграл примет вид

$$\iint_G \frac{dx dy}{(x-1)^2 y^2} = \iint_{G_1} \frac{dx' dy'}{(x')^2 (y')^2}.$$

Таким образом, получен интеграл, совпадающий с интегралом из предыдущего примера, вычисленным в обобщенных полярных координатах. Поэтому, воспользовавшись результатом (10.80), имеем

$$\iint_G \frac{dx dy}{(x-1)^2 y^2} = \iint_{G_1} \frac{dx' dy'}{(x')^2 (y')^2} = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

**Пример 10.13.** Вычислить интеграл

$$\iint_G xy dx dy$$

по области  $G$ , определяемой неравенствами

$$\left( \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right)^2 \leq xy, \quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}y^2 \geq 9.$$

**Решение.** Кривая

$$\left( \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right)^2 = xy \quad (10.82)$$

симметрична относительно начала координат, поскольку замена  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$  не меняет вид уравнения. Единственной точкой пересечения кривой с координатными осями является начало координат, а сама кривая состоит из двух симметричных относительно начала координат петель, расположенных в 1-й и 3-й четвертях, где  $xy \geq 0$ . Вторая кривая

$$\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 9$$

представляет собой эллипс

$$\frac{x^2}{(3\sqrt{3/2})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3/2})^2} = 1 \quad (10.83)$$

с полуосями  $3\sqrt{3/2}$  и  $2\sqrt{3/2}$  (рис. 87, а).

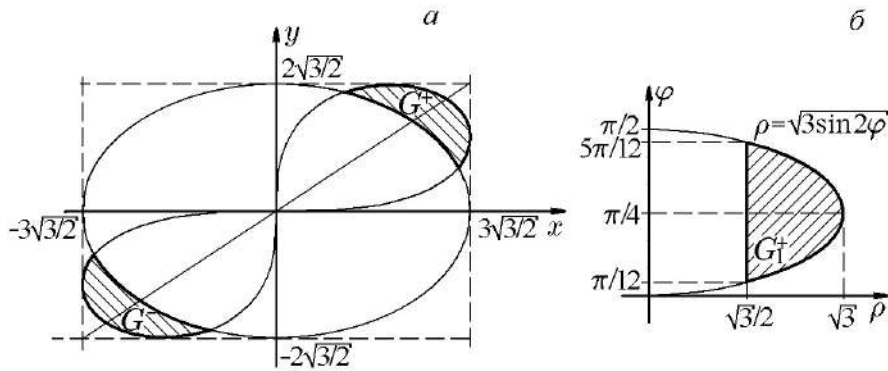


Рис. 87.  $G = G^- \cup G^+$  (а);  $G_1^+$  (б)

Так как подынтегральная функция  $f(x, y) = xy$  ограничена и непрерывна в области  $G$ , то двойной интеграл существует. При вычислении его в декартовых координатах трудности возникают как при расстановке пределов в повторных интегралах, так и при вычислении внешнего интеграла. Этого можно избежать, используя обобщенные полярные координаты. Переход к обобщенным полярным координатам

$$x = 3\rho \cos \varphi, \quad y = 2\rho \sin \varphi \quad (10.84)$$

упрощает уравнения (10.82), (10.83) до вида

$$\rho = \sqrt{3 \sin 2\varphi}, \quad \rho = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (10.85)$$

Чтобы записать повторные интегралы по переменным  $\rho$ ,  $\varphi$ , найдем координаты точек пересечения кривых (10.85), приравняв значения их радиусов  $\rho$ . Тогда

$$\sqrt{3 \sin 2\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{2}.$$

Это уравнение определяет значения переменной  $\varphi$  в точках пересечения кривых в 1-й четверти и, следовательно, граничные значения изменения  $\varphi$  от  $2\varphi_1 = \pi/6$  до  $2\varphi_2 = 5\pi/6$ , т. е.

$$\text{от } \varphi_1 = \frac{\pi}{12} \text{ до } \varphi_2 = \frac{5\pi}{12}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[. \quad (10.86)$$

Аналогично определяются координаты точек пересечения в 3-й четверти как точек, симметричных относительно начала координат.

Переходя непосредственно к вычислению двойного интеграла, отметим, что его вычисление можно упростить, воспользовавшись симметрией подынтегральной функции относительно начала координат. В силу этого исходный интеграл можно записать как

$$\iint_G xy \, dx \, dy = 2 \iint_{G^+} xy \, dx \, dy,$$

где  $G^+$  – часть области  $G$ , расположенная в 1-й четверти (рис. 87, а). Преобраз  $G_1^+$  области  $G^+$  в координатах  $\rho, \varphi$ , согласно (10.85), (10.86), определяется неравенствами

$$G_1^+ = \left\{ (\rho, \varphi) : \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{12}, \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \rho \leq \sqrt{3 \sin 2\varphi} \right\}. \quad (10.87)$$

Поскольку якобиан перехода  $(x, y) \rightarrow (\rho, \varphi)$  равен  $6\rho$ , то

$$\iint_G xy \, dx \, dy = 2 \iint_{G_1^+} 6\rho^2 (\cos \varphi \sin \varphi) \cdot 6\rho \, d\rho \, d\varphi = 36 \iint_{G_1^+} \rho^3 \sin 2\varphi \, d\rho \, d\varphi.$$

Этот двойной интеграл, исходя из (10.87) и рис. 87, б, можно представить повторными и вычислить:

$$\begin{aligned} \iint_G xy \, dx \, dy &= 36 \iint_{G_1^+} \rho^3 \sin 2\varphi \, d\rho \, d\varphi = 36 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi \, d\varphi \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3 \sin 2\varphi}} \rho^3 \, d\rho = \\ &= 36 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi \, d\varphi \left( \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3 \sin 2\varphi}} \right) = 9 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi \left( 9 \sin^2 2\varphi - \frac{9}{4} \right) d\varphi = \\ &= \frac{81}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left( \sin^3 2\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) d(2\varphi) = \frac{81}{2} \left( \frac{\cos^3 2\varphi}{3} - \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \cos \varphi \right) \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \\ &= \frac{81}{2} \left( \frac{\cos^3 2\varphi}{3} - \frac{3}{4} \cos \varphi \right) \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{81}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left[ \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \left[ \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right\} = \frac{81}{2} \left[ \frac{1}{3} \left( -\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right] = \\ &= \frac{81}{2} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right] = \frac{81}{4} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

◇ Отмеченную выше ограниченность кривой (10.87) можно подтвердить подстановкой первого равенства из (10.85) в замену (10.84). Такая замена является, по сути дела, параметризацией кривой (10.82) параметром  $\varphi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$ :

$$x = 3\sqrt{3 \sin 2\varphi} \cos \varphi, \quad y = 2\sqrt{3 \sin 2\varphi} \sin \varphi.$$

Из этих уравнений и вытекает ограниченность значений  $x$  и  $y$ , т. е. ограниченность кривой (10.82) и ее замкнутость. Отсюда же, кстати, следует симметрия кривой относительно начала координат, т. е. точки  $O(0, 0)$ , которая одновременно является точкой самопересечения кривой и ее единственной точкой пересечения с координатными осями.

При изменении параметра  $\varphi$  в промежутке  $\varphi \in [0, \pi/2[$  мы имеем ограниченную замкнутую кривую, расположенную в 1-й четверти, с единственной точкой пересечения с координатными осями в точке, являющейся началом декартовой системы координат (рис. 87, а).

**Пример 10.14.** Вычислить интеграл

$$\iint_G \frac{dx dy}{x+y}$$

по области  $G$ , определяемой неравенствами

$$x+y \geq 1, \quad (x+y)^3 \leq 16xy. \quad (10.88)$$

**Решение.** В силу первого неравенства (10.88) достаточно рассмотреть часть кривой

$$(x+y)^3 = 16xy, \quad (10.89)$$

расположенную в 1-й четверти, где эта кривая является симметричной относительно прямой  $y=x$ , поскольку замена  $x$  на  $y$  не меняет вида уравнения (10.89). Как и в предыдущем примере, можно убедиться, что кривая (10.89) является ограниченной и замкнутой с единственной точкой пересечения с координатными осями, совпадающей с началом декартовой системы координат  $O(0,0)$ . Исходя из этого, имеем область  $G$ , изображенную на рис. 88, а.

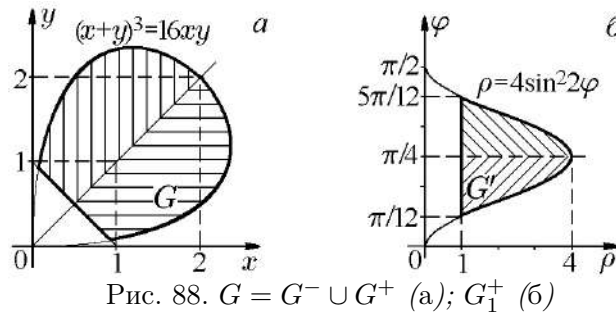


Рис. 88.  $G = G^- \cup G^+$  (а);  $G_1^+$  (б)

Так как подынтегральная функция  $f(x,y) = 1/(x+y)$  ограничена и непрерывна в области  $G$ , то двойной интеграл существует. При его вычислении в декартовых координатах трудности возникают как при расстановке пределов в повторных интегралах, так и при вычислении внешнего интеграла. Эту задачу можно упростить, воспользовавшись обобщенными полярными координатами

$$x = \rho \cos^2 \varphi, \quad y = \rho \sin^2 \varphi \quad (10.90)$$

с якобианом

$$J(\rho, \varphi) = 2\rho \sin \varphi \cos \varphi = \rho \sin 2\varphi,$$

согласно (10.69). В этих координатах границы области интегрирования (10.88), в силу соотношений

$$x+y = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho = 1, \quad (\rho \cos^3 \varphi + \rho \sin^2 \varphi)^3 = 16\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi,$$

запишутся в виде

$$\rho = 1, \quad \rho = 4 \sin^2 2\varphi. \quad (10.91)$$

Чтобы записать повторные интегралы по переменным  $\rho$ ,  $\varphi$ , найдем координаты точек пересечения кривых (10.91), приравняв значения их радиусов  $\rho$ . Тогда

$$4 \sin^2 2\varphi = 1,$$

откуда

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{2}.$$

Это уравнение задает значения  $\varphi$  точек пересечения кривых в 1-й четверти и, следовательно, граничные значения переменной  $\varphi$  от  $2\varphi_1 = \pi/6$  до  $2\varphi_2 = 5\pi/6$ , т. е.

$$\text{от } \varphi_1 = \frac{\pi}{12} \text{ до } \varphi_2 = \frac{5\pi}{12}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (10.92)$$

Прообраз  $G'$  области интегрирования  $G$  в координатах  $\rho$ ,  $\varphi$ , согласно (10.91), (10.92), определится неравенствами (рис. 88, б)

$$G' = \left\{ (\rho, \varphi) : \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{12}, 1 \leq \rho \leq 4 \sin^2 2\varphi \right\}. \quad (10.93)$$

Исходя из этого, исходный двойной интеграл сводится к двойному интегралу по области  $G'$ :

$$\iint_G \frac{dx dy}{x+y} = \iint_{G'} \frac{1}{\rho} \rho \sin 2\varphi d\rho d\varphi = \iint_{G'} \sin 2\varphi d\rho d\varphi.$$

Перейдем в нем к повторным интегралам по переменным  $\rho$ ,  $\varphi$  и вычислим:

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{x+y} &= \iint_{G'} \sin 2\varphi d\rho d\varphi = \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi d\varphi \int_1^{4 \sin^2 2\varphi} d\rho = \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi (4 \sin^2 2\varphi - 1) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} (4 \sin^3 2\varphi - \sin 2\varphi) d(2\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ 4 \left( \frac{\cos^3 2\varphi}{3} + \cos 2\varphi \right) - \cos 2\varphi \right\} \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3} \cos^3 2\varphi - 3 \cos 2\varphi \right] \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{3} \left[ \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right] - \right. \\ &\quad \left. - 3 \left[ \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \right\} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

◇ Отмеченную выше ограниченность кривой (10.89) можно подтвердить постановкой второго равенства из (10.91) в выражения (10.90), определяющие замену. Такая замена является, по сути дела, параметризацией кривой (10.89) параметром  $\varphi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$ :

$$x = 4 \sin^2 2\varphi \cos^2 \varphi, \quad y = 4 \sin^2 2\varphi \sin^2 \varphi.$$

Используя явный вид параметрических уравнений кривой (10.89), можно легко установить факт ее замкнутости, а также наличие единственной точки пересечения кривой с координатными осями, совпадающей с началом декартовой системы координат. Вместе с этим заметим, что в силу симметрии подынтегральной функции и области интегрирования относительно прямой  $y = x$  интервал интегрирования  $[\pi/12, 5\pi/12]$  можно было заменить на интервал  $[\pi/12, \pi/4]$  с последующим удвоением результата интегрирования.

**Пример 10.15.** Вычислить интеграл

$$\iint_G \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^2 dx dy$$

по области  $G$ , расположенной в 1-й четверти и ограниченной координатными осями  $x = y = 0$  и кривой

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^4 = \left(\frac{x^2}{9} + y^2\right). \quad (10.94)$$

**Решение.** Кривая (10.94) в первой четверти ограничена и пересекает координатные оси: ось  $Ox$  в точке  $x = 4/3$ , а ось  $Oy$  в точке  $y = 25$ . В силу этого область интегрирования  $G$  представляет собой криволинейный треугольник с катетами, лежащими на координатных осях:  $x \in ]0, 4/5[$ ,  $y \in ]0, 25[$ , и «гипотенузой», описываемой уравнением (10.94). Неявная форма задания «гипотенузы» этого треугольника затрудняет использование декартовых координат для вычисления двойного интеграла, поскольку для расстановки пределов в повторных интегралах в этом случае требуется решение алгебраического уравнения 4-й степени с произвольными коэффициентами. Это означает, что, как и выше, для описания кривой (10.94) удобнее воспользоваться обобщенными полярными координатами.

Исходя из вида уравнения (10.94), можно воспользоваться следующими координатами:

$$x = 2\rho \cos^2 \varphi, \quad y = 5\rho \sin^2 \varphi, \quad \varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ , \quad (10.95)$$

$$x = 3\rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ . \quad (10.96)$$

В первом случае для замены (10.95), с учетом ее якобиана

$$J(\rho, \varphi) = 20\rho \cos \varphi \sin \varphi,$$

двойной интеграл запишется в виде

$$\iint_G \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^2 dx dy = \iint_{G_1} \rho^2 \cdot 20\rho \cos \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi, \quad (10.97)$$

где  $G_1$  – прообраз области интегрирования  $G$  в переменных (10.95).

Во втором случае для замены (10.96), с учетом ее якобиана  $J(\rho, \varphi) = 3\rho$ , двойной интеграл запишется в виде

$$\iint_G \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^2 dx dy = \iint_{G_2} \rho^2 \left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin \varphi\right)^2 3\rho d\rho d\varphi, \quad (10.98)$$

где  $G_2$  – прообраз области интегрирования  $G$  в переменных (10.96).

Из сравнения интегралов (10.97) и (10.98) следует, что использование замены (10.95) более предпочтительно, поскольку соответствующий ей интеграл (10.97) проще, чем интеграл (10.98). Тем не менее вычислим оба интеграла.

1. Чтобы вычислить интеграл (10.97), найдем уравнение кривой в координатах (10.95). Подставим (10.95) в (10.94), тогда

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^4 = (\rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi)^4 = \rho^4 = \left(\frac{x^2}{9} + y^2\right) = \frac{4}{9}\rho^2 \cos^4 \varphi + 25\rho^2 \sin^4 \varphi,$$

откуда

$$\rho = \psi_1(\varphi) = \sqrt{\frac{4}{9} \cos^4 \varphi + 25 \sin^4 \varphi}. \quad (10.99)$$

С учетом этого область  $G_1$  определится как

$$G_1 = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \psi_1(\varphi) \right\}.$$

Это позволяет записать интеграл (10.97) повторными интегралами

$$\begin{aligned} \iint_G \left( \frac{x}{2} + \frac{y}{5} \right)^2 dx dy &= 20 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\psi_1(\varphi)} \rho^3 d\rho = 20 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{\rho^3}{4} \Big|_0^{\psi_1(\varphi)} \right) d\varphi = \\ &= 5 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \psi_1^4(\varphi) d\varphi = 5 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{4}{9} \cos^4 \varphi + 25 \sin^4 \varphi \right)^2 d\varphi = \\ &= \frac{80}{81} I_1 + \frac{1000}{9} I_2 + 3125 I_3, \end{aligned} \quad (10.100)$$

где

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^9 \varphi \sin \varphi d\varphi, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi, \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^9 \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Выполним последовательное вычисление этих интегралов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos^9 \varphi \sin \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^9 \varphi d(\cos \varphi) = -\frac{1}{10} \cos^{10} \varphi \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{10} (0 - 1) = \frac{1}{10}; \\ I_2 &= \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi = \frac{1}{26} \int_0^{\pi/2} \sin^5 2\varphi d(2\varphi) = -\frac{1}{26} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\varphi)^2 d(\cos 2\varphi) = \\ &= -\frac{1}{26} \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos^2 2\varphi + \cos^4 \varphi) d(\cos 2\varphi) = \\ &= -\frac{1}{26} \left( \cos 2\varphi - \frac{2}{3} \cos^3 2\varphi + \frac{1}{5} \cos^5 \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{26} \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{25} \frac{8}{15} = \frac{1}{60}; \\ I_3 &= \int_0^{\pi/2} \sin^9 \varphi \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^9 \varphi d(\sin \varphi) = \frac{1}{10} \sin^{10} \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Подстановка этих значений в (10.100) позволяет записать

$$\iint_G \left( \frac{x}{2} + \frac{y}{5} \right)^2 dx dy = \frac{80}{81} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1000}{9} \cdot \frac{1}{60} + 3125 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{81} + \frac{50}{27} + \frac{625}{2} = \frac{50941}{162}. \quad (10.101)$$



2. Теперь вычислим интеграл (10.98). Для этого отметим следующее. В переменных (10.96) уравнение кривой (10.94) примет вид

$$\rho = \psi_2(\varphi) = \frac{1}{\left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin \varphi\right)^2}. \quad (10.102)$$

Это означает, что в переменных (10.96) прообраз  $G_2$  можно записать как

$$G_2 = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \psi_2(\varphi) \right\}.$$

И в силу этого двойной интеграл (10.98) запишется повторными интегралами вида

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^2 dx dy &= 3 \iint_{G_2} \left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin \varphi\right)^2 \rho^3 d\rho d\varphi = \\ &= 3 \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin \varphi\right)^2 d\varphi \int_0^{\psi_2(\varphi)} \rho^3 d\rho = 3 \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin \varphi\right)^2 \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\psi_2(\varphi)}\right) d\varphi = \\ &= \frac{3}{4} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin \varphi\right)^2 \psi_2^4(\varphi) d\varphi = \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin \varphi\right)^6}. \end{aligned} \quad (10.103)$$

Вычисление этого интеграла с помощью тождественных преобразований

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin \varphi\right)^6} &= \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{1}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5} \operatorname{tg} \varphi\right)^6 \cos^4 \varphi \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^4}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5} \operatorname{tg} \varphi\right)^6} d(\operatorname{tg} \varphi) \end{aligned}$$

можно свести к интегрированию рациональной дроби, несложному, но громоздкому, которое даст полученный уже результат (10.101). Это еще раз подтверждает предпочтительность использования замены (10.95).

◇ Отметим, что в данном примере при расстановке пределов в повторных интегралах были использованы только аналитические методы их определения без рассмотрения геометрических построений области интегрирования или ее прообраза. В следующих примерах мы продолжим использовать такой подход. А наряду с этим проиллюстрируем необходимость привлечения обобщенных полярных координат не столько для упрощения уравнения границы области интегрирования, сколько для упрощения самой подынтегральной функции и, тем самым, для упрощения повторных интегралов в целом.

**Пример 10.16.** Вычислить интеграл

$$\iint_G \left( \sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{5}\right)^2} \right)^6 dx dy$$

по области  $G$ , расположенной в 1-й четверти и ограниченной координатными осями  $x = y = 0$  и астроидой

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{5}\right)^{2/3} = 4. \quad (10.104)$$

**Решение.** Кривая (10.104) в первой четверти ограничена и пересекает координатные оси: ось  $Ox$  в точке  $x = 16$ , а ось  $Oy$  в точке  $y = 40$ . В силу этого область интегрирования  $G$  представляет собой криволинейный треугольник с катетами, лежащими на координатных осях  $x \in ]0, 16[$ ,  $y \in ]0, 40[$ , и «гипотенузой», описываемой уравнением (10.104).

Так как подынтегральная функция в области интегрирования ограничена и непрерывна, двойной интеграл существует. Для его вычисления, исходя из вида уравнения (10.104) и вида подынтегральной функции, удобно обратиться к обобщенным полярным координатам

$$x = 2\rho \cos^3 \varphi, \quad y = 5\rho \sin^3 \varphi, \quad \varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad (10.105)$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi) = 30\rho \cos^2 \varphi \sin 2\varphi$ .

Подстановка (10.105) в (10.104) дает

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{5}\right)^{2/3} = (\rho \cos^3 \varphi)^{2/3} + (\rho \sin^3 \varphi)^{2/3} = \rho^{2/3} = 4,$$

откуда  $\rho = 8$ . В силу этого прообраз  $G'$  области интегрирования  $G$  в переменных (10.105) может быть записан с помощью неравенств

$$G' = \left\{(\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 8\right\},$$

которые позволяют свести двойной интеграл к повторным:

$$\begin{aligned} \iint_G \left( \sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{5}\right)^2} \right)^6 dx dy &= \iint_{G'} (\rho^{2/3})^6 30\rho \cos^2 \varphi \sin 2\varphi d\rho d\varphi = \\ &= 30 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^8 \rho^5 d\rho. \end{aligned}$$

Их вычисление дает

$$\begin{aligned} 30 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^8 \rho^5 d\rho &= \frac{15}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi \left( \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^8 \right) = \\ &= 5 \cdot 8^5 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = 5 \cdot 8^5 \left( \varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 20 \cdot 8^4 \pi = 81920\pi, \end{aligned}$$

откуда

$$\iint_G \left( \sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{5}\right)^2} \right)^6 dx dy = 81920\pi.$$

**Пример 10.17.** Вычислить интеграл

$$\iint_G \frac{dx dy}{[1 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4]^5}$$

по области  $G$ , расположенной в 1-й четверти и ограниченной координатными осями  $x = y = 0$  и кривой

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}. \quad (10.106)$$

**Решение.** Кривая (10.106) в первой четверти ограничена и пересекает координатные оси: ось  $Ox$  в точке  $x = 2$ , а ось  $Oy$  в точке  $y = 2$ . В силу этого область интегрирования  $G$  представляет собой криволинейный треугольник с катетами, лежащими на координатных осях:  $x \in ]0, 2[$ ,  $y \in ]0, 2[$  и «гипотенузой», описываемой уравнением (10.106).

Так как подынтегральная функция в области интегрирования ограничена и непрерывна, то двойной интеграл существует. Для его вычисления, исходя из вида уравнения (10.106) и вида подынтегральной функции, удобно обратиться к обобщенным полярным координатам

$$x = \rho \cos^4 \varphi, \quad y = \rho \sin^4 \varphi \quad (10.107)$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi) = 4\rho \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi$ .

Подстановка (10.107) в (10.106) дает

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\rho \cos^4 \varphi} + \sqrt{\rho \sin^4 \varphi} = \sqrt{\rho} = \sqrt{2},$$

откуда  $\rho = 2$ . В силу этого прообраз  $G'$  области интегрирования  $G$  в переменных (10.107) может быть записан с помощью неравенств

$$G' = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \right\},$$

которые позволяют свести двойной интеграл к повторным

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{[1 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4]^5} &= \iint_{G'} \frac{4\rho \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\rho d\varphi}{(1 + \rho^2)^5} = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^2 \frac{\rho d\rho}{(1 + \rho^2)^5}. \end{aligned}$$

Их вычисление дает

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^2 \frac{\rho d\rho}{(1 + \rho^2)^5} &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi d(2\varphi) \int_0^2 \frac{d(1 + \rho^2)}{(1 + \rho^2)^5} = \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{\cos^3 2\varphi}{3} - \cos 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} \left[ -\frac{1}{4(1 + \rho^2)^4} \right] \Big|_0^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{156}{625} = \frac{26}{625}, \end{aligned}$$

откуда

$$\iint_G \frac{dx dy}{[1 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4]^5} = \frac{26}{625}.$$

◇ Следующий пример иллюстрирует возможность использования полярных координат

$$x = a\rho \cos^\mu \varphi, \quad y = b\rho \sin^\mu \varphi \quad (10.108)$$

с показателем  $\mu < 1$ . В этом случае якобиан замены (10.108) имеет вид

$$J(\rho, \varphi) = ab\mu\rho \cos^{\mu-1} \varphi \sin^{\mu-1} \varphi.$$

**Пример 10.18.** Вычислить интеграл

$$\iint_G x^2 y^2 dx dy$$

по области  $G$ , ограниченной кривой

$$x^6 + y^6 = 1. \quad (10.109)$$

**Решение.** Кривая (10.109) является замкнутой ограниченной кривой, относительно координатных осей и пересекает их: ось  $Ox$  в точках  $x = \pm 1$ , а ось  $Oy$  в точках  $y = \pm 1$ . Вместе с этим подынтегральная функция  $f(x, y) = x^2 y^2$  является четной как по переменной  $x$ , так и по переменной  $y$ . Поэтому исходный интеграл можно записать интегралом по четвертинке области  $G$ , расположенной в первой четверти:

$$\iint_G x^2 y^2 dx dy = 4 \iint_{G_1} x^2 y^2 dx dy,$$

где  $G_1$  – область, определяемая неравенствами

$$G_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - x^6)^{1/6}\}. \quad (10.110)$$

Если воспользоваться обобщенными полярными координатами

$$x = \rho \cos^{1/3} \varphi, \quad y = \rho \sin^{1/3} \varphi, \quad \varphi \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi) = \frac{1}{3} \rho \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi$ , то, вследствие цепочки рассуждений,

$$(\rho \cos^{1/3} \varphi)^6 + (\rho \sin^{1/3} \varphi)^6 = \rho^6 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1,$$

уравнение (10.109) в этих координатах примет вид  $\rho = 1$ . С учетом этого преобраз  $G'_1$  определится неравенствами

$$G'_1 = \left\{ (\rho, \varphi): 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Исходя из этого, двойной интеграл в переменных  $(\rho, \varphi)$  запишется простыми повторными интегралами

$$\begin{aligned} \iint_G x^2 y^2 dx dy &= 4 \iint_{G_1} x^2 y^2 dx dy = \\ &= 4 \iint_{G'_1} (\rho \cos^{1/3} \varphi)^2 (\rho \sin^{1/3} \varphi)^2 \frac{1}{3} \rho \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi d\rho d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} \iint_{G'_1} \rho^5 d\rho d\varphi = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{4}{3} \left( \varphi \Big|_0^{\pi/2} \right) \left( \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить и в декартовых координатах. Исходя из неравенств (10.110), имеем

$$\begin{aligned} \iint_G x^2 y^2 dx dy &= 4 \iint_{G_1} x^2 y^2 dx dy = 4 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{(1-x^6)^{1/6}} y^2 dy = \\ &= 4 \int_0^1 x^2 dx \left( \frac{y^3}{3} \Big|_0^{(1-x^6)^{1/6}} \right) = \frac{4}{3} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^6} dx. \end{aligned}$$

Замена  $x^3 = t$  позволяет упростить этот интеграл:

$$\frac{4}{3} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^6} dx = \frac{4}{9} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

А еще одна замена  $t = \sin z$  дает

$$\frac{4}{9} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{4}{9} \int_0^{\pi/2} \cos^2 z dz = \frac{2}{9} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2z) dz = \frac{2}{9} \left( z + \frac{\sin 2z}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{9},$$

откуда

$$\iint_G x^2 y^2 dx dy = \frac{\pi}{9}.$$

◇ Как дополнение к рассматриваемому примеру 10.18 заметим, что ранее в примере 10.8 был рассмотрен еще один способ вычисления двойного интеграла, когда граница области интегрирования задана в параметрической форме. Для иллюстрации такого способа вычисления двойного интеграла рассмотрим задачу из примера 10.18 в другой формулировке.

**Пример 10.19.** Вычислить интеграл

$$\iint_G x^2 y^2 dx dy$$

по области  $G$ , ограниченной кривой (10.109):

$$x^6 + y^6 = 1,$$

с помощью ее параметрических уравнений.

**Решение.** Как уже отмечалось в решении примера 10.18, данная кривая является ограниченной и замкнутой. Для параметризации ее уравнения воспользуемся теми же обобщенными полярными координатами:

$$x = \rho \cos^{1/3} \varphi, \quad y = \rho \sin^{1/3} \varphi, \quad (10.111)$$

подстановка которых в уравнение кривой (10.109) дает

$$(\rho \cos^{1/3} \varphi)^6 + (\rho \sin^{1/3} \varphi)^6 = \rho^6 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^6 = 1 \text{ или } \rho = 1.$$

В свою очередь, подстановка этого значения в (10.109) дает параметрические уравнения этой кривой:

$$x = \cos^{1/3} \varphi, \quad y = \sin^{1/3} \varphi. \quad (10.112)$$

При изменении параметра  $\varphi$  от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = 2\pi$  обход кривой (10.109) как границы области интегрирования  $G$  совершается в положительном направлении. Такой выбор обхода границы, заданной параметрически, позволяет воспользоваться формулой (6.46):

$$\iint_G x^2 y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \Phi(x(\varphi), y(\varphi)) y'_\varphi d\varphi. \quad (10.113)$$

Функция  $\Phi(x, y)$  определяется здесь из условия  $\Phi'_x(x, y) = x^2 y^2$ , т. е. может быть выбрана в виде  $\Phi(x, y) = x^3 y^2 / 3$ . Отсюда с учетом (10.112) имеем

$$\Phi(x(\varphi), y(\varphi)) = \frac{1}{3} \cos \varphi \sin^{2/3} \varphi, \quad y'_\varphi = \frac{1}{3} \sin^{-2/3} \varphi \cos \varphi,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_G x^2 y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \cos \varphi \sin^{2/3} \varphi \cdot \frac{1}{3} \sin^{-2/3} \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{18} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{18} \left( \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

Значение интеграла совпадает с найденным в примере 10.18.

## 11. Замена переменных в тройном интеграле

Так же, как и в двойном интеграле, основной проблемой при замене переменных в тройном интеграле является нахождение множества значений новых переменных, т. е. нахождение образа исходного множества интегрирования в декартовых координатах при отображении, заданном заменой переменных.

### 11.1. Отображение множества в пространстве

Как и в двумерном случае, рассмотрение начнем с отображения простейшего стандартного симплекса в простейшую трехмерную клетку – единичный куб.

**Пример 11.1.** Показать, что отображение, осуществляемое заменой переменных

$$u = x + y + z, \quad v = \frac{y + z}{x + y + z}, \quad w = \frac{z}{y + z}, \quad (11.1)$$

переводит трехмерный стандартный симплекс

$$G = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\} \quad (11.2)$$

в единичный куб в координатах  $u, v, w$ :

$$G' = \{(u, v, w): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}. \quad (11.3)$$

**Решение.** Стандартный симплекс (11.2) геометрически представляет собой треугольную пирамиду (рис. 89, а). На рис. 89, б изображен единичный куб (11.3) в пространстве с координатными осями  $u, v, w$ . Покажем, что отображение  $\varphi$ , задаваемое соотношениями (11.1), переводит четырехгранник – пирамиду  $G$  – в шестигранник – куб  $G'$ , т. е.  $\varphi: G \rightarrow G'$ .

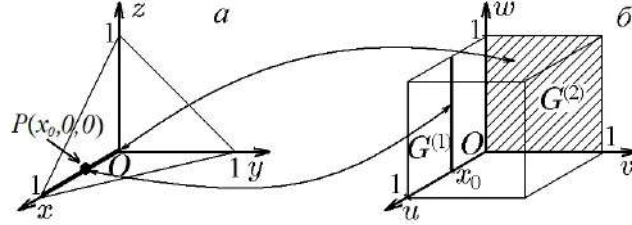


Рис. 89.  $G = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$  (а);  
 $G' = \{(u, v, w): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$ ,  
 $G^{(2)} = \{(0, v, w): 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$ ,  $G^{(1)} = \{(x_0, 0, w): 0 \leq w \leq 1\}$  (б)

Так как минимальные значения  $x, y, z$ , согласно (11.2), равны нулю, то и минимальные значения  $u, v, w$ , в силу (11.1), также равны нулю. Вместе с этим из соотношений  $x + y + z = u$ ,  $x + y + z \leq 1$  следует, что  $u \leq 1$ . Это означает, что величина  $u \in G'$  изменяется в пределах от  $u = 0$  до  $u = 1$ . При фиксированном  $u$  и минимальном  $x = 0$  из второго соотношения (11.1) следует равенство

$$v = \frac{y + z}{x + y + z} \Big|_{x=0} = 1,$$

задающее изменение величины  $v \in G'$  в пределах от  $v = 0$  до  $v = 1$ . И, наконец, при фиксированных значениях  $u, v$  и минимальном значении  $y = 0$  из последнего соотношения (11.1) следует равенство

$$w = \frac{z}{y + z} \Big|_{y=0} = 1,$$

определяющее изменение величины  $w \in G'$  в пределах от  $w = 0$  до  $w = 1$ .

Таким образом, точкам  $(x, y, z) \in G$  соответствует множество точек  $(u, v, w)$ , удовлетворяющих неравенствам (11.3) и геометрически представляющих единичный куб  $G'$  (рис. 89, б), что и требовалось доказать.

Представив (11.1) в виде

$$x = u - (y + z), \quad y + z = uv, \quad z = uvw,$$

выразим переменные  $x, y, z$  через  $u, v, w$ :

$$x = u(1 - v), \quad y = uv(1 - w), \quad z = uvw, \quad (11.4)$$

задающие обратное отображение  $\varphi^{-1}: G' \rightarrow G$  с якобианом

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u & 0 \\ v - vw & u - uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v. \quad (11.5)$$

Взаимная однозначность этого отображения нарушается на ребре  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y = z = 0$  пирамиды  $G$  (рис. 89, а). Действительно, одна его точка,  $O(0, 0, 0)$ ,

является прообразом единичного квадрата  $G^{(2)} = \{(0, v, w) : 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$ , а остальные  $P(x_0, 0, 0)$  – прообразами отрезков  $G^{(1)} = \{(x_0, 0, w) : 0 \leq w \leq 1\}$  (см. рис. 89). Поскольку в трехмерном пространстве эти множества являются множествами меры нуль, то формулы (11.4) можно использовать при вычислении тройных интегралов, как это будет показано ниже.

В трехмерном пространстве, как и в двумерном, в трехмерную клетку или прямоугольный параллелепипед можно отобразить область, границами которой являются поверхности уровня трех независимых функций  $\varphi_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Действительно, область

$$G' = \{(x, y, z) : a_i \leq \varphi_i(x, y, z) \leq b_i, i = 1, 2, 3\} \quad (11.6)$$

при помощи регулярного отображения

$$\varphi : u = \varphi_1(x, y, z), v = \varphi_2(x, y, z), w = \varphi_3(x, y, z) \quad (11.7)$$

переходит в параллелепипед

$$G = \{(u, v, w) : a_1 \leq u \leq b_1, a_2 \leq v \leq b_2, a_3 \leq w \leq b_3\}. \quad (11.8)$$

**Пример 11.2.** Отобразить косоугольный параллелепипед

$$G = \{(x, y, z) : 0 \leq a_i x + b_i y + c_i z \leq h_i, i = 1, 2, 3\} \quad (11.9)$$

на единичный куб

$$G' = \{(u, v, w) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}. \quad (11.10)$$

**Решение.** Параллелепипед (11.9) является трехмерным жордановым множеством с ненулевой мерой при выполнении двух условий. Первое условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (11.11)$$

означает, что три плоскости

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.12)$$

проходящие через начало координат, не являются параллельными. Второе условие,  $h_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , означает, что три других плоскости

$$a_i x + b_i y + c_i z = h_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.13)$$

не совпадают с плоскостями (11.12) (рис. 90, а).

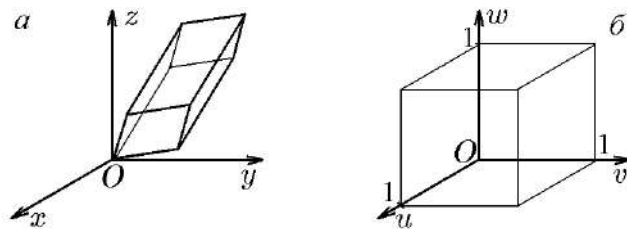


Рис. 90.  $G'$  (а);  $G$  (б)



Так как границами параллелепипеда (11.9) являются поверхности уровня линейных функций

$$\varphi_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z, \quad i = 1, 2, 3,$$

представляющие плоскости (11.12), (11.13), то можно воспользоваться заменой переменных

$$u = \frac{1}{h_1}(a_1 x + b_1 y + c_1 z), \quad v = \frac{1}{h_2}(a_2 x + b_2 y + c_2 z), \quad w = \frac{1}{h_3}(a_3 x + b_3 y + c_3 z). \quad (11.14)$$

Отсюда в силу неравенств (11.9) приходим к системе неравенств  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ ,  $0 \leq w \leq 1$ , совпадающей с системой неравенств (11.10), представляющей в координатах  $u, v, w$  единичный куб (11.10) (рис. 90, б). Якобиан преобразования (11.14)

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} a_1/h_1 & b_1/h_1 & c_1/h_1 \\ a_2/h_2 & b_2/h_2 & c_2/h_2 \\ a_3/h_3 & b_3/h_3 & c_3/h_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \Delta \neq 0 \quad (11.15)$$

отличен от нуля во всех точках множества  $G'$ . Отображение, обратное (11.14), можно найти по правилу Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (11.16)$$

где определитель  $\Delta$  задан формулой (11.11), а остальные определители имеют вид

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 u & b_1 & c_1 \\ h_2 v & b_2 & c_2 \\ h_3 w & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 u & c_1 \\ a_2 & h_2 v & c_2 \\ a_3 & h_3 w & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 u \\ a_2 & b_2 & h_2 v \\ a_3 & b_3 & h_3 w \end{vmatrix}.$$

Якобиан отображения (11.16) проще найти из условия  $J(x, y, z)J(u, v, w) = 1$ , из которого с учетом (11.15) следует:

$$J(u, v, w) = \frac{h_1 h_2 h_3}{\Delta}. \quad (11.17)$$

Поскольку взаимность отображения (11.16)  $G \rightarrow G'$  очевидна, то замену переменных (11.16) с якобианом (11.17) можно использовать при вычислении тройных интегралов, как это будет показано ниже.

Поскольку построение поверхностей в трехмерном пространстве в общем случае связано с определенными трудностями, то следующий пример иллюстрирует возможность полностью определить взаимно однозначное отображение поверхностей только аналитическими методами, не прибегая к геометрическим конструкциям.

**Пример 11.3.** Указать отображение

$$\varphi: u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z),$$

переводящее множество

$$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq y \leq 3x, 0 \leq z \leq 3(x+y) \leq 6z, 1 \leq 4z(x+y) \leq 4\} \quad (11.18)$$

в клетку  $G'$  в координатах  $u, v, w$ .

**Решение.** Так как границы множества (11.18) можно рассматривать как поверхности уровня

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \varphi_2(x, y, z) = \frac{x+y}{z}, \quad \varphi_3(x, y, z) = z(x+y),$$

то, воспользовавшись заменой переменных

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{x+y}{z}, \quad w = z(x+y), \quad (11.19)$$

придем, в силу неравенств (11.18), к системе неравенств, задающих множество

$$G' = \left\{ (u, v, w) : 1 \leq u \leq 3, \frac{1}{3} \leq v \leq 2, \frac{1}{4} \leq w \leq 1 \right\}, \quad (11.20)$$

представляющее клетку в пространстве с координатными осями  $u, v, w$ .

Обратное преобразование  $\varphi^{-1}$  можно получить, разрешив уравнения (11.19) относительно переменных  $x, y, z$ . Действительно, из отношения двух последних выражений в (11.19) получим

$$\frac{w}{v} = z^2, \quad z = \sqrt{\frac{w}{v}}.$$

Подстановка  $y = xu$  во второе равенство (11.19) дает

$$v = \frac{x+xu}{z} = \frac{x(1+u)}{\sqrt{w/v}} = \sqrt{\frac{v}{w}}(1+u)x,$$

откуда

$$x = \frac{\sqrt{vw}}{1+u}$$

и, соответственно,

$$y = u \frac{\sqrt{vw}}{1+u}.$$

Таким образом, обратное преобразование  $\varphi^{-1}$  задается равенствами

$$G = \varphi^{-1} : x = \frac{\sqrt{vw}}{1+u}, y = u \frac{\sqrt{vw}}{1+u}, z = \sqrt{\frac{w}{v}}. \quad (11.21)$$

Якобианы отображений  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  проще найти, исходя из соотношений (11.19). Так как

$$\begin{aligned} J(x, y, z) &= \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & -\frac{x+y}{z^2} \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & -\frac{x+y}{z^2} \\ 0 & z & x+y \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{x} \left( \frac{y}{x} + 1 \right) \left[ \frac{x+y}{z} + \frac{z+y}{z} \right] = -\frac{2(x+y)^2}{zx^2}, \end{aligned} \quad (11.22)$$

то, воспользовавшись равенствами (11.21) и  $J(x, y, z)J(u, v, w) = 1$ , найдем

$$J(u, v, w) = \frac{1}{J(x, y, z)} = -\frac{zx^2}{2(x+y)^2} = -\frac{1}{2(1+u)^2} \sqrt{\frac{w}{v}}. \quad (11.23)$$

Поскольку отображение  $\varphi^{-1}$  взаимно однозначно, а  $J(u, v, w) \neq 0$  для всех  $(u, v, w) \in G$ , то замену (11.21) с якобианом (11.23) можно использовать при вычислении тройных интегралов, как это будет показано ниже.

Наряду с заменами переменных общего вида, рассмотренными выше, большое значение имеют замены переменных, связывающие известные трехмерные системы координат: декартовы, цилиндрические, сферические и др.

Из аналитической геометрии известно, что декартовы и цилиндрические координаты связаны соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (11.24)$$

Фактически цилиндрические координаты – это полярные координаты в плоскости  $xOy$  и обычная декартова координата в ортогональном дополнении плоскости  $xOy$  – ось  $Oz$ . При необходимости координатную плоскость  $xOy$  можно заменить на координатные плоскости  $xOz$  или  $yOz$  со связанными с ними ортогональными дополнениями осью  $Oy$  или осью  $Ox$  соответственно.

Как и в двумерном пространстве, здесь наряду с пространством  $\mathbb{R}_{xyz}^3$  введем вспомогательное пространство  $\mathbb{R}_{\rho\varphi z}^3$ , в котором  $\rho, \varphi, z$  являются декартовыми координатами. В пространстве  $\mathbb{R}_{xyz}^3$  геометрическое место точек, для которых  $\rho = \text{const}$ , есть прямой круговой цилиндр радиусом  $\rho$  с осью  $Oz$ . Множество точек  $z = \text{const}$  определяет плоскость, параллельную плоскости  $xOy$ , а множество  $\varphi = \text{const}$  – полуплоскость, проходящую через ось  $Oz$  (рис. 91, а). В пространстве  $\mathbb{R}_{\rho\varphi z}^3$ , в котором  $\rho, \varphi, z$  являются декартовыми, рассмотрим множество

$$G_{\rho\varphi z} = \{(\rho, \varphi, z) : \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty\}. \quad (11.25)$$

Отображение  $F: G_{\rho\varphi z} \rightarrow \mathbb{R}_{x,y,z}^3$ , определяемое формулами (11.24), является непрерывно дифференцируемым с якобианом

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho. \quad (11.26)$$

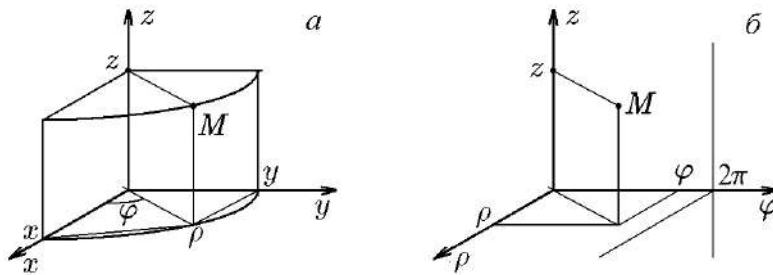


Рис. 91.  $E_{xyz}$  (а);  $G_{\rho\varphi z}$  (б)

◇ Взаимная однозначность отображения  $F$  и условие неравенства нулю якобиана (11.26) нарушается только на множестве

$$G_{0\varphi z} = \{(\rho, \varphi, z) : \rho = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty\}, \quad (11.27)$$

прообразом которого при отображении (11.24) является ось  $Oz \in \mathbb{R}_{x,y,z}^3$ . Пересечение любого ограниченного линейного множества с множеством  $G_{0\varphi z}$  есть некоторое ограниченное множество с нулевой жордановой мерой.

Это замечание мы будем учитывать при переходе к цилиндрическим координатам при вычислении тройных интегралов. Вместе с этим также будем учитывать, что множество (11.25), при необходимости, можно заменить множеством

$$G'_{\rho\varphi z} = \{(\rho, \varphi, z) : \rho \geq 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\infty < z < +\infty\}. \quad (11.28)$$

Подобный подход нередко используется в полярной системе координат.

**Пример 11.4.** Для области  $G$ , ограниченной поверхностями

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = yR, \quad (11.29)$$

найти образ  $G'$  в цилиндрической системе координат.

**Решение.** Область  $G$  ограничена в пространстве  $z \geq 0$  сферой и цилиндром (11.29) (рис. 92, а). Эти поверхности в цилиндрических координатах запишутся как

$$z = \sqrt{R^2 - \rho^2}, \quad \rho = R \sin \varphi.$$

Исходя из этого, прообраз  $G$  области  $G'$  в цилиндрических координатах можно задать системой неравенств

$$G'_{\rho\varphi z} = \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq R \sin \varphi, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}\}. \quad (11.30)$$

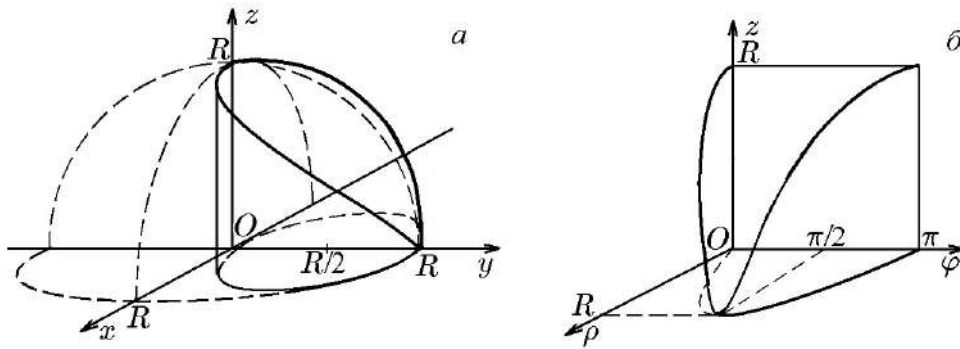


Рис. 92.

$$G = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq R, -\sqrt{yR - y^2} \leq x \leq \sqrt{yR - y^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\} \quad (\text{а});$$

$$G'_{\rho\varphi z} = \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq R \sin \varphi, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}\} \quad (\text{б})$$

В пространстве  $\mathbb{R}^3_{\rho\varphi z}$  образ  $G'$  (11.30) изображен на рис. 92, б. Как и указывалось выше, прямоугольник  $(\rho = 0, 0 \leq z \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi)$  (рис. 92, б) отображается в отрезок  $(x = y = 0, 0 \leq z \leq R)$  (рис. 92, а).

**Пример 11.5.** Для области  $G$ , ограниченной поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2, \quad (11.31)$$

найти образ в цилиндрической системе координат.

**Решение.** Уравнение (11.31) определяет поверхность вращения вокруг оси  $Oz$  кривой  $y^2 + z^2 = |y|$  (рис. 93, а). В цилиндрических координатах уравнение (11.31) имеет вид  $z^2 + \rho^2 = \rho$  или  $z^2 + (\rho - 1/2)^2 = 1/4$ . В силу этого образ  $G'$  области  $G$  в цилиндрических координатах можно задать системой неравенств

$$G'_{\rho\varphi z} = \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, -\sqrt{\rho - \rho^2} \leq z \leq \sqrt{\rho - \rho^2}\}. \quad (11.32)$$

В пространстве  $\mathbb{R}^3_{\rho\varphi z}$  образ (11.32) представляет собой цилиндр (рис. 93, б). Как и указывалось выше, отрезок  $(\rho = z = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$  (рис. 93, б) отображается в точку  $x = y = z = 0$  (рис. 93, а).

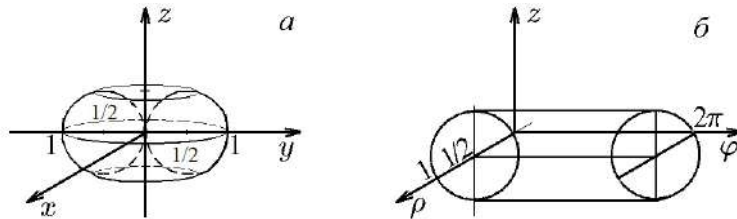


Рис. 93.  $G'$  (а);  $G$  (б)

Следующая часто используемая система координат – сферическая. Сферические координаты (введенные еще Лагранжем в 1773 г.) связаны с декартовыми соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, & y &= r \sin \varphi \sin \theta, & z &= r \cos \theta, \\ r &\geq 0, & 0 &\leq \theta \leq \pi, & 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Здесь  $r$  – сферический радиус, равный расстоянию от точки  $P(x, y, z)$  до начала координат  $O(0, 0, 0)$ , т. е. длина отрезка  $OP$ ;  $\theta$  – угол, который сферический радиус, т. е. отрезок  $OP$ , составляет с осью  $Oz$ , а  $\varphi$  – полярный (азимутальный) угол проекции сферического радиуса  $OP$  на плоскость  $xOy$  (рис. 94, а).

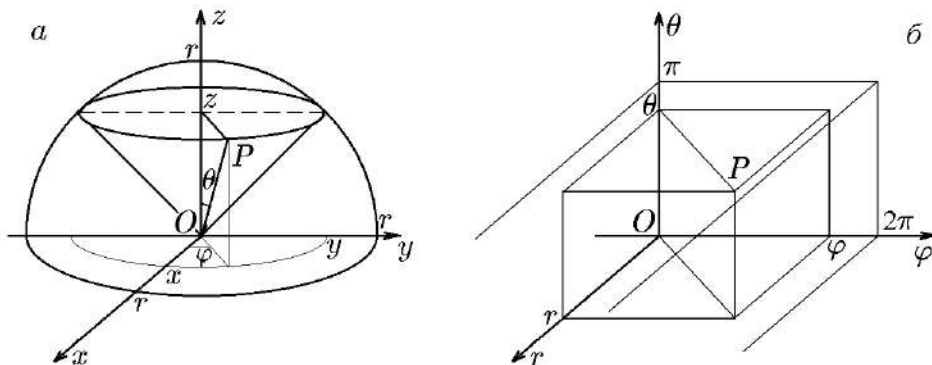


Рис. 94.  $\mathbb{R}^3_{xyz}$  (а);  $G_{r\theta\varphi} \subset \mathbb{R}^3_{r\theta\varphi}$  (б)

Как и выше, наряду с пространством  $\mathbb{R}^3_{xyz}$  введем вспомогательное пространство  $\mathbb{R}^3_{r\theta\varphi}$ , в котором  $r, \theta, \varphi$  являются декартовыми координатами. В пространстве  $E_{xyz}$  геометрическое место точек  $r = \text{const}$  есть сфера радиусом  $r$  с центром в точке  $O$ . Множество точек  $\theta = \text{const}$  – прямой круговой конус с осью  $Oz$ , составляющей с образующей конуса угол  $\theta$ , а  $\varphi = \text{const}$  – полуплоскость, проходящая через ось  $Oz$  (рис. 94, а). В пространстве  $\mathbb{R}^3_{r\theta\varphi}$ , в котором  $r, \varphi, \theta$  являются декартовыми координатами, рассмотрим множество

$$G_{r\theta\varphi} = \{(r, \theta, \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}. \quad (11.34)$$

Отображение  $F: G_{r\theta\varphi} \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$ , определяемое формулами (11.33), непрерывно дифференцируемо с якобианом

$$\begin{aligned} J(r, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= r^2 \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin \theta (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) = \\ &= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Якобиан (11.35) обращается в нуль при  $r = 0$ ,  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . На соответствующей части границы  $G_{r\theta\varphi}$  будет нарушаться и взаимная однозначность отображения  $F$ . Так как любая ограниченная часть плоскости имеет в  $\mathbb{R}_{r\theta\varphi}^3$  жорданову меру нуль, то замену (11.33) мы можем использовать при вычислении тройных интегралов. При необходимости множество (11.34) будем заменять множеством

$$\bar{G}_{r\theta\varphi} = \{(r, \theta, \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, -\pi < \varphi \leq \pi\}.$$

◇ Отметим, что сферу фиксированного радиуса  $r = r_0$  конусы  $\theta = \theta_0$  будут пересекать по окружностям, называемым *параллелями*, а полуплоскости  $\varphi = \varphi_0$  — по полуокружностям, называемыми *меридианами*. Такая терминология наиболее часто используется в сферической системе координат, несколько отличной от (11.33), а именно:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \psi, & y &= r \sin \varphi \cos \psi, \\ z &= r \sin \psi, & r &\geq 0, \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, & -\pi &< \varphi \leq \pi. \end{aligned} \quad (11.36)$$

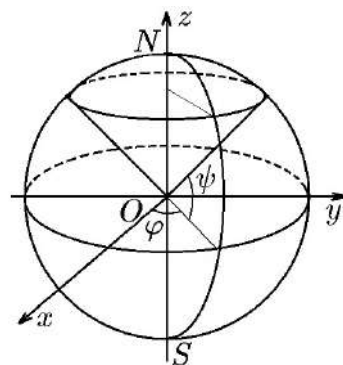


Рис. 95. Сферическая система координат

В этих формулах угол  $\psi = \pi/2 - \theta$  есть угол между сферическим радиусом и его проекцией на плоскость  $xOy$  (рис. 95). В такой сферической системе координат параллель, соответствующая углу  $\psi = 0$ , называется *экватором*, а меридиан, соответствующий углу  $\varphi = 0$ , — *нулевым меридианом*. Дальнейшая детализация приводит к понятию полюсов, северной и южной широт, долготы и т. д. В этом случае имеем Якобиан

$$J(r, \psi, \varphi) = r^2 \sin \theta = r^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = r^2 \cos \psi. \quad (11.37)$$

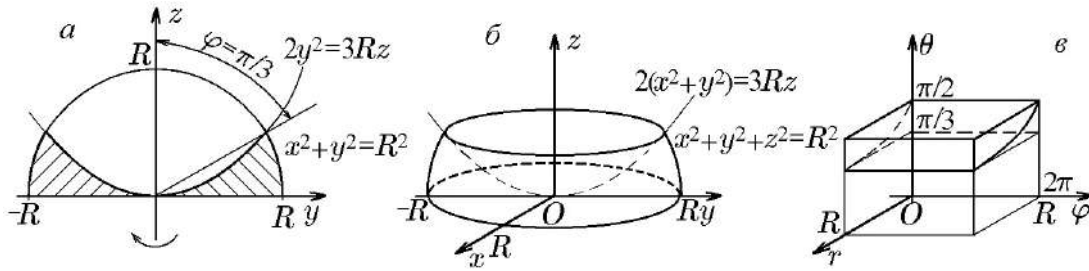
Ниже, если не оговорено противное, будем использовать сферические координаты (11.33).

**Пример 11.6.** В сферической системе координат найти образ  $G'$  области  $G$ , расположенной внутри полусферы  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  и вне параболоида  $2(x^2 + y^2) = 3Rz$ .

**Решение.** Согласно условию задачи, область  $G$  ограничена поверхностями вращения:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \geq 0$ , и  $2(x^2 + y^2) = 3Rz$  (рис. 96, б). Для удобства ее построения на рис. 96, а изображено ее меридиональное сечение.

Область  $G$  в координатах  $x, y, z$  определена неравенствами

$$G = \{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, 2(x^2 + y^2) \geq 3Rz\}. \quad (11.38)$$

Рис. 96.  $G' \cap (x = 0)$  (а);  $G'$  (б);  $G$  (в)

Переход в этих неравенствах к сферическим координатам приводит их к виду

$$r \cos \theta \geq 0, \quad r^2 \leq R^2, \quad 2r^2 \sin^2 \theta \geq 3Rr \cos \theta. \quad (11.39)$$

Неравенства (11.39) не дают ограничений на угол  $\varphi$  и, следовательно,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Геометрически это соответствует тому, что  $G$  является телом вращения. Вместе с этим, по определению,  $r > 0$ , поэтому из (11.39) следует, что  $\cos \theta \geq 0$  и  $3R \cos \theta / (2 \sin^2 \theta) \leq r \leq R$ . Из первого неравенства следует  $\theta \leq \pi/2$ , а второе будет выполняться при условии

$$\frac{3 \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} \leq 1. \quad (11.40)$$

Чтобы разрешить это неравенство, решим уравнение  $3 \cos \theta / (2 \sin^2 \theta) = 1$ :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \frac{3}{2} \cos \theta - 1 &= 0, \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \right) \Rightarrow \cos \theta = -2, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \text{т. е. } \theta = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (11.40), для угла  $\theta$  имеем оценку

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Исходя из полученных оценок для координат  $r, \theta, \varphi$ , образ  $G'$  (рис. 96, в) можно определить системой неравенств

$$G' = \left\{ (r, \theta, \varphi): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3R \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} \leq r \leq R \right\}. \quad (11.41)$$

**Пример 11.7.** Для области  $G$ , определенной неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz, \quad R > 0, \quad (11.42)$$

найти образ в сферической системе координат.

**Решение.** Область  $G$  представляет собой внутренность сферы (рис. 97, а)

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Переход к сферическим координатам в неравенстве (11.42) приводит его к виду  $r^2 \leq 2Rr \cos \theta$ , откуда при условии  $r > 0$  следуют оценки  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  и  $r \leq 2R \cos \theta$ . Поскольку ограничение на изменение  $\varphi$  отсутствует, то  $\varphi$  может

изменяться в пределах от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = 2\pi$ . Исходя из полученных оценок, область  $G'$  (рис. 97, б) можно определить системой неравенств

$$G' = \left\{ (r, \theta, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r \leq 2R \cos \theta \right\}. \quad (11.43)$$

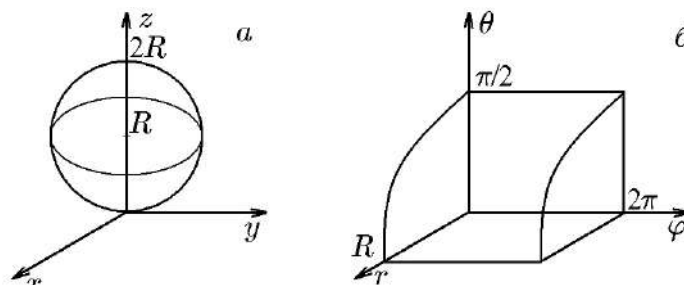


Рис. 97.  $G$  (а);  $G'$  (б)

Наряду с цилиндрической и сферической системами координат полезным оказывается их обобщение.

♦ *Обобщенными цилиндрическими координатами* называется тройка чисел  $(\rho, \varphi, z)$ , связанная с декартовыми координатами соотношениями

$$x = a\rho \cos^\mu \varphi, \quad y = b\rho \sin^\mu \varphi, \quad z = z. \quad (11.44)$$

Фактически обобщенные цилиндрические координаты – это обобщенные полярные координаты в плоскости  $xOy$  и обычная декартова координата в ортогональном дополнении плоскости  $xOy$  оси  $Oz$ .

Якобиан перехода к обобщенным цилиндрическим координатам имеет вид

$$\begin{aligned} J(\rho, \varphi, z) &= \begin{vmatrix} a \cos^\mu \varphi & -a\mu\rho \cos^{\mu-1} \varphi \sin \varphi & 0 \\ b \sin^\mu \varphi & b\mu\rho \sin^{\mu-1} \varphi \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= ab\mu\rho \sin^{\mu-1} \varphi \cos^{\mu-1} \varphi. \end{aligned} \quad (11.45)$$

♦ *Обобщенными сферическими координатами* называется тройка чисел  $(r, \theta, \varphi)$ , связанная с декартовыми координатами соотношениями

$$x = ar \sin^\nu \theta \cos^\mu \varphi, \quad y = br \sin^\nu \theta \sin^\mu \varphi, \quad z = cr \cos^\nu \theta. \quad (11.46)$$

Здесь  $r \geq 0$ , а  $\varphi$  пробегает либо промежуток  $[0, 2\pi[$  (иногда удобнее использовать  $] - \pi, \pi]$ , либо промежуток  $[0, \pi/2]$  соответственно;  $\theta$  пробегает промежуток  $[0, \pi]$  или  $[0, \pi/2]$ . Выбор промежутка зависит от значений параметров  $\nu, \mu$  и определяется исходя из тех же соображений, которые обсуждались при рассмотрении обобщенных полярных координат (9.19).

Якобиан перехода к обобщенным сферическим координатам имеет вид

$$\begin{aligned} J(r, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} a \sin^\nu \theta \cos^\mu \varphi & ar\nu \sin^{\nu-1} \theta \cos \theta \cos^\mu \varphi & -ar\mu \sin^\nu \theta \cos^{\mu-1} \varphi \sin \varphi \\ b \sin^\nu \theta \sin^\mu \varphi & br\nu \sin^{\nu-1} \theta \cos \theta \sin^\mu \varphi & br\mu \sin^\nu \theta \sin^{\mu-1} \varphi \cos \varphi \\ c \cos^\nu \theta & -cr\nu \cos^{\nu-1} \theta \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= abc\nu\mu r^2 \cos^{\nu-1} \theta \sin^{2\nu-1} \theta \sin^{\mu-1} \varphi \cos^{\mu-1} \varphi. \end{aligned} \quad (11.47)$$

◇ Переход к обобщенным цилиндрическим и обобщенным сферическим координатам осуществляется в основном, когда уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования  $G_{xyz}$ , в новых переменных при соответствующем выборе постоянных  $a, b, c, \mu, \nu$  становятся более простыми. В общем



случае обобщенные координаты не имеют наглядной геометрической интерпретации, поэтому границы образа  $G_{\rho\varphi z}$  или  $G_{r\theta\varphi}$  приходится определять аналитическими способами. В связи с этим мы не будем останавливаться здесь на рассмотрении этих способов, а будем использовать их непосредственно при вычислении тройных интегралов.

## 11.2. Вычисление тройных интегралов методом замены переменных. Примеры

**Пример 11.8.** Вычислить интеграл

$$\iiint_G xyz(1-x-y-z)dx dy dz \quad (11.48)$$

по области  $G$ , ограниченной плоскостями  $x+y+z=1$ ,  $x=y=z=0$ .

**Решение.** Интеграл (11.48) представляет собой частный случай интеграла Дирихле

$$\iiint_G x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz.$$

В процессе вычисления этого интеграла при произвольных  $p, q, r, s$  необходимо использовать специальные функции – гамма-функции  $\Gamma(x)$ . Однако для конкретных значений  $p = q = r = s = 1$  интеграл Дирихле совпадает с исходным интегралом (11.48), который можно вычислить без использования специальных функций.

Интеграл (11.48), вообще говоря, можно вычислить как непосредственно в декартовой системе координат, так и перейдя к новой системе координат.

В первом случае представим тройной интеграл повторными, при этом область интегрирования  $G$  (рис. 98, а) определим системой неравенств

$$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}. \quad (11.49)$$

Тогда

$$\iiint_G x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy \int_0^{1-x-y} z(1-x-y-z) dz. \quad (11.50)$$

Таким образом, использование декартовых координат сводит тройной интеграл к повторным с переменными пределами во внутренних интегралах, что затрудняет их вычисление. Этого можно избежать, воспользовавшись заменой переменных, отображающих треугольную пирамиду  $G$  в трехмерную клетку. Такая замена была рассмотрена в примере 11.1 и имеет вид

$$u = x + y + z, \quad v = \frac{y+z}{x+y+z}, \quad w = \frac{z}{y+z}. \quad (11.51)$$

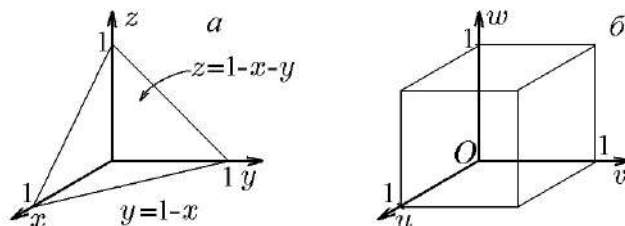


Рис. 98.  $G'$  (а);  $G$  (б)

Замена (11.51) отображает треугольную пирамиду – симплекс  $G$  (11.49) – в единичный куб (рис. 98, б)

$$G' = \{(u, v, w) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\} \quad (11.52)$$

с якобианом  $J(u, v, w) = u^2v$ , согласно формуле (11.5) примера 11.1. Как показано в том же примере 11.1, взаимная однозначность отображения нарушается на ребре  $0 \leq x \leq 1, y = z = 0$  пирамиды  $G$ . Однако, поскольку в трехмерном пространстве мера этого множества равна нулю, то замену (11.51), согласно замечанию к теореме 8.1, можно использовать при вычислении интеграла (11.48). Так как обратная к (11.51) замена, согласно (11.4), имеет вид

$$x = u(1 - v), \quad y = uv(1 - w), \quad z = uvw,$$

то с учетом (11.51) тройной интеграл (11.48) в переменных  $(u, v, w)$  можно записать повторными вида

$$\begin{aligned} & \iiint_G xyz(1 - x - y - z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{G'} u(1 - v)uv(1 - w)uvw(1 - u)J(u, v, w) du dv dw = \\ &= \int_0^1 u^5(1 - u) du \int_0^1 v^3(1 - v) dv \int_0^1 w(1 - w) dw = J_1 J_2 J_3. \end{aligned} \quad (11.53)$$

Таким образом, в переменных  $u, v, w$  тройной интеграл удалось свести к произведению трех одномерных интегралов с постоянными пределами, вычислив которые, получим:

$$J_1 = \int_0^1 u^5(1 - u) du = \left( \frac{u^6}{6} - \frac{u^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{7 \cdot 6};$$

$$J_2 = \int_0^1 v^3(1 - v) dv = \left( \frac{v^4}{4} - \frac{v^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5 \cdot 4};$$

$$J_3 = \int_0^1 w(1 - w) dw = \left( \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3 \cdot 2}.$$

Подставив эти значения в (11.53), имеем

$$\iiint_G xyz(1 - x - y - z) dx dy dz = J_1 J_2 J_3 = \frac{1}{7 \cdot 6} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{7!}.$$

Этот же результат, но с более громоздкими выкладками, можно получить из (11.50).

**Пример 11.9.** Вычислить интеграл

$$\iiint_G y dx dy dz$$

по области  $G$ , заданной системой неравенств

$$1 \leq x + y + 2z \leq 2, \quad 2 \leq x + 2y + 2z \leq 3, \quad 1 \leq x + y + 4z \leq 3. \quad (11.54)$$

**Решение.** Вычисление этого интеграла в декартовых координатах затруднено тем, что расстановка пределов в его повторных интегралах является достаточно громоздкой задачей. А поскольку поверхности, ограничивающие область  $G$ , являются поверхностями уровня, то, следуя схеме, изложенной в примере 11.2, можно воспользоваться заменой переменных вида

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= u, \\x + 2y + 2z &= v, \\x + y + 4z &= w.\end{aligned}\tag{11.55}$$

Такая замена отображает косоугольный параллелепипед  $G$  (11.54) на трехмерную клетку, представляющую собой в координатах  $u, v, w$  прямоугольный параллелепипед

$$G' = \{(u, v, w) : 1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 3, 1 \leq w \leq 3\}.\tag{11.56}$$

Отображение, обратное (11.55), можно найти по правилу Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} u & 1 & 2 \\ v & 2 & 2 \\ w & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6u - 2v - 2w, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & u & 2 \\ 1 & v & 2 \\ 1 & w & 4 \end{vmatrix} = -2u + 2v, & \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & u \\ 1 & 2 & v \\ 1 & 1 & v \end{vmatrix} = -u + w,\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$x = 3u - v - w, \quad y = -u + w, \quad z = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w.\tag{11.57}$$

Якобиан преобразования (11.57) равен

$$\begin{aligned}J(u, v, w) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2 - 1) = \frac{1}{2} \neq 0.\end{aligned}\tag{11.58}$$

Исходя из (11.57) и (11.58), тройной интеграл в переменных  $u, v, w$  можно представить повторными интегралами с постоянными пределами, вычисление которых труда не составляет. Действительно,

$$\iiint_G y \, dx \, dy \, dz = \iiint_{G'} (-u + v) J(u, v, w) \, du \, dv \, dw = \int_1^2 du \int_2^3 (v - u) \, dv \int_1^3 \frac{1}{2} \, dw =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_2^3 (v-u) dv \int_1^3 dw = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_2^3 (v-u) dv \left( w \Big|_1^3 \right) = \int_1^2 du \int_2^3 (v-u) dv = \\
&= \int_1^2 du \left[ \left( \frac{v^2}{2} - uv \right) \Big|_2^3 \right] = \int_1^2 \left( \frac{5}{2} - u \right) du = \left( \frac{5}{2}u - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = 1.
\end{aligned}$$

◇ В рассмотренном примере переход к новым переменным был обусловлен трудностями, связанными с расстановкой пределов в повторных интегралах в декартовых координатах  $(x, y, z)$ . Трудность здесь заключалась в том, что хотя граничные поверхности представляют собой плоскости, но число этих плоскостей равно шести – по числу граней косоугольного параллелепипеда. Для расстановки пределов в повторных интегралах весь параллелепипед необходимо разбить на области, у которых значения пределов во внутренних интегралах, например по переменной  $z$ , задавались бы одним уравнением. Чтобы получить такое разбиение, необходимо найти координаты всех восьми вершин параллелепипеда, каждая из которых есть точка пересечения трех плоскостей. Решение этой задачи само по себе уже громоздкое. Более того, после установления координат вершин необходимо составить уравнения плоскостей, проходящих через каждую из этих вершин параллельно оси  $Oz$ . Эти плоскости должны разбить косоугольный параллелепипед на области, сводя тройной интеграл к сумме тройных интегралов по полученным областям. Каждый из этих тройных интегралов уже можно будет записать повторными и приступить к их вычислению.

Таким образом, вычисление тройного интеграла по области (11.54) в переменных  $x, y, z$  сводится к последовательному решению нескольких задач различного характера.

В следующем примере при вычислении интеграла в переменных  $x, y, z$  к этим трудностям добавляется трудность, обусловленная присутствием среди граничных поверхностей второго порядка.

**Пример 11.10.** Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_G \frac{z^4 + 1}{xy} dx dy dz,$$

где

$$G = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq 3x, 0 \leq z \leq 3(x+y) \leq 6z, 1 \leq 4z(x+y) \leq 4\}.$$

**Решение.** Как и в предыдущем примере, вычисление интеграла в переменных  $x, y, z$  приводит к громоздким выкладкам. Этого можно избежать, воспользовавшись тем, что граничные поверхности области  $G$  можно рассматривать как поверхности уровня функций

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \varphi_2(x, y, z) = \frac{x+y}{z}, \quad \varphi_3(x, y, z) = z(x+y).$$

Это позволяет воспользоваться заменой переменных (11.19) из примера 11.3:

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{x+y}{z}, \quad w = z(x+y).$$

Обратная ей замена имеет вид (11.21):

$$x = \frac{\sqrt{vw}}{1+u}, \quad y = u \frac{\sqrt{vw}}{1+u}, \quad z = \sqrt{\frac{w}{v}}.$$

Такая замена, как следует из примера 11.3, отображает область  $G$  в трехмерную клетку в переменных  $u, v, w$ , представляющую собой прямоугольный параллелепипед (11.20):

$$G' = \left\{ (u, v, w) : 1 \leq u \leq 3, \frac{1}{3} \leq v \leq 2, \frac{1}{4} \leq w \leq 1 \right\}.$$

Якобиан замены имеет вид

$$J(u, v, w) = -\frac{1}{2(1+u)^2} \sqrt{\frac{w}{v}}, \quad (u, v, w) \in G.$$

Это означает, что отображение  $G \rightarrow G'$  является взаимно однозначным и указанную замену переменных можно использовать для вычисления тройного интеграла

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{z^4 + 1}{xy} dx dy dz &= \iiint_{G'} \frac{(w/v)^2 + 1}{uvw/(1+u)^2} \frac{1}{2(1+u)^2} \sqrt{\frac{w}{v}} du dv dw = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{G'} \frac{w^2 + v^2}{uw^{7/2}w^{1/2}} du dv dw. \end{aligned}$$

Этот тройной интеграл по области  $G'$  можно записать повторными интегралами вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{G'} \frac{w^2 + v^2}{uw^{7/2}w^{1/2}} du dv dw &= \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_{1/3}^2 dv \int_{1/4}^1 \frac{w^2 + v^2}{uw^{7/2}w^{1/2}} dw = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_1^3 \frac{du}{u} \int_{1/3}^2 \frac{dv}{v^{7/2}} \int_{1/4}^1 w^{3/2} dw + \int_1^3 \frac{du}{u} \int_{1/3}^2 \frac{dv}{v^{3/2}} \int_{1/4}^1 \frac{dw}{w^{1/2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} J_1 [J_2 J_3 + \bar{J}_2 \bar{J}_3]. \end{aligned} \tag{11.59}$$

Таким образом, в переменных  $u, v, w$  тройной интеграл (11.59) удастся свести к произведению одномерных интегралов с постоянными пределами, вычисление которых дает

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_1^3 \frac{du}{u} = \ln u \Big|_1^3 = \ln 3, \quad J_2 = \int_{1/3}^2 \frac{dv}{v^{7/2}} = -\frac{2}{5} v^{-5/2} \Big|_{1/3}^2 = \frac{2}{5} \left( 9\sqrt{3} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right), \\ J_3 &= \int_{1/4}^1 w^{3/2} dw = \frac{2}{5} w^{5/2} \Big|_{1/4}^1 = \frac{2}{5} \left( 1 - \frac{1}{32} \right) = \frac{31}{80}, \end{aligned}$$

$$\bar{J}_2 = \int_{1/3}^2 v^{-3/2} dv = -2v^{-1/2} \Big|_{1/3}^2 = 2 \left( \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\bar{J}_3 = \int_{1/4}^1 w^{-1/2} dw = 2w^{1/2} \Big|_{1/4}^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Подставив эти значения в (11.59), имеем

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{z^4 + 1}{xy} dx dy dz &= \frac{1}{2} (\ln 3) \left[ \frac{2}{5} \left( 9\sqrt{3} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \frac{31}{80} + 2 \left( \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= (\ln \sqrt{3}) \left[ \frac{679}{200} \sqrt{3} - \frac{1631}{160} \sqrt{2} \right]. \end{aligned}$$

В следующих примерах мы рассмотрим возможность использования «упрощенной» замены переменных, исходя из формул (7.12) и (7.13) теоремы 7.1 (теоремы Фубини для тройного интеграла). Согласно этим формулам, тройной интеграл можно записать в виде

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{G_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (11.60)$$

если область  $G$  является элементарной относительно оси  $Oz$ , т. е. ее можно определить как

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_{xy} \subset \mathbb{R}^2, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

где  $G_{xy}$  – ортогональная проекция  $G$  на плоскость  $xOy$ , или

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{G(z)} f(x, y, z) dx dy, \quad (11.61)$$

где  $[a, b]$  – отрезок оси  $Oz$ , являющийся проекцией  $\bar{G}$  на ось  $Oz$ , а  $G(z)$  – сечения области  $G$  координатными плоскостями  $x = c_x$ ,  $c_x \in [a, b]$ .

При необходимости, исходя из этих представлений, вычисление тройного интеграла можно упростить, ограничившись лишь заменой переменных только в двойном интеграле, т. е. только по переменным  $x$  и  $y$ . Воспользуемся «упрощенной» заменой переменных, определенной (11.60) и (11.61). Начнем с интеграла, который был вычислен в примере 11.8 с помощью общей замены переменных  $(x, y, z)$  на  $(u, v, w)$ .

**Пример 11.11.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G xyz(1 - x - y - z) dx dy dz$$

по области  $G'$ , ограниченной плоскостями  $x = y + z = 1$ ,  $x = y = z = 0$ .

**Решение.** Как уже отмечалось, в примере 11.8 рассматривалось вычисление этого интеграла двумя способами: непосредственно в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ , а также при помощи замены переменных

$$\begin{aligned} x &= u(1-v), \quad y = uv(1-w), \quad z = uvw, \\ u &= x+y+z, \quad v = \frac{y+z}{x+y+z}, \quad w = \frac{z}{y+z} \end{aligned} \quad (11.62)$$

с якобианом

$$J(u, v, w) = u^2v,$$

отображающей единичную треугольную пирамиду (стандартный трехмерный симплекс)  $G$  на единичный куб (трехмерную клетку)  $G'$  (рис. 99, а, б). Такое отображение позволяет записать тройной интеграл  $J$  в переменных  $u, v, w$  повторными интегралами с постоянными пределами вида (11.53).

Теперь вместо замены (11.62) рассмотрим частичную замену

$$x = u(1-v), \quad y = uv, \quad z = z \iff u = x+y, \quad v = \frac{y}{x+y}, \quad z = z \quad (11.63)$$

с якобианом

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-v)u + vu = u. \quad (11.64)$$

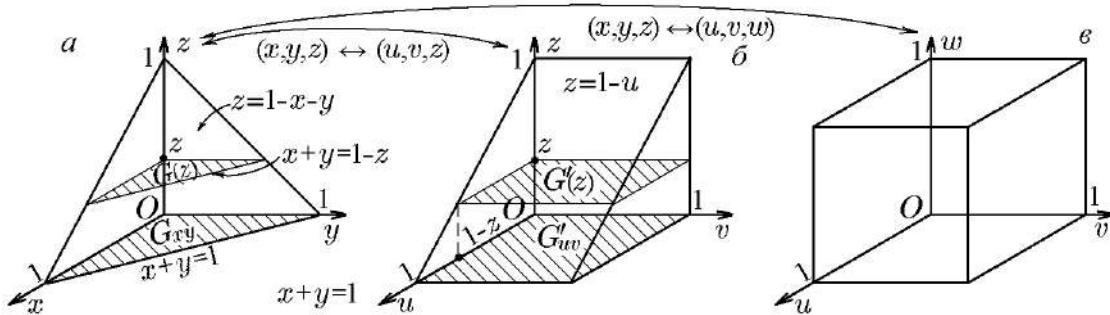


Рис. 99.  $(x, y, z)$ :  $G = \{G_{xy}, 0 \leq z \leq 1-x-y\} = \{0 \leq z \leq 1, G(z)\}$ ,  
 $G_{xy} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ ,  $G(z) = \{0 \leq x \leq 1-z, 0 \leq y \leq 1-x-z\}$  (а);  
 $(u, v, z)$ :  $G' = \{G'_{uv}, 0 \leq z \leq 1-u\} = \{0 \leq z \leq 1, G'(z)\}$ ,  $G'_{uv} = \{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ ,  
 $G'(z) = \{0 \leq u \leq 1-z, 0 \leq v \leq 1\}$  (б);  
 $(u, v, w)$ :  $G' = \{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$  (в)

Замена (11.63) отображает стандартный трехмерный симплекс  $G$  на трехмерную призму  $G'$  (рис. 99, б). Причем, как показано в примере 9.3, в координатной плоскости  $z=0$  треугольник  $G_{xy}$  отображается в квадрат  $G'_{uv}$ :

$$G_{xy} = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}, \quad G'_{uv} = \{(u, v): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Соответственно, в координатной плоскости  $z=c$ ,  $0 \leq c \leq 1$ , треугольник  $G(z)$  отображается на прямоугольник  $G'(z)$ :

$$\begin{aligned} G(z) &= \{(x, y): 0 \leq x \leq 1-z, 0 \leq y \leq 1-z-x\}, \\ G'(z) &= \{(u, v): 0 \leq u \leq 1-z, 0 \leq v \leq 1\}. \end{aligned}$$

С учетом этого в переменных  $(u, v, z)$  призму  $G'$  можно определить двумя способами:

$$G' = \{(u, v, z) : (u, v) \in G'_{uv} \subset \mathbb{R}^2, 0 \leq z \leq 1 - u\} \quad (11.65)$$

и

$$G' = \{(u, v, z) : 0 \leq z \leq 1, (u, v) \in G'(z) \subset \mathbb{R}^2\}. \quad (11.66)$$

Исходя из (11.65), мы можем записать тройной интеграл  $J$  с порядком интегрирования (11.60), а исходя из (11.66) – с порядком интегрирования (11.61).

В первом случае с учетом (11.64) получим

$$\begin{aligned} J &= \iint_{G_{xy}} xy \, dx \, dy \int_0^{1-x-y} z(1-x-y-z) \, dz = \iint_{G'_{uv}} u(1-v)uv \, u \, du \, dv \int_0^{1-u} z(1-u-z) \, dz = \\ &= \iint_{G'_{uv}} u^3 v(1-v) \, du \, dv \left[ (1-u) \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right] \Big|_0^{1-u} = \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^1 u^3 (1-u)^3 \, du \int_0^1 v(1-v) \, dv = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^1 u^3 (1-3u+3u^2-u^3) \, du \int_0^1 (v-v^2) \, dv = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} \left( \frac{u^4}{4} - \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^6}{6} - \frac{u^7}{7} \right) \Big|_0^1 \left( \frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3} \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right) \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 6} \left( \frac{3}{20} - \frac{1}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 7} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{7!}. \end{aligned}$$

Во втором случае, т. е. для представления (11.66), имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 z \, dz \iint_{G(z)} xy(1-x-y-z) \, dx \, dy = \int_0^1 z \, dz \iint_{G'(z)} u(1-u)uv(1-u-z)u \, du \, dv = \\ &= \int_0^1 z \, dz \int_0^1 (1-v)v \, dv \int_0^{1-z} u^3(1-u-z) \, du = \\ &= \int_0^1 z \, dz \int_0^1 (v-v^2) \, dv \int_0^{1-z} [u^3(1-z) - u^4] \, du = \\ &= \int_0^1 z \, dz \left[ \left( \frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right] \left[ \left( \frac{u^4}{4}(1-z) - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^{1-z} \right] = \\ &= \int_0^1 z \, dz \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{(1-z)^5}{4 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^1 z(1-z)^5 \, dz = \{1-z=t\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^1 t^5(1-t) \, dt = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left( \frac{t^6}{6} - \frac{t^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{7!}. \end{aligned}$$

В обоих случаях приходим к результату, полученному в примере 11.8.



**Пример 11.12.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G \frac{z \, dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2} \quad (11.67)$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностями

$$2y = x, \quad y = 2x, \quad xy = 1, \quad xy = 2, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 2(x^2 + y^2). \quad (11.68)$$

**Решение.** Область  $G$  ограничена боковой цилиндрической поверхностью  $2y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  с образующей, параллельной оси  $Oz$ , которая сверху и снизу ограничена круговыми параболоидами  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2(x^2 + y^2)$ . Обе поверхности для простоты построения изображены на рис. 100 а, б. С учетом этого тройной интеграл (11.67) удобнее вычислять, исходя из представления (11.60):

$$\iiint_G \frac{z \, dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2} = \iint_{G_{xy}} \frac{dx \, dy}{x^2 + y^2} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} z \, dz, \quad (11.69)$$

где  $z_1(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $z_2(x, y) = 2(x^2 + y^2)$ , а  $G_{xy}$  является проекцией области  $G$  на плоскость  $xOy$  и определена, согласно (11.68), системой неравенств

$$G_{xy} = \left\{ (x, y) : \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2, 1 \leq xy \leq 2 \right\}, \quad (11.70)$$

что позволяет записать область  $G$  как

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_{xy} \subset \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2)\}. \quad (11.71)$$

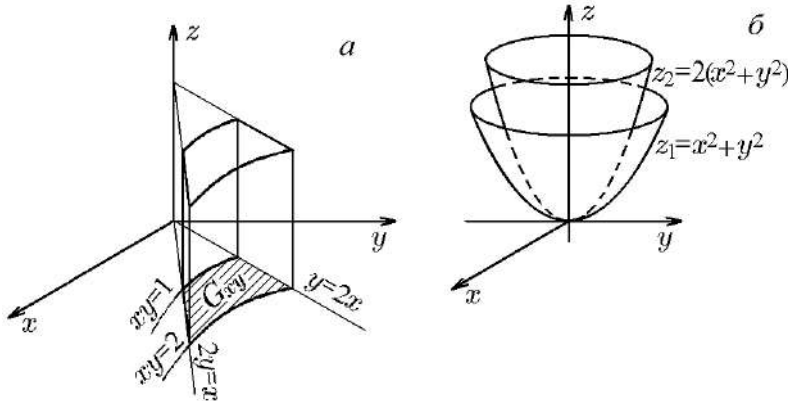


Рис. 100. Поверхности (а)  $2y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ; (б)  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2(x^2 + y^2)$

Чтобы вычислить интеграл (11.69), рассмотрим частичную замену переменных

$$\left\{ u = \frac{y}{x}, v = xy \right\} \iff \left\{ x = \sqrt{\frac{v}{u}}, y = \sqrt{uv}, z = z \right\}, \quad (11.72)$$

которая отображает область  $G$  (11.71) в область

$$G' = \left\{ (u, v, z) : (u, v) \in G'_{uv} \subset \mathbb{R}^2, \left( \frac{v}{u} + vu \right) \leq z \leq 2 \left( \frac{v}{u} + vu \right) \right\}. \quad (11.73)$$

В примере 9.8 показано, что замена  $u = y/x$ ,  $v = xy$  отображает область  $G_{xy}$  (11.70) в область

$$G'_{uv} = \left\{ (u, v) : \frac{1}{2} \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2 \right\}. \quad (11.74)$$

Приняв во внимание, что якобиан замены (11.72) равен

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2u}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u} \neq 0, \quad (u, v) \in G'_{uv},$$

интеграл (11.69) в переменных  $(u, v, z)$  запишем как

$$J = \iint_{G_{xy}} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} z dz = \iint_{G'_{uv}} du dv \int_{v(1+u^2)/u}^{2v(1+u^2)/u} \frac{z}{v/u + uv} \frac{1}{2u} dz.$$

Перейдя здесь к повторным интегралам и вычислив их, получим

$$\begin{aligned} J &= \iint_{G'_{uv}} du dv \int_{v(1+u^2)/u}^{2v(1+u^2)/u} \frac{z}{v/u + uv} \frac{1}{2u} dz = \frac{1}{2} \int_{1/2}^2 \frac{du}{1+u^2} \int_1^2 \frac{dv}{v} \int_{v(1+u^2)/u}^{2v(1+u^2)/u} z dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^2 \frac{du}{1+u^2} \int_1^2 \frac{dv}{v} \left( \frac{z^2}{2} \Big|_{v(1+u^2)/u}^{2v(1+u^2)/u} \right) = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \int_{1/2}^2 \frac{1+u^2}{u^2} du \int_1^2 v dv = \\ &= \frac{3}{4} \left[ \left( -\frac{1}{u} + u \right) \Big|_{1/2}^2 \right] \left[ \frac{v^2}{2} \Big|_1^2 \right] = \frac{3}{4} \left[ -\frac{1}{2} + 2 + 2 - \frac{1}{2} \right] \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8}. \end{aligned}$$

Частный случай рассмотренной выше замены переменных соответствует переходу от декартовых координат  $(x, y, z)$  к цилиндрическим  $(\rho, \varphi, z)$ . Поэтому мы продолжим рассмотрение примеров, которые удобно вычислять с помощью переменных в цилиндрической системе координат.

## 12. Цилиндрические и обобщенные цилиндрические координаты и их приложение к вычислению тройных интегралов

С помощью общих соотношений (11.60), (11.61) тройные интегралы можно свести к повторным:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{G_{xy}} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz, \\ \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b dz \iint_{G(z)} f(x, y, z) dx dy, \end{aligned}$$

замена переменных

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad J(\rho, \varphi, z) = \rho \quad (12.1)$$

преобразует их к виду

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{G'_{\rho\varphi}} \rho d\rho d\varphi \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho, \varphi, z) dz, \quad (12.2)$$

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{G'(z)} f(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi. \quad (12.3)$$

Здесь  $G'_{\rho\varphi}$  и  $G'(z)$  – образы областей  $G_{xy}$  и  $G(z)$  при замене (12.1). В силу очевидной наглядности цилиндрических координат замену (12.1) можно рассматривать не как преобразование множеств  $G_{xy}$ ,  $G(z)$  и  $G'_{\rho\varphi}$ ,  $G'(z)$ , а как переход от декартовых координат к цилиндрическим, естественно связанным с декартовыми. При таком подходе для области интегрирования удобнее использовать одно обозначение как для декартовых, так и для цилиндрических координат. Для декартовых координат  $G = \{(x, y, z) : \dots\}$ , а для цилиндрических  $G = \{(\rho, \varphi, z) : \dots\}$ .

**Пример 12.1.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G z^2 dx dy dz \quad (12.4)$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностями  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $z = R \geq 0$ .

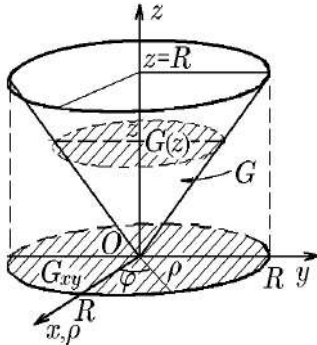


Рис. 101. Область  $G$  из примера 12.1

**Решение.** Область интегрирования  $G$  представляет собой прямой круговой конус  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  с высотой и радиусом основания, равными  $R$  (рис. 101). Его проекция на плоскость  $xOy$  представляет собой круг  $x^2 + y^2 = R^2$ , а проекция на ось  $Oz$  – отрезок  $[0, R]$ . Сечение этого конуса плоскостью, параллельной плоскости основания  $z = R$ , есть круг радиуса  $z$ :  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z \in [0, R]$  (рис. 101).

Чтобы вычислить интеграл (12.4), воспользуемся его представлением повторными интегралами вида

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G z^2 dx dy dz = \iint_{G_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^R z^2 dz = \\ &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^R z^2 dz. \end{aligned}$$

Вычисление этих интегралов в декартовых координатах приводит к интегрированию иррациональностей. Этого можно избежать, перейдя к цилиндрическим координатам. Тогда

$$J = \iiint_G z^2 dx dy dz = \iint_{G_{\rho\varphi}} \rho d\rho d\varphi \int_{\rho}^R z^2 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_{\rho}^R z^2 dz =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^R \rho d\rho \left( \frac{z^3}{3} \Big|_\rho^R \right) = \frac{2\pi}{3} \int_0^R \rho (R^3 - \rho^3) d\rho = \frac{2\pi}{3} \left( R^3 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^R = \\
 &= \frac{2\pi}{3} R^5 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi}{5} R^5.
 \end{aligned}$$

Вычисление интеграла (12.4) можно упростить еще более, если воспользоваться его представлением (11.61) в виде

$$J = \iiint_G z^2 dx dy dz = \int_0^R z^2 dz \iint_{G(z)} dx dy. \tag{12.5}$$

Так как  $G(z)$  представляет собой круг радиусом  $z$ :  $x^2 + y^2 = z^2$  (рис. 101), то двойной интеграл равен его площади, т. е.

$$\iint_{G(z)} dx dy = \pi z^2.$$

С учетом этого имеем

$$J = \iiint_G z^2 dx dy dz = \int_0^R z^2 dz \cdot \pi z^2 = \pi \int_0^R z^4 dz = \pi \frac{z^5}{5} \Big|_0^R = \frac{\pi}{5} R^5.$$

Данный результат совпадает с ранее полученным.

Как видим, для тройного интеграла (12.4) в таком представлении повторными интегралами переход к цилиндрическим координатам не потребовался. Более того, и в декартовых координатах удалось обойтись без вычисления внутреннего двойного интеграла в (12.5), воспользовавшись тем, что он, согласно своему геометрическому смыслу, равен площади области интегрирования.

**Пример 12.2.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$$

по области  $G$ , заданной неравенствами  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$ ,  $0 \leq z \leq h$ .

**Решение.** Область интегрирования  $G$  представляет собой половину цилиндра (рис. 102).

Обозначим проекцию области  $G$  на плоскость  $xOy$  через  $G_{xy}$ , а поперечное сечение этой проекции – через  $G(z)$ . Так как  $G_{xy}$  и  $G(z)$  совпадают, то выбор представления повторными интегралами роли не играет. Поскольку граничные поверхности  $G$  легко записываются в цилиндрических координатах:

$$G = \left\{ (\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi, 0 \leq z \leq h \right\},$$

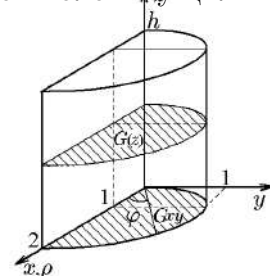


Рис. 102. Область  $G$

то вычисление тройного интеграла не вызывает затруднений:

$$\begin{aligned}
 J &= \iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \int_0^h z dz = \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \left( \frac{z^2}{2} \Big|_0^h \right) = \frac{h^2}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2 \cos \varphi} = \frac{4h^2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \\
 &= \frac{4h^2}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{4h^2}{3} \frac{2}{3} = \frac{8h^2}{9}.
 \end{aligned}$$

**Пример 12.3.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G x \sqrt{x^2 + y^2} z dx dy dz$$

по области  $G$ , заданной неравенствами  $x^2 + y^2 - y \leq 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq x^2 + y^2$ .

**Решение.** Область интегрирования  $G$  представляет собой половинку прямого кругового цилиндра, расположенную в полупространстве  $x \geq 0$  и ограниченную сверху параболоидом вращения  $z = x^2 + y^2$ , а снизу конусом  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  (рис. 103). Так как в данном случае проще всего определить  $G_{xy}$  — проекцию  $G$  на плоскость  $xOy$ , то область  $G$  можно определить неравенствами

$$\begin{aligned}
 G &= \{(x, y, z) : (x, y) \in G_{xy} \subset \mathbb{R}^2, \\
 &\quad -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq x^2 + y^2\},
 \end{aligned} \tag{12.6}$$

где

$$G_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y - y^2}\}. \tag{12.7}$$

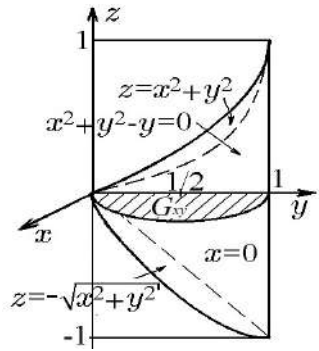


Рис. 103. Область  $G$  из примера 12.3

Отсюда видно, что вычисление тройного интеграла  $J$  в декартовых координатах приводит к громоздким выкладкам. Этому можно избежать, воспользовавшись цилиндрическими координатами. С их помощью (12.7) и (12.6) запишутся как

$$G'_{\rho\varphi} = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \sin \varphi \right\},$$

$$G = \left\{ (\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \sin \varphi, -\rho \leq z \leq \rho^2 \right\}.$$

С учетом этого

$$\begin{aligned}
 J &= \iiint_G x \sqrt{x^2 + y^2} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho \, d\rho \int_{-\rho}^{\rho^2} \rho \cos \varphi \rho z \, dz = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho^3 \, d\rho \int_{-\rho}^{\rho^2} z \, dz = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho^3 \, d\rho \left( \frac{z^2}{2} \Big|_{-\rho}^{\rho^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho^3 (\rho^4 - \rho^2) \, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \left( \frac{\rho^8}{8} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^{\sin \varphi} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \left( \frac{\sin^8 \varphi}{8} - \frac{\sin^6 \varphi}{6} \right) \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin^8 \varphi}{8} - \frac{\sin^6 \varphi}{6} \right) d(\sin \varphi) = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{72} \sin^9 \varphi - \frac{1}{42} \sin^7 \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{72} - \frac{1}{42} \right) = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{7} \right) = -\frac{5}{648}.
 \end{aligned}$$

**Пример 12.4.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G z(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностями  $x^2 + y^2 = z$ ,  $(x^2 + y^2)^2 = z^3$ .

**Решение.** Поскольку обе поверхности являются поверхностями вращения относительно оси  $Oz$ , то сделаем чертеж осевого сечения области  $G$  плоскостью  $y = 0$  (рис. 104, а). Как следует из этого рисунка, линией пересечения этих поверхностей является окружность  $z = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ . Ортогональной проекцией  $G$  на ось  $Oz$  является отрезок  $[0, 1]$ , а на плоскость  $xOy$  — круг  $G_{xy}$ :  $x^2 + y^2 \leq 1$  (рис. 104, б). Горизонтальная плоскость  $z = c$ ,  $0 \leq c \leq 1$ , пересекая область  $G$ , дает сечение  $G(z)$  — кольцо

$$z^{3/2} \leq x^2 + y^2 \leq z$$

с внутренним радиусом  $z^{3/4}$  и внешним  $z^{1/2}$ . Исходя из этого, имеем два представления области  $G$ :

$$G = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, (x, y) \in G(z) \subset \mathbb{R}^2\},$$

$$G(z) = \{(x, y) : z^{3/2} \leq x^2 + y^2 \leq z\}.$$

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_{xy} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$x^2 + y^2 \leq z \leq (x^2 + y^2)^{2/3}\}, G_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

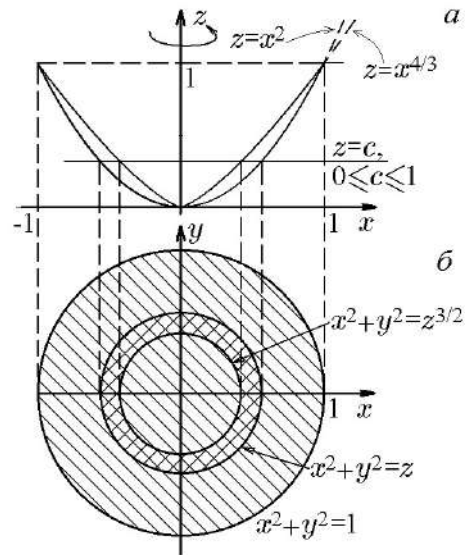


Рис. 104. Область  $G$  из примера 12.4

и, соответственно два представления тройного интеграла  $J$  повторными:

$$J = \iiint_G z(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^1 z dz \iint_{G(z)} (x^2 + y^2) dx dy,$$

$$J = \iiint_G z(x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{G_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \int_{x^2+y^2}^{(x^2+y^2)^{2/3}} z dz.$$

Чтобы упростить вычисление этих повторных интегралов, перейдем к цилиндрическим координатам в обоих представлениях области  $G$ :

$$G = \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq z \leq 1, (\rho, \varphi) \in G(z)\},$$

$$G(z) = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z^{3/4} \leq \rho \leq z^{1/2}\},$$

$$G = \{(\rho, \varphi, z) : (\rho, \varphi) \in G_{\rho\varphi}, \rho^2 \leq z \leq \rho^{4/3}\},$$

$$G_{\rho\varphi} = G_{xy}(\rho, \varphi) = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

Тогда

$$J = \int_0^1 z dz \iint_{G(z)} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 z dz \iint_{G(z)} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^1 z dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z^{3/4}}^{z^{1/2}} \rho^3 d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 z dz \left( \frac{\rho^4}{4} \Big|_{z^{3/4}}^{z^{1/2}} \right) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 z(z^2 - z^3) dz = \frac{\pi}{2} \left( \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{40}$$

и, соответственно,

$$J = \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy \int_{x^2+y^2}^{(x^2+y^2)^{2/3}} z dz = \iint_{G_{\rho\varphi}} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi \int_{\rho^2}^{\rho^{4/3}} z dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot \left( \frac{z^2}{2} \Big|_{\rho^2}^{\rho^{4/3}} \right) = \pi \int_0^1 \rho^3 (\rho^{8/3} - \rho^4) d\rho =$$

$$= \pi \int_0^1 (\rho^{17/3} - \rho^7) d\rho = \pi \left( \frac{3}{20} \rho^{20/3} - \frac{\rho^8}{8} \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{3}{20} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{40}.$$

Таким образом, два способа вычисления тройного интеграла приводят к одному и тому же результату.

**Пример 12.5.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G \sqrt[4]{x^2 + y^2} dx dy dz$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2.$$

**Решение.** Данная область уже рассматривалась в примере 11.5, где было показано, что в цилиндрических координатах ее можно определить неравенством (11.32):

$$G = \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, -\sqrt{\rho - \rho^2} \leq z \leq \sqrt{\rho - \rho^2}\}.$$

Исходя из этого, тройной интеграл можно представить повторными интегралами вида

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^{1/2} \rho \, d\rho \int_{-\sqrt{\rho - \rho^2}}^{\sqrt{\rho - \rho^2}} dz = \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^{3/2} d\rho \left( z \Big|_{-\sqrt{\rho - \rho^2}}^{\sqrt{\rho - \rho^2}} \right) = 4\pi \int_0^1 \rho^{3/2} \sqrt{\rho - \rho^2} \, d\rho = 4\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho)^{1/2} d\rho = \\ &= \left| \begin{array}{l} 1 - \rho = t, \quad \rho_1 = 0, t_1 = 1, \rho_2 = 1, t_2 = 0 \\ \rho = 1 - t, \quad d\rho = -dt \end{array} \right| = 4\pi \int_0^1 (1 - t)^2 t^{1/2} dt = \\ &= 4\pi \int_0^1 (t^{1/2} - 2t^{3/2} + t^{5/2}) dt = 4\pi \left( \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{4}{5} t^{5/2} + \frac{2}{7} t^{7/2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 4\pi \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} \right) = \frac{64\pi}{105}. \end{aligned}$$

Следующий пример иллюстрирует случай, когда представления тройного интеграла повторными сразу по всей области интегрирования невозможно. В этом случае область интегрирования необходимо разбить на сумму областей, для каждой из которых тройной интеграл может быть представлен повторными интегралами.

**Пример 12.6.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G dx \, dy \, dz$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностями

$$\begin{aligned} x = y = z = 0, \quad x + y + z = 1, \\ z - 1 = -(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

**Решение.** Область  $G$  расположена в первом октанте и ограничена сверху параболоидом, заданным уравнением  $z - 1 = -(x^2 + y^2)$ , а снизу — двумя плоскостями:  $x + y + z = 1$  и  $z = 0$ , которые пересекаются по прямой  $x + y = 1$  в плоскости  $z = 0$  (рис. 105). Эта прямая делит четверть круга  $x^2 + y^2 = 1$  на две части:  $G'_0 \subset \mathbb{R}_{xy}^2$  и  $G''_0 \subset \mathbb{R}_{xy}^2$ , где

$$G'_0 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + 1 \leq 1\}, \quad G''_0 = \{(x, y) : x + 1 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

или

$$\begin{aligned} G'_0 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - 1\}, \\ G''_0 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}. \end{aligned} \tag{12.8}$$

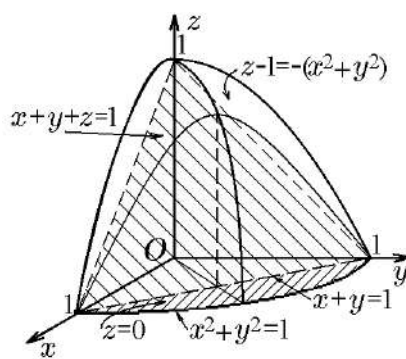


Рис. 105.  $G = G' \cup G''$



С учетом этого область  $G$  можно представить как  $G = G' \cup G''$ , где

$$\begin{aligned} G' &= \{(x, y, z) : (x, y) \in G'_0 \subset \mathbb{R}^2, 1 - x - y \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}, \\ G'' &= \{(x, y, z) : (x, y) \in G''_0 \subset \mathbb{R}^2, 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}. \end{aligned} \quad (12.9)$$

По свойству аддитивности тройного интеграла

$$\iiint_G dx dy dz = \iiint_{G'} dx dy dz + \iiint_{G''} dx dy dz. \quad (12.10)$$

Поскольку в цилиндрических координатах (12.8) и (12.9) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} G'_0 &= \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq (\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1} \right\}, \\ G''_0 &= \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, (\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1} \leq \rho \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} G' &= \left\{ (\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq (\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}, \right. \\ &\quad \left. 1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) \leq z \leq 1 - \rho^2 \right\}, \\ G'' &= \left\{ (\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, (\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1} \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \rho^2 \right\}, \end{aligned}$$

то, в силу (12.10), имеем

$$\begin{aligned} \iiint_G dx dy dz &= \iiint_{G'} dx dy dz + \iiint_{G''} dx dy dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}} \rho d\rho \int_{1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi)}^{1 - \rho^2} dz + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}}^1 \rho d\rho \int_0^{1 - \rho^2} dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}} \rho[\rho(\cos \varphi + \sin \varphi) - \rho^2] d\rho + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}}^1 \rho(1 - \rho^2) d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}} [\rho^2(\cos \varphi + \sin \varphi) - \rho^3] d\rho + \int_{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}}^1 (\rho - \rho^3) d\rho \right\} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[ \frac{\rho^3}{3}(\cos \varphi + \sin \varphi) - \frac{\rho^4}{4} \right] \Big|_0^{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}} + \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}}^1 \right\} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6(\cos \varphi + \sin \varphi)^2} \right) d\varphi = \int_0^{\pi/4} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{12 \sin^2(\varphi + \pi/4)} \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \varphi \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{12} \operatorname{ctg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{6} = \frac{1}{24}(3\pi - 4). \end{aligned}$$

**Пример 12.7.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G z(2x + 3y)^2 dx dy dz$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностями

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 3. \quad (12.11)$$

**Решение.** Область  $G$  (рис. 106) представляет собой тело, ограниченное снизу эллиптическим параболоидом, а сверху – трехосным эллипсоидом (см. [16]). Линией их пересечения является эллипс

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2, \quad (12.12)$$

расположенный в плоскости  $z = 1$ , что следует из решения уравнения

$$2z + z^2 = 3, \quad z_1 = -3, \quad z_2 = 1,$$

вытекающего из уравнений (12.11). Кроме этого, из уравнений (12.11) следует, что область  $G$  симметрична относительно координатных плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$ . С учетом этого исходный интеграл можно представить в виде суммы:

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G z(2x + 3y)^2 dx dy dz = \\ &= \iiint_G z(4x^2 + 9y^2) dx dy dz + 12 \iiint_G zxy dx dy dz, \end{aligned}$$

в которой второй интеграл, в силу симметрии области и нечетности подынтегральной функции  $xyz$  по переменным  $x$  и  $y$ , равен нулю. Следовательно,

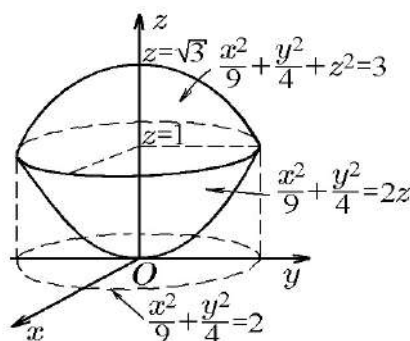


Рис. 106. Область  $G$  из примера 12.7

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G z(2x + 3y)^2 dx dy dz = \\ &= \iiint_G z(4x^2 + 9y^2) dx dy dz. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Чтобы представить этот интеграл повторными, учтем, что проекцией  $G$  на плоскость  $xOy$ , как следует из рис. 106, является эллипс (12.12). С учетом этого перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам

$$x = 3\rho \cos \varphi, \quad y = 2\rho \sin \varphi, \quad z = z$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi, z) = 6\rho$ . Тогда уравнение эллипса (12.12) запишется как  $\rho^2 = 2$  или  $\rho = \sqrt{2}$ , а уравнения (12.11), соответственно, как  $z = \rho^2/2$  или  $z = \sqrt{3 - \rho^2}$ . Это позволяет область  $G$  в координатах  $\rho, \varphi, z$  определить неравенствами

$$G = \left\{ (\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq \sqrt{3 - \rho^2} \right\}.$$

Исходя из этого, интеграл (12.13) можно представить повторными интегралами, которые вычисляются достаточно просто:

$$\begin{aligned}
 J &= \iiint_G z(4x^2 + 9y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} 6\rho d\rho \int_{\rho^2/2}^{\sqrt{3-\rho^2}} z \cdot 36\rho^2 dz = \\
 &= 2\pi \cdot 6 \cdot 36 \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_{\rho^2/2}^{\sqrt{3-\rho^2}} z dz = 6 \cdot 36\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \left( z^2 \Big|_{\rho^2/2}^{\sqrt{3-\rho^2}} \right) = \\
 &= 216\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \left( 3 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) d\rho = 216\pi \left( \frac{3\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} - \frac{1}{4} \frac{\rho^8}{8} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \\
 &= 216\pi \left( 3 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) = 252\pi.
 \end{aligned}$$

**Пример 12.8.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G z(2x + y)^2 dx dy dz$$

по области  $G$ , заданной неравенствами

$$4x^2 + y^2 - 4y \leq 0, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} \leq 1, \quad z \geq 0. \quad (12.14)$$

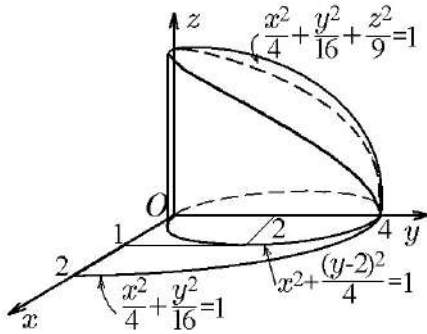


Рис. 107. Область  $G$

**Решение.** Область  $G$  (рис. 107) представляет собой тело, ограниченное боковой цилиндрической поверхностью  $x^2 + (y - 2)^2/2 = 1$ , координатной плоскостью  $z = 0$  снизу и трехосным эллипсоидом  $x^2/4 + y^2/16 + z^2/9 = 1$  сверху.

Как следует из рис. 107, проекцией области  $G$  на координатную плоскость  $z = 0$  является эллипс

$$4x^2 + y^2 - 4y = 0. \quad (12.15)$$

Вместе с этим из неравенств (12.14) следует, что  $G$  симметрична относительно координатной плоскости  $x = 0$ . С учетом этого исходный интеграл можно представить в виде суммы

$$J = \iiint_G z(2x + y)^2 dx dy dz = \iiint_G z(4x^2 + y^2) dx dy dz + 4 \iiint_G zxy dx dy dz,$$

в которой второй интеграл равен нулю в силу симметрии области  $G$  и нечетности подынтегральной функции  $xyz$  по переменной  $x$ . Следовательно,

$$J = \iiint_G z(2x + y)^2 dx dy dz = \iiint_G z(4x^2 + y^2) dx dy dz. \quad (12.16)$$

Чтобы представить этот интеграл повторными, учтем, что проекцией  $G$  на плоскость  $xOy$ , как следует из рис. 107, является эллипс (12.15). С учетом этого перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = 2\rho \sin \varphi, \quad z = z$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi, z) = 2\rho$ . Тогда уравнение эллипса (12.15) запишется как  $\rho^2 = 8\rho \sin \varphi$  или  $\rho = 2 \sin \varphi$ , а уравнение эллипсоида, соответственно, как  $\rho^2/4 + z^2/9 = 1$  или  $z = 3\sqrt{4 - \rho^2}/2$ . Это позволяет область  $G$  в координатах  $\rho, \varphi, z$  определить неравенствами

$$G = \left\{ (\rho, \varphi, z) : 0 \leq \varphi < \pi, 0 \leq \rho \leq 2 \sin \varphi, 0 \leq z \leq \frac{3}{2} \sqrt{4 - \rho^2} \right\}.$$

Исходя из этого, интеграл (12.16) можно представить повторными интегралами, вычисление которых дает

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G z(4x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} 2\rho d\rho \int_0^{3\sqrt{4-\rho^2}/2} 4\rho^2 z dz = \\ &= 8 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \rho^3 d\rho \left( \frac{z^2}{2} \Big|_0^{3\sqrt{4-\rho^2}/2} \right) = 9 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \rho^3 (4 - \rho^2) d\rho = \\ &= 9 \int_0^\pi d\varphi \left( \rho^4 - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^{2 \sin \varphi} = 144 \int_0^\pi \left( \sin^4 \varphi - \frac{2}{3} \sin^6 \varphi \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Используя известные соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi &= \left( \frac{3\varphi}{8} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32} \right) \Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{8}, \\ \int_0^\pi \sin^6 \varphi d\varphi &= \left( \frac{5\varphi}{16} - \frac{15 \sin 2\varphi}{64} + \frac{3 \sin 4\varphi}{64} - \frac{\sin 6\varphi}{192} \right) \Big|_0^\pi = \frac{5\pi}{16}, \end{aligned}$$

получим

$$J = \iiint_G z(4x^2 + y^2) dx dy dz = 144 \left( \frac{3\pi}{8} - \frac{2}{3} \frac{5\pi}{16} \right) = 24\pi.$$

**Пример 12.9.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_{\tilde{G}} \frac{xy}{z^2} dx dy dz$$

по области  $\tilde{G}$ , заданной неравенствами

$$\left( \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right)^2 \leq xy, \quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}y^2 \geq 9, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq z \leq 2 \left( \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right).$$

**Решение.** Область интегрирования представляет собой тело, ограниченное боковыми цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси  $Oz$ , и направляющими в плоскости  $z = 0$  (Рис. 108, а)

$$\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^2 = xy, \quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 9. \quad (12.17)$$

Сверху и снизу оно ограничено эллиптическими параболоидами

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \quad z = 2\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right). \quad (12.18)$$

Эти поверхности представлены на рис. 108 и для удобства построения они изображены отдельно на рис. 108, б, причем при построении цилиндрических поверхностей были использованы результаты решения примера 10.13. Из уравнений (12.17), (12.18) и рис. 108 следует, что все поверхности симметричны относительно оси  $Oz$ , а их пересечения расположены в I и III октантах полупространства  $z > 0$ . Отсюда следует, что подынтегральная функция  $xy/z^2$  в области  $\tilde{G} = G_u \cap G_n$  непрерывна и ограничена, т. е. тройной интеграл  $J$  существует. Если воспользоваться симметрией области  $\tilde{G}$  и подынтегральной функции, то исходный интеграл можно представить в виде

$$J = \iiint_{\tilde{G}} \frac{xy}{z^2} dx dy dz = 2 \iiint_{\tilde{G}^+} \frac{xy}{z^2} dx dy dz, \quad (12.19)$$

где область  $\tilde{G}^+$  – часть области  $\tilde{G}$ , расположенная в I октанте. Если перейти к обобщенным цилиндрическим координатам

$$x = 3\rho \cos \varphi, \quad y = 2\rho \sin \varphi, \quad z = z$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi, z) = 6\rho$ , то область  $\tilde{G}^+$ , с учетом (10.87) из примера 10.13, можно определить неравенствами

$$\tilde{G}^+ = \left\{ (\rho, \varphi, z) : \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{12}, \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \rho \leq \sqrt{3 \sin 2\varphi}, \rho^2 \leq z \leq 2\rho^2 \right\}.$$

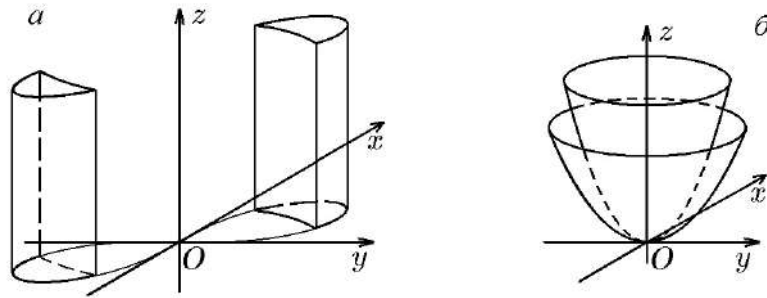


Рис. 108.  $G_u = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^2 \leq xy, \\ \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}y^2 \geq 9 \end{array} \right\}$  (а);  $G_n = \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \\ z = 2\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right) \end{array} \right\}$  (б)

Исходя из этого, тройной интеграл (12.19) можно представить повторными интегралами:

$$J = 2 \iint_{\tilde{G}^+} \frac{xy}{z^2} dx dy dz = 2 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3 \sin 2\varphi}} 36\rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^{2\rho^2} \frac{dz}{z^2},$$

вычисление которых дает

$$\begin{aligned} J &= 36 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi d\varphi \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3 \sin 2\varphi}} \rho^3 d\rho \left( -\frac{1}{z} \Big|_{\rho^2}^{2\rho^2} \right) = 18 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi d\varphi \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3 \sin 2\varphi}} \rho d\rho = \\ &= 27 \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left( \sin^2 2\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) d\varphi = \frac{27}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} (1 - \cos 4\varphi - \sin 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{27}{2} \left( \varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{27}{2} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{27}{24} (4\pi - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Пример 12.10.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_{\tilde{G}} \frac{dx dy dz}{x+y}$$

по области  $\tilde{G}$ , заданной неравенствами

$$(x+y)^3 \leq 16xy, \quad 0 \leq z \leq x+y-1.$$

**Решение.** Область интегрирования  $\tilde{G}$  (рис. 109) представляет собой тело, которое двумя плоскостями

$$z=0, \quad z=x+y-1 \tag{12.20}$$

отсекается от цилиндра

$$(x+y)^3 = 16xy. \tag{12.21}$$

Поскольку плоскости (12.20) пересекаются по прямой  $x+y=1$ , расположенной в плоскости  $xOy$ , то проекцией области  $\tilde{G}$  на плоскость  $xOy$  является область  $G$ , определяемая неравенствами

$$x+y \geq 1, \quad (x+y)^3 \leq 16xy.$$

Такая область  $G$  уже рассматривалась в примере 10.14 (см. рис. 88). Кстати, именно этот рисунок использовался при построении области  $\tilde{G}$ . Если, следуя (10.90) из примера 10.14, перейти к обобщенным цилиндрическим координатам

$$x = \rho \cos^2 \varphi, \quad y = \rho \sin^2 \varphi, \quad z = z$$

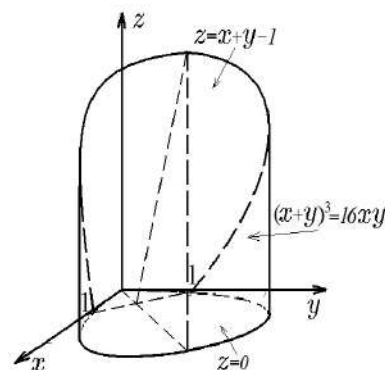


Рис. 109. Область  $\tilde{G}$  из примера 12.10

с якобианом  $J(\rho, \varphi, z) = \rho \sin 2\varphi$ , то область  $\tilde{G}$  в переменных  $\rho, \varphi, z$ , в силу (10.93), можно определить неравенствами

$$\tilde{G} = \left\{ (\rho, \varphi, z) : \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{12}, 1 \leq \rho \leq 4 \sin^2 2\varphi, 0 \leq z \leq \rho - 1 \right\}.$$

Исходя из них, тройной интеграл можно записать повторными интегралами

$$J = \iiint_{\tilde{G}} \frac{dx dy dz}{x+y} = \int_{\pi/12}^{5\pi/12} d\varphi \int_1^{4 \sin^2 2\varphi} \frac{1}{\rho} \rho \sin 2\varphi d\rho \int_0^{\rho-1} dz,$$

вычисление которых дает

$$\begin{aligned} J &= \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi d\varphi \int_1^{4 \sin^2 2\varphi} d\rho \int_0^{\rho-1} dz = \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi d\varphi \int_1^{4 \sin^2 2\varphi} (\rho - 1) d\rho = \\ &= \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi d\varphi \left( \frac{\rho^2}{2} - \rho \right) \Big|_1^{4 \sin^2 2\varphi} = \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin 2\varphi \left[ \frac{1}{2} (16 \sin^4 2\varphi - 1) - (4 \sin^2 2\varphi - 1) \right] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left( 8 \sin^4 2\varphi - 4 \sin^2 2\varphi + \frac{1}{2} \right) \sin 2\varphi d(2\varphi) = 4J_1 - 2J_2 + J_3, \end{aligned} \quad (12.22)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin^5 2\varphi d(2\varphi) = \left( -\frac{5}{8} \cos 2\varphi + \frac{5}{48} \cos 6\varphi - \frac{1}{80} \cos 10\varphi \right) \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \\ &= -\frac{5}{8} \sqrt{3} - \frac{1}{80} \sqrt{3} = \frac{49}{80} \sqrt{3}; \\ J_2 &= \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin^3 2\varphi d(2\varphi) = \left( -\frac{1}{3} \cos^3 2\varphi - \cos 2\varphi \right) \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}; \\ J_3 &= \int_{\pi/12}^{5\pi/12} d(2\varphi) = 2\varphi \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (12.22), получим

$$J = \iiint_{\tilde{G}} \frac{dx dy dz}{x+y} = 4 \cdot \frac{49}{80} \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{19}{20} \sqrt{3}.$$

**Пример 12.11.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_{\tilde{G}} x^2 y^2 z dx dy dz$$

по области  $\tilde{G}$ , заданной неравенствами

$$0 \leq z \leq 1 - x^6 - y^6. \quad (12.23)$$

**Решение.** Область интегрирования  $\tilde{G}$ , заданная неравенствами (12.23), симметрична относительно координатных плоскостей  $x = 0$ ,  $y = 0$  и расположена в полупространстве  $z \geq 0$ . Ее проекцией на плоскость  $xOy$  является область, ограниченная кривой

$$x^6 - y^6 = 1, \quad (12.24)$$

симметричной относительно координатных осей  $x = 0$ ,  $y = 0$  (см. пример 10.18). Подынтегральная функция  $x^2y^2z$ , четная по этим координатам, непрерывна в области  $\tilde{G}$ , и, следовательно, исходный тройной интеграл существует. В силу симметрии подынтегральной функции и области интегрирования его можно представить интегралом по четверти области  $\tilde{G}$ :

$$J = \iiint_{\tilde{G}} x^2y^2z \, dx \, dy \, dz = 4 \iiint_{\tilde{G}^+} x^2y^2z \, dx \, dy \, dz, \quad (12.25)$$

где

$$\tilde{G}^+ = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - x^6)^{1/6}, 0 \leq z \leq 1 - x^6 - y^6\}.$$

Если, как в примере 10.18, воспользоваться обобщенными цилиндрическими координатами

$$x = \rho \cos^{1/3} \varphi, \quad y = \rho \sin^{1/3} \varphi, \quad z = z, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi, z) = \frac{\rho}{3} \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi$ , то область  $\tilde{G}^+$  в координатах  $\rho, \varphi, z$  определяется неравенствами

$$\tilde{G}^+ = \{(\rho, \varphi, z): 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 1 - \rho^6\}.$$

Исходя из них, тройной интеграл (12.25) можно записать повторными:

$$\begin{aligned} J &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (\rho \cos^{1/3} \varphi)^2 (\rho \sin^{1/3} \varphi)^2 \frac{\rho}{3} \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi d\rho \int_0^{1-\rho^6} z \, dz = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{1-\rho^6} z \, dz, \end{aligned}$$

вычисление которых дает

$$\begin{aligned} J &= \frac{4}{3} \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^5 d\rho \left( \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-\rho^6} \right) = \frac{\pi}{3} \int_0^1 \rho^5 (1 - \rho^6) d\rho = \\ &= \frac{\pi}{3} \left( \frac{\rho^6}{6} - \frac{\rho^{12}}{12} - \frac{\rho^{18}}{18} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right) = \frac{\pi}{54}. \end{aligned}$$

### 13. Использование сферических и обобщенных сферических координат для вычисления тройных интегралов

Так как переход от декартовых координат к сферическим по формулам

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$



имеет простую геометрическую интерпретацию (см. рис. 94), то при переходе в тройном интеграле к сферическим переменным

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G f(r \sin \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dz$$

мы не будем менять обозначение области интегрирования  $G$ , считая ее, как и при переходе к цилиндрическим координатам, заданной в требуемых переменных.

**Пример 13.1.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (13.1)$$

по области  $G$ , заданной неравенствами

$$\sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2}, \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Решение.** Область интегрирования  $G$  ограничена двумя полусферами:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2, \quad z > 0, \quad (13.2)$$

и конической поверхностью

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad (13.3)$$

которые в сферических координатах представляют часть координатных поверхностей

$$r = R_1, \quad r = R_2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Из рис. 110, на котором изображена область  $G$ , следует, что ее можно определить системой неравенств

$$G = \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, R_1 \leq r \leq R_2 \right\}.$$

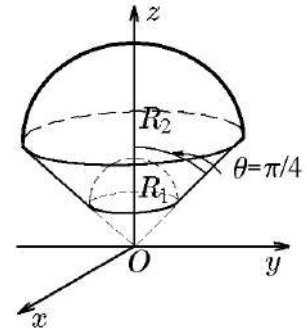


Рис. 110. Область  $G$  из примера 13.1

В этой области подынтегральная функция  $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1/r$  является непрерывной и ограниченной, следовательно, тройной интеграл (13.1) существует и его можно представить повторными интегралами

$$J = \iiint_G \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iiint_G \frac{1}{r} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} r dr,$$

вычисление которых дает

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} r dr = \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left( -\cos \theta \Big|_0^{\pi/4} \right) \left( \frac{r^2}{2} \Big|_{R_1}^{R_2} \right) = \\ &= 2\pi \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} = \pi \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (R_2^2 - R_1^2) = \\ &= \frac{\pi}{2} (2 - \sqrt{2}) (R_2^2 - R_1^2). \end{aligned} \quad (13.4)$$

◇ Из (13.4) следует, что

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} \iiint_G \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} (2 - \sqrt{2})(R_2^2 - R_1^2) = \frac{\pi}{2} (2 - \sqrt{2}) R_2^2.$$

Это означает, что интеграл (13.1) по шаровому сектору с центром в начале координат  $O(0, 0, 0)$  существует, несмотря на то, что подынтегральная функция  $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  в точке  $O(0, 0, 0)$  является неограниченной.

**Пример 13.2.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (13.5)$$

по области  $G$ , ограниченной сферами

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 27, \quad (13.6)$$

плоскостью  $z = 0$  и параболоидом

$$2(x^2 + y^2) = 3z. \quad (13.7)$$

**Решение.** Все поверхности, заданные уравнениями (13.6), (13.7), являются поверхностями вращения относительно оси  $Oz$  и в сферических координатах имеют вид

$$r = 1, \quad r = 3\sqrt{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad r = \frac{3 \cos \theta}{2 \sin^2 \theta}. \quad (13.8)$$

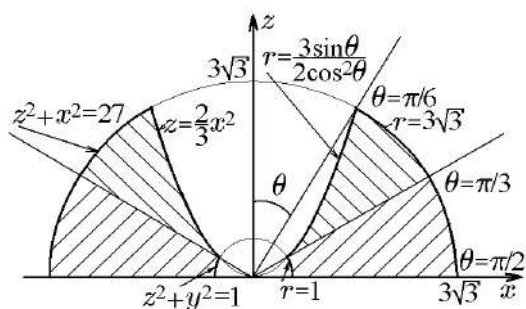


Рис. 111. Область  $G$  из примера 13.2

или

$$2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 = 0,$$

откуда

$$\cos \theta = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4},$$

и, следовательно,  $\cos \theta = 1/2$ , а значит,  $\theta = \pi/3$  (см. пример 11.6).

Чтобы найти значения угла  $\theta$ , при котором параболоид пересекается со сферой  $r = 3\sqrt{3}$ , решим уравнение

$$3\sqrt{3} = \frac{3 \cos \theta}{2 \sin^2 \theta}$$

или

$$2\sqrt{3} \cos^2 \theta + \cos \theta - 2\sqrt{3} = 0,$$

Чтобы расставить пределы в повторных интегралах, рассмотрим меридиональное сечение области  $G$  координатной плоскостью  $y = 0$  (рис. 111). Чтобы найти значения угла  $\theta$ , при котором параболоид пересекается со сферой  $r = 1$ , подставим значение  $r = 1$  в последнее уравнение (13.8). Тогда

$$1 = \frac{3 \cos \theta}{2 \sin^2 \theta}$$

откуда

$$\cos \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4\sqrt{3}} = \frac{-1 \pm 7}{4\sqrt{3}},$$

и, следовательно,  $\cos \theta = 6/4\sqrt{3} = \sqrt{3}/2$ , а значит,  $\theta = \pi/6$ .

Исходя из этого, область интегрирования  $G$  в сферических координатах можно представить как  $G = G_1 \cup G_2$ , где

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{3 \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} \leq r \leq 3\sqrt{3} \right\}, \\ G_2 &= \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 3\sqrt{3} \right\}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Это позволяет исходный тройной интеграл (13.5) записать в виде суммы

$$J = \iiint_G \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = J_1 + J_2, \quad (13.10)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \iiint_{G_1} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iiint_{G_1} \frac{r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \iiint_{G_1} d\varphi \sin \theta d\theta dr; \\ J_2 &= \iiint_{G_2} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iiint_{G_2} \frac{r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \iiint_{G_2} d\varphi \sin \theta d\theta dr. \end{aligned}$$

Представив, согласно (13.9), эти интегралы повторными и вычислив их, получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \iiint_{G_1} d\varphi \sin \theta d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin \theta d\theta \int_{\frac{3 \cos \theta}{2 \sin^2 \theta}}^{3\sqrt{3}} dr = \\ &= 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left( 3\sqrt{3} - \frac{3 \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta = 2\pi \left[ 3\sqrt{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin \theta d\theta - \frac{3}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} \right] = \\ &= 2\pi \left[ 3\sqrt{3} \left( -\cos \theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right) - \frac{3}{2} \ln \sin \theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right] = 2\pi \left[ 3\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} \right] = \\ &= \pi [9 - 3\sqrt{3} - 3 \ln \sqrt{3}]; \end{aligned} \quad (13.11)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \iiint_{G_2} d\varphi \sin \theta d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_1^{3\sqrt{3}} dr = \\ &= 2\pi (3\sqrt{3} - 1) \left( -\cos \theta \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} \right) = \pi (3\sqrt{3} - 1). \end{aligned} \quad (13.12)$$

Подставив (13.11), (13.12) в (13.10), получим

$$J = \iiint_G \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = J_1 + J_2 = \pi [9 - 3\sqrt{3} - 3 \ln \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 1] = \pi \left( 8 - \frac{3}{2} \ln 3 \right).$$

**Пример 13.3.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \quad (13.13)$$

где  $G$  – область, лежащая внутри обеих сфер:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2Ry. \quad (13.14)$$

**Решение.** Так как точки области  $G$  лежат внутри обеих сфер, то их декартовы координаты должны удовлетворять системе неравенств

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rx, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Ry,$$

которая в сферических координатах  $r, \varphi, \theta$  имеет вид

$$0 \leq r \leq 2R \sin \theta \cos \varphi, \quad 0 \leq r \leq 2R \sin \theta \sin \varphi. \quad (13.15)$$

В силу условия  $0 \leq \theta \leq \pi$  имеем  $\sin \theta \geq 0$ , следовательно, угол  $\varphi$  должен удовлетворять неравенствам

$$\cos \varphi > 0, \quad \sin \varphi > 0,$$

откуда следует, что

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Вместе с оценкой снизу ( $r \geq 0$ ) оба неравенства (13.15) ограничивают значения  $r$  и сверху. Эквивалентом (13.15) будет система

$$0 \leq r \leq 2R \sin \theta \min(\sin \varphi, \cos \varphi) \text{ для } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (13.16)$$

Очевидно, что (рис. 112)

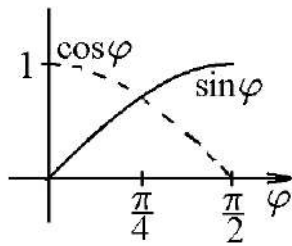


Рис. 112. Графики функций  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$

$$\min(\sin \varphi, \cos \varphi) = \begin{cases} \sin \varphi, & \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \cos \varphi, & \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Это позволяет записать оценку (13.16) в виде

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq 2R \sin \theta \sin \varphi, & \quad \varphi \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[, \\ 0 \leq r \leq 2R \sin \theta \cos \varphi, & \quad \varphi \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Исходя из этого, область интегрирования  $G$  можно рассматривать как объединение двух областей  $G_1$  и  $G_2$ , т. е.  $G = G_1 \cup G_2$ , где

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2R \sin \theta \sin \varphi \right\}, \\ G_2 &= \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2R \sin \theta \cos \varphi \right\}. \end{aligned} \quad (13.18)$$

В силу этого исходный тройной интеграл (13.13) можно записать в виде суммы:

$$J = \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = J_1 + J_2, \quad (13.19)$$

где

$$J_1 = \iiint_{G_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{G_1} r^3 dr \sin \theta d\theta d\varphi;$$

$$J_2 = \iiint_{G_2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{G_2} r^3 dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Представление этих интегралов повторными с учетом (13.18) дает

$$J_1 = \iiint_{G_1} r^3 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2R \sin \theta \sin \varphi} r^3 dr =$$

$$= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2R \sin \theta \sin \varphi} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} (2R)^4 \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta \int_0^{\pi/4} \sin^4 \varphi d\varphi = 4R^4 II_1, \tag{13.20}$$

$$J_2 = \iiint_{G_2} r^3 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R \sin \theta \cos \varphi} r^3 dr =$$

$$= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2R \sin \theta \cos \varphi} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} (2R)^4 \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = 4R^4 II_2,$$

где

$$I = \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta [-d(\cos \theta)] = -2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2)^2 \theta d(\cos \theta) =$$

$$= -2 \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d(\cos \theta) = -2 \left( \cos \theta - \frac{2}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{5} \cos^5 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 0 + 2 \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{16}{15},$$

$$II_1 = \int_0^{\pi/4} \sin^4 \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/4} \left( \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \left( 1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \left( \frac{3}{2} - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} \varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$\tag{13.21}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{3\pi}{2} - 1 \right) = \frac{1}{32} (3\pi - 8)$$

и

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi.$$

Если учесть, что функции  $\sin^4 \varphi$  и  $\cos^4 \varphi$  на промежутке от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \pi/2$  симметричны относительно прямой  $\varphi = \pi/4$ , то

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/4} \sin^4 \varphi d\varphi = I_1 = \frac{1}{32} (3\pi - 8). \quad (13.22)$$

Отсюда в силу (13.20) и (13.21) следует, что

$$J_1 = J_2 = 4R^4 I_1 = 4R^4 \frac{16}{15} \frac{1}{32} (3\pi - 8) = \frac{2R^4}{15} (3\pi - 8). \quad (13.23)$$

Подставив (13.23) в (13.19), получим значение исходного тройного интеграла (13.13):

$$J = \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = J_1 + J_2 = 2J_1 = \frac{2R^4}{15} (3\pi - 8). \quad (13.24)$$

◇ Заметим, что результат в виде  $J = 2J_1$  вытекает из симметрии как области интегрирования, так и подынтегральной функции  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$  относительно координатной полуплоскости  $\varphi = \pi/4$ . В противном случае разбиение  $J = J_1 + J_2$  на  $J_1 \neq J_2$  просто необходимо, как и их отдельное вычисление, что мы и проиллюстрировали.

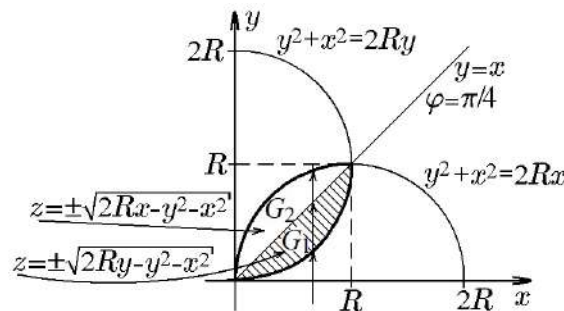


Рис. 113.  $G = G_1 \cup G_2$

◇ Для сравнения исходный тройной интеграл (13.13) запишем повторными в декартовых координатах. На рис. 113 изображена проекция области  $G$  на плоскость  $xOy$ . Из него следует, что область  $G$  можно рассматривать как  $G = G_1 \cup G_2$ , где с учетом (13.13)

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x, y, z): 0 \leq x \leq R, R - \sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq x, \\ &\quad -\sqrt{2Ry - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{2Ry - x^2 - y^2}\}, \\ G_2 &= \{(x, y, z): 0 \leq x \leq R, x \leq y \leq \sqrt{2Rx - x^2}, \\ &\quad -\sqrt{2Rx - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$J = \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \iiint_{G_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^R dx \int_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^x dy \int_{-\sqrt{2Ry-x^2-y^2}}^{\sqrt{2Ry-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz,$$

$$J_2 = \iiint_{G_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^R dx \int_x^{\sqrt{2Rx-x^2}} dy \int_{-\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz.$$

Отсюда следует, что при вычислении интеграла (13.13) использование сферических координат упрощает задачу.

**Пример 13.4.** Вычислить интеграл

$$\tilde{J} = \iiint_{\tilde{G}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \quad (13.25)$$

по области  $\tilde{G}$ , представляющей собой меньшую часть шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Ry$ , отсекаемую плоскостью  $x = y$ .

**Решение.** Область  $\tilde{G}$  как часть шара

$$x^2 + (y - R)^2 + z^2 \leq R^2,$$

отсекаемая плоскостью  $x = y$ , изображена на рис. 114, а, а ее проекция на плоскость  $xOy$  – на рис. 114, б.

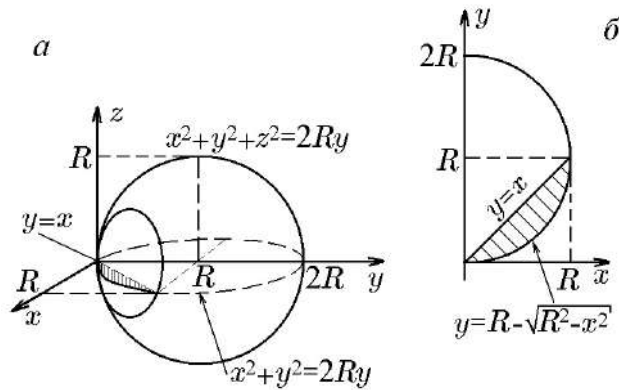


Рис. 114. Область  $\tilde{G}$  (а) и ее проекция (б)

Из этих рисунков следует, что область  $\tilde{G}$  в декартовых координатах можно определить системой неравенств

$$\tilde{G} = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq R, R - \sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq x, \\ -\sqrt{2Ry - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{2Ry - x^2 - y^2}\},$$

которая в сферической системе координат примет вид

$$\tilde{G} = \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2R \sin \theta \sin \varphi \right\}. \quad (13.26)$$

Здесь мы учли, что сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Ry$  в сферических координатах записывается как  $r = 2R \sin \theta \sin \varphi$ , а область  $0 \leq y \leq x$  — как  $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ .

Нетрудно заметить, что система неравенств (13.26) совпадает с первой системой неравенств в (13.18). Это означает, что область  $\tilde{G}$  совпадает с областью  $G_1$  из примера 13.3. Если при этом учесть, что подынтегральная функция интеграла  $\tilde{J}$  (13.25) по области  $\tilde{G}$  совпадает с подынтегральной функцией интеграла  $J_1$  (13.20) по области  $G_1$ , то мы придем к равенству интегралов

$$\tilde{J} = \iiint_{\tilde{G}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{G_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = J_1.$$

Интеграл  $J_1$  уже вычислен в примере 13.3 и задается формулой (13.23). Следовательно, в силу равенства  $\tilde{J} = J_1$ , имеем

$$\tilde{J} = \iiint_{\tilde{G}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2R \sin \theta \sin \varphi} r^3 dr = J_1 = \frac{2R^4}{15}(3\pi - 8).$$

**Пример 13.5.** Вычислить интеграл

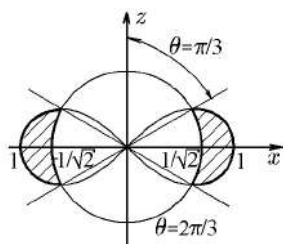
$$J = \iiint_G \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

по области  $G$ , заданной неравенствами

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq x^2 + y^2 - z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}.$$

**Решение.** Две поверхности:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}, \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2, \quad (13.27)$$



ограничивающие область  $G$ , являются поверхностями вращения вокруг оси  $Oz$ : окружности  $x^2 + z^2 = 1/2$  и лемнискаты Бернулли  $(x^2 + z^2)^2 = x^2 - z^2$  (рис. 115).

В сферических координатах поверхности (13.27) имеют вид

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad r = \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta}. \quad (13.28)$$

Из условия  $1 - 2 \cos^2 \theta \geq 0$  следует, что угол  $\theta$  ограничен значениями

$$\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4.$$

Отсутствие ограничений на угол  $\varphi$  означает, что угол  $\varphi$  может принимать все значения от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = 2\pi$ , что естественно для поверхности вращения вокруг оси  $Oz$ .



Чтобы найти углы  $\theta$ , при которых сфера  $r = 1/\sqrt{2}$  пересекает поверхность, образованную вращением лемнискаты, подставим значение  $r = 1/\sqrt{2}$  во второе уравнение из (13.28). Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} \quad \text{или} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{4}.$$

Решениями этого уравнения, лежащими в промежутке  $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$ , являются значения  $\theta_1 = \pi/3$  и  $\theta_2 = 2\pi/3$ .

Исходя из этого, область интегрирования  $G$  в сферических координатах можно записать системой неравенств

$$G = \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \varphi < 2\pi, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} \right\},$$

а значит, исходный тройной интеграл  $J$  можно представить повторными:

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iiint_G \frac{1}{r} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin \theta d\theta \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1-2\cos^2\theta}} r dr. \end{aligned}$$

Их вычисление дает

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 2\pi \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin \theta d\theta \left( \frac{r^2}{2} \Big|_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1-2\cos^2\theta}} \right) = \\ &= -\frac{2\pi}{2} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left( 1 - 2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) d(2 \cos \theta) = \pi \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left( 2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) d(2 \cos \theta) = \\ &= \pi \left( \frac{2}{3} \cos^3 \theta \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} - \frac{1}{2} \cos \theta \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} \right) = \pi \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Следующие примеры иллюстрируют возможность использования обобщенных сферических координат, заданных выше формулами (11.46):

$$x = ar \sin^\nu \theta \cos^\mu \varphi, \quad y = br \sin^\nu \theta \sin^\mu \varphi, \quad z = cr \cos^\nu \theta,$$

с якобианом (11.47):

$$J(r, \theta, \varphi) = abc\nu\mu r^2 \cos^{\nu-1} \theta \sin^{2\nu-1} \theta \sin^{\mu-1} \varphi \cos^{\mu-1} \varphi.$$

**Пример 13.6.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностью

$$\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}. \quad (13.29)$$

**Решение.** В обобщенных сферических координатах

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, \quad y = br \sin \theta \sin \varphi, \quad z = cr \cos \theta;$$

$$J(r, \theta, \varphi) = abcr^2 \sin \theta$$

граница области  $G$  (13.29) задается уравнением

$$r = \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta}. \quad (13.30)$$

Из условия  $1 - 2 \cos^2 \theta \geq 0$  следует, что угол  $\theta$  ограничен значениями  $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ . Отсутствие ограничений на угол  $\varphi$  означает, что угол  $\varphi$  может принимать все значения от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = 2\pi$ . Исходя из этого, область интегрирования  $G$  в сферических координатах можно записать системой неравенств

$$G = \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \varphi < 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta} \right\},$$

а значит, исходный тройной интеграл  $J$  можно представить повторными

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz = \iiint_G r(abcr^2 \sin \theta) d\varphi d\theta dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{1-2\cos^2\theta}} r^3 dr = 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin \theta \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{1-2\cos^2\theta}} \right) d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin \theta (1 - 2 \cos^2 \theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1 - 2 \cos^2 \theta)^2 d(\cos \theta) = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi/4} (1 - 4 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta) d(\cos \theta) = \frac{\pi}{2} \left( \cos \theta - \frac{4}{3} \cos^3 \theta + \frac{4}{5} \cos^5 \theta \right) \Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + \frac{4}{5} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 \right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{15}. \end{aligned}$$

**Пример 13.7.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G z dx dy dz \quad (13.31)$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностью

$$\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (13.32)$$

**Решение.** Множество точек  $G$  принадлежит первому октанту. В обобщенных сферических координатах

$$x = ar \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \quad y = br \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad z = cr \cos^2 \theta;$$

$$J(r, \varphi, \theta) = abcr^2 \cos \theta \sin^3 \theta \cos \varphi \sin \varphi \quad (13.33)$$

уравнение поверхности (13.32) имеет вид

$$r = \left( \frac{a}{\alpha} \cos^2 \varphi - \frac{b}{\beta} \sin^2 \varphi \right) \sin^2 \theta = \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right] \sin^2 \theta.$$

Из условия  $r \geq 0$  следует, что ограничения на изменение угла  $\theta$  нет, следовательно,  $\theta \in [0, \pi/2]$ . При этом угол  $\varphi$  должен удовлетворять двум условиям:

$$\varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ и } \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right] \geq 0,$$

следовательно,  $\varphi \in [0, \varphi_0]$ , где  $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$  и является решением уравнения

$$\left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right] = 0. \quad (13.34)$$

Исходя из этого, область интегрирования  $G$  в обобщенных сферических координатах (13.33) можно записать системой неравенств

$$G = \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < \varphi_0, 0 \leq r \leq r(\theta, \varphi) \right\},$$

где для простоты введено обозначение

$$r(\theta, \varphi) = \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right] \sin^2 \theta.$$

Отсюда следует, что исходный тройной интеграл можно представить повторными:

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G z \, dx \, dy \, dz = \iiint_G cr \cos^2 \theta (4abc r^2 \cos \theta \sin^3 \theta \cos \varphi \sin \varphi) \, d\varphi \, d\theta \, dr = \\ &= 4abc^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{r(\varphi, \theta)} r^3 \, dr, \end{aligned}$$

вычисление которых дает

$$\begin{aligned} J &= 4abc^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{r(\varphi, \theta)} r^3 \, dr = \\ &= 4abc^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^{r(\varphi, \theta)} \right) = \\ &= abc^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi r^4(\varphi, \theta) \, d\varphi = \\ &= abc^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right]^4 \sin^8 \theta \, d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= abc^2 \int_0^{\pi/2} \cos^{11} \theta \sin^3 \theta d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right]^4 d\varphi = \\
&= abc^2 I_1 I_2,
\end{aligned} \tag{13.35}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos^{11} \theta \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{11} \theta \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{11} \theta (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = - \int_0^{\pi/2} (\cos^{13} \theta - \cos^{11} \theta) d(\cos \theta) = \\
&= \left( \frac{\cos^{14} \theta}{14} - \frac{\cos^{12} \theta}{12} \right) \Big|_0^{\pi/2} = - \left( \frac{1}{14} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{84}
\end{aligned} \tag{13.36}$$

и

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\varphi_0} \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right]^4 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right]^4 d(\sin^2 \varphi) = \\
&= - \frac{1}{2(a/\alpha + b/\beta)} \int_0^{\varphi_0} \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right]^4 d \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right] = \\
&= - \frac{1}{2(a/\alpha + b/\beta)} \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi \right]^5 \Big|_0^{\varphi_0} = \\
&= - \frac{\alpha\beta}{10(a\beta + b\alpha)} \left\{ \left[ \frac{a}{\alpha} - \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right) \sin^2 \varphi_0 \right]^5 - \left( \frac{a}{\alpha} \right)^5 \right\} = \frac{a^5 \beta}{10(a\beta + b\alpha)\alpha^4}.
\end{aligned} \tag{13.37}$$

Подстановка (13.36), (13.37) в (13.35) дает

$$J = \iiint_G z dx dy dz = abc^2 I_1 I_2 = abc^2 \frac{1}{84} \frac{a^5 \beta}{10(a\beta + b\alpha)\alpha^4} = \frac{a^6 bc^2 \beta}{840(a\beta + b\alpha)\alpha^4}.$$

**Пример 13.8.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}} dx dy dz \tag{13.38}$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностью

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1. \tag{13.39}$$

**Решение.** В обобщенных сферических координатах

$$x = ar \sin^3 \theta \cos^3 \varphi, \quad y = br \sin^3 \theta \sin^3 \varphi, \quad z = cr \cos^3 \theta \quad (13.40)$$

с якобианом

$$J(r, \theta, \varphi) = 9abc r^2 \cos^2 \theta \sin^5 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

уравнение поверхности (13.39) имеет вид

$$r^{2/3}(\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) = r^{2/3} = 1,$$

т. е.  $r = 1$ . С учетом этого область интегрирования (13.39) можно записать неравенствами

$$G = \{(r, \varphi, \theta): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Так как подынтегральная функция в координатах (13.40) имеет вид

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}} = \sqrt{r^{2/3}} = r^{1/3},$$

то тройной интеграл (13.38) запишется повторными:

$$\begin{aligned} J &= \iiint_G \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}} dx dy dz = \\ &= \iiint_G r^{1/3} 9abc r^2 \cos^2 \theta \sin^5 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi d\theta dr = \\ &= 9abc \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta \int_0^1 r^{7/3} dr = \\ &= 9abc \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta \left(\frac{3}{10} r^{10/3} \Big|_0^1\right) = \frac{27}{10} abc I_1 I_2, \end{aligned} \quad (13.41)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (13.42)$$

и

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta = - \int_0^\pi \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 d(\cos \theta) = \\ &= \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta + \cos^6 \theta) d(\cos \theta) = \\ &= \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \frac{2}{5} \cos^5 \theta + \frac{1}{7} \cos^7 \theta\right) \Big|_\pi^0 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{16}{105}. \end{aligned}$$

Подстановка (13.42), (13.43) в (13.41) дает

$$J = \iiint_G \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}} dx dy dz = \frac{27}{10} abc I_1 I_2 = \frac{27}{10} abc \frac{\pi}{4} \frac{16}{105} = \frac{18\pi}{175}.$$

◇ Следующий пример иллюстрирует возможность использования обобщенных сферических координат с показателями  $\mu < 1$ ,  $\nu < 1$ . В этом случае якобиан замены переменных (11.47) имеет вид

$$J(r, \theta, \varphi) = abc\nu\mu r^2 \cos^{\nu-1} \theta \sin^{2\nu-1} \theta \sin^{\mu-1} \varphi \cos^{\mu-1} \varphi.$$

Такая замена может нарушить не только требование взаимной однозначности отображения (11.46), но и требование его гладкости, что может привести к тройным интегралам от неограниченных функций. Вопрос о таких интегралах, называемых *несобственными кратными интегралами*, будет рассмотрен позже. В приведенном ниже примере тройной интеграл существует, и выбранная там замена переменных является корректной и, кроме того, дает более простой способ его вычисления, чем в декартовых координатах.

**Пример 13.9.** Вычислить интеграл

$$J = \iiint_G x^2 y^2 z^2 dx dy dz \quad (13.43)$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностью

$$x^6 + y^6 + z^6 = 1. \quad (13.44)$$

**Решение.** Поскольку область интегрирования  $G$  симметрична относительно трех координатных плоскостей  $x = y = z = 0$ , а подынтегральная функция  $x^2 y^2 z^2$  является четной по переменным  $x, y, z$ , то интеграл можно записать в виде (13.43)

$$J = \iiint_G x^2 y^2 z^2 dx dy dz = 8 \iiint_{G'} x^2 y^2 z^2 dx dy dz,$$

где  $G'$  – часть области  $G$ , расположенная в первом октанте. Если воспользоваться обобщенными сферическими координатами

$$\begin{aligned} x &= r \sin^{1/3} \theta \cos^{1/3} \varphi, \quad y = r \sin^{1/3} \theta \sin^{1/3} \varphi, \quad z = r \cos^{1/3} \theta, \\ \varphi &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned} \quad (13.45)$$

с якобианом

$$J(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{9} r^2 \cos^{-2/3} \theta \sin^{-1/3} \theta \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi,$$

то уравнение поверхности (13.44) будет иметь вид

$$r^6 (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) = r^6 = 1 \text{ или } r = 1.$$

Это позволит область  $G'$  в координатах (13.45) определить неравенствами

$$G = \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 \right\},$$

а тройной интеграл (13.43) представить повторными:

$$\begin{aligned}
 J &= \iiint_G x^2 y^2 z^2 dx dy dz = 8 \iiint_{G'} x^2 y^2 z^2 dx dy dz = \\
 &= 8 \iiint_{G'} (r \sin^{1/3} \theta \cos^{1/3} \varphi)^2 (r \sin^{1/3} \theta \sin^{1/3} \varphi)^2 (r \cos^{1/3} \theta)^2 \times \\
 &\quad \times \frac{1}{9} r^2 \cos^{-2/3} \theta \sin^{-1/3} \theta \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi d\varphi d\theta dr = \\
 &= \frac{8}{9} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^8 dr = \frac{8}{9} \frac{\pi}{2} \frac{1}{9} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{81} \left( -\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{4\pi}{81}.
 \end{aligned}$$

#### 14. Использование $n$ -мерной сферической системы координат при вычислении кратных интегралов

Как уже отмечалось, полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Цилиндрические и сферические системы координат произвольной размерности не обладают такой наглядностью. Рассмотрим следующий алгоритм перехода от полярной системы координат в  $\mathbb{R}^2$  к сферической системе координат в  $\mathbb{R}^3$  и далее в  $\mathbb{R}^n$ .

Будем исходить из системы координат, называемой иногда *двумерной сферической* (рис. 116, а), которая связана с декартовыми соотношениями

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \sin \varphi_1, \\
 x_2 &= r \cos \varphi_1, \quad r \in [0, \infty[, \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi[.
 \end{aligned} \tag{14.1}$$

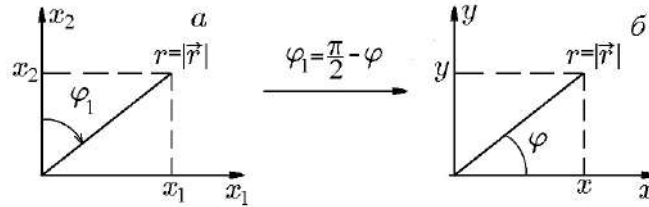


Рис. 116. Двумерная сферическая система координат

Ее отличие от общепринятой полярной системы координат (рис. 116, б), определяемой соотношениями

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi, \\
 y &= r \sin \varphi, \quad r \in [0, \infty[, \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi[,
 \end{aligned} \tag{14.2}$$

состоит в том, что угол  $\varphi_1$  здесь определяется как угол между радиус-вектором  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$  и осью  $Ox_2$  – ортогональным дополнением к  $Ox_1$ . Следуя такому выбору, сферическую систему координат  $(r, \varphi_1, \varphi_2)$  в  $\mathbb{R}^3$  определим соотношениями

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\
 x_2 &= r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \quad r \in [0, \infty[, \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi[, \quad \varphi_2 \in [0, \pi], \\
 x_3 &= r \cos \varphi_2,
 \end{aligned} \tag{14.3}$$

где  $\varphi_2$  – угол между радиус-вектором  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  и осью  $Ox_3$  – ортогональным дополнением к плоскости  $\mathbb{R}^2(x_1, x_2)$  (рис. 117, а). При  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  формулы (14.3) переходят в (14.1) с  $x_3 = 0$ .

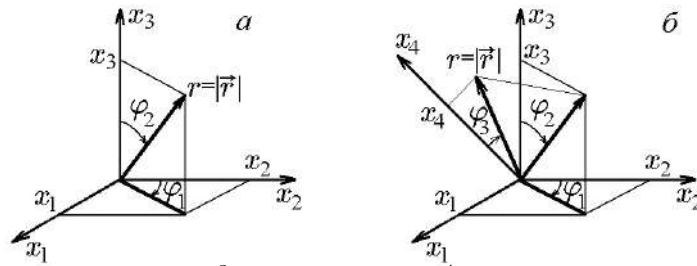


Рис. 117.  $\mathbb{R}^3(r, \varphi_1, \varphi_2)$  (а);  $\mathbb{R}^4(r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  (б)

По аналогии с (14.3) сферическую систему координат  $(r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  в  $\mathbb{R}^4$  определим соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3, \\ x_2 &= r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3, \\ x_3 &= r \cos \varphi_2 \sin \varphi_3, \\ x_4 &= r \cos \varphi_3, \end{aligned} \quad r \in [0, \infty[, \varphi_1 \in [0, 2\pi[, \varphi_2 \in [0, \pi], \varphi_3 \in [0, \pi]. \quad (14.4)$$

Аналогичным образом сферическую систему координат  $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$  в  $\mathbb{R}^n$  определим соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-1}; \\ x_j &= r \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{n-1} \sin \varphi_i, \quad j = \overline{2, n-1}; \\ x_n &= r \cos \varphi_{n-1}, \end{aligned} \quad r \in [0, \infty[, \varphi_1 \in [0, 2\pi[; \varphi_j \in [0, \pi]; j = \overline{2, n-1}, \quad (14.5)$$

где  $\varphi_{n-1}$  – угол между радиус-вектором  $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$  и осью  $Ox_n$  – ортогональным дополнением к  $\mathbb{R}^{n-1}$ , переводящим его в  $\mathbb{R}^n$  (рис. 117,б). Якобиан преобразования (14.5) имеет вид

$$J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1} \varphi_j. \quad (14.6)$$

Сферическая система координат (14.5) с помощью постоянных  $a_i, i = \overline{1, n}$ , допускает обобщение в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-1}; \\ x_j &= a_j r \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{n-1} \sin \varphi_i, \quad j = \overline{2, n-1}; \\ x_n &= a_n r \cos \varphi_{n-1} \end{aligned} \quad (14.7)$$

с якобианом

$$\tilde{J}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = a_1 \cdots a_n r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1} \varphi_j. \quad (14.8)$$

Следующие примеры иллюстрируют применение сферической системы координат (14.5) и ее обобщения (14.7).

**Пример 14.1.** Вычислить интеграл

$$I = \int \cdots \int_G (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

по области  $G$ , ограниченной четырехмерной сферой

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2.$$



**Решение.** Для вычисления четырехмерного интеграла воспользуемся четырехмерной системой координат (14.4) с якобианом

$$J(r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = r^3 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3.$$

С ее помощью четырехмерный интеграл можно записать повторными интегралами следующего вида:

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_G (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \\ & = \int \cdots \int_G r^2 r^3 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3 dr d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 = \\ & = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \int_0^R r^5 dr = \\ & = 2\pi \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi_3) d\varphi_3 \left( \frac{r^6}{6} \Big|_0^R \right) = \\ & = 2\pi \left( -\cos \varphi_2 \Big|_0^\pi \right) \frac{1}{2} \left( \varphi_3 - \frac{\sin 2\varphi_3}{2} \right) \Big|_0^\pi \frac{R^6}{6} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \frac{R^6}{6} = \frac{\pi^2 R^6}{3}. \end{aligned}$$

◇ Как следует из соотношений (14.5)–(14.8) и рассмотренного примера, использование  $n$ -мерной сферической системы координат приводит к необходимости вычисления интегралов вида

$$I(k, m) = \int_0^{\pi/2} \sin^k x \cos^m x dx. \quad (14.9)$$

Для таких интегралов существуют рекуррентные формулы, позволяющие свести их к сумме табличных. Громоздкости этих формул можно избежать, если использовать понятие гамма-функции  $\Gamma(x)$ . Определение и свойства этой функции будут даны позднее. Здесь же нам потребуются лишь некоторые частные значения  $\Gamma(x)$ , такие как

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (14.10)$$

С помощью гамма-функции  $\Gamma(x)$  интегралы (14.9) можно записать как

$$I(k, m) = \int_0^{\pi/2} \sin^k x \cos^m x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+m}{2} + 1\right)}. \quad (14.11)$$

Правую часть (14.11) можно, с учетом (14.10), дополнительно упростить, исходя из четности или нечетности чисел  $k$  и  $m$ .

**Пример 14.2.** Вычислить интеграл

$$I = \int \cdots \int_G dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (14.12)$$

по области  $G$ , ограниченной  $n$ -мерной сферой радиусом  $R$ .

**Решение.** Уравнение  $n$ -мерной сферы имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2.$$

Переход в интеграле (14.12) к сферическим координатам позволяет записать уравнение сферы в виде  $r = R$ . Приняв во внимание, что якобиан перехода к сферическим координатам задается формулой (14.6):

$$J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1} \varphi_j,$$

$n$ -кратный интеграл (14.12) можно представить повторными:

$$\begin{aligned} I &= \int \dots \int_G dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \dots \int_G r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1} \varphi_j dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \dots \int_0^{\pi} \sin^{n-1} \varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} \int_0^R r^{n-1} dr = \\ &= 2\pi \frac{R^n}{n} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \dots \int_0^{\pi} \sin^{n-1} \varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} = \\ &= 2\pi \frac{R^n}{n} 2^{n-1} \prod_{j=2}^{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Каждый интеграл, входящий в (14.13), с помощью (14.11) можно представить в виде

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{j-1+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j-1}{2} + 1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}, \quad (14.14)$$

следовательно,

$$\prod_{j=2}^{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2} \frac{\Gamma(1) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(2) \dots \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{\Gamma(n/2)}.$$

Подстановка этого выражения в (14.13) дает

$$I = \int \dots \int_G dx_1 dx_2 \dots dx_n = 2\pi \frac{R^n}{n} 2^{n-2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{\Gamma(n/2)} = \frac{2\pi^{n/2} R^n}{n\Gamma(n/2)}. \quad (14.15)$$

◇ Значение интеграла (14.15), согласно определению, есть мера  $m(G_n)$   $n$ -мерного тела  $G_n$ , ограниченного  $n$ -мерной сферой радиусом  $R$ . Для конкретных  $n$  получим частные значения (рис. 16):

1)  $n = 1$ , в этом случае одномерное тело представляет собой отрезок  $-R \leq x_1 \leq R$ , поскольку  $x_1^2 = R^2$ . Мерой отрезка  $G_1$  является его длина  $L$ , равная, согласно (14.15),

$$m(G_1) = L = \frac{2\sqrt{\pi}R}{1 \cdot \Gamma(1/2)} = 2R;$$

2)  $n = 2$ , в этом случае двумерное тело представляет собой круг радиусом  $R$ , поскольку  $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ . Мерой круга  $G_2$  является его площадь  $S$ , равная, согласно (14.15),

$$m(G_2) = S = \frac{2\pi R^2}{2\Gamma(1)} = \pi R^2;$$

3)  $n = 3$ , в этом случае трехмерное тело есть шар радиусом  $R$ , поскольку  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ . Мерой шара  $G_3$  является его объем, равный, согласно (14.15),

$$m(G_3) = V = \frac{2\pi^{3/2}R^3}{3\Gamma(3/2)} = \frac{2\pi^{3/2}R^3}{3 \cdot \frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = \frac{4\pi R^3}{3};$$

4)  $n = 4$ , в этом случае четырехмерное тело есть четырехмерный шар радиусом  $R$ , поскольку  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$ . Мерой четырехмерного шара  $G_4$  является его объем, равный, согласно (14.15),

$$m(G_4) = V_4 = \frac{2\pi^2 R^4}{4\Gamma(2)} = \frac{\pi^2 R^4}{2},$$

и т. д.

**Пример 14.3.** Вычислить интеграл

$$I = \int \dots \int_G \left( \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{x_4^2}{a_4^2} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

по области  $G$ , заданной неравенствами

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{x_4^2}{a_4^2} \leq 2 \frac{x_4}{a_4}, \quad x_2 \geq 0, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (14.16)$$

**Решение.** Область интегрирования  $G$  ограничена четырехмерным эллипсоидом

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{(x_4 - a_4)^2}{a_4^2} = 1$$

с центром, смещенным из начала координат вдоль оси  $Ox_4$  в точку с  $x_4 = 1$ , и гиперплоскостью  $x_2 = 0$ .

Переход в интеграле  $I$  к обобщенным четырехмерным сферическим координатам (14.7):

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3, & r &\geq 0; \\ x_2 &= a_2 r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3, & \varphi_1 &\in [0, 2\pi[; \\ x_3 &= a_3 r \cos \varphi_2 \sin \varphi_3, & \varphi_2 &\in [0, \pi]; \\ x_4 &= a_4 r \cos \varphi_3, & \varphi_3 &\in [0, \pi], \end{aligned} \quad (14.17)$$

с якобианом

$$\tilde{J}(r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 r^3 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3$$

позволяет записать уравнение четырехосного эллипсоида как

$$r = 2 \cos \varphi_3.$$

Из условия  $r > 0$  следует условие  $\cos \varphi_3 > 0$ . Это означает изменение угла  $\varphi_3$  в пределах от  $\varphi_3 = 0$  до  $\varphi_3 = \pi/2$ . В свою очередь, из условия  $x_2 > 0$  следует условие  $\cos \varphi_1 > 0$ . Если основным промежутком изменения угла  $\varphi_1$  берется промежуток  $[0, 2\pi]$ , то условие  $\cos \varphi_1 > 0$  выполняется на двух отделенных друг от друга промежутках:  $[0, \pi/2]$  и  $[3\pi/2, 2\pi]$ ; если же взять в качестве основного промежутка изменения

$\varphi_1$  промежутком  $[-\pi, \pi]$ , то условие  $\cos \varphi_1 > 0$  выполняется на связанном множестве – промежутке  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Такой выбор делает вычисление интеграла более удобным. Итак, область интегрирования  $G$  в координатах (14.17) можно определить системой неравенств

$$G = \left\{ (r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi_2 \leq \pi, 0 \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi_3 \right\}.$$

Поскольку подынтегральная функция в координатах (14.17) равна  $r^2$ , то исходный интеграл можно представить повторными как

$$\begin{aligned} I &= \int \dots \int_G \left( \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{x_4^2}{a_4^2} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \\ &= \int \dots \int_G r^2 a_1 a_2 a_3 a_4 r^3 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3 dr d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 = \\ &= a_1 a_2 a_3 a_4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \int_0^{2 \cos \varphi_3} r^5 dr = \\ &= a_1 a_2 a_3 a_4 \left( \varphi_1 \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \left( -\cos \varphi_2 \Big|_0^{\pi} \right) \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \left( \frac{r^6}{6} \Big|_0^{2 \cos \varphi_3} \right) = \\ &= a_1 a_2 a_3 a_4 2\pi \cdot \frac{2^6}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_3 \cos^6 \varphi_3 d\varphi_3 = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{64\pi}{3} I(2, 6), \end{aligned} \quad (14.18)$$

где

$$I(2, 6) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_3 \cos^6 \varphi_3 d\varphi_3.$$

Вычислим этот интеграл по формуле (14.11):

$$I(2, 6) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{6+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+6}{2} + 1\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(7/2)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2} \frac{1}{4!} \frac{\sqrt{\pi} 5!!}{2^3} \sqrt{\pi} = \frac{5\pi}{2^8}.$$

Подставим это выражение в (14.18) и получим значение исходного кратного интеграла

$$I = \int \dots \int_G \left( \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{x_4^2}{a_4^2} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{64\pi}{3} \frac{5\pi}{2^8} = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{5\pi^2}{12}.$$

◇ Теперь по аналогии с переходом от двумерной сферической системы координат к трехмерной цилиндрической системе рассмотрим переход от  $n$ -мерной сферической системы координат к  $(n+1)$ -мерной цилиндрической системе координат. Это можно сделать с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-1}, \quad r \in [0, \infty[, \varphi_1 \in [0, 2\pi[; \\ x_j &= r \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{n-1} \sin \varphi_i, \quad \varphi_j \in [0, \pi], j = \overline{2, n-1}; \\ x_n &= r \cos \varphi_{n-1}; \\ x_{n+1} &= x_{n+1}. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Здесь  $x_{n+1}$  – декартова координата на оси  $Ox_{n+1}$ , определяющей ортогональное дополнение к пространству  $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$ , в котором задана сферическая система координат  $\mathbb{R}^n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ . Простота последнего соотношения в (14.19) означает, что якобиан преобразования (14.19) совпадает с якобианом (14.5):

$$J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_{n+1}) = J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1} \varphi_j. \quad (14.20)$$

Цилиндрическая система координат (14.19) с помощью постоянных  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , допускает обобщение в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-1}; \\ x_j &= a_j r \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{n-1} \sin \varphi_i, \quad j = \overline{2, n-1}; \\ x_n &= a_n r \cos \varphi_{n-1}; \\ x_{n+1} &= x_{n+1}, \end{aligned} \quad (14.21)$$

с якобианом

$$\tilde{J}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \bar{x}_{n+1}) = a_1 \cdots a_n r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1} \varphi_j. \quad (14.22)$$

**Пример 14.4.** Вычислить интеграл

$$I = \int \cdots \int_G \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2} dx_1 \cdots dx_5 \quad (14.23)$$

по области  $G$ , ограниченной поверхностью

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = \left(\frac{x_5}{a_5}\right)^2, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (14.24)$$

и гиперплоскостью  $x_5 = a_5$ .

**Решение.** Для вычисления интеграла (14.23) воспользуемся пятимерной цилиндрической системой координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3, & r &\geq 0; \\ x_2 &= a_2 r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3, & \varphi_1 &\in [0, 2\pi[; \\ x_3 &= a_3 r \cos \varphi_2 \sin \varphi_3, & \varphi_2 &\in [0, \pi]; \\ x_4 &= a_n r \cos \varphi_3, & \varphi_3 &\in [0, \pi], \\ x_5 &= x_5, & x_5 &\in ]-\infty, \infty[, \end{aligned} \quad (14.25)$$

с якобианом

$$\tilde{J}(r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, x_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 r^3 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3.$$

Уравнение конической поверхности (14.24) в цилиндрических координатах (14.23) упрощается к виду

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = r^2 = \left(\frac{x_5}{a_5}\right)^2$$

или

$$x_5 = a_5 r \geq 0.$$

С учетом этого промежутков изменения переменной  $x_5$  определяется неравенством

$$a_5 r \leq x_5 \leq a_5.$$

Пересечением конической поверхности (14.24) с гиперплоскостью  $x_5 = a_5$  является четырехмерный эллипсоид

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1, \text{ или } r = 1$$

в координатах (14.25). Приняв во внимание, что подынтегральная функция в координатах (14.25) имеет вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^4 \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2} = r,$$

исходный пятимерный интеграл (14.22) можно представить повторными:

$$\begin{aligned} I &= \int \cdots \int_G \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2} dx_1 \cdots dx_5 = \\ &= \int \cdots \int_G r a_1 a_2 a_3 a_4 r^3 \sin \varphi_2 \sin^2 \varphi_3 dr d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 dx_5 = \\ &= a_1 a_2 a_3 a_4 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \int_0^1 r^4 dr \int_{a_5 r}^{a_5} dz = \\ &= a_1 a_2 a_3 a_4 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \int_0^1 r^4 dr \left( z \Big|_{a_5 r}^{a_5} \right) = \\ &= 2\pi a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \int_0^1 r^4 (1-r) dr = \\ &= 2\pi a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 I_1 I_2 I_3, \end{aligned} \tag{14.26}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 = \left( -\cos \varphi_2 \Big|_0^{\pi} \right) = 2; \\ I_2 &= \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi_3) d\varphi_3 = \frac{1}{2} \left( \varphi_3 - \frac{\sin 2\varphi_3}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}; \\ I_3 &= \int_0^1 r^4 (1-r) dr = \left( \frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (14.26), получим значение интеграла (14.23):

$$I = \int \cdots \int_G \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2} dx_1 \cdots dx_5 = 2\pi a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \cdot 2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{30} = \frac{\pi^2 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}{15}.$$

**Пример 14.5.** Вычислить интеграл

$$I = \int \cdots \int_G dx_1 \cdots dx_n \quad (14.27)$$

по области  $G$ , ограниченной  $n$ -мерной конической поверхностью

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 = \left( \frac{x_n}{a_n} \right)^2 \quad (14.28)$$

и гиперплоскостью  $x_n = a_n$ .

**Решение.** Воспользуемся обобщенной  $n$ -мерной цилиндрической системой координат (14.25)

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}, & r &\in [0, \infty[, \varphi_1 \in [0, 2\pi[; \\ x_j &= a_j r \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{n-2} \sin \varphi_i, \quad i = \overline{2, n-2}, \quad \varphi_j \in [0, \pi], \quad j = \overline{2, n-2}; \\ x_{n-1} &= a_{n-1} r \cos \varphi_{n-2}, \\ x_n &= x_n. \end{aligned} \quad (14.29)$$

с якобианом

$$\tilde{J}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, x_n) = a_1 \cdots a_n r^{n-2} \prod_{j=1}^{n-2} \sin^{j-1} \varphi_j.$$

Уравнение конической поверхности (14.28) в цилиндрических координатах (14.29) упрощается к виду

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 = r^2 = \left( \frac{x_n}{a_n} \right)^2$$

или

$$x_n - a_n r \geq 0.$$

С учетом этого промежутка изменения переменной  $x_n$  определяется неравенством

$$a_n r \leq x_n \leq a_n.$$

Пересечением конической поверхности (14.28) с гиперплоскостью  $x_n = a_n$  является  $(n-1)$ -мерный эллипсоид

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 = 1, \quad \text{или } r = 1$$

в координатах (14.29).

Исходя из этого,  $n$ -мерный интеграл  $I$  можно представить повторными:

$$\begin{aligned}
I &= \int \cdots \int_G dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_G r a_1 \cdots a_{n-1} r^{n-2} \prod_{j=1}^{n-2} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-2} dr dx_n = \\
&= a_1 \cdots a_{n-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-3} \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^1 r^{n-2} dr \int_{a_n r}^{a_n} dz = \\
&= a_1 \cdots a_{n-1} 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-3} \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^1 r^{n-2} a_n (1-r) dr = \quad (14.30) \\
&= a_1 \cdots a_{n-1} a_n 2\pi \prod_{j=2}^{n-2} \int_0^{\pi} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j \left( \frac{r^{n-1}}{n-1} - \frac{r^n}{n} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{a_1 \cdots a_n 2\pi 2^{n-3}}{(n-1)n} \prod_{j=2}^{n-2} \int_0^{\pi/2} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (14.14) и следствием из нее, найдем

$$\prod_{j=2}^{n-2} \int_0^{\pi/2} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{n-3} \frac{1}{\Gamma((n-1)/2)}.$$

Подстановка этого выражения в (14.30) дает

$$\begin{aligned}
I &= \int \cdots \int_G dx_1 \cdots dx_n = \frac{a_1 \cdots a_n 2\pi 2^{n-3}}{(n-1)n} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{n-3} \frac{1}{\Gamma((n-1)/2)} = \\
&= \frac{\pi^{(n-1)/2} a_1 \cdots a_n}{[(n-1)/2] n \Gamma((n-1)/2)} = \frac{\pi^{(n-1)/2} a_1 \cdots a_n}{n \Gamma((n+1)/2)}. \quad (14.31)
\end{aligned}$$

◇ Интеграл (14.27), согласно определению, есть мера  $m(G_n)$  тела  $G_n$ , представляющего собой  $n$ -мерный конус. Рассмотрим несколько частных случаев.

а)  $n = 2$  (рис. 118, а), в этом случае 2-мерное тело представляет собой треугольник  $G_2$ . Мерой этого треугольника является его площадь  $S$ , равная произведению половины основания  $2a_1$  и высоты  $a_2$ , т. е.  $S = \frac{1}{2}(2a_1)a_2 = a_1 a_2$ . Этот же результат следует из формулы (14.31):

$$m(G_2) = S = \frac{\pi^{(2-1)/2} a_1 a_2}{2\Gamma((2+1)/2)} = \frac{\sqrt{\pi} a_1 a_2}{2\Gamma(3/2)} = \frac{\sqrt{\pi} a_1 a_2}{2 \cdot \frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = a_1 a_2;$$

б)  $n = 3$  (рис. 118, б), в этом случае 3-мерное тело представляет собой конус  $G_3$ . Мерой этого конуса является его объем  $V$ , равный произведению одной третьей площади основания (площади эллипса с полуосями  $a_1$  и  $a_2$ )  $S_{\text{осн}} = \pi a_1 a_2$  и высоты  $a_3$ , т. е.  $V = \frac{1}{3}\pi a_1 a_2 a_3$ . Этот же результат следует из формулы (14.31):

$$m(G_3) = V = \frac{\pi^{(3-1)/2} a_1 a_2 a_3}{3\Gamma((3+1)/2)} = \frac{\pi a_1 a_2 a_3}{3\Gamma(2)} = \frac{1}{3}\pi a_1 a_2 a_3,$$

при  $a_1 = a_2 = R$  имеем объем прямого кругового конуса  $V = \pi R^2 a_3 / 3$ ;

в)  $n = 4$ , в этом случае 4-мерное тело представляет собой 4-мерный конус  $G_4$ . Его мерой  $m(G_4)$  является его четырехмерный объем (см. (14.31))

$$m(G_4) = V_4 = \frac{\pi^{(4-1)/2} a_1 a_2 a_3 a_4}{4\Gamma((4+1)/2)} = \frac{\pi^{3/2} a_1 a_2 a_3 a_4}{4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = \frac{\pi a_1 a_2 a_3 a_4}{3}.$$



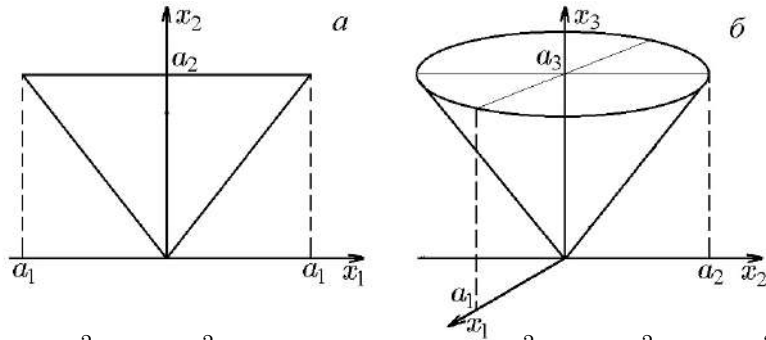


Рис. 118.  $G_2: \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2; x_2 = a_2$  (а);  $G_3: \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2; x_3 = a_3$  (б)

## 15. Приложения двойных интегралов

### 15.1. Геометрические приложения двойных интегралов

При рассмотрении задач, приводящих к понятию двойного интеграла, мы воспользовались задачей о вычислении объема  $V$  пространственной области (тела)  $v$ , которая сверху ограничена гладкой поверхностью  $z = f(x, y)$ , боковой поверхностью является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси  $Oz$ , а снизу, на плоскости  $xOy$ , его ограничивает плоская фигура  $D$ , граница которой является направляющей для образующей цилиндрической поверхности. Решение этой задачи было получено в виде двойного интеграла

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (15.1)$$

Если функция  $f(x, y)$  и область  $D$  удовлетворяют требованиям теоремы 5.7, то двойной интеграл (15.1) существует и его вычисление сводится к вычислению повторных интегралов. Помимо объема с помощью двойного интеграла можно найти и другие характеристики тела, например площадь основания  $\underline{S}$  и площадь поверхности  $\bar{S}$ , ограничивающей тело сверху, а также и площадь боковой поверхности. Действительно, площадь  $\underline{S}$  фигуры  $D$  можно найти, положив в (15.1)  $f(x, y) = 1$ , т. е.

$$\underline{S} = \iint_D dx dy, \quad (15.2)$$

а площадь  $\bar{S}$  можно вычислить по формуле

$$\bar{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (15.3)$$

Формула (15.2) вытекает из формулы (4.1) свойства 1, определяющего свойства жорданова множества  $D$ , т. е. площадь  $\underline{S} = m(D)$ . Формула (15.3), во избежание повторов, будет получена ниже.

**Пример 15.1.** Найти объем  $V$  тела  $v$ , ограниченного цилиндрическими поверхностями  $y = x^2$ ,  $y^2 = 8x$  и плоскостями  $z = 0$  и  $z = x + y$ , а также площади нижнего  $\underline{S}$  и верхнего  $\bar{S}$  оснований.

**Решение.** Объем  $V$  тела  $v$  вычисляется по формуле (15.1), следовательно,

$$V = \iint_D (x + y) dx dy, \quad (15.4)$$

где область  $D$  есть плоская область, расположенная в плоскости  $z = 0$  и ограниченная параболой  $y = x^2$ ,  $y^2 = 8x$ . Двойной интеграл по такой области рассматривался в примере 6.2, где были представлены два варианта сведения его к повторным. Воспользовавшись результатами примера 6.2, имеем

$$V = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} (x + y) dy = \int_0^4 dy \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} (x + y) dy. \quad (15.5)$$

Вычислив эти интегралы, получим одно и то же значение  $V$ :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} (x + y) dy = \int_0^2 dx \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{8x}} = \int_0^2 \left( \sqrt{8}x^{3/2} - x^3 + 4x - \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \\ &= \left( \frac{2\sqrt{8}}{5}x^{5/2} - \frac{x^4}{4} + 2x^2 - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{5} - 4 + 8 - \frac{16}{5} = \frac{36}{5}; \\ V &= \int_0^4 dy \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} (x + y) dy = \int_0^4 dy \left( \frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{y^2/8}^{\sqrt{y}} = \int_0^4 \left( \frac{1}{2}y - \frac{1}{128}y^4 + y^{3/2} - \frac{y^3}{8} \right) dy = \\ &= \left( \frac{y^2}{4} - \frac{y^5}{128 \cdot 5} + \frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{y^4}{32} \right) \Big|_0^4 = 4 - \frac{8}{5} + \frac{64}{5} - 8 = \frac{36}{5}. \end{aligned}$$

Площадь  $\underline{S}$  нижнего основания находится по формуле (15.2):

$$\underline{S} = \iint_D dx dy,$$

которую с учетом расстановки пределов (6.17) и (6.18) можно записать повторными:

$$\underline{S} = \iint_D dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} dy = \int_0^4 dy \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} dy. \quad (15.6)$$

Вычисление этих интегралов дает одно и то же значение:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} dy = \int_0^2 dx \left( y \Big|_{x^2}^{\sqrt{8x}} \right) = \int_0^2 (\sqrt{8x} - x^2) dx = \left( \frac{2\sqrt{8}}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}; \\ \underline{S} &= \int_0^4 dy \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 dx \left( x \Big|_{y^2/8}^{\sqrt{y}} \right) = \int_0^4 dx \left( y^{1/2} - \frac{y^2}{8} \right) = \frac{1}{3} (2y^{3/2} - y^3) \Big|_0^4 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Чтобы найти площадь  $\bar{S}$  верхнего основания, воспользуемся формулой (15.3):

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 1 + 1} dx dy = \sqrt{3} \iint_D dx dy = \\ &= \sqrt{3} \underline{S} = \sqrt{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

◇ Последний результат, вообще говоря, достаточно очевиден, поскольку единичный вектор нормали к плоскости  $z = x + y$  имеет вид  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , где

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и, следовательно,

$$\bar{S} = \frac{\underline{S}}{\cos \gamma} = \sqrt{3} \underline{S}.$$

◇ Отметим, что примеры из разделов 6.1.2, 8.2 и 9, иллюстрирующие примеры вычисления двойных интегралов, также можно рассматривать как задачи по вычислению объемов и площадей соответствующих тел и фигур.

В дополнение к ним рассмотрим еще ряд специфических задач, опуская для краткости изложения некоторые промежуточные выкладки.

**Пример 15.2.** Найти площадь  $S$  области  $D$ , ограниченной эллипсом

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 = 1, \quad (15.7)$$

где

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

**Решение.** В интеграле

$$S = \iint_D dx dy,$$

определяющем площадь эллипса (15.7), проведем замену переменных

$$\begin{aligned}u &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z,\end{aligned}$$

с якобианом

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \delta \neq 0.$$

Данная замена отображает эллипс (15.7) на круг единичного радиуса

$$D' = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Воспользовавшись связью якобианов прямого и обратного отображений, имеем

$$J(u, v) = \frac{1}{J(x, y)} = \frac{1}{\delta}.$$

Тогда

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D'} |J(u, v)| du dv = \iint_{D'} \frac{1}{|\delta|} du dv = \frac{1}{|\delta|} \iint_{D'} du dv = \frac{1}{|\delta|} S' = \frac{\pi}{|\delta|}.$$

Здесь мы воспользовались известной формулой для площади единичного круга  $D'$ :  $S' = \pi \cdot 1^2 = \pi$ .

**Пример 15.3.** Найти площадь  $S$  области  $D$ , ограниченной кривой

$$(y - x)^2 + x^2 = R^2, \quad R > 0. \quad (15.8)$$

**Решение.** В интеграле

$$S = \iint_D dx dy$$

граница области  $D$  (15.8) состоит из двух однозначных ветвей

$$y_{1,2} = x \pm \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R,$$

поэтому его можно представить повторными интегралами

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-R}^R dx \int_{x-\sqrt{R^2-x^2}}^{x+\sqrt{R^2-x^2}} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Этот интеграл достаточно просто вычисляется с помощью замены  $x = R \sin \varphi$ ,  $dx = R \cos \varphi d\varphi$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ :

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} R^2 \cos^2 \varphi d\varphi = 2R^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= 2R^2 \left( \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2. \end{aligned}$$

◇ Полученный результат легко проверить, выписав инварианты кривой 2-го порядка  $2x^2 - 2xy + y^2 - R^2 = 0$  (15.3):

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \det Q = -R^2, \quad \delta = \det G = 1, \quad S = \text{Sp } G = 3.$$

Поскольку собственные значения матрицы  $G$  определяются уравнением

$$\lambda^2 - \lambda S + \delta = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

то из канонической формы кривой (15.8)

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 - R^2 = 0$$

или

$$\frac{(x')^2}{\left(R\sqrt{2/(3+\sqrt{5})}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(R\sqrt{2/(3-\sqrt{5})}\right)^2} = 1$$

найдем полуоси эллипса

$$a = R\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}, \quad b = R\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}$$

и, соответственно, площадь эллипса (15.3)

$$S = \pi ab = \pi R^2 \sqrt{\frac{4}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} = \pi R^2 \sqrt{\frac{4}{4}} = \pi R^2.$$

**Пример 15.4.** Найти площадь  $S$  области  $D$ , ограниченной парабололами

$$y = ax^p, \quad y = bx^p, \quad y = cx^q, \quad y = dx^q, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b, \quad 0 < c < d.$$

**Решение.** В интеграле

$$S = \iint_D dx dy$$

запишем уравнения границы  $D$  в виде

$$y = ax^p, \quad y = bx^p, \quad x = c^{-1/q}y^{1/q}, \quad x = d^{-1/q}y^{1/q}$$

и проведем замену переменных

$$y = ux^p, \quad x = vy^{1/q},$$

переводящую область  $D$  в прямоугольник

$$D' = \{(u, v) : a \leq u \leq b, d^{-1/q} \leq v \leq c^{-1/q}\}.$$

Поскольку

$$x = u^{1/(q-p)}v^{q/(q-p)}, \quad y = u^{p/(q-p)}v^{pq/(q-p)}$$

и

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{q}{q-p} u^{(p+1)/(q-p)} v^{p(q+1)/(q-p)},$$

то

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = S = \iint_{D'} \frac{q}{q-p} u^{(p+1)/(q-p)} v^{p(q+1)/(q-p)} du dv = \\ &= \frac{q}{q-p} \int_a^b u^{(p+1)/(q-p)} du \int_{d^{-1/q}}^{c^{-1/q}} v^{p(q+1)/(q-p)} dv = \\ &= \frac{q-p}{(p+1)(q+1)} [b^{(p+1)/(q-p)} - a^{(p+1)/(q-p)}] [c^{-(q+1)/(q-p)} - d^{-(q+1)/(q-p)}]. \end{aligned}$$

**Пример 15.5.** Найти площадь  $S$  области  $D$ , ограниченной петлей и окружностью

$$(x^2 + y^2)^2 = 8R^2xy, \quad (x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2. \quad (15.9)$$

**Решение.** Искомая область расположена в первой четверти (рис. 119). Из этого рисунка следует, что существуют две области, ограниченные этими кривыми, а именно  $D_1$  и  $D_2$ . Поскольку сумма их площадей равна площади круга с радиусом  $R$ , то  $S_1 + S_2 = \pi R^2$ . По этой причине, чтобы определить площадь  $S$ , достаточно найти площадь любой из этих областей, например площадь  $S_1$  области  $D_1$ . Это можно сделать по формуле

$$S_1 = \iint_{D_1} dx dy. \quad (15.10)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, запишем уравнения кривых (15.9) в полярных координатах. Первая из них будет иметь вид

$$\rho = 2R\sqrt{\sin 2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2},$$

а окружность определится двумя однозначными ветвями:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= R[\cos \varphi + \sin \varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}], \\ \rho_2 &= R[\cos \varphi + \sin \varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}]. \end{aligned}$$

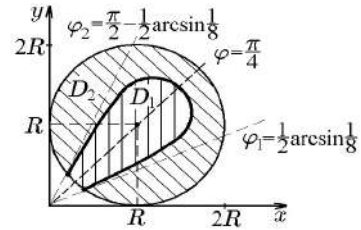


Рис. 119. Область  $D$  из примера 15.5

Точки пересечения петли и окружности можно найти из равенств

$$\begin{aligned} 2R\sqrt{\sin 2\varphi} &= R[\cos \varphi + \sin \varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}], \\ 2R\sqrt{\sin 2\varphi} &= R[\cos \varphi + \sin \varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}]. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений не имеет решений для  $\varphi$ , а второе уравнение имеет два корня:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}.$$

Исходя из этого, область  $D_1$  можно определить неравенствами

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ (\rho, \varphi) : \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}, \right. \\ &\quad \left. R[\cos \varphi + \sin \varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}] \leq \rho \leq 2R\sqrt{\sin 2\varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Если при этом учесть симметрию области  $D_1$  относительно луча  $\varphi = \pi/4$ , то интеграл (15.10) можно представить повторными в виде

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_{D_1} dx dy = \iint_{D_1} \rho d\rho d\varphi = 2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} d\varphi \int_{R[\cos \varphi + \sin \varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}]}^{2R\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = \\ &= \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} [4R^2 \sin 2\varphi - R^2(\cos \varphi + \sin \varphi - \sqrt{\sin 2\varphi})^2] d\varphi = \end{aligned}$$

$$= R^2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} [2 \sin 2\varphi - 1 + 2(\cos \varphi + \sin \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi}] d\varphi = R^2(I_1 + 2I_2). \quad (15.11)$$

где

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} (2 \sin 2\varphi - 1) d\varphi,$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} (\cos \varphi + \sin \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi} d\varphi.$$

Вычислим эти интегралы:

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} (2 \sin 2\varphi - 1) d\varphi = (-\cos 2\varphi - \varphi) \Big|_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} =$$

$$= \cos\left(\arcsin \frac{1}{8}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{8}\right) = \quad (15.12)$$

$$= \frac{\sqrt{63}}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8},$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} (\cos \varphi + \sin \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi} d\varphi = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/4} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\sin 2\varphi} d\varphi.$$

Проведя замену  $\varphi + \pi/4 = \alpha$ , получим

$$I_2 = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\pi/2} \sin \alpha \sqrt{-\cos 2\alpha} d\alpha = - \int_{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{8})}^{\pi/2} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \cos \alpha)^2} d(\sqrt{2} \cos \alpha) =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{8})} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \cos \alpha)^2} d(\sqrt{2} \cos \alpha).$$

Еще одна замена  $\sqrt{2} \cos \alpha = \sin \beta$  дает

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{\frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{8})} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \cos \alpha)^2} d(\sqrt{2} \cos \alpha) = \int_0^{\arcsin(\sqrt{7}/2\sqrt{2})} \cos^2 \beta d\beta.$$

Здесь пределы по переменной  $\beta$  найдены из соотношений

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} = \sin \beta_1, \quad \beta_1 = 0$$

и

$$\sqrt{2} \cos \left[ \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{1}{8} \right) \right] = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos[\arccos(-1/8)]}{2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \sin \beta_2,$$

т. е.  $\beta_2 = \arcsin(\sqrt{7}/2\sqrt{2})$ .Продолжив интегрирование в  $I_2$ , получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\arcsin(\sqrt{7}/2\sqrt{2})} \cos^2 \beta \, d\beta = \frac{1}{2} \int_0^{\arcsin(\sqrt{7}/2\sqrt{2})} (1 + \cos 2\beta) \, d\beta = \frac{1}{2} \left( \beta + \frac{\sin 2\beta}{2} \right) \Big|_0^{\arcsin(\sqrt{7}/2\sqrt{2})} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sin \left( 2 \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \sin \left( \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \right) \cos \left( \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{7}{8}} \right) = \frac{1}{2} \left( \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{8} \right). \end{aligned} \quad (15.13)$$

Подставив (15.1.), (15.13) в (15.11), найдем

$$\begin{aligned} S_1 &= R^2(I_1 + 2I_2) = R^2 \left( \frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} + \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{8} \right) = \\ &= R^2 \left( \frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right), \end{aligned}$$

соответственно,

$$S_2 = \pi R^2 - S_1 = R^2 \left( \pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{7}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \right).$$

**Пример 15.6.** Найти площадь  $S$  области  $D$ , расположенной в 1-й четверти и ограниченной кривыми

$$\left( \frac{x}{a} \right)^{2/3} + \left( \frac{y}{b} \right)^{2/3} = 1, \quad \left( \frac{x}{a} \right)^{2/3} + \left( \frac{y}{b} \right)^{2/3} = 4, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \frac{8x}{a} = \frac{y}{b}. \quad (15.14)$$

**Решение.** В интеграле

$$S = \iint_D dx \, dy$$

перейдем к обобщенным полярным координатам

$$x = a\rho \cos^3 \varphi, \quad y = b\rho \sin^3 \varphi$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi) = 3ab\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$ . Тогда область  $D$  определится неравенствами

$$D = \{(\rho, \varphi) : \arctg 1 \leq \varphi \leq \arctg 2, 1 \leq \rho \leq 8\}.$$

С учетом этого

$$S = \iint_D dx \, dy = \iint_D |J(\rho, \varphi)| \, d\rho \, d\varphi = \iint_D 3ab\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi =$$



$$\begin{aligned}
&= 3ab \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_1^8 \rho d\rho = 3ab \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi d\varphi \left( \frac{\rho^2}{2} \Big|_1^8 \right) = \\
&= \frac{3 \cdot 63}{8} ab \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{189}{16} ab \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \\
&= \frac{189}{16} ab \left( \varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{189}{16} ab \left[ \varphi - \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \right]_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 2} = \\
&= \frac{189}{16} ab \left\{ (\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1) - \sin(\operatorname{arctg} 2) \cos(\operatorname{arctg} 2) \times \right. \\
&\quad \left. \times [\cos^2(\operatorname{arctg} 2) - \sin^2(\operatorname{arctg} 2)] \right\} = \frac{189}{16} ab \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{6}{25} \right).
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известными тригонометрическими соотношениями

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy},$$

и если  $\operatorname{tg} \varphi = 2$ , то  $\cos \varphi = 1/\sqrt{5}$ ,  $\sin \varphi = 2/\sqrt{5}$ , и, стало быть,

$$\sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \right) = -\frac{6}{25}.$$

Рассмотрим несколько примеров вычисления объемов тел, не прибегая к соответствующим геометрическим построениям.

**Пример 15.7.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями, заданными следующими уравнениями:

$$z = xy, \quad x + y + z = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

**Решение.** Поверхность  $z = xy$  пересекается с плоскостью  $x + y + z = 1$  по кривой, уравнение проекции которой в первой четверти плоскости  $xOy$  имеет вид

$$y = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Из этого следует, что в интеграле для вычисления объема

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy, \tag{15.15}$$

где область  $D$  представляет собой замкнутый треугольник

$$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

эту область следует разбить на две области:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1 - x}{1 + x} \right\}, \\
D_2 &= \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq 1, \frac{1 - x}{1 + x} \leq y \leq 1 - x \right\},
\end{aligned}$$

так, что  $D = D_1 \cup D_2$ .

Это позволяет записать подынтегральную функцию как

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & (x, y) \in D_1 \\ 1 - x - y, & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

В силу этого интеграл (15.15) запишется как

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} (1 - x - y) dx dy = \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{(1-x)/(1+x)} y dy + \int_0^1 dx \int_{(1-x)/(1+x)}^{1-x} (1 - x - y) dy = \\ &= \int_0^1 x \left( \frac{y^2}{2} \Big|_0^{(1-x)/(1+x)} \right) dx + \int_0^1 dx \int_{(1-x)/(1+x)}^{1-x} (1 - x - y) d(1 - x - y) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx + \int_0^1 dx \frac{(1-x-y)^2}{2} \Big|_{(1-x)/(1+x)}^{1-x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1-x - \frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 (1+x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{1+x} \right) dx = \frac{17}{12} - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

**Пример 15.8.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, \quad z = x + y.$$

**Решение.** Параболоид вращения и плоскость пересекаются по кривой, уравнение проекции которой на плоскость  $xOy$  имеет вид

$$D: \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Искомый объем  $V$  найдется как разность объемов

$$V = V_1 - V_2 = \iint_D (x + y) dx dy - \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) dx dy.$$

Заменяя в этом интеграле переменные по формулам

$$x - \frac{1}{2} = \rho \cos \varphi, \quad y - \frac{1}{2} = \rho \sin \varphi,$$

найдем значение объема:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{1}{2} + \rho \cos \varphi \right) + \left( \frac{1}{2} + \rho \sin \varphi \right) - \left( \frac{1}{2} + \rho \cos \varphi \right)^2 - \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{2} + \rho \sin \varphi \right)^2 \right] \rho d\rho = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{\rho}{2} + \rho^3 \right) d\rho = 2\pi \left( \frac{\rho^2}{4} + \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

**Пример 15.9.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = c \sin \pi \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right), \quad z = 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0,$$

при условии  $n \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq n+1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Решение.** Объем тела найдем по формуле

$$\iint_D |z| dx dy.$$

Введем обобщенные полярные координаты

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi$$

с якобианом  $J(\rho, \varphi) = ab\rho$ .

Тогда в силу симметрии области  $D$  и четности функции

$$|z| = \left| c \sin \pi \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right|$$

относительно обеих переменных имеем

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \rho abc |\sin \pi \rho^2| d\rho = 4abc \cdot \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} |\sin \pi \rho^2| \rho d\rho = \\ = abc \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} |\sin \pi \rho^2| d(\pi \rho^2) = abc (-1)^{n+1} \cos \pi \rho^2 \Big|_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} = \\ = abc (-1)^{n+1} [\cos \pi(n+1) - \cos \pi n] = abc (-1)^{n+1} [(-1)^{n+1} - (-1)^n] = \\ = abc(1+1) = 2abc.$$

Следующие примеры иллюстрируют возможность использования двойных интегралов для вычисления площадей искривленных поверхностей, исходя из формулы (15.3).

**Пример 15.10.** Вычислить площадь  $S$  поверхности тела, ограниченного полыми цилиндрами

$$x^2 + z^2 = R^2, \quad y^2 + z^2 = R^2. \quad (15.16)$$

**Решение.** Область, ограниченная двумя цилиндрами, уже рассматривалась в примере 7.7. На рис. 120 изображена 1/16 часть поверхности тела, образованного пересечением цилиндров (15.16). Из этого рисунка следует, что проекцией части поверхности цилиндра  $z = \sqrt{R^2 - x^2}$  на плоскость  $xOy$  является треугольник

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq x\}.$$

Учтя, что

$$1 + (z_x)^2 + (z_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2},$$

из интеграла (15.3) найдем искомую площадь  $S$ :

$$\begin{aligned} S &= 16 \iint_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx dy = 16R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^x dy = \\ &= 16R \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -16R \sqrt{R^2 - x^2} \Big|_0^R = 16R^2. \end{aligned}$$

**Пример 15.11.** Найти площадь  $S$  части поверхности

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (15.17)$$

заклученной внутри полого цилиндра

$$x^2 + y^2 = 2x. \quad (15.18)$$

**Решение.** Поверхность, площадь  $S$  которой требуется найти, вырезается цилиндром (15.18) из верхней половины конуса (15.17) (рис. 121). Ее проекцией на плоскость  $xOy$  является круг

$$D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

с радиусом  $R = 1$  и центром в точке  $P(0, 1)$ .

Поскольку

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 2,$$

то

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \\ &= \sqrt{2} m(D) = \sqrt{2} \pi \cdot 1^2 = \sqrt{2} \pi. \end{aligned}$$

**Пример 15.12.** Найти площадь  $S$  поверхности

$$z^2 = 2xy, \quad (15.19)$$

отсекаемой плоскостями  $x + y = 1$ ,  $x = y = 0$ .

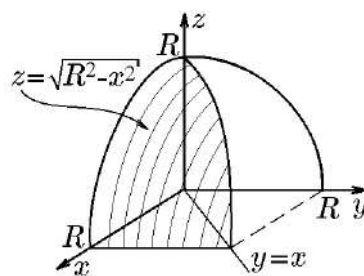


Рис. 120. Часть тела, ограниченного цилиндрами (15.16)

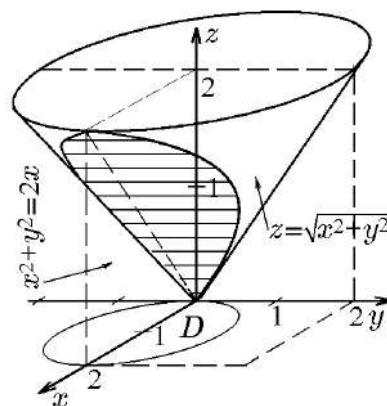


Рис. 121. Поверхность из примера 15.11

**Решение.** Все точки поверхности симметричны относительно плоскости  $xOy$  и проектируются на эту плоскость в треугольник

$$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - 1\}.$$

Исходя из равенства  $z = (2xy)^{1/2}$ , имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{y^2 + x^2}{1xy}} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}} = \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dx dy = \sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{yx}\right) dy = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^1 dx \left(\sqrt{x(1-x)} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\right) = 2\sqrt{2}\left(I_1 + \frac{1}{3}I_2\right), \end{aligned} \quad (15.20)$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}} dx.$$

Эти интегралы с помощью замены  $x = \sin^2 \varphi$  вычисляются достаточно просто:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}; \end{aligned} \quad (15.21)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos^6 \varphi}{\sin^2 \varphi}} 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 4\varphi\right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Подставив (15.21), (15.22) в (15.20), получим

$$S = 2\sqrt{2}\left(I_1 + \frac{1}{3}I_2\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad (15.23)$$

Данный пример показателен тем, что площадь поверхности найдена без каких-либо геометрических построений. Оказывается, если с помощью простых тождественных преобразований уравнение поверхности 2-го порядка  $z^2 = 2xy$  преобразовать к виду

$$z^2 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

то переходом в плоскости  $xOy$  от координат  $x, y$  к координатам

$$\bar{x} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \bar{y} = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

[что соответствует повороту координатных осей на угол  $\alpha = \pi/4$  (рис. 122)] мы получим уравнение поверхности второго порядка в канонической форме:

$$\bar{x}^2 = \bar{y}^2 + z^2,$$

задающее коническую поверхность с осью симметрии  $O\bar{x}$  (рис. 122). Ее пересечением с плоскостью  $x+y=1$  или  $\bar{x} = 1/\sqrt{2}$  является прямой круговой конус с радиусом основания  $R = 1/\sqrt{2}$  и образующей  $L = 1$  (рис. 122). Воспользовавшись известным выражением для площади боковой поверхности конуса, запишем

$$S = \pi RL = \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

что совпадает с найденным выше значением площади (15.23).

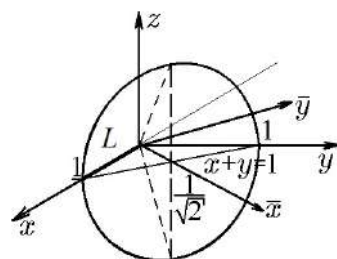


Рис. 122.  
 $z^2 = 2xy = \bar{x}^2 - \bar{y}^2$

**Пример 15.13.** Найти площадь  $S$  части поверхности, заданной уравнением

$$\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad (15.24)$$

и отсекаемой плоскостями  $x = 1, x = 2$  для всех  $y \geq 0$ .

**Решение.** Из условия  $0 \leq \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \leq 1$  следует, что проекция  $D$  поверхности на плоскость  $xOy$  задается неравенствами  $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \operatorname{arsh}(1/\operatorname{sh} x)\}$ . По правилу дифференцирования неявно заданных функций из (15.24) получим

$$z_x = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\cos z}, \quad z_y = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}{\cos z}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 + (z_x)^2 + (z_y)^2 &= \frac{\cos^2 z + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{\cos^2 z} = \\ &= \frac{1 - \sin^2 z + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \sin^2 z} = \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}. \end{aligned}$$

Исходя из этого, имеем

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}} dx dy = \int_1^2 \operatorname{ch} x dx \int_0^{\operatorname{arsh}(1/\operatorname{sh} x)} \frac{\operatorname{ch} y dy}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}} = \\
 &= \int_1^2 \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} dx \int_0^{\operatorname{arsh}(1/\operatorname{sh} x)} \frac{d(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)}{\sqrt{1 - (\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)^2}} = \int_1^2 \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{sh} x} \left[ \operatorname{arcsin}(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y) \Big|_0^{\operatorname{arsh}(1/\operatorname{sh} x)} \right] = \\
 &= \int_1^2 \operatorname{arcsin} 1 \frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi}{2} \ln(\operatorname{sh} x) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1} = \frac{\pi}{2} \ln \left( e + \frac{1}{e} \right).
 \end{aligned}$$

## 15.2. Физические приложения двойных интегралов

При рассмотрении задач, приводящих к понятию двойного интеграла, наряду с геометрическими задачами мы рассмотрели задачу о вычислении массы  $M$ , распределенной по плоской области  $D$  с заданной поверхностной плотностью  $\rho = f(x, y)$ . Решение этой задачи также было получено в виде двойного интеграла, аналогичного (15.1):

$$M = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (15.25)$$

Если функция  $f(x, y)$  и область  $D$  удовлетворяют требованиям теоремы 3.3, то двойной интеграл существует и его вычисление сводится к вычислению соответствующих повторных интегралов.

Формула (15.25) остается справедливой и для других физических величин, распределенных по жордановой области с поверхностной плотностью  $\rho = f(x, y)$ , являющейся непрерывной функцией в этой области. Физическая природа  $f(x, y)$  накладывает на нее определенные ограничения. Так, например, если  $f(x, y)$  – плотность распределения заряда, то она может принимать отрицательные значения, если же  $f(x, y)$  – плотность распределения массы, то отрицательных значений она принимать не может и т. д. и т. п.

В физике оказываются востребованными двойные интегралы вида

$$\mathbb{I}_L^{(n)} = \iint_D \rho(x, y) r^n(x, y) dx dy, \quad (15.26)$$

где  $r(x, y)$  – расстояние от точки  $P(x, y) \in D$  до некоторой прямой  $L$ , а  $\rho = \rho(x, y)$  – поверхностная плотность распределения массы.

◇ Интегралы (15.26) называются *моментами* порядка  $n$  области  $D$  с поверхностной плотностью  $\rho(x, y)$  относительно прямой  $L$ .

Очевидно, что момент нулевого порядка  $\mathbb{I}^{(0)}$  определяет массу  $M$  пластинки  $D$  с плотностью  $\rho = \rho(x, y)$ :

$$\mathbb{I}^{(0)} = M = \iint_D \rho(x, y) dx dy. \quad (15.27)$$

Моменты первого порядка относительно координатных осей называются *статическими моментами* и вычисляются по формулам

$$\mathbb{I}_x^{(1)} = \iint_D y \rho(x, y) dx dy, \quad \mathbb{I}_y^{(1)} = \iint_D x \rho(x, y) dx dy. \quad (15.28)$$

Нулевой момент и статические моменты определяют координаты центра масс области  $D$  по формулам

$$x_c = \frac{\mathbb{I}_y^{(1)}}{\mathbb{I}^{(0)}} = \frac{\mathbb{I}_y^{(1)}}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dx dy}{\iint_D \rho(x, y)dx dy},$$

$$y_c = \frac{\mathbb{I}_x^{(1)}}{\mathbb{I}^{(0)}} = \frac{\mathbb{I}_x^{(1)}}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dx dy}{\iint_D \rho(x, y)dx dy}.$$
(15.29)

Моменты второго порядка относительно координатных осей называются *моментами инерции* и вычисляются по формулам

$$\mathbb{I}_x^{(2)} = \iint_D y^2\rho(x, y)dx dy, \quad \mathbb{I}_y^{(2)} = \iint_D x^2\rho(x, y)dx dy.$$
(15.30)

Моменты инерции (15.30) используются для описания вращательного движения твердого тела. При необходимости их дополняют *центральной моментом*

$$\mathbb{I}_{xy} = \iint_D xy\rho(x, y)dx dy$$
(15.31)

и *моментом инерции относительно начала координат* – точки  $O(0, 0)$

$$\mathbb{I} = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dx dy = \mathbb{I}_x^{(2)} + \mathbb{I}_y^{(2)}.$$
(15.32)

◇ Формулы (15.25)–(15.32) можно получить, составив соответствующие интегральные суммы с последующим предельным переходом, приводящим к двойным интегралам. Отметим, что эти формулы также могут быть получены другим способом: можно выделить в области  $D$  элементарные области  $dS$ , а затем с помощью упрощающих выкладки предположений записать приближенное значение искомой величины

$$dQ = q(P)dS, \quad P \in dS,$$

что справедливо с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем  $dS$ . Тогда точное значение  $Q$  найдем в результате суммирования по всем элементарным областям и последующего предельного перехода:

$$Q = \iint_D q(P)dS = \iint_D q(x, y)dx dy.$$

**Пример 15.14.** Найти площадь, массу и координаты центра масс пластины  $D$ , ограниченной параболой  $y = x^2$  и прямой  $y + x = 2$ , с плотностью распределения массы  $\rho(x, y) = x^2$ .



**Решение.** Область  $D$  изображена на рис. 123. Абсциссы точек пересечения прямой  $x + y = 2$  и параболы  $y = x^2$ :  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 1$  находятся из уравнения  $x^2 + x - 2 = 0$ . С учетом этого область  $D$  можно определить системой неравенств

$$D = \{(x, y): -2 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x\}. \quad (15.33)$$

Исходя из соотношений (15.33) для  $D$ , найдем требуемые характеристики области  $D$ .

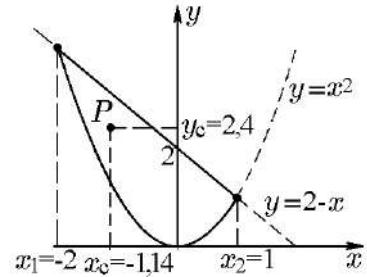


Рис. 123. Область  $D$  из примера 15.14

1. Площадь  $S$  области  $D$ :

$$\begin{aligned} S = m(D) &= \iint_D dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} dy = \\ &= \int_{-2}^1 \left( y \Big|_{x^2}^{2-x} \right) = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \left( 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2} = 4,5. \end{aligned}$$

2. Масса  $M$  пластины  $D$ :

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_D x^2 dx dy = \int_{-2}^1 x^2 dx \int_{x^2}^{2-x} dy = \int_{-2}^1 x^2 (2 - x - x^2) dx = \\ &= \int_{-2}^1 (2x^2 - x^3 - x^4) dx = \left( \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^1 = 6 + \frac{15}{4} - \frac{33}{5} = \frac{63}{20} = 3,15. \end{aligned}$$

3. Средняя плотность  $\rho_{\text{ср}}$  пластины  $D$ :

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{M}{S} = \frac{3,15}{4,5} = 0,7.$$

4. Координаты центра масс  $x_c$  и  $y_c$ :

$$\begin{aligned} x_c = \frac{\mathbb{I}_y^{(1)}}{M} &= \frac{1}{3,15} \iint_D x \cdot x^2 dx dy = \frac{1}{3,15} \int_{-2}^1 x^3 dx \int_{x^2}^{2-x} dy = \frac{1}{3,15} \int_{-2}^1 x^3 (2 - x - x^2) dx = \\ &= \frac{1}{3,15} \int_{-2}^1 (2x^3 - x^4 - x^5) dx = \frac{1}{3,15} \left( \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \frac{1}{3,15} \left( -\frac{15}{2} - \frac{33}{5} + \frac{63}{6} \right) = -\frac{1}{3,15} \frac{108}{30} = -\frac{3,6}{3,15} = -1,14; \\ y_c = \frac{\mathbb{I}_x^{(1)}}{M} &= \frac{1}{3,15} \iint_D y x^2 dx dy = \frac{1}{3,15} \int_{-2}^1 x^2 dx \int_{x^2}^{2-x} y dy = \frac{1}{3,15} \int_{-2}^1 x^2 dx \left( \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{2-x} \right) = \\ &= \frac{1}{6,3} \int_{-2}^1 x^2 [(2-x)^2 - x^4] dx = \frac{1}{6,3} \int_{-2}^1 x^2 (4 - 4x + x^2 - x^4) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6,3} \int_{-2}^1 (4x^2 - 4x^3 + x^4 - x^6) dx = \frac{1}{6,3} \left( \frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \right) \Big|_{-2}^1 = \\
&= \frac{1}{6,3} \left( 12 + 15 + \frac{33}{5} - \frac{129}{7} \right) = \frac{1}{6,3} \frac{531}{35} = 2,4.
\end{aligned}$$

Таким образом, центр масс находится в точке  $P$  с координатами  $x_c = -1,14$ ;  $y_c = 2,4$  (рис. 123).

**Пример 15.15.** Определить силу давления однородной жидкости плотностью  $\rho_0$  на боковую стенку цилиндрического колодца радиусом  $R$ :  $x^2 + y^2 = R^2$  и высотой  $z = h$  для всех  $x \geq 0$ , если уровень воды в нем  $z = h$ .

**Решение.** Согласно основному закону гидродинамики, на элемент  $d\sigma(P)$  окрестности точки  $P(x, y, z)$  на цилиндрической поверхности действует сила давления

$$d\vec{F}(P) = \rho_0 \vec{n}(P) dS(P)(h - z), \quad P \in d\sigma,$$

где  $\vec{n}(P)$  – единичная внешняя нормаль к боковой поверхности цилиндра в точке  $P$ ,  $dS(P)$  – площадь элемента поверхности  $d\sigma(P)$ , а  $(h - z)$  – расстояние от элемента  $d\sigma(P)$  до свободной поверхности жидкости (рис. 124).

Поскольку образующая цилиндра параллельна оси  $Oz$ , то

$$d\vec{F}(P) = \vec{i}dF_x(P) + \vec{j}dF_y(P),$$

где

$$dF_x(P) = \rho_0 dS(P)(h - z) \cos \alpha, \quad (15.34)$$

$$dF_y(P) = \rho_0 dS(P)(h - z) \cos \beta, \quad (15.35)$$

и  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  – направляющие косинусы единичного вектора  $\vec{n}(P) = (\cos \alpha, \cos \beta, 0)$ .

Просуммировав в (15.34), (15.35) по всем  $d\sigma(P)$  и приняв во внимание равенства

$$\begin{aligned}
k(P) &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}, \quad dS(P) = k(P) dy dz, \\
\cos \alpha &= \frac{1}{k(P)}, \quad \cos \beta = -\frac{\partial x / \partial y}{k(P)},
\end{aligned}$$

получим следующие значения компонент  $F_x$  и  $F_y$  вектора  $\vec{F}$  – суммарного давления на цилиндрическую стенку колодца – для всех  $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
F_x &= \iint_D \rho_0 k(P)(h - z) \cos \alpha dy dz = \rho_0 \iint_D (h - z) dy dz, \\
F_y &= \iint_D \rho_0 k(P)(h - z) \cos \beta dy dz = -\rho_0 \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)(h - z) dy dz.
\end{aligned}$$

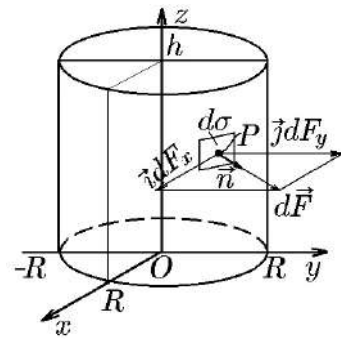


Рис. 124. Цилиндрический колодец

Так как область  $D$  определяется системой неравенств

$$D = \{(y, z): -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq h\},$$

то двойные интегралы можно представить повторными:

$$\begin{aligned} F_x &= \rho_0 \iint_D (h-z) dy dz = \rho_0 \int_{-R}^R dy \int_0^h (h-z) dz = \rho_0 \left( y \Big|_{-R}^R \right) \left( -\frac{(h-z)^2}{2} \Big|_0^h \right) = \rho_0 R h^2; \\ F_y &= -\rho_0 \iint_D \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) (h-z) dy dz = -\rho_0 \int_{-R}^R \frac{\partial x}{\partial y} dy \int_0^h (h-z) dz = \\ &= -\rho_0 \left( x(y) \Big|_{-R}^R \right) \left( -\frac{(h-z)^2}{2} \Big|_0^h \right) = \rho_0 \sqrt{R^2 - y^2} \Big|_{-R}^R \frac{h^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

**Пример 15.16.** Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат, а также центральный момент инерции однородной пластинки плотности  $q$ , имеющей форму области, определенной неравенствами

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 8R^2 xy, \quad x \geq 0.$$

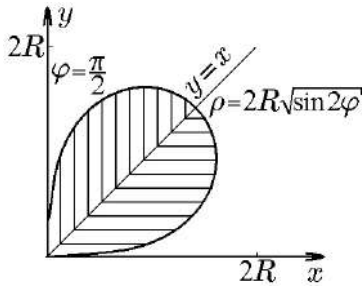


Рис. 125. Область  $D$  (15.36)

**Решение.** Такая область  $D$  (рис. 125) уже рассматривалась в примере 15.5, где было показано, что в полярных координатах ее граница описывается уравнением

$$\rho = 2R\sqrt{\sin 2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (15.36)$$

Следуя формулам (15.30), с учетом (15.36) для момента инерции относительно оси  $Ox$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_x^{(2)} &= \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy = \iint_D q \rho^2 \cos^2 \varphi \rho d\rho, d\varphi = q \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{2R\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho^3 d\rho = \\ &= q \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \left( \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^{2R\sqrt{\sin 2\varphi}} \right) = 4qR^4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 2\varphi d\varphi = \\ &= 16qR^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Этот интеграл можно вычислить с помощью последовательного понижения степени тригонометрических функций. Однако этого громоздкого способа можно избежать, воспользовавшись формулой (14.11). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_x^{(2)} &= 16qR^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = 8qR^4 \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(5/2)}{\Gamma(4)} = \frac{8qR^4}{3!} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{qR^4}{2} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} qR^4. \end{aligned} \quad (15.37)$$

Аналогично для момента инерции относительно оси  $Oy$  имеем

$$\mathbb{I}_y^{(2)} = \iint_D x^2 q \, dx \, dy = 16qR^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = 8qR^4 \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)} = \frac{\pi}{2} qR^4. \quad (15.38)$$

◇ Равенство моментов инерции (15.37), (15.38) относительно координатных осей легко объясняется однородностью пластинки и симметрией ее формы относительно прямой  $y = x$  (см. рис. 125).

В силу определения момента инерции относительно начала координат (15.32) имеем

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_x^{(2)} + \mathbb{I}_y^{(2)} = 2\mathbb{I}_x^{(2)} = \pi qR^4.$$

Наконец, согласно (15.31), для центрального момента инерции имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{xy}^{(2)} &= \iint_D xyq \, dx \, dy = q \iint_D \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= q \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2R\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho^3 \, d\rho = 4qR^4 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 2\varphi \, d\varphi = \\ &= 16qR^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi = 8qR^4 \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{4qR^4}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 15.17.** Показать, что момент инерции  $\mathbb{I}_L^{(2)}$  плоской пластинки  $D$  относительно прямой  $L$ , проходящей через центр масс  $O(0, 0)$  и составляющей угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ , определяется формулой

$$\mathbb{I}_L^{(2)} = \mathbb{I}_x^{(2)} \cos^2 \alpha - \mathbb{I}_{xy}^{(2)} \sin 2\alpha + \mathbb{I}_y^{(2)} \sin^2 \alpha.$$

**Решение.** По условию задачи центр масс пластинки  $D$  находится в начале координат декартовой системы  $xOy$  (рис. 126). Зафиксируем точку  $M(x, y)$ . Ее расстояние  $r$  до заданной прямой  $L$  равно  $d \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между прямой  $L$  и осью  $Ox$ , а величина  $d$  определяется как разность  $(x - l)$ . Поскольку  $l = y \operatorname{ctg} \alpha$ , то  $r = (x - y \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha = x \sin \alpha - y \cos \alpha$ .

С учетом этого, исходя из определения (15.26), для искомого момента инерции  $\mathbb{I}_L^{(2)}$  пластинки  $D$  с поверхностной плотностью  $\mu(x, y)$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_L^{(2)} &= \iint_D r^2 \mu(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \iint_D (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 \mu(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \sin^2 \alpha \iint_D x^2 \mu(x, y) \, dx \, dy - 2 \sin \alpha \cos \alpha \iint_D xy \mu(x, y) \, dx \, dy + \\ &+ \cos^2 \alpha \iint_D y^2 \mu(x, y) \, dx \, dy = \mathbb{I}_x^{(2)} \cos^2 \alpha - \mathbb{I}_{xy}^{(2)} \sin 2\alpha + \mathbb{I}_y^{(2)} \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

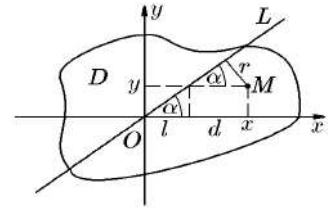


Рис. 126. Пластика  $D$

## 16. Приложения тройных интегралов

Исходя из свойств тройных интегралов и по аналогии с рассмотрением двойных интегралов, приведем некоторые формулы, иллюстрирующие использование тройных интегралов в геометрических и физических приложениях.

Как уже отмечалось выше, если  $M(G)$  – скалярная величина, распределенная на жордановой области  $G \subset \mathbb{R}^3$  с плотностью  $f(x, y, z)$ , то тройной интеграл

$$M(G) = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz \quad (16.1)$$

определяет массу  $M$  трехмерного тела, занимающего область  $G$ , если  $f(x, y, z)$  описывает плотность вещества, составляющего рассматриваемое тело. Если  $f(x, y, z)$  задает плотность заряда, распределенного в области  $G$ , то тройной интеграл (16.1) определяет суммарный заряд области  $G$ . Другими словами, в самом широком смысле тройной интеграл (16.1) определяет суммарную характеристику скалярной величины, составляющей предмет рассмотрения конкретного приложения, если известно её представление функцией (плотностью)  $f(x, y, z)$ .

Если  $x_0, y_0, z_0$  – координаты центра масс тела  $G \subset \mathbb{R}^3$  и  $f(x, y, z)$  – его объемная плотность, то  $x_0, y_0, z_0$  находятся по формулам:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_G x f(x, y, z) dx dy dz, \\ y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_G y f(x, y, z) dx dy dz, \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_G z f(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned} \quad (16.2)$$

где

$$M = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz \quad (16.3)$$

– масса тела.

Моментами инерции тела  $G$  относительно координатных плоскостей называются интегралы

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{xy} &= \frac{1}{M} \iiint_G z^2 f(x, y, z) dx dy dz, \\ \mathbb{I}_{yz} &= \frac{1}{M} \iiint_G x^2 f(x, y, z) dx dy dz, \\ \mathbb{I}_{xz} &= \frac{1}{M} \iiint_G y^2 f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Моментом инерции тела  $G$  относительно некоторой прямой  $L$  называется интеграл

$$\mathbb{I}_L = \frac{1}{M} \iiint_G r^2 f(x, y, z) dx dy dz, \quad (16.5)$$

где  $r$  – расстояние от точки  $P(x, y, z)$  тела до прямой  $L$ .

Для координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  из (16.4) и (16.5) следует:

$$\mathbb{I}_x = \mathbb{I}_{xy} + \mathbb{I}_{xz}, \quad \mathbb{I}_y = \mathbb{I}_{yx} + \mathbb{I}_{yz}, \quad \mathbb{I}_z = \mathbb{I}_{zx} + \mathbb{I}_{zy}. \quad (16.6)$$

Моментом инерции тела  $G$  относительно начала координат называется величина

$$\mathbb{I}_0 = \frac{1}{M} \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) f(x, y, z) dx dy dz = \mathbb{I}_{xy} + \mathbb{I}_{yz} + \mathbb{I}_{zx}. \quad (16.7)$$

Центробежными моментами тела  $G$  называются интегралы

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{xy} &= \iiint_G xy f(x, y, z) dx dy dz, \\ \mathbb{J}_{xz} &= \iiint_G xz f(x, y, z) dx dy dz, \\ \mathbb{J}_{yz} &= \iiint_G yz f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Ньютоновым потенциалом, или потенциалом поля тяготения тела  $G$  в точке  $P(x, y, z)$ , называется интеграл

$$U = \iiint_G f(x', y', z') \frac{dx' dy' dz'}{r}, \quad (16.9)$$

где  $f(x', y', z')$  – объемная плотность тела, а

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Материальная точка массы  $m$  притягивает тело  $G$  с силой  $\vec{F}$ , проекции которой  $F_x, F_y, F_z$  на координатные оси выражаются формулами:

$$\begin{aligned} F_x &= \gamma m \frac{\partial U}{\partial x} = \gamma m \iiint_G f(x', y', z') \frac{x' - x}{r^3} dx dy dz, \\ F_y &= \gamma m \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma m \iiint_G f(x', y', z') \frac{y' - y}{r^3} dx dy dz, \\ F_z &= \gamma m \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma m \iiint_G f(x', y', z') \frac{z' - z}{r^3} dx dy dz, \end{aligned} \quad (16.10)$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная.

**Пример 16.1.** Найти координаты центра масс единичного куба

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

с плотностью  $f(x, y, z) = x^{(2a-1)/(1-a)} y^{(2b-1)/(1-b)} z^{(2c-1)/(1-c)}$ ,  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $0 < c < 1$ .

**Решение.** По формуле (16.3) найдем массу тела:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 x^{(2a-1)/(1-a)} dx \int_0^1 y^{(2b-1)/(1-b)} dy \int_0^1 z^{(2c-1)/(1-a)} dz = \\ &= \left( \frac{1-a}{a} x^{a/(1-a)} \Big|_0^1 \right) \left( \frac{1-b}{b} y^{b/(1-b)} \Big|_0^1 \right) \left( \frac{1-c}{c} z^{c/(1-c)} \Big|_0^1 \right) = \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}. \end{aligned}$$

Теперь по формулам (16.2) найдем координаты центра масс  $x_0, y_0, z_0$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_G x f(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{M} \int_0^1 x^{(2a-1)/(1-a)} dx \int_0^1 y^{(2b-1)/(1-b)} dy \times \\ &\quad \times \int_0^1 z^{(2c-1)/(1-a)} dz = \frac{1}{M} \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} = a. \end{aligned}$$

Аналогично найдем  $y_0 = b, z_0 = c$ .

◇ Прежде чем продолжить рассмотрение примеров, отметим, что все примеры из разделов 6.2.2 и 10, иллюстрирующих методы вычисления тройных интегралов, также можно рассматривать как частные решения задач, задаваемых формулами (16.1)–(16.10). В дополнение к ним приведем несколько примеров, дающих не частное, а комплексное решение задачи, как в примере 16.1, опуская для краткости изложения некоторые промежуточные выкладки.

**Пример 16.2.** Найти объем и координаты центра масс однородного тела плотностью  $\mu$ , ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = z, \quad x + y + z = 0.$$

**Решение.** Проекцией данного тела на плоскость  $xOy$  является область

$$x^2 + y^2 \leq -(x + y),$$

т. е. круг (рис. 127)

$$D: \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (16.11)$$

С учетом (16.11) само тело  $G$  можно задать неравенствами

$$G: \{x^2 + y^2 \leq z \leq -(x + y), (x, y) \in D\}, \quad (16.12)$$

которые в полярных координатах

$$x = \rho \cos \varphi - \frac{1}{2}, \quad y = \rho \sin \varphi - \frac{1}{2} \quad (16.13)$$

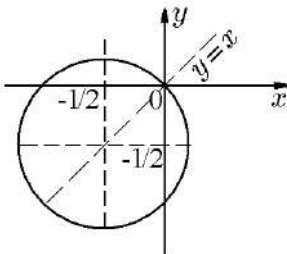


Рис. 127.  
Область (16.11)

будут иметь вид

$$\begin{aligned} G &= \left\{ (\rho, \varphi, z) : \rho^2 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2} \leq z \leq \right. \\ &\left. \leq 1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi), 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку объем  $V$  области  $G$  представляет собой меру этой области, то

$$V = \iiint_G dx dy dz.$$

Этот интеграл в координатах  $(\rho, \varphi, z)$  можно свести к повторным следующего вида:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\rho^2 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2}}^{1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi)} dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho \left[ 1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) - \rho^2 + \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) - \frac{1}{2} \right] d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho \left( \frac{1}{2} - \rho^2 \right) d\rho = 2\pi \left( \frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Так как тело однородно, то его масса найдется простым произведением

$$M = V\mu = \frac{\mu\pi}{8}.$$

Перейдем к определению координат центра масс  $x_0, y_0, z_0$ . В силу симметрии тела  $G$  относительно плоскости  $x = y$  имеем:

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_G \mu x dx dy dz = \frac{\mu}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\rho^2 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2}}^{1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi)} \left( \rho \cos \varphi - \frac{1}{2} \right) dz = \\ &= \frac{\mu}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho \left( \rho \cos \varphi - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - \rho^2 \right) d\rho = \\ &= \frac{\mu}{M} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho^2 \cos \varphi \left( \frac{1}{2} - \rho^2 \right) d\rho - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho \left( \frac{1}{2} - \rho^2 \right) d\rho \right\} = \\ &= \frac{\mu}{M} \left\{ \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho^2 \left( \frac{1}{2} - \rho^2 \right) d\rho \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right\} - \frac{\pi\mu}{M} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{\rho}{2} - \rho^3 \right) d\rho = \\ &= -\frac{\pi\mu}{M} \left( \frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^3}{4} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = -\frac{\pi\mu}{4M} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi\mu}{16M} = -\frac{1}{2}; \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_G \mu z dx dy dz = \frac{\mu}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\rho^2 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2}}^{1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi)} z dz = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\rho}{2} d\rho \left( z^2 \Big|_{\rho^2 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2}}^{1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi)} \right) = \\
&= \frac{\mu}{2M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho \left\{ [1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi)]^2 - \left[ \rho^2 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\} d\rho = \\
&= \frac{\mu}{2M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho \left\{ [1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi)]^2 - \left[ \left( \rho^2 - \frac{1}{2} \right) + 1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) \right]^2 \right\} d\rho = \\
&= \frac{\mu}{2M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho \left\{ - \left( \rho^2 - \frac{1}{2} \right) \left[ \left( \rho^2 - \frac{1}{2} \right) + 2[1 - \rho(\cos \varphi + \sin \varphi)] \right] \right\} d\rho = \\
&= \frac{\mu}{2M} \left\{ - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho \left( \rho^2 - \frac{1}{2} \right) \left( \rho^2 + \frac{3}{2} \right) d\rho + \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^2 \left( \rho^2 - \frac{1}{2} \right) d\rho \right\} = \\
&= -\frac{2\pi\mu}{2M} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho \left( \rho^4 + \rho^2 - \frac{3}{4} \right) d\rho = -\frac{\pi\mu}{M} \left( \frac{\rho^6}{6} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{3\rho^3}{8} \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\
&= -\frac{\pi\mu}{8M} \left( \frac{1}{6} - 1 \right) = \frac{5\pi\mu}{6 \cdot 8M} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Таким образом,  $x_0 = y_0 = 1/2$ ,  $z_0 = 5/6$ .

**Пример 16.3.** Найти момент инерции неоднородного шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  массой  $M$  относительно его диаметра, если плотность шара в текущей точке  $P(x, y, z)$  пропорциональна расстоянию этой точки от центра шара.

**Решение.** По условию задачи для плотности  $\mu(x, y, z)$  имеем соотношение

$$\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где  $k > 0$  – коэффициент пропорциональности, который определим из условия

$$M = \iiint_G \mu(x, y, z) dx dy dz = k \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \quad (16.14)$$

где  $G$  – шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . Перейдя к сферическим координатам, получим

$$M = k \iiint_G d\varphi \sin \theta d\theta r^3 dr = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R r^3 dr = k\pi R^4,$$

откуда  $k = M/\pi R^4$ .

Считая, что диаметр шара является отрезком оси  $Oz$ , по формуле (16.5) для оси  $Oz$  (т. е.  $L = Oz$ ) найдем

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_L &= \iiint_G (x^2 + y^2)k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \frac{M}{\pi R^4} \iiint_G r^5 \sin^3 \theta d\varphi d\theta dr = \\ &= \frac{M}{\pi R^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^5 dr = \frac{2\pi MR^6}{3\pi R^4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{MR^2}{3} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} = \frac{4}{9} MR^2. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (14.11) для вычисления интеграла от тригонометрической функции.

**Пример 16.4.** Найти притяжение, испытываемое материальной точкой единичной массы со стороны однородного шара.

**Решение.** Пусть  $\mu$  – плотность вещества, заполняющего шар радиусом  $R$ . Систему координат  $Oxyz$  выберем так, чтобы ее начало  $O(0, 0, 0)$  совпадало с центром шара, а ось  $Oz$  проходила через точку  $P(0, 0, z)$ , определяющую положение материальной точки единичной массы (рис. 128). Координаты точек, принадлежащих шару  $G$ , будем обозначать через  $x', y', z'$ . Тогда множество всех точек шара может быть задано неравенством

$$G: (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \leq R^2, \quad (16.15)$$

и в силу (16.10) имеем

$$F_z = \gamma\mu \iiint_G \frac{(z' - z)dx' dy' dz'}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}. \quad (16.16)$$

Тройной интеграл (16.16) удобнее свести к повторным, выбрав внешнее интегрирование по переменной  $z'$  от  $-R$  до  $R$ , а внутреннее по  $dx' dy'$  в области  $D(z')$ , представляющей собой сечение области  $G$  координатной плоскостью, перпендикулярной оси  $Oz$ , т. е.

$$D(z'): (x')^2 + (y')^2 \leq R^2 - (z')^2. \quad (16.17)$$

С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} F_z &= \gamma\mu \int_{-R}^R (z' - z)dz' \iint_{D(z')} \frac{dx' dy'}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = \\ &= \gamma\mu \int_{-R}^R (z' - z)dz' J(z'). \end{aligned} \quad (16.18)$$

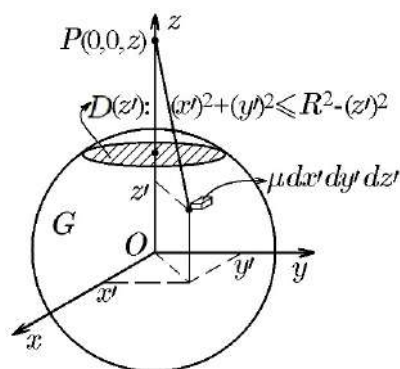


Рис. 128. Однородный шар

Внутренний интеграл  $J(z')$  легко вычисляется переходом к полярным координатам  $x' = \rho \cos \varphi$ ,  $y' = \rho \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} J(z') &= \iint_{D(z')} \frac{dx' dy'}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - (z')^2}} \frac{\rho d\rho}{[\rho^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{R^2 - (z')^2}} \frac{d[\rho^2 + (z' - z)^2]}{[\rho^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = -2\pi \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z' - z)^2}} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - (z')^2}} = \\ &= -2\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 - (z')^2 + (z' - z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z' - z)^2}} \right] = \\ &= -2\pi \left( \frac{1}{|z' - z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2zz' + z^2}} \right). \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в (16.18), получим

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi\gamma\mu \int_{-R}^R (z' - z) \left( \frac{1}{|z' - z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2zz' + z^2}} \right) dz' = \\ &= 2\pi\gamma\mu [J_1(z) - J_2(z)], \end{aligned} \quad (16.19)$$

где

$$J_1(z) = \int_{-R}^R \frac{(z' - z) dz'}{|z' - z|}, \quad J_2(z) = \int_{-R}^R \frac{(z' - z) dz'}{\sqrt{R^2 - 2zz' + z^2}}.$$

При вычислении интеграла  $J_1(z)$  рассмотрим различные интервалы изменения  $z$  по отдельности:

а) для  $z > R$  получим

$$J_1(z) = \int_{-R}^R \frac{(z' - z) dz'}{|z' - z|} = \int_{-R}^R \text{sign}(z' - z) dz' = \int_{-R}^R (-1) dz' = -z' \Big|_{-R}^R = -2R;$$

б) для  $z < R$  получим

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \int_{-R}^R \frac{(z' - z) dz'}{|z' - z|} = \int_{-R}^R \text{sign}(z' - z) dz' = \int_{-R}^z (-1) dz' + \int_z^R 1 \cdot dz' = \\ &= -z' \Big|_{-R}^z + z' \Big|_z^R = -z - R + R - z = -2z. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$J_1(z) = \begin{cases} -2R, & z \geq R, \\ -2z, & z \leq R. \end{cases} \quad (16.20)$$

При вычислении интеграла  $J_2$  воспользуемся заменой

$$\sqrt{R^2 - 2zz' + z^2} = t, \quad z' = R \Rightarrow t = \sqrt{R^2 - 2zR + z^2} = |R - z|, \quad z' = -R \Rightarrow$$

$$t = |R + z|, \quad z' = \frac{R^2 - t^2 + z^2}{2z}, \quad dz' = -\frac{t}{z} dt, \quad z' - z = \frac{R^2 - t^2 - z^2}{2z},$$

тогда

$$\begin{aligned} J_2(z) &= \int_{-R}^R \frac{(z' - z) dz'}{\sqrt{R^2 - 2zz' + z^2}} = \int_{|R+z|}^{|R-z|} \frac{\frac{R^2 - t^2 - z^2}{2z} \left(-\frac{t}{z}\right) dt}{t} = \\ &= -\frac{1}{2z^2} \int_{|R+z|}^{|R-z|} (R^2 - t^2 - z^2) dt = -\frac{1}{2z^2} \left[ (R^2 - z^2)t - \frac{t^3}{3} \right] \Big|_{|R+z|}^{|R-z|} = \\ &= -\frac{1}{2z^2} \left\{ (R^2 - z^2)[|R = z| - |R + z|] - \frac{1}{3} [|R = z|^3 - |R + z|^3] \right\} = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Найдем величину  $\mathbb{I}$  для различных промежутков изменения  $z$  по отдельности:

а) для  $z \geq R$  получим

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= -\frac{1}{2z^2} \left\{ (R^2 - z^2)[R = z - R - z] - \frac{1}{3} [(R = z)^3 - (R + z)^3] \right\} = \\ &= -\frac{1}{2z^2} \left( -\frac{4}{3}R^3 + 4z^2R \right) = \frac{2R^3}{3z^2} - 2R; \end{aligned}$$

б) для  $z \leq R$  получим

$$\mathbb{I} = -\frac{1}{2z^2} \left\{ (R^2 - z^2)[R = z - R - z] - \frac{1}{3} [(z = R)^3 - (R + z)^3] \right\} = -\frac{1}{2z^2} \frac{8z^3}{3} = -\frac{4z}{3}.$$

Это означает, что

$$J_1(z) = \begin{cases} \frac{2R^3}{3z^2} - 2R, & z \geq R, \\ -\frac{4z}{3}, & z \leq R. \end{cases} \quad (16.21)$$

Подставив (16.20) и (16.21) в (16.19), получим

$$F_z = 2\pi\gamma\mu \begin{cases} -2R - \frac{2R^3}{3z^2} + 2R = -\frac{2R^3}{3z^2}, & z \geq R; \\ -2z + \frac{4z}{3} = -\frac{2z}{3}, & z \leq R, \end{cases}$$

или

$$F_z = \begin{cases} -\gamma\mu \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{z^2}, & z \geq R; \\ -\gamma\mu \frac{4\pi z}{3}, & z \leq R. \end{cases} \quad (16.22)$$

В дополнение к (16.22) имеем:

$$F_x = \gamma\mu \iiint_G \frac{x' dx' dy' dz'}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = 0,$$

$$F_y = \gamma\mu \iiint_G \frac{y' dx' dy' dz'}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = 0.$$

Это следует из нечетности подынтегральных функций по переменным  $x'$  и  $y'$ , соответственно, и симметрии области  $G$  относительно координатных плоскостей.

Таким образом, материальная точка испытывает притяжение, направленное к центру шара. При этом точка, находящаяся вне сферы  $z \geq R$ , испытывает со стороны шара такое же притяжение, какое она испытывала бы, если вся масса шара была бы сосредоточена в его центре. Точка же, расположенная внутри сферы  $z \leq R$ , испытывает притяжение только от той части шара, радиус которой равен  $z$ . Это означает, что наружный сферический слой с радиусом от  $z$  до  $R$  не оказывает на внутреннюю точку никакого действия.

**Пример 16.5.** Найти потенциал однородного шара в произвольной точке  $P$ .

**Решение.** В обозначениях предыдущего примера (см. рис. 128) и в силу (16.9) имеем

$$\begin{aligned} U(0, 0, z) &= \iiint_G \frac{\mu dx' dy' dz'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2}} = \\ &= \mu \int_{-R}^R dz' \iint_{D(z')} \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2}} = \mu \int_{-R}^R dz' J(z'). \end{aligned} \quad (16.23)$$

Внутренний интеграл  $J(z')$  по аналогии с интегралом (16.18) из предыдущего примера легко вычисляется переходом к полярным координатам  $x' = \rho \cos \varphi$ ,  $y' = \rho \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} J(z') &= \iint_{D(z')} \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - (z')^2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z' - z)^2}} = \\ &= 2\pi(\sqrt{R^2 - 2zz' + z^2} - |z' - z|). \end{aligned}$$

Подставив найденное выражение в (16.23), получим

$$U(0, 0, z) = 2\pi\mu \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - 2zz' + z^2} - |z' - z|) dz' = 2\pi\mu [J_2(z) - J_1(z)]. \quad (16.24)$$

При вычислении интеграла  $J_1(z)$  имеем:

а) для  $z \geq R$

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \int_{-R}^R |z' - z| dz' = - \int_{-R}^R (z' - z) d(z' - z) = - \frac{(z' - z)^2}{2} \Big|_{-R}^R = \\ &= -\frac{1}{2} [(R - z)^2 - (R + z)^2] = 2Rz; \end{aligned}$$

б) для  $z \leq R$

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \int_{-R}^R |z' - z| dz' = - \int_{-R}^z (z' - z) dz' + \int_z^R (z' - z) dz' = \\ &= - \frac{(z' - z)^2}{2} \Big|_{-R}^z + \frac{(z' - z)^2}{2} \Big|_z^R = \frac{1}{2}(R + z)^2 + \frac{1}{2}(R - z)^2 = R^2 + z^2. \end{aligned}$$

Аналогично при вычислении интеграла  $J_2(z)$  имеем:

а) для  $z \geq R$

$$J_2(z) = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - 2zz' + z'^2} dz' = \frac{1}{3z} [(R + z)^3 - |R - z|^3] = \frac{2R^3}{3z} + 2Rz;$$

б) для  $z \leq R$

$$J_2(z) = \frac{1}{3z} [(R + z)^3 - |R - z|^3] = \frac{2z^2}{3} + 2R^2.$$

Таким образом,

$$J_1(z) = \begin{cases} 2Rz, & z \geq R, \\ z^2 + R^2, & z \leq R; \end{cases} \quad J_2 = \begin{cases} \frac{2R^3}{3z} + 2Rz, & z \geq R; \\ \frac{2z^2}{3} + 2R^2. & \end{cases}$$

Подставив эти значения в (16.24), окончательно получим

$$U(0, 0, z) = \begin{cases} \mu \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{z}, & z \geq R; \\ 2\pi\mu \left( R^2 - \frac{z^2}{3} \right), & z \leq R. \end{cases} \quad (16.25)$$

Первая формула в (16.25) означает, что потенциал, созданный однородным шаром на точку  $P$ , лежащую вне шара, таков же, как если бы вся масса была бы сосредоточена в его центре.

Вторая формула в (16.25) позволяет сделать следующий вывод. Если мы будем рассматривать потенциал однородного сферического слоя с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним  $R_2$  на точку  $P$ , лежащую во внутренней полости ( $z < R_1$ ), то потенциал найдётся как

$$U(z) = U_2(z) - U_1(z) = 2\pi\mu \left[ \left( R_2^2 - \frac{z^2}{3} \right) - \left( R_1^2 - \frac{z^2}{3} \right) \right] = 2\pi\mu(R_2^2 - R_1^2).$$

Это означает, что потенциал внутри полый сферы  $z < R$  сохраняет постоянное значение. Следовательно, разность потенциалов в двух ее произвольных точках в этом случае равна нулю.

◇ По решениям примеров 16.4 и 16.5 необходимо сделать следующие замечания. Интегралы (16.16) и (16.23) из этих примеров представляют собой частные случаи интегралов (16.9) и (16.10), содержащих множители вида

$$\frac{1}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{1/2}}, \quad \frac{1}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}.$$

Эти множители являются ограниченными функциями, если точки  $P(x, y, z)$  лежат вне сферы  $(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2 = R^2$ , и неограниченными для точек, лежащих внутри нее, где возможно выполнение равенств  $x' = x, y' = y, z' = z$ . Интегралы от ограниченных функций существуют и вычисляются стандартными способами. Как видно из решений примеров (и будет показано ниже), интегралы вида (16.9) и (16.10) существуют и для неограниченных функций, т. е. для внутренних точек сферы. Более того, эти интегралы можно дифференцировать по любым переменным  $x, y, z$  и для них выполняется равенство

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla}U(x, y, z). \quad (16.26)$$

Действительно, дифференцирование функции (16.25) по переменной  $z$  дает значение  $F_z$  (16.22):

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{z} \right) = -\frac{\mu 4\pi R^3}{3} \frac{1}{z^2} = F_z, & z \geq R; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\pi\mu \left( R^2 - \frac{z^2}{3} \right) \right] = -\frac{\mu 4\pi z}{3} = F_z, & z \leq R. \end{cases}$$

**Пример 16.6.** Найти притяжение центра основания однородного цилиндра всей его массой.

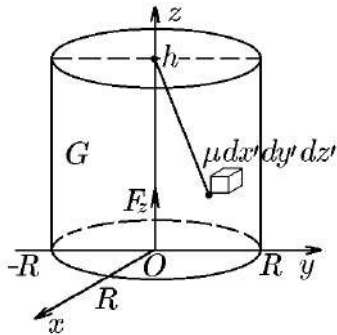


Рис. 129. Однородный цилиндр

**Решение.** Пусть  $\mu$  – плотность вещества, заполняющего круговой цилиндр радиусом  $R$  и высотой  $h$ . Систему координат  $Oxyz$  выберем так, чтобы ее начало  $O(0, 0, 0)$  совпадало с центром нижнего основания, а ось  $Oz$  была осью симметрии самого цилиндра (рис. 129). Координаты точек, принадлежащих цилиндру  $G$ , будем обозначать через  $x', y', z'$ . Их множество задается неравенствами

$$G: (x')^2 + (y')^2 \leq R^2, \quad 0 \leq z' \leq h. \quad (16.27)$$

Поскольку центр основания совпадает с началом координат  $O(0, 0, 0)$ , то в силу (16.10) имеем

$$F_z = \gamma\mu \iiint_G \frac{z' dx' dy' dz'}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}.$$

Переход в этом интеграле к цилиндрическим координатам  $x' = \rho \cos \varphi, y' = \rho \sin \varphi, z' = z'$  позволяет свести его к повторным:

$$F_z = \gamma\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^h \frac{z' dz'}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}},$$

вычисление которых дает

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi\gamma\mu \int_0^R \rho d\rho \int_0^h \frac{z' dz'}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}} = \pi\gamma\mu \int_0^R \rho d\rho \frac{(-2)}{[\rho^2 + (z')^2]^{1/2}} \Big|_0^h = \\ &= 2\pi\gamma\mu \int_0^R \rho d\rho \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right) = 2\pi\gamma\mu \left( R - \sqrt{\rho^2 + h^2} \Big|_0^R \right) = \end{aligned}$$

$$= 2\pi\gamma\mu(R - \sqrt{\rho^2 + h^2} + h) = 2\pi\gamma\mu(R + h - \sqrt{\rho^2 + h^2}). \quad (16.28)$$

В дополнение к (16.28) имеем:

$$F_x = \gamma\mu \iiint_G \frac{x' dx' dy' dz'}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = 0,$$

$$F_y = \gamma\mu \iiint_G \frac{y' dx' dy' dz'}{[(x')^2 + (y')^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = 0,$$

что следует из нечетности подынтегральных функций по переменным  $x'$  и  $y'$ , соответственно, и симметрии области  $G$  относительно координатных плоскостей  $x = x' = 0$ ,  $y' = y = 0$ .

Таким образом, притяжение центра основания направлено вертикально вверх по оси  $Oz$  и определяется выражением (16.28).

Как и в случае двойных интегралов, тройной интеграл можно использовать для вычисления площадей поверхностей, но уже четырехмерных. Такие задачи не имеют прямого наглядного приложения, но имеют смысл как абстрактное обобщение задач меньших размерностей. Действительно, если уравнение

$$V_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (16.29)$$

задает четырехмерную поверхность в пространстве  $\mathbb{R}^4$ , которая проектируется в трехмерную поверхность  $G \subset \mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ), то площадь  $S_4$  задается тройным интегралом

$$S_4 = \iiint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)^2} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (16.30)$$

**Пример 16.7.** Найти площадь части четырехмерной гиперплоскости

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_4}{a_4} = 1, \quad (16.31)$$

ограниченной координатными подпространствами  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

**Решение.** Исходя из (16.31) и в силу (16.30), имеем

$$S_4 = \iiint_G \sqrt{1 + \left(\frac{a_4}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{a_4}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{a_4}{a_3}\right)^2} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (16.32)$$

где область  $G$  представляет собой трехмерный симплекс

$$G = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_4}{a_4} \leq 1 \right\}. \quad (16.33)$$

С учетом этого запишем

$$S_4 = a_4 \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2}} \iiint_G dx_1 dx_2 dx_3,$$



а поскольку тройной интеграл здесь определяет объем  $V_3$  симплекса  $G$ , то

$$\iiint_G dx_1 dx_2 dx_3 = V_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{6}$$

и

$$S_4 = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2}} \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{6}.$$

**Пример 16.8.** Найти площадь части четырехмерной гиперсферы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2. \quad (16.34)$$

**Решение.** Исходя из уравнения (16.34), для половины гиперсферы  $S_4^+$

$$x_4 = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2},$$

согласно (16.32) имеем

$$S_4^+ = \iiint_G \sqrt{1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (16.35)$$

где область  $G$  – трехмерный шар  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ .

Переход здесь к сферическим координатам дает

$$S_4^+ = R \iiint_G \frac{d\varphi \sin \theta d\theta r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Замена  $r = R \sin \alpha$  приводит этот интеграл к виду

$$S_4^+ = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha = 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \pi^2 R^3.$$

Поскольку площадь всей гиперсферы  $S_4 = 2S_4^+$ , то

$$S_4 = 2S_4^+ = 2\pi^2 R^3.$$

При вычислении интеграла (16.35) мы воспользовались замечанием к решению примеров 16.4 и 16.5, поскольку интеграл (16.35) содержит множитель вида

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}},$$

неограниченный на множестве  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ .

## 17. Приложения $n$ -кратных интегралов ( $n > 3$ )

При рассмотрении  $n$ -кратных интегралов при  $n > 3$  используются пространства  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n > 3$ , не имеющие наглядного геометрического истолкования. Тем не менее ниже мы рассмотрим формализм перехода решения задач из пространств  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  на пространства  $\mathbb{R}^n$  при  $n > 3$  с помощью соответствующих  $n$ -кратных интегралов. Перед этим, однако, мы все же обратимся к задачам, которые и в пространствах размерности  $n > 3$  имеют наглядную интерпретацию.

Начнем с задачи о притяжении двух тел. Через  $x, y, z$  будем обозначать координаты точек области  $G$ , а через  $x', y', z'$  – координаты точек области  $G'$ . Пусть в области  $G$  распределена масса с плотностью  $\mu(x, y, z)$ , а в области  $G'$  – с плотностью  $\mu'(x', y', z')$  соответственно. Таким образом, имеем два тела:  $G$  и  $G'$ . В каждом из тел выделим по элементу с массой  $\mu dx dy dz$  и  $\mu' dx' dy' dz'$ . Тогда взаимодействие между этими элементами будет описываться по закону Ньютона:

$$\frac{\mu\mu' dx dy dz dx' dy' dz'}{r_{12}^2},$$

где  $r$  есть расстояние между элементами масс

$$r_{12} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Если считать, что эта сила направлена от точки  $(x, y, z)$  к точке  $(x', y', z')$ , то её направляющие косинусы определяются как

$$\left( \frac{x' - x}{r}, \frac{y' - y}{r}, \frac{z' - z}{r} \right).$$

Поэтому проекция, например, на ось  $Ox$  силы притяжения первого элемента вторым равна:

$$dF_x = \frac{\mu\mu'(x' - x)}{r_{12}^3} dx' dy' dz' dx dy dz.$$

Проекция же  $F_x$  результирующей силы, с которой второе тело притягивает первое, получается суммированием найденных выражений по всем элементам обоих тел, т. е. шестикратным интегралом

$$F_x = \int \dots \int_{\tilde{G}} \frac{\mu\mu'}{r_{12}^3} (x' - x) dx' dy' dz' dx dy dz \quad (17.1)$$

по шестимерной области  $\tilde{G} = G \times G'$  точек  $(x', y', z', x, y, z)$ . Аналогично выражаются две другие проекции:

$$\begin{aligned} F_y &= \int \dots \int_{\tilde{G}} \frac{\mu\mu'}{r_{12}^3} (y' - y) dx' dy' dz' dx dy dz; \\ F_z &= \int \dots \int_{\tilde{G}} \frac{\mu\mu'}{r_{12}^3} (z' - z) dx' dy' dz' dx dy dz. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Исходя из того, что величина

$$dU = \frac{\mu\mu' dx dy dz dx' dy' dz'}{r_{12}}$$

есть потенциал одного элемента на другой, то, суммируя эти выражения, получим потенциал одного тела на другое, снова в виде шестикратного интеграла

$$U = \int \dots \int_{\tilde{G}} \frac{\mu\mu'}{r_{12}} dx' dy' dz' dx dy dz. \quad (17.3)$$

В частном случае, когда оба тела тождественны, интеграл

$$U = \frac{1}{2} \int \dots \int_{\tilde{G}} \frac{\mu^2}{r_{12}} dx' dy' dz' dx dy dz \quad (17.4)$$

определяет потенциал тела на себя. Множитель  $1/2$  здесь присутствует для того, чтобы каждая пара элементов не учитывалась дважды.

**Пример 17.1.** Вычислить потенциал на себя однородного шара радиусом  $R$  с плотностью  $\mu$ .

**Решение.** Искомый потенциал рассчитывается по формуле (17.4), т. е. интегралом

$$U = \frac{1}{2} \int \dots \int_{\tilde{G}} \frac{\mu^2}{r} dx' dy' dz' dx dy dz, \quad (17.5)$$

где  $\tilde{G} = G \times G'$ , причем

$$G: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad G': (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \leq R^2.$$

Шестикратный интеграл (17.5) можно представить повторными интегралами следующего вида:

$$U = \frac{\mu^2}{2} \iiint_G dx dy dz \iiint_{G'} \frac{dx' dy' dz'}{r_{12}}. \quad (17.6)$$

Внутренний интеграл в (17.6) определяет потенциал шара  $G'$  на элемент  $dx dy dz$  с координатами  $x, y, z$ , отстоящий на расстоянии

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R$$

от центра шара. Этот потенциал был вычислен в примере 16.5 и равен, согласно выражению (16.25),

$$\iiint_{G'} \frac{dx' dy' dz'}{r_{12}} = 2\pi \left( R^2 - \frac{r_1^2}{3} \right).$$

Подставив это выражение в (17.6), получим

$$U = \frac{\mu^2}{2} \iiint_G 2\pi \left[ R^2 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) \right] dx dy dz.$$

Переход к сферическим координатам

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

позволяет свести тройной интеграл к повторным:

$$\begin{aligned} U &= \pi\mu^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R \left(R^2 - \frac{r^3}{3}\right) r^2 dr = 4\pi^2\mu^2 \int_0^R \left(R^2 - \frac{r^3}{3}\right) r^2 dr = \\ &= 4\pi^2\mu^2 \left(R^2 \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right) \Big|_0^R = \frac{16\pi^2\mu^2 R^5}{15}. \end{aligned}$$

**Пример 17.2.** Найти объем  $V_n$   $n$ -мерного симплекса

$$G_n: \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \leq 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17.7)$$

**Решение.** Согласно геометрической интерпретации  $n$ -кратного интеграла, объем  $V_n$  симплекса (17.7) находится как

$$V_n = \int_{G_n} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (17.8)$$

Сведение такого интеграла к повторным для  $n = 4$  приведено в примере 7.11. Обобщение этого четырехмерного случая позволяет записать выражение (17.8) в виде

$$V_n = \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2(1-\frac{x_1}{a_1})} dx_2 \dots \int_0^{a_{n-1}(1-\frac{x_1}{a_1}-\dots-\frac{x_{n-2}}{a_{n-2}})} dx_{n-1} \int_0^{a_n(1-\frac{x_1}{a_1}-\dots-\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}})} dx_n. \quad (17.9)$$

Последовательное вычисление здесь внутренних интегралов дает

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{a_n(1-\frac{x_1}{a_1}-\dots-\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}})} dx_n = a_n \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \dots - \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right), \\ I_{n-1} &= \int_0^{a_{n-1}(1-\frac{x_1}{a_1}-\dots-\frac{x_{n-2}}{a_{n-2}})} I_n dx_{n-1} = a_n \int_0^{a_{n-1}(1-\frac{x_1}{a_1}-\dots-\frac{x_{n-2}}{a_{n-2}})} \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \dots - \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right) dx_{n-1} = \\ &= a_n a_{n-1} \int_0^{a_{n-1}(1-\frac{x_1}{a_1}-\dots-\frac{x_{n-2}}{a_{n-2}})} \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \dots - \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right) d\left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \dots - \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right) = \\ &= a_n a_{n-1} \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \dots - \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2 \Big|_0^{a_{n-1}(1-\frac{x_1}{a_1}-\dots-\frac{x_{n-2}}{a_{n-2}})} = \\ &= a_n a_{n-1} \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \dots - \frac{x_{n-2}}{a_{n-2}}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{a_1} I_2 dx_1 = \int_0^{a_1} \frac{a_n \dots a_2}{(n-1)!} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^{n-1} dx_1 = -\frac{a_n \dots a_2 a_1}{(n-1)!} \int_0^{a_1} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^{n-1} d\left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right) = \\ &= -\frac{a_n \dots a_1}{(n-1)!} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)^n \Big|_0^{a_1} = \frac{a_n \dots a_1}{n!}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу формулы (17.9) найдем

$$V_n = I_1 = \frac{a_n \cdots a_1}{n!}. \quad (17.10)$$

◇ Формула (17.10), по сути дела, определяет объем  $n$ -мерной «пирамиды», ортогональные ребра  $a_1, \dots, a_n$  которой выходят из одной вершины. Рассмотрим некоторые частные значения  $n$ :

1)  $n = 1$ , в этом случае одномерное тело представляет собой отрезок

$$0 \leq x_2 \leq a_1.$$

Мерой отрезка  $G_1$  является его длина  $L$  (одномерный объем  $V_1$ ), равная, согласно (17.10),

$$m(G_1) = V_1 = L = a_1;$$

2)  $n = 2$ , в этом случае двумерное тело представляет собой прямоугольный треугольник с катетами  $a_1$  и  $a_2$ . Мерой треугольника  $G_2$  является его площадь  $S$  (двумерный объем  $V_2$ ), равная, согласно (17.10),

$$m(G_2) = V_2 = S = \frac{a_1 a_2}{2};$$

3)  $n = 3$ , в этом случае трехмерное тело представляет собой треугольную пирамиду  $G_3$  с ортогональными ребрами  $a_1, a_2, a_3$ , выходящими из одной вершины. Мерой такой пирамиды  $G_3$  является её объем  $V_3$ , равный, согласно формуле (17.10),

$$m(G_3) = V_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{6}$$

и т. д.

**Пример 17.3.** Найти объем  $n$ -осного эллипсоида.

**Решение.** В пространстве  $\mathbb{R}^n$   $n$ -осный эллипсоид  $G_n$  задается неравенством

$$G_n: \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 \leq 1. \quad (17.11)$$

Его объем  $V_n$  как мера множества  $G_n$  определяется  $n$ -кратным интегралом

$$V_n = \int \cdots \int_{G_n} dx_1 \cdots dx_n. \quad (17.12)$$

Переход в этом интеграле к обобщенным  $n$ -мерным сферическим координатам (14.7) с якобианом (14.8) позволяет записать его как

$$\begin{aligned} V_n &= \int \cdots \int_{G_n} dx_1 \cdots dx_n = a_1 \cdots a_n \int \cdots \int_{G'_n} r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1} \varphi_j dr d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} = \\ &= a_1 \cdots a_n \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} \int_0^1 r^{n-1} dr = \\ &= \frac{a_1 \cdots a_n}{n} 2\pi \prod_{j=2}^{n-1} \int_0^{\pi} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \frac{2\pi a_1 \cdots a_n}{n} 2^{n-2} \prod_{j=2}^{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (14.14) произведение интегралов здесь равно

$$\prod_{j=2}^{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{\Gamma(n/2)},$$

то

$$V_n = \frac{2\pi a_1 \cdots a_n}{n} 2^{n-2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2} a_1 \cdots a_n}{n\Gamma(n/2)/2} = \frac{\pi^{n/2} a_1 \cdots a_n}{\Gamma(n/2 + 1)}. \quad (17.13)$$

Это выражение можно упростить, используя частные значения гамма-функции (14.10):

$$V_n = \begin{cases} V_{2k-1} = \frac{2^k \pi^{k-1} a_1 \cdots a_{2k-1}}{(2k-1)!}, \\ V_{2k} = \frac{\pi^k a_1 \cdots a_{2k}}{(2k)!}, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (17.14)$$

Формулы (17.13), (17.14), по сути дела, определяют объем  $n$ -осного эллипсоида. Их частные значения для конкретных значений  $n$  равны:

1)  $n = 1$  ( $k = 1$ ), в этом случае одномерное тело представляет собой отрезок  $-a_1 \leq x_1 \leq a_1$ , поскольку  $x_1^2 = a_1^2$ . Мерой отрезка  $G_1$  является его длина  $L$  (одномерный объем  $V_1$ ):

$$m(G_1) = V_1 = L = 2a_1;$$

2)  $n = 2$  ( $k = 1$ ), в этом случае двумерное тело представляет собой эллипс с полуосями  $a_1, a_2$ . Мерой эллипса  $G_2$  является его площадь  $S$  (двумерный объем  $V_2$ ):

$$m(G_2) = V_2 = S = \pi a_1 a_2;$$

3)  $n = 3$  ( $k = 2$ ), в этом случае трехмерное тело  $G_3$  представляет собой трехосный эллипсоид с полуосями  $a_1, a_2, a_3$ . Мерой такого эллипсоида  $G_3$  является его объем  $V_3$ :

$$m(G_3) = V_3 = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{3};$$

4)  $n = 4$  ( $k = 2$ ), в этом случае четырехмерное тело  $G_4$  представляет собой четырехосный эллипсоид с полуосями  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Мерой такого эллипсоида  $G_4$  является его объем  $V_4$ :

$$m(G_4) = V_4 = \frac{\pi^2 a_1 a_2 a_3 a_4}{2}$$

и т. д.

При  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = R$  формула (17.13) совпадает с формулой (14.15) для объема  $n$ -мерного шара радиусом  $R$ . Частные значения (17.14) совпадают с частными значениями, вытекающими из формулы (14.15) для шаров заданных размерностей  $n = 1, 2, 3, 4$ .

**Пример 17.4.** Найти объем  $n$ -мерного конуса  $G_n$ , ограниченного конической поверхностью

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 \quad (17.15)$$

и гиперплоскостью  $x_n = a_n > 0$ .

**Решение.** Объем  $V_n$   $n$ -мерного конуса как мера множества  $G_n$  определяется  $n$ -кратным интегралом

$$V_n = m(G_n) = \int \cdots \int_{G_n} dx_1 \cdots dx_n. \quad (17.16)$$

Этот интеграл при помощи перехода к обобщенной  $n$ -мерной цилиндрической системе координат (14.21) вычислен в примере 14.5 и равен:

$$V_n = \frac{\pi^{(n-1)/2} a_1 \cdots a_n}{[(n-1)/2]n\Gamma((n-1)/2)} = \frac{\pi^{(n-1)/2} a_1 \cdots a_n}{n\Gamma((n+1)/2)}, \quad (17.17)$$

там же приведены частные значения  $V_n$  для размерностей  $n = 2, 3, 4$ :

$$V_2 = S = a_1 a_2, \quad V_3 = V = \frac{1}{3} \pi a_1 a_2 a_3, \quad V_4 = \frac{\pi a_1 a_2 a_3 a_4}{3}.$$

В заключение рассмотрим еще один тип задач, представляющий собой обобщение задач о вычислении массы, заряда и других физических величин в  $\mathbb{R}^3$  на пространства  $\mathbb{R}^n$ . Такой задачей является задача о восстановлении аддитивной функции по ее плотности.

Пусть  $M(G)$  – аддитивная функция компакта  $G$ , удовлетворяющая условию

$$M(G_1 \cup G_2) = M(G_1) + M(G_2)$$

для любых двух компактов без общих внутренних точек. Для ее характеристики введем следующее определение.

◆ Число

$$\mu(P) = \lim_{G \rightarrow P} \frac{M(G)}{m(G)}, \quad (17.18)$$

где  $m(G)$  – мера компакта  $G$ , будем называть *плотностью функции  $M$*  в точке  $P \in G \subset \mathbb{R}^n$ .

Если функция  $\mu(P)$ , т. е.  $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – плотность аддитивной функции  $M$  – является непрерывной или кусочно-непрерывной на компакте  $G$ , то

$$M(G) = \int \cdots \int_G \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \quad (17.19)$$

**Пример 17.5.** Восстановить аддитивную функцию  $M(G)$ , заданную на  $n$ -мерном кубе

$$G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, n}\}$$

с плотностью  $\mu(x_1, \dots, x_n)$ , пропорциональной квадрату расстояния от начала координат  $O(0, \dots, 0)$  до точки  $P(x_1, \dots, x_n) \in G$ .

**Решение.** Исходя из условий задачи, плотность  $\mu(x_1, \dots, x_n)$  с помощью коэффициента пропорциональности  $\alpha$  можно записать в виде

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1^2 + \dots + x_n^2) = \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

С учетом этого, согласно формуле (17.19), имеем

$$M(G) = \int \cdots \int_G \mu(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_G \left( \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) dx_1 \cdots dx_n = \alpha \sum_{i=1}^n J_i,$$

где

$$J_i = \int \cdots \int_G x_i^2 dx_1 \cdots dx_n.$$

Этот интеграл был вычислен в примере 7.15, согласно (7.97):

$$J_i = \frac{1}{3},$$

следовательно,

$$M(G) = \alpha \frac{n}{3}.$$



### РАЗДЕЛ 3

## Криволинейные и поверхностные интегралы

### 18. Криволинейные интегралы

Как и при рассмотрении определенного и кратных интегралов, начнем с одной физической задачи, приводящей к понятию еще одного типа интегралов – криволинейных.

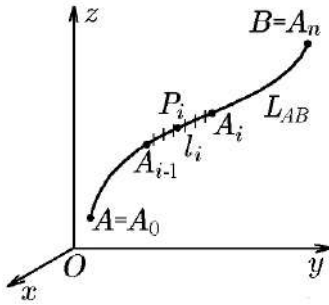


Рис. 130.  $L_{AB} \subset \mathbb{R}^3$

В пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим простейшую спрямляемую материальную кривую  $L_{AB}$  (рис. 130) с линейной плотностью  $\rho(P)$ , заданной во всех ее точках  $P \in L_{AB}$ .

По заданной плотности  $\rho(P)$  и исходя из формы кривой  $L_{AB}$  требуется найти ее массу  $M$ . Для решения этой задачи кривую  $L_{AB}$  разобьем точками  $A_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , так, что

$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B.$$

Заметим, что нумерация точек  $A_i$  от  $A$  к  $B$  не является в данном случае принципиальной и может быть проведена в противоположном направлении. Далее, взяв на дуге  $A_{i-1}A_i$  произвольную точку  $P_i$  (рис. 130), найдем ее плотность  $\rho(P_i)$  в этой точке. Теперь, считая величину  $\rho(P_i)$  приближенно равной средней плотности дуги  $A_{i-1}A_i$  и обозначив длину этой дуги через  $l_i$ , для массы дуги  $A_{i-1}A_i$  будем иметь приближенное значение

$$M_i = \rho(P_i)l_i, \quad i = \overline{1, n},$$

а для искомой массы  $M$  – ее приближенное значение  $M_n$  в виде суммы

$$M_n = \sum_{i=1}^n \rho(P_i)l_i. \quad (18.1)$$

Погрешность значения  $M_n$ , связанная с допущенным выше приближением, будет стремиться к нулю, если длины  $l_i$  всех участков без исключения будут стремиться к нулю. Таким образом, положив  $d = \max l_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , точное значение  $M$  получим предельным переходом при  $d \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$M = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n \rho(P_i)l_i. \quad (18.2)$$

Выражение (18.2) можно рассматривать как предел своего рода «интегральной суммы» (18.1). Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения кривой точками  $A_i$  и выбора точек  $P_i$ , то его мы и будем называть *криволинейным интегралом* от функции  $f(P)$  по длине дуги кривой  $L_{AB}$  (или *криволинейным интегралом первого рода*) и обозначать как

$$\int_{L_{AB}} \rho(P)dl = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n \rho(P_i)l_i. \quad (18.3)$$

Формула (18.3) дает решение задачи о вычислении массы  $M$  в виде криволинейного интеграла по длине дуги, или криволинейного интеграла первого рода. Но для ее практического использования мы должны указать еще способы его вычисления и вытекающие из них свойства, как это было сделано для определенного и кратных интегралов. Очевидно, что способы вычисления криволинейных интегралов по длине дуги (первого рода), которые нам предстоит установить, будут зависеть от аналитических представлений кривых  $L_{AB}$ . Поэтому ниже мы продолжим рассмотрение аналитических представлений гладких и кусочно-гладких кривых, начатое при рассмотрении вектор-функций скалярного аргумента [18].

Предварительно, однако, отметим, что и без этих уточнений, исходя только из равенства (18.3), можно уже сформулировать два важных свойства криволинейных интегралов первого рода:

1. Криволинейный интеграл (18.3) не зависит от того, является ли точка  $A$  начальной или конечной точкой кривой, т. е. интегралы по кривым  $L_{AB}$  и  $L_{BA}$  совпадают:

$$\int_{L_{AB}} \rho(P) dl = \int_{L_{BA}} \rho(P) dl. \quad (18.4)$$

Это легко объясняется тем, что величина  $l_i$  в (18.3) представляет собой длину дуги между двумя точками  $A_{i-1}$  и  $A_i$  и, следовательно, по определению является величиной положительной независимо от того, какая из них является начальной, а какая конечной. Кроме того, равенство (18.4) полностью соответствует физическому смыслу задачи.

2. При  $\rho(P) \equiv 1$  интеграл (18.3) определяет длину  $\mathcal{L}$  кривой, по которой ведется интегрирование, т. е.

$$\mathcal{L} = \int_{L_{AB}} dl = \int_{L_{BA}} dl. \quad (18.5)$$

### 18.1. Параметризация гладкой кривой и производная переменной длины дуги

Определения и свойства простых, гладких и кусочно-гладких кривых в  $\mathbb{R}^3$  частично уже рассматривались в [18]. Здесь мы частично напомним эти определения и свойства, а также дополним их приложениями, необходимыми для работы с криволинейными интегралами.

Рассмотрим два евклидовых пространства:  $\mathbb{R}^3$  с декартовой системой координат  $Oxyz$  в ортонормированном базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и одномерное  $\mathbb{R}$  – числовую ось  $Ot$ .

Если на отрезке  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  заданы непрерывные функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , то говорят, что задано непрерывное отображение отрезка  $[\alpha, \beta]$  в трехмерное пространство. Как уже отмечалось ранее, числа  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  в  $\mathbb{R}^3$  можно рассматривать как точки  $M(t) = M(x = x(t), y = y(t), z = z(t))$  или координаты радиус-вектора  $\vec{r}(t)$  с началом в точке  $O$  и концом в точке  $M(t)$ , т. е.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = (x = x(t), y = y(t), z = z(t)).$$

Величину  $t$ , вообще говоря, можно отождествлять с длиной, углом, временем и пр. Если считать, что переменная  $t$  есть время, то задающие отображение

отрезка  $[\alpha, \beta]$  в  $\mathbb{R}^3$  уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (18.6)$$

определяет закон движения точки  $M(t)$ , а множество точек  $\mathcal{M}(t)$ , соответствующих всем  $t \in [\alpha, \beta]$ , можно рассматривать как траекторию точки, движущейся по закону (18.6) (рис. 131).

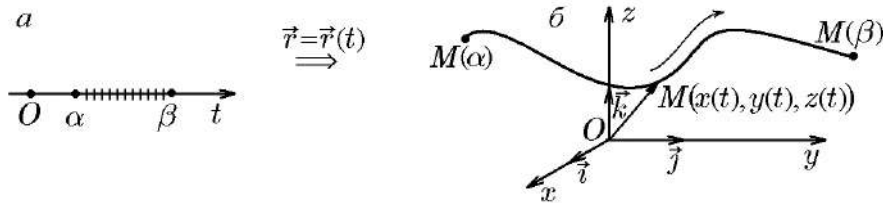


Рис. 131. Траектория  $M(t)$

Предположим, что на этой траектории двум различным значениям  $t_1$  и  $t_2$  из  $[\alpha, \beta]$  соответствуют различные точки  $M(t_1)$  и  $M(t_2)$ . Множество всех точек  $M(x, y, z)$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , координаты  $x, y, z$  которых определяются формулами (18.6), обозначим через  $\mathcal{M}$ . Будем говорить, что точка  $M_1 = M(t_1)$  предшествует точке  $M_2 = M(t_2)$  (или  $M_2$  следует за  $M_1$ ), если  $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$ . Такое правило следования точек устанавливает порядок на множестве  $\mathcal{M}$ . Упорядоченное таким образом множество точек  $\mathcal{M}$  будем называть *простой кривой*  $L$  и записывать в координатной форме:

$$L = \{(x, y, z): x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad (18.7)$$

или в векторной:

$$L = \{(x, y, z): \vec{r} = \vec{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad (18.8)$$

$$\vec{r} = (x = x(t), y = y(t), z = z(t))$$

Переменную  $t$  в уравнениях (18.7) и (18.8) принято называть *параметром*, а сами соотношения – *параметрическим представлением простой кривой*  $L$ .

Заметим, что, согласно определению простой прямой, отображение (18.6) является взаимно однозначным: каждому значению  $t \in [\alpha, \beta]$  соответствует единственная точка  $M(t) \in L$  и, наоборот, каждой точке  $M \in L$  соответствует единственное значение  $t \in [\alpha, \beta]$ . Точки  $M(\alpha)$  и  $M(\beta)$  называются *начальной* и, соответственно, *конечной* точками кривой  $L$ . Для краткости эти точки зачастую обозначают как  $M(\alpha) = A$ ,  $M(\beta) = B$ , а саму кривую –  $L_{AB}$ .

Если на отрезке  $[\alpha, \beta]$  существуют два значения  $t_2 > t_1$ , для которых  $M(t_2) = M(t_1)$ , т. е.  $\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1)$ , то в этом случае отображение (18.6) на отрезке  $[\alpha, \beta]$  в  $\mathbb{R}^3$  не является однозначным.

Предположим, что отрезок  $[\alpha, \beta]$  допускает разбиение на отрезки

$$\Delta_k = [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1, n},$$

где

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

такие, что каждое из непрерывных отображений,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in \Delta_k, \quad k = \overline{1, n},$$

является взаимно однозначным и, следовательно, определяет простую кривую  $L_k$  параметрическим представлением:

$$L = \{(x, y, z): x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \Delta_k\}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (18.9)$$

В этом случае кривую  $L$  можно рассматривать как упорядоченную совокупность  $(L_1, \dots, L_n)$  простых кривых  $L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , такую, что конечная точка простой кривой  $L_k$  совпадает с начальной точкой простой кривой  $L_{k+1}$ . Такое представление кривой  $L$  называют *параметризацией простыми кривыми*  $L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Говорят также, что кривая  $L$  составлена из простых кривых  $L_k$ , и пишут  $L = L_1 L_2 \dots L_n$ , называя  $L_k$  *простой дугой* кривой  $L$ .

Возвратившись к самой точке  $M$ , в которой выполняется равенство  $M = M(t_1) = M(t_2)$ , или  $\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1)$ , и тем самым нарушается взаимная однозначность отображения  $[\alpha, \beta]$  в  $\mathbb{R}^3$ , отметим, что такая точка  $M$  называется *кратной точкой кривой  $L$* , или *точкой самопересечения*.

При этом, если равенство  $\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1)$  выполняется при  $t_1 = \alpha$  и  $t_2 = \beta$ , то кривая  $L$  называется *замкнутой* и для неё начальная точка  $A = M(\vec{r}(\alpha))$  совпадает с конечной точкой  $B = M(\vec{r}(\beta))$ :  $A = B$ ,  $A, B \in L$ . Замкнутую кривую, не имеющую точек самопересечения, отличных от начальной точки  $A = M(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ , будем называть *простым контуром*.

Как уже отмечалось, задание начальной  $A = M(\vec{r}(\alpha))$  и конечной  $B = M(\vec{r}(\beta))$  точек кривой ориентирует ее в направлении от  $A$  к  $B$  параметрическим представлением

$$L_{AB} = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta\}. \quad (18.10)$$

Нетрудно заметить, что замена здесь  $t$  на  $\alpha + \beta - t$  меняет местами начальную и конечную точки. Действительно, кривая  $L_{BA}$ , заданная на том же отрезке  $[\alpha, \beta]$  и ориентированная противоположно  $L_{AB}$ , задается параметрическим представлением

$$L_{BA} = \{(x, y, z) : x = x(\alpha + \beta - t), y = y(\alpha + \beta - t), \\ z = z(\alpha + \beta - t), \alpha \leq t \leq \beta\}. \quad (18.11)$$

Одну кривую, ориентированную в противоположных направлениях, будем обозначать как  $L^+$ ,  $L^-$  или просто  $L$ ,  $L^-$ .

Обратимся теперь к еще одному аспекту параметрического представления кривой

$$L = \{\vec{r} = (x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}. \quad (18.12)$$

Вообще говоря, одна и та же кривая может быть задана параметрическими представлениями разного вида переходом от одного параметра  $t$  к другому  $\tau$ . В этом случае параметрическое представление кривой может быть записано как

$$L = \{\vec{\rho} = (x, y, z) : \vec{\rho} = \vec{\rho}(\tau), \bar{\alpha} \leq \tau \leq \bar{\beta}\}. \quad (18.13)$$

При этом следует учитывать, что представление (18.13), как и (18.2), должно осуществлять непрерывное и взаимно однозначное отображение отрезка  $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$  в  $\mathbb{R}^3$ . Этому можно достичь, потребовав, чтобы функция  $\tau = \tau(t)$  была непрерывной, строго возрастающей на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , и удовлетворяющей условиям

$$\tau(\alpha) = \bar{\alpha}, \quad \tau(\beta) = \bar{\beta}, \quad \vec{\rho}(\tau(t)) = \vec{r}(t) \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \quad (18.14)$$

Действительно, в этом случае на отрезке  $[\alpha, \beta]$  существует непрерывная и строго возрастающая функция  $t = t(\tau)$ , обратная к функции  $\tau = \tau(t)$ , и для всех  $\tau \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$  выполняется равенство

$$\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(t(\tau)). \quad (18.15)$$

Исходя из этого, *допустимым преобразованием параметра параметрического представления кривой* будем называть всякую непрерывную и строго возрастающую на  $[\alpha, \beta]$  функцию, такую, что

$$t = t(\tau), \quad \bar{\alpha} \leq \tau \leq \bar{\beta}, \quad t(\bar{\alpha}) = \alpha, \quad t(\bar{\beta}) = \beta. \quad (18.16)$$

Два параметрических представления кривой будем называть *эквивалентными*, если от одного к другому можно перейти с помощью допустимого преобразования (18.16).

Отметим теперь некоторые свойства кривых, обусловленных свойствами вектор-функции  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ее параметрического представления.

Если вектор-функция

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(x(t), y(t), z(t)) \quad (18.17)$$

дифференцируема в точке  $M_0 \in L$ , такой, что

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(t_0) = \vec{r}(x(t_0), y(t_0), z(t_0)), \quad t_0 \in [\alpha, \beta],$$

и ее производная

$$\vec{r}'(t_0) = \vec{r}'(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \quad (18.18)$$

в точке  $M_0$  обращается в нуль, т. е.

$$\vec{r}'(t_0) = 0,$$

то точка  $M_0$  называется *особой точкой* кривой  $L$ .

Если же в точке  $M_0$  производная (18.18) не равна нулю, т. е.

$$\vec{r}'(t_0) \neq 0, \quad (18.19)$$

то точка  $M_0$  называется *неособой точкой* кривой.

Точка  $M_0$  является неособой точкой кривой  $L$  тогда и только тогда, когда, согласно (18.13), (18.19), выполняется условие

$$[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2 > 0. \quad (18.20)$$

Во всякой неособой точке  $M_0$  кривой  $L$  существует касательная, векторное уравнение которой имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (18.21)$$

В координатной форме оно записывается как

$$x = x(t_0) + x'(t_0)\tau, \quad y = y(t_0) + y'(t_0)\tau, \quad z = z(t_0) + z'(t_0)\tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

а в канонической как

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Кривую  $L$  будем называть *непрерывно дифференцируемой*, если вектор-функция  $\vec{r}(t)$  ее параметрического представления (18.12) является непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

Кривую  $L$  будем называть *гладкой*, если она является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек, т. е. производная  $\vec{r}'(t)$  непрерывна и  $\vec{r}'(t) \neq 0$  при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Кривую  $L$  будем называть *кусочно-гладкой*, если она составлена из конечного числа гладких кривых.

Для работы с кусочно-гладкими кривыми имеет смысл класс допустимых замен параметра  $t$  кривой  $L$  в параметрическом представлении (18.12) расширить следующим образом.

Замену  $t = t(\tau)$ ,  $\bar{\alpha} \leq \tau \leq \bar{\beta}$ , будем называть *допустимой*, если:

1) найдется такое разбиение отрезка  $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$  точками

$$\bar{\alpha} = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = \bar{\beta},$$

что функция  $t(\tau)$  является непрерывно дифференцируемой на каждом из интервалов  $]\tau_{i-1}, \tau_i[$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

2) на каждом из этих интервалов  $t'(\tau) > 0$ ;

3) функция  $t(\tau)$  непрерывна на  $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ , причем

$$t(\bar{\alpha}) = \alpha, \quad t(\bar{\beta}) = \beta, \quad \vec{r}(t(\tau)) = \vec{\rho}(\tau).$$

Отметим, что при таких ограничениях функция  $t = t(\tau)$  обратима на отрезке  $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ , а поскольку обратная замена  $\tau = \tau(t)$  также удовлетворяет условиям 1–3, то и она является допустимой.

И наконец, напомним, что в разделе 13.2 [18] было показано, что если кривая

$$L = \{\vec{r} = (x, y, z): \vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(x(t), y(t), z(t)), \alpha \leq t \leq \beta\} \quad (18.22)$$

непрерывно дифференцируема, а  $l(t)$  – длина той части кривой, которая соответствует изменению параметра  $t$  от  $\alpha$  до  $t$ , то для любого  $t \in [\alpha, \beta]$  существует  $l'(t)$ , причем

$$l'(t) = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}. \quad (18.23)$$

С помощью дифференциалов это равенство можно записать как

$$dl = |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt, \quad (18.24)$$

откуда

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (18.25)$$

◇ В некоторых случаях в качестве начальной точки отсчета длины дуги удобнее выбирать не один из концов кривой, а какую-либо внутреннюю ее точку. Тогда дуги, откладываемые в направлении возрастания параметра, согласно договоренности, считаются положительными, а в направлении убывания параметра – отрицательными. Дуги в этом направлении будем снабжать знаком минус.

В случае гладкой кривой, для которой  $|\vec{r}'(t)| > 0$  при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ , в силу (18.23), выполняется неравенство  $l'(t) > 0$ . Но это означает, что замена  $t = t(l)$ , где  $l$  – длина дуги кривой, является допустимой заменой  $t$  на  $l$ . Это позволяет для параметрического представления (18.22) записать эквивалентное ему параметрическое представление, в котором параметром выступает длина  $l$  дуги кривой, изменяющаяся от начальной точки  $l(\alpha) = 0$  до конечной  $l(\beta) = \mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L}$  – длина всей кривой  $L$  (18.22):

$$L = \{\vec{r}(x, y, z): \vec{r} = \vec{r}(t(l)) = \vec{r}(l), 0 \leq l \leq \mathcal{L}\}. \quad (18.26)$$

Напомним, что если параметром кривой является длина ее дуги, то его называют *натуральным* или *естественным* параметром, а уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}(l), \quad 0 \leq l \leq \mathcal{L}, \quad (18.27)$$

записанное через натуральный параметр, – *натуральным уравнением* кривой  $L$ .

Для натурального уравнения кривой из выражения (18.23) вытекает равенство

$$|\vec{r}'(l)| = 1. \quad (18.28)$$

Рассмотрим некоторые наиболее часто употребляемые методы параметризации, поскольку именно параметрические представления кривых (или их параметризации) будут играть важную роль при вычислении криволинейных интегралов.

Пусть уравнение кривой  $F(x, y) = 0$  имеет явную форму  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$  или  $x = x(y)$ ,  $y \in [c, d]$ . В этом случае в качестве параметра обычно берется аргумент полученной явной функции

$$L = \{\vec{r}(x, y): x = x, y = y(x), x \in [a, b]\} \quad (18.29)$$

или

$$L = \{\vec{r}(x, y): x = x(y), y = y, y \in [c, d]\}. \quad (18.30)$$

Пусть  $F(x, y)$  представляет собой линейную комбинацию двух однородных алгебраических функций от переменных  $x$  и  $y$ . В этом случае, обозначив через  $t$  отношение  $y/x$  или  $x/y$ , получим параметрическое представление координат  $x$  и  $y$  кривой  $L$  как алгебраических функций  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . При этом необходимо проверить, что не потеряна точка вида  $(0, y_0)$ , принадлежащая  $L$ . Иногда эта точка соответствует несобственному значению параметра, т. е.

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t), \quad y_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t).$$

Здесь  $t \rightarrow \infty$  означает и  $t \rightarrow +\infty$ , и  $t \rightarrow -\infty$ .

Пусть уравнение  $F(x, y) = 0$  после перехода к обобщенным полярным координатам  $x = a\rho \cos^\mu \varphi$ ,  $y = b\rho \sin^\mu \varphi$  разрешается относительно  $\rho$ , т. е. приводится к явной форме  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ . Тогда, приняв в качестве параметра переменную  $\varphi$  и подставив выражение  $\rho(\varphi)$  в формулы для  $x$  и  $y$ , получим параметрическое представление

$$L = \{\vec{r}(\rho, \varphi): x = a\rho \cos^\mu \varphi, y = b\rho \sin^\mu \varphi, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1\}. \quad (18.31)$$

Насколько полученная параметризация кривой  $L$  удобна для вычислений, зависит от конкретного вида функции  $F(x, y)$ .

В трехмерном пространстве кривая  $L \subset \mathbb{R}^3$  рассматривается как пересечение двух поверхностей, т. е. системой вида

$$L = \{F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0\}.$$

В этом случае чаще всего для параметризации заданной таким образом кривой исключают одну из переменных. Геометрически это означает, что находится проекция  $L_{\text{пр}}$  кривой  $L$  на одну из координатных плоскостей. Плоскую кривую  $L_{\text{пр}}$  параметризуют рассмотренными выше методами. После этого любое из двух уравнений, определяющих  $L$ , дает параметрическое представление третьей координаты.

**Пример 18.1.** Записать параметрическое представление множества

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad y \geq 0. \quad (18.32)$$

С помощью допустимых замен параметра указать эквивалентные параметрические представления, а также параметрическое представление для противоположных ориентаций.

**Решение 1.** Уравнение (18.32) допускает переход к явной зависимости

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2},$$

исходя из которой, в силу неравенства  $y > 0$ , приходим к параметрическому представлению множества вида (18.29):

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y): x = x, y = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \leq x \leq R\}. \quad (18.33)$$

Это представление осуществляет непрерывное взаимно однозначное отображение точек интервала  $] -R, R[$  оси  $Ox$  на множество точек верхней полуокружности (18.33) на плоскости  $xOy$  (не точек отрезка оси  $Oy$ ), ориентированной начальной точкой  $A(-R, 0)$  и конечной точкой  $B(R, 0)$  (рис. 132, а).

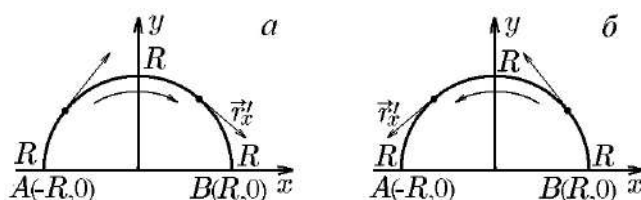


Рис. 132.  $L_{AB}: \vec{r}(x, \sqrt{R^2 - x^2}, x \in ] -R, R[$ ,  $\vec{r}'_x \left(1, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)$  (а);

$$L_{BA}: \vec{r}(-x, \sqrt{R^2 - x^2}, x \in ] -R, R[$$
,  $\vec{r}'_x \left(-1, \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)$  (б)

Непрерывная дифференцируемость вектор-функции  $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ :

$$\vec{r}'_x = \left(1, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right),$$

и выполнение условия

$$|\vec{r}'_x| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \neq 0, \forall x \in ] -R, R[ \quad (18.34)$$

означает, что кривая  $L_{AB}$ , задаваемая параметрическим представлением (18.33), является гладкой кривой на интервале  $x \in ] -R \leq x \leq R[$ . Следует, однако, отметить, что величина  $|\vec{r}'_x|$  (18.34) при  $x \rightarrow \pm R$  имеет особенность вида

$$\lim_{x \rightarrow \pm R} |\vec{r}'_x| = \lim_{x \rightarrow \pm R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = +\infty, \quad (18.35)$$

которая затрудняет использование представления (18.33) для описания верхней полуокружности  $L_{AB}$  при дополнении её точками с абсциссами  $x = \pm R$ .

Ориентацию кривой  $L_{AB}$  на противоположную можно изменить, следуя её представлению (18.11), заменой  $x \Rightarrow -R + R - x = -x$ . Это для кривой  $L_{BA}$  (рис. 132, б) дает параметрическое представление

$$L_{BA} = \{\vec{r}(x, y): \vec{r}(-x, \sqrt{R^2 - x^2}), x \in ] -R, R[ \}. \quad (18.36)$$

2. В параметрическом представлении (18.33) гладкой кривой  $L_{AB}$  проведем замену

$$x = Rt, \quad t \in ] -1, 1[, \quad x(-1) = -R, \quad x(1) = R. \quad (18.37)$$



Эта замена допустима, поскольку функция (18.37) является непрерывно дифференцируемой, причем

$$\frac{dx}{dt} = R > 0 \text{ для всех } t \in ]-1, 1[.$$

Поэтому новое параметрическое представление

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y): x = Rt, y = R\sqrt{1-t^2}, t \in ]-1, 1[\} \quad (18.38)$$

эквивалентно исходному параметрическому представлению (18.33) и сохраняет, к сожалению, его недостатки, а именно:

$$\frac{dx}{dt} = R, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{Rt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |\vec{r}'_t| = \frac{R}{\sqrt{1-t^2}} > 0, \quad \forall t \in ]-1, 1[ \quad (18.39)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \pm 1} |\vec{r}'_t| = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{R}{\sqrt{1-t^2}} = +\infty. \quad (18.40)$$

Представление с противоположной ориентацией имеет вид

$$L_{BA} = \{\vec{r}(x, y): x = -Rt, y = R\sqrt{1-t^2}, t \in ]-1, 1[\}. \quad (18.41)$$

3. Так как функция (18.32) является однородной алгебраической функцией  $x$  и  $y$ , то, обозначив

$$p = \frac{x}{y}, \quad (18.42)$$

получим соотношение  $y^2(1+p^2) = R^2$ , которое для  $y > 0$  определяет две однозначные функции:

$$x = \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y = \frac{R}{\sqrt{1+p^2}}, \quad p \in ]-\infty, \infty[,$$

для которых

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow -\infty} x(p) &= \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2}} = -R, & \lim_{p \rightarrow +\infty} x(p) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2}} = R; \\ \lim_{p \rightarrow \pm\infty} y(p) &= \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{R}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \end{aligned}$$

и которые задают параметрическое представление кривой

$$L_{AB} = \left\{ \vec{r}(x, y): x = \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2}}, y = \frac{R}{\sqrt{1+p^2}}, -\infty < p < +\infty \right\} \quad (18.43)$$

с начальной точкой  $A(-R, 0)$ , соответствующей  $p \rightarrow -\infty$ , и конечной точкой  $B(R, 0)$  при  $p \rightarrow +\infty$ .

Недостатком этого представления является неограниченность множества изменения параметра  $p \in ]-\infty, +\infty[$ . Кроме этого, непрерывные производные

$$x'_p = \frac{R}{(1+p^2)^{3/2}}, \quad y'_p = -\frac{Rp}{(1+p^2)^{3/2}}, \quad |\vec{r}'_p| = \sqrt{(x'_p)^2 + (y'_p)^2} = \frac{R}{\sqrt{1+p^2}}$$

обращаются в нуль при  $p \rightarrow \pm\infty$ :

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} x'_p = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{R}{(1+p^2)^{3/2}} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \pm\infty} y'_p = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \left( -\frac{Rp}{(1+p^2)^{3/2}} \right) = 0,$$

так, что

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} |\vec{r}'_p| = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{R}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Заметим, что представление (18.43) можно получить из представления (18.38) заменой

$$t = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad t(-\infty) = -1, \quad t(+\infty) = 1, \quad t \in ]-1, 1[, \quad (18.44)$$

согласно которой,

$$x(t) = Rt = \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2}} = x(p), \quad y(t) = R\sqrt{1-t^2} = \frac{R}{\sqrt{1+p^2}} = y(p).$$

Подстановка (18.44) является допустимой, поскольку задается непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей неравенству

$$t'_p = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}} > 0 \text{ для всех } p \in ]-\infty, +\infty[.$$

Обратная замена

$$p = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad p(-1) = -\infty, \quad p(1) = +\infty, \quad t \in ]-1, 1[,$$

напротив, переводит параметрическое представление (18.43) в предыдущее представление (18.38).

4. Уравнение (18.33) после перехода к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  разрешается относительно полярного радиуса как  $\rho = R$ . Тогда, приняв в качестве параметра переменную  $\varphi$ , имеем еще одно параметрическое представление:

$$L_{BA} = \{\vec{r}(x, y): x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, \varphi \in [0, \pi]\}, \quad (18.45)$$

ориентируя полуокружность  $L_{BA}$  заданием начальной точки  $B(R, 0)$  и конечной точки  $A(-R, 0)$  (рис. 132, б). Данное представление свободно от недостатков предыдущих, поскольку функции  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \varphi$  и их производные  $x'_\varphi = -R \sin \varphi$ ,  $y'_\varphi = R \cos \varphi$  непрерывны и ограничены, причем производные  $x'_\varphi$  и  $y'_\varphi$  на интервале  $\varphi \in ]0, \pi[$  и, более того, в точках  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  одновременно в нуль не обращаются:

$$|\vec{r}'_\varphi| = \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} = R \neq 0.$$

Именно это представление оказывается наиболее предпочтительным для дальнейшего использования.

Представление множества с ориентацией  $AB$ , обратной  $BA$ , получается заменой  $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$  и имеет вид

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y): x = -R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, \varphi \in [0, \pi]\}. \quad (18.46)$$

Для представления (18.46) при сохранении ориентации можно получить другой промежуток изменения параметра  $\varphi$  при помощи сдвига

$$\varphi = \tau + \frac{\pi}{2}, \quad \tau \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \quad \varphi'_\tau = 1 > 0,$$

и, следовательно,

$$L_{AB} = \left\{ \vec{r}(x, y): x = R \sin \tau, y = R \cos \tau, \tau \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}. \quad (18.47)$$

Отметим, что это же представление можно получить сразу из представления (18.38) допустимой заменой

$$t = \sin \tau, \quad \tau \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad t\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad t'_\tau = \cos \tau > 0, \quad \forall \tau \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Обратная замена

$$\tau = \arcsin t, \quad t \in ]-1, 1[, \quad \tau(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \tau(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \tau'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} > 0, \quad \forall t \in ]-1, 1[,$$

напротив, переводит представление (18.47) в (18.38).

5. В заключение укажем параметрическое представление полуокружности (18.32) по ее натуральному параметру, т. е. по ее переменной длине дуги  $l$ .

Будем исходить из параметрического представления (18.47). Тогда в силу соотношения (18.23) имеем

$$\frac{dl}{d\tau} = \sqrt{(x'_\tau)^2 + (y'_\tau)^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \tau + R^2 \sin^2 \tau} = R,$$

откуда

$$l(\tau) = R\tau + \text{const}.$$

Положив в начальной точке  $A(-R, 0)$  при  $\tau = -\pi/2$  длину дуги  $l$  равной нулю, т. е.  $l(-\pi/2) = 0$ , найдем  $\text{const} = R\pi/2$ , а значит,

$$l(\tau) = R\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right), \quad l\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi R$$

и

$$\tau(l) = \frac{l}{R} - \frac{\pi}{2}, \quad l \in ]0, \pi R[. \quad (18.48)$$

Подстановка (18.48) в равенства (18.47) дает

$$\begin{aligned} x &= R \sin \tau = R \sin\left(\frac{l}{R} - \frac{\pi}{2}\right) = -R \cos \frac{l}{R}, \\ y &= R \cos \tau = R \cos\left(\frac{l}{R} - \frac{\pi}{2}\right) = R \sin \frac{l}{R} \end{aligned}$$

и, соответственно, параметрическое представление  $L_{AB}$  по натуральному параметру  $l$ :

$$L_{AB} = \left\{ \vec{r}(x, y): x = -R \cos \frac{l}{R}, y = R \sin \frac{l}{R}, l \in ]0, \pi R[ \right\}. \quad (18.49)$$

Из (18.49) следует:

$$x'_l = \sin \frac{l}{R}, \quad y'_l = \cos \frac{l}{R}$$

и

$$|\vec{r}'_l| = \sqrt{\sin^2 \frac{l}{R} + \cos^2 \frac{l}{R}} = 1,$$

в полном соответствии с утверждением (18.27) для производной вектор-функции  $\vec{r} = \vec{r}(l)$  по натуральному параметру  $l$ .

**Пример 18.2.** Записать параметрическое представление кривой  $L$ , заданной уравнением

$$x^4 - y^4 - 6x^2y = 0, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0. \quad (18.50)$$

**Решение 1.** Функция (18.50) является суммой двух однородных полиномов от  $x$  и  $y$  четвертой и третьей степеней. Обозначив через  $t$  отношение  $y/x$ , т. е.  $t = y/x$ , получим связывающее  $x$  и  $t$  равенство:

$$x^4(1 - t^4) = 6x^3t.$$

Это равенство определяет две однозначные функции:

$$x(t) = \frac{6t}{1 - t^4}, \quad y(t) = \frac{6t^2}{1 - t^4}.$$

Условия  $x \leq 0$  и  $y \leq 0$  выполняются для  $t > 1$ , при этом точка  $A(0, 0)$  кривой  $L$  соответствует несобственному значению  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t}{1 - t^4} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t^2}{1 - t^4} = 0.$$

Таким образом, имеем параметрическое представление кривой  $L$  в виде

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y): x(t) = \frac{6t}{1 - t^4}, y(t) = \frac{6t^2}{1 - t^4}, t > 1 \right\}. \quad (18.51)$$

2. Параметрическое представление можно получить и переходом к полярным координатам. Замена  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  превращает уравнение (18.50) в уравнение  $\rho^4 \cos 2\varphi - 3\rho^3 \sin 2\varphi \cos \varphi = 0$ , следовательно, в полярной системе координат, естественно связанной с декартовой, кривая описывается уравнением

$$\rho = 3 \operatorname{tg} 2\varphi \cos \varphi, \quad (18.52)$$

откуда

$$x = 3 \operatorname{tg} 2\varphi \cos^2 \varphi = \frac{3}{2} \operatorname{tg} 2\varphi (1 + \cos 2\varphi), \quad y = 3 \operatorname{tg} 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi = \frac{3}{2} \operatorname{tg} 2\varphi \sin 2\varphi.$$

Условие  $x < 0$  выполняется, если  $\operatorname{tg} 2\varphi < 0$ , т. е.  $\pi > 2\varphi > \pi/2$ , а условие  $y < 0$  — если  $\sin 2\varphi > 0$ , т. е.  $\pi > 2\varphi > 0$ . Таким образом, имеем параметрическое представление кривой  $L$  в виде

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y): x = \frac{3}{2}(\operatorname{tg} 2\varphi + \cos 2\varphi), y = \frac{3}{2} \operatorname{tg} 2\varphi \sin 2\varphi, \varphi \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[ \right\}. \quad (18.53)$$

**Пример 18.3.** Записать параметрическое представление кривой, заданной соотношениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0. \quad (18.54)$$

**Решение.** Очевидно, что кривая  $L$  является линией пересечения сферы и конуса, расположенной в верхнем полупространстве  $z \geq 0$ . Исключив из уравнений (18.54) переменную  $z$ , получим, что переменные  $x$  и  $y$  связаны соотношением

$$x^2 + y^2 = Rx,$$

т. е. проекцией  $L_{\text{пр}}$  кривой  $L$  на плоскость  $z = 0$  является окружность

$$L_{\text{пр}} = \left\{ (x, y) : \left( x - \frac{R}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4} \right\}.$$

Ее простейшая параметризация (см. пример 18.1) имеет вид

$$L_{\text{пр}} = \left\{ (x, y) : x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t, y = \frac{R}{2} \sin t, t \in [0, 2\pi[ \right\}. \quad (18.55)$$

Из уравнения  $x^2 + y^2 = z^2$ , при условии  $z \geq 0$ , получается, что

$$z = \sqrt{\frac{R^2}{2}(1 + \cos t)} = R \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2}} = R \left| \cos \frac{t}{2} \right|.$$

Чтобы получить гладкое представление переменной  $z$ , заметим, что в параметрическом представлении (18.55) окружности  $L_{\text{пр}}$  можно взять в качестве промежутка изменения параметра  $t$  любой отрезок длиной  $2\pi$ ; если выбрать  $t \in [-\pi, \pi[$ , то  $\cos(t/2) \geq 0$  и, следовательно,  $z = R \cos \frac{t}{2}$ .

Исходя из этого, для кривой  $L$  имеем гладкую параметризацию вида

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y, z) : x = \frac{R}{2}(1 + \cos t), y = \frac{R}{2} \sin t, z = R \cos \frac{t}{2}, t \in [-\pi, \pi[ \right\}. \quad (18.56)$$

Заметим, что, если невозможно изменить промежуток параметра  $t$  с  $[0, 2\pi[$  на  $[-\pi, \pi[$ , можно воспользоваться кусочно-гладким представлением  $L = L_1 L_2$ , где

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{ \vec{r}(x, y, z) : x = \frac{R}{2}(1 + \cos t), y = \frac{R}{2} \sin t, z = R \cos \frac{t}{2}, t \in [0, \pi] \right\}, \\ L_2 &= \left\{ \vec{r}(x, y, z) : x = \frac{R}{2}(1 + \cos t), y = \frac{R}{2} \sin t, z = -R \cos \frac{t}{2}, t \in ]\pi, 2\pi[ \right\}. \end{aligned} \quad (18.57)$$

**Пример 18.4.** Записать параметрическое представление кривой, заданной соотношениями

$$x^2 + z^2 = R^2, \quad y^2 + z^2 = R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \quad (18.58)$$

**Решение.** Кривая  $L$  является частью линии пересечения двух цилиндров, заданных соотношениями (18.58), для которой возможны следующие представления.

1. Уравнения (18.58) допускают переход к явному виду:

$$x = \pm \sqrt{R^2 - z^2}, \quad y = \pm \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Условия  $x \geq 0, y \geq 0$  оставляют только два из них:

$$x = \sqrt{R^2 - z^2}, \quad y = \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Это позволяет записать параметрическое представление в виде

$$L = \{\vec{r}(x, y, z): x = \sqrt{R^2 - z^2}, y = \sqrt{R^2 - z^2}, z = z, z \in [0, R]\}. \quad (18.59)$$

2. Допустимая замена

$$z = Rt, \quad t \in [0, 1],$$

позволяет записать параметрическое представление

$$L = \{\vec{r}(x, y, z): x = R\sqrt{1 - t^2}, y = R\sqrt{1 - t^2}, z = Rt, t \in [0, 1]\}, \quad (18.60)$$

эквивалентное представлению (18.59).

3. Исключив из уравнения (18.58) переменную  $z$ , получим, что переменные  $x$  и  $y$  связаны соотношением  $x^2 - y^2 = 0$ . Это означает, что линия пересечения цилиндров располагается в двух перпендикулярных плоскостях:  $x - y = 0$  и  $x + y = 0$ . Условия  $x \geq 0, y \geq 0$  выделяют для  $L$  первую из них:

$$y = x.$$

Подстановка этого равенства в уравнения (18.58) дает соотношения

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Условие  $z > 0$  оставляет одно из них:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Исходя из этого, для кривой  $L$  имеем параметризацию вида

$$L = \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = x, z = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [0, R]\}. \quad (18.61)$$

4. Допустимая замена

$$x = Rt, \quad t \in [0, 1],$$

позволяет записать параметрическое представление

$$L = \{\vec{r}(x, y, z): x = Rt, y = Rt, z = R\sqrt{1 - t^2}, t \in [0, 1]\}, \quad (18.62)$$

эквивалентное представлению (18.61).

5. Будем исходить из параметризации направляющих для цилиндров, заданных соотношениями (18.58), в виде

$$\begin{aligned} x &= R \sin \tau, & z &= R \cos \tau, & \tau &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ y &= R \sin \tau, & z &= R \cos \tau, & \tau &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \end{aligned}$$

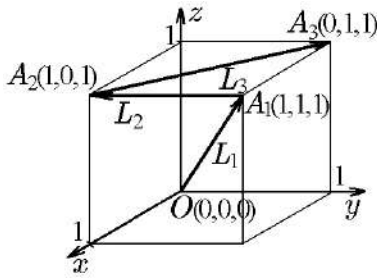
которые позволяют записать еще одно параметрическое представление кривой:

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y, z): x = R \sin \tau, y = R \sin \tau, z = R \cos \tau, \tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}. \quad (18.63)$$

Отметим, что это представление можно получить из представления (18.62) допустимой заменой:

$$t = \sin \tau, \quad \tau = \arcsin t, \quad \tau \in [0, 1].$$

**Пример 18.5.** Записать параметрическое представление ломаной  $L$ , соединяющей точки  $O(0, 0, 0)$ ,  $A_1(1, 1, 1)$ ,  $A_2(1, 0, 1)$ ,  $A_3(0, 1, 1)$ .

Рис. 133.  $L = L_1L_2L_3$ 

**Решение.** Заданная ломаная  $OA_1A_2A_3$  изображена на рис. 133. Очевидно, что в данном случае возможно только кусочно-гладкое представление в виде  $L = L_1L_2L_3$ . На каждом звене ломаной воспользуемся параметрическими уравнениями прямых

$$\begin{aligned} x - x_{0i} &= m_i(t - t_{0i}), & y - y_{0i} &= n_i(t - t_{0i}), \\ z - z_{0i} &= p_i(t - t_{0i}), & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{s}_i = (m_i, n_i, p_i)$  — направляющие векторы прямых  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{OA_1} = (1, 1, 1), \quad \vec{s}_2 = \overrightarrow{A_1A_2} = (0, -1, 0), \quad \vec{s}_3 = \overrightarrow{A_2A_3} = (-1, 1, 0),$$

а  $x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}$  — координаты точек  $O, A_1, A_2$ , соответствующие значению параметра  $t_{0i}$ . Положив  $t_{0i} = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = t, y = t, z = t, t \in [0, 1]\}, \\ L_2 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = 1, y = 2 - t, z = 1, t \in [1, 2]\}, \\ L_3 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = 3 - t, y = t - 2, z = 1, t \in [2, 3]\}. \end{aligned} \quad (18.64)$$

## 18.2. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги) и его свойства

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^3$  задана гладкая спрямляемая ориентированная кривая  $L_{AB}$ , параметрическое представление которой имеет вид

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y, z): \vec{r} = \vec{r}(l), l \in [0, \mathcal{L}]\}. \quad (18.65)$$

Здесь  $l$  — натуральный параметр, т. е. переменная длина дуги кривой от начальной точки  $A$  до конечной точки  $B$ , причем точке  $A$  соответствует значение  $l = 0$ , а точке  $B$  — значение  $l = \mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L}$  — длина кривой  $L_{AB}$  и  $|\vec{r}'(l)| = 1$ . И пусть на некотором множестве, содержащем эту кривую  $L_{AB}$ , задана непрерывная функция  $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ .

Выше мы установили, что криволинейный интеграл от функции  $f(x, y, z)$  по длине дуги  $l$  кривой  $L_{AB}$  можно рассматривать как предел интегральной суммы в виде равенства (18.3). Если исходить из этого равенства, то, следуя логике работы с интегральными суммами, мы должны определить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, их свойства и правила вычисления их пределов. Для того чтобы избежать связанных с этим пространственных рассуждений и выкладок, можно воспользоваться другим подходом. Суть его состоит в определении криволинейного интеграла обычным определенным интегралом по параметру  $l$ , интегральная сумма которого совпадает с интегральной суммой, полученной при выводе равенства (18.3).

Таким образом, будем исходить из следующего определения.

♦ Выражение  $\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl$ , определяемое по формуле

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \int_0^{\mathcal{L}} f(x(l), y(l), z(l)) dl, \quad (18.66)$$

будем называть *криволинейным интегралом первого рода* (или *по длине дуги*) от функции  $f(x, y, z)$  по кривой  $L_{AB}$ , заданной параметрическим представлением (18.65).

Рассмотрим некоторые свойства этого интеграла.

**Свойство 1.** Криволинейный интеграл первого рода (18.66) не зависит от вида параметризации кривой.

Действительно, если исходить из существования интеграла в определении (18.66), то допустимую замену параметра  $l$  в параметризации кривой  $L_{AB}$  (18.65) (с учетом представления (18.22))

$$l = l(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad l(\alpha) = 0, \quad l(\beta) = \mathcal{L}, \quad l'_t = |\vec{r}'(t)| > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

можно одновременно рассматривать как допустимую замену переменной в определенном интеграле (18.66). Такая замена не меняет его значения, позволяя записать криволинейный интеграл определенным интегралом по параметру  $t$ :

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl &= \int_0^{\mathcal{L}} f(x(l), y(l), z(l)) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(l), y(l), z(l)) l'_t dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(l), y(l), z(l)) |\vec{r}'(t)| dt. \end{aligned}$$

◇ Равенство

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt \quad (18.67)$$

можно рассматривать как еще одно определение криволинейного интеграла, эквивалентное определению (18.66), с параметризацией кривой

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]\}. \quad (18.68)$$

Прежде чем перейти к следующему свойству, уместно отметить следующее.

◇ Непосредственность сведения криволинейного интеграла к определенному как равенством (18.66), так и (18.67), разумеется, снижает его теоретическое значение, но не изменяет методологического. Последнее объясняется тем, что представление криволинейного интеграла определенным является частным случаем более общего метода построения интегралов на многообразиях как кратных интегралов по объему (мере) его касательного подпространства. В терминах многообразий кривая классифицируется как одномерное многообразие, касательным подпространством которого является касательная – прямая линия. Элементом объема одномерного пространства (касательной – прямой) является элемент длины (меры), равный  $|\vec{r}'(t)| dt$ , по которому и выполняется интегрирование в одномерном римановом интеграле (18.67), согласно общей схеме интегрирования на многообразиях. К более подробным рассуждениям о таком подходе мы вернемся после рассмотрения поверхностных интегралов.

Другим преимуществом сведения криволинейного интеграла к определенному является распространение на них всех свойств, присущих определенному интегралу. Исключением является следующее свойство.



**Свойство 2.** Криволинейный интеграл первого рода (18.66) не зависит от ориентации кривой интегрирования, т. е.

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{L_{BA}} f(x, y, z) dl. \quad (18.69)$$

Справедливость этого равенства мы установили выше равенством (18.5), исходя из определения криволинейного интеграла первого рода интегральной суммой (18.3). Здесь мы покажем его справедливость, исходя из определения (18.67). Действительно, параметрические представления кривых  $L_{AB}$  и  $L_{BA}$ , согласно (18.10), (18.11), можно записать как

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \{\vec{r}(x, y, z): \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]\}, \\ L_{BA} &= \{\vec{r}(x, y, z): \vec{r} = \vec{r}(\alpha + \beta - t), t \in [\alpha, \beta]\}. \end{aligned}$$

Из них видно, что изменение направления движения точки по кривой не меняет направления движения точки по отрезку  $[\alpha, \beta]$  оси  $Ot$ . Поэтому, сделав в интеграле (18.67) замену переменных  $\tau = \alpha + \beta - t$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(\alpha + \beta - \tau), y(\alpha + \beta - \tau), z(\alpha + \beta - \tau)) |\vec{r}'(\alpha + \beta - \tau)| d\tau = \int_{L_{BA}} f(x, y, z) dl, \end{aligned}$$

доказывающее справедливость свойства (18.69).

Другими словами, это свойство криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги) связано с тем, что, согласно определению, длина дуги кривой считается положительной независимо от конца, от которого она отсчитывается.

**Свойство 3.** Криволинейный интеграл аддитивен относительно кривой, т. е. если  $L_{AB} = L_1 L_2 \dots L_n$ , то

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} f(x, y, z) dl. \quad (18.70)$$

Это свойство следует из определения (18.67) и свойства аддитивности определенного интеграла относительно области интегрирования.

Следующие свойства, относящиеся к виду подынтегральной функции и оценок интеграла, мы приведем без доказательств, поскольку они, как и свойство 3, вытекают из свойств определенных интегралов.

**Свойство 4.** Если функции  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  интегрируемы по кривой  $L_{AB}$ , то их линейная комбинация  $c_1 f_1 + c_2 f_2$  также интегрируема по этой кривой, причем

$$\int_{L_{AB}} [c_1 f_1(x, y, z) + c_2 f_2(x, y, z)] dl = c_1 \int_{L_{AB}} f_1(x, y, z) dl + c_2 \int_{L_{AB}} f_2(x, y, z) dl. \quad (18.71)$$

**Свойство 5.** Если функция  $f(x, y, z)$  интегрируема по кривой  $L_{AB}$ , то функция  $|f(x, y, z)|$  также интегрируема по  $L_{AB}$  и

$$\left| \int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl \right| \leq \int_{L_{AB}} |f(x, y, z)| dl. \quad (18.72)$$

**Свойство 6.** Если функции  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  интегрируемы по кривой  $L_{AB}$  и  $f_1(x, y, z) \leq f_2(x, y, z)$  для всех  $(x, y, z) \in L_{AB}$ , то

$$\int_{L_{AB}} f_1(x, y, z) dl \leq \int_{L_{AB}} f_2(x, y, z) dl. \quad (18.73)$$

**Свойство 7.** Если функции  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  интегрируемы по кривой  $L_{AB}$  и  $0 < m \leq f_2(x, y, z) \leq M$  для всех  $(x, y, z) \in L_{AB}$ , то

$$m \int_{L_{AB}} f_1(x, y, z) dl \leq \int_{L_{AB}} f_1(x, y, z) f_2(x, y, z) dl \leq M \int_{L_{AB}} f_1(x, y, z) dl. \quad (18.74)$$

Если, в частности,  $f_2(x, y, z) \equiv 1$ , то

$$m\mathcal{L} \leq \int_{L_{AB}} f_1(x, y, z) \leq M\mathcal{L}, \quad (18.75)$$

где  $\mathcal{L} = \int_{L_{AB}} dl$  – длина кривой  $L_{AB}$ .

Если к тому же  $f_1(x, y, z)$  непрерывна вдоль кривой  $L_{AB}$ , то существует точка  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L_{AB}$ , такая, что

$$f_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{\int_{L_{AB}} f_1(x, y, z) f_2(x, y, z) dl}{\int_{L_{AB}} f_2(x, y, z) dl}. \quad (18.76)$$

Для  $f_2(x, y, z) \equiv 1$  это равенство примет вид

$$f_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_{L_{AB}} f_1(x, y, z) dl, \quad (18.77)$$

где  $\mathcal{L}$  – длина кривой  $L_{AB}$ , а значение  $f_1(x_0, y_0, z_0)$  называется *средним значением* функции  $f_1(x, y, z)$  на кривой  $L_{AB}$ .

◇ При необходимости из этих свойств можно сформулировать ряд следствий, на которых мы не будем здесь останавливаться, а воспользуемся ими при рассмотрении конкретных примеров.

Однако, прежде чем приступить к рассмотрению этих примеров, покажем эквивалентность определений (18.4) и (18.66). Пусть кривая  $L_{AB}$  длиной  $\mathcal{L}$  задана своим натуральным параметрическим представлением

$$L_{AB} = \{ \vec{r}(x, y, z) : x = x(l), y = y(l), z = z(l) \ l \in [0, \mathcal{L}] \}$$

и  $\tau_n \{l_i\}_{i=0}^n$  — разбиение отрезка  $[0, \mathcal{L}]$  оси  $Ol$  (рис. 134, а) отрезками  $[l_{i-1}, l_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , длиной  $\Delta l_i = |l_i - l_{i-1}| = l_i - l_{i-1}$  и мелкостью разбиения  $d(\tau_n)$ , а  $\xi_i \in [l_{i-1}, l_i]$ . В силу взаимной однозначности отображения отрезка  $[0, \mathcal{L}] \subset \mathbb{R}$  на кривую  $L_{AB} \subset \mathbb{R}^3$  (рис. 134, б), каждой точке  $\xi_i \in [l_{i-1}, l_i]$  соответствует точка  $P(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))$  и, следовательно, значение функции  $f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))$ .

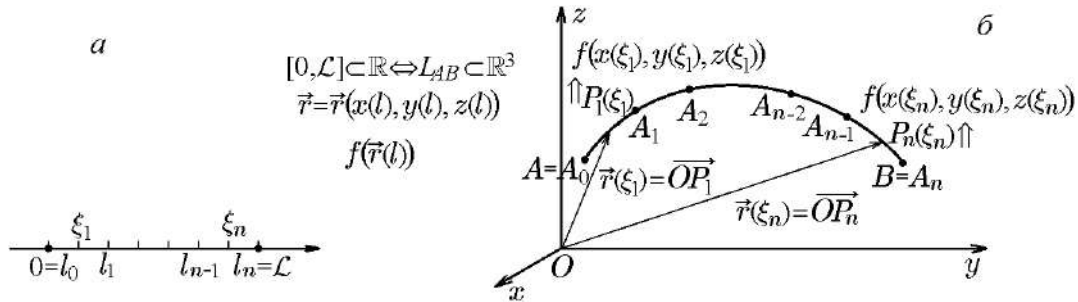


Рис. 134.  $[0, \mathcal{L}] \subset \mathbb{R}$  (а);  $L_{BA} \subset \mathbb{R}^3$  (б)

В этих обозначениях интегральная сумма для определенного интеграла (18.66), представляющего криволинейный интеграл, имеет вид

$$\int_0^{\mathcal{L}} f(x, y, z) dl = \lim_{d(\tau_n) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \Delta l_i,$$

который, с точностью до обозначений, совпадает с интегральной суммой (18.4), представляющей криволинейный интеграл первого рода.

### 18.3. Примеры вычислений криволинейных интегралов первого рода

Согласно определению, вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенного интеграла (18.67):

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt.$$

Для удобства работы преобразуем его подынтегральное выражение, исходя из параметрического представления гладкой кривой

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y, z): x = x(t), y = y(t), z = z(t) t \in [\alpha, \beta]\}. \quad (18.78)$$

Поскольку для гладкой кривой величина  $|\vec{r}'(t)|$ , согласно (18.23), имеет вид

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2},$$

то с учетом этого вычислительная формула для нахождения криволинейного интеграла первого рода примет вид

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (18.79)$$

Для плоской кривой эта формула упрощается к виду

$$I = \int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (18.80)$$

Если же плоская гладкая кривая задана однозначной функцией

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y): x = x, y = y(x) x \in [a, b]\},$$

то формула (18.80) примет вид

$$\int_{L_{AB}} f(x, y(x)) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (18.81)$$

Эта формула при переходе от параметризации в декартовых координатах к полярным

$$L_{AB} = \{\vec{r}(\rho, \varphi): \varphi = \varphi, \rho = \rho(\varphi) \varphi \in [\alpha, \beta]\}$$

запишется как

$$\int_{L_{AB}} f(\rho, \varphi) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho, \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (18.82)$$

Рассмотрение примеров начнем с простейшего криволинейного интеграла, на котором проиллюстрируем возможности использования различных параметрических представлений и ориентации кривой интегрирования.

**Пример 18.6.** Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_L dl \quad (18.83)$$

по кривой  $L: x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$ .

**Решение.** Некоторые из возможных параметрических представлений заданной кривой приведены в примере 18.1.

1. Так, формула (18.33) описывает ее как

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y): x = x, y = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R]\},$$

и поскольку

$$dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

то интеграл (18.83) запишется как

$$\int_{L_{AB}} dl = \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx.$$

Данный интеграл – это несобственный интеграл от неограниченной функции (1-го рода), что является следствием отмеченного выше недостатка параметрического представления (18.33). Правда, этот несобственный интеграл сходится:

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} dl &= \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_{-R}^R = R[\arcsin 1 - \arcsin(-1)] = \\ &= R\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi R \end{aligned}$$

– длине полуокружности радиуса  $R$ .

2. Формулы (18.38) и (18.41) задают кривую  $L$  с двумя противоположными ориентациями:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \{\vec{r}(x, y): x = Rt, y = R\sqrt{1 - t^2}, t \in ] - 1, 1[ \}, \\ L_{BA} &= \{\vec{r}(x, y): x = -Rt, y = R\sqrt{1 - t^2}, t \in ] - 1, 1[ \}. \end{aligned}$$

Поскольку в обоих случаях

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \frac{R dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

то интеграл (18.83) можно записать как

$$\int_{L_{AB}} dl = \int_{L_{BA}} dl = \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

Этот интеграл, как и предыдущий, является несобственным, но сходящимся интегралом с тем же значением

$$\int_{L_{AB}} dl = \int_{L_{BA}} dl = \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{1 - t^2}} dt = R \left( \arcsin t \Big|_{-R}^R \right) = \pi R.$$

3. Формула (18.43) задает кривую параметрическим представлением

$$L_{AB} = \left\{ \vec{r}(x, y): x = \frac{Rp}{\sqrt{1 + p^2}}, y = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2}}, p \in ] - \infty \ll + \infty [ \right\},$$

и поскольку

$$dl = \sqrt{[x'(p)]^2 + [y'(p)]^2} dp = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2}} dp,$$

то интеграл (18.83) запишется как

$$\int_{L_{AB}} dl = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{\sqrt{1 + p^2}} dp.$$

Этот интеграл является несобственным, но уже 2-го рода. Он сходится и его значение

$$\int_{L_{AB}} dl = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{\sqrt{1 + p^2}} dp = R \operatorname{arctg} p \Big|_{-\infty}^{\infty} = R \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \pi R$$

совпадает с предыдущим результатом.

4. Формулы (18.47) задают кривую параметрическим представлением

$$L_{AB} = \left\{ \vec{r}(x, y): x = R \sin \tau, y = R \cos \tau, \tau \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\},$$

и поскольку

$$dl = \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau = R d\tau,$$

то интеграл (18.83) запишется как

$$\int_{L_{AB}} dl = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R d\tau.$$

Этот интеграл свободен от недостатков предыдущих: является собственным и легко вычисляется:

$$\int_{L_{AB}} dl = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R d\tau = \pi R.$$

5. И, наконец, воспользуемся натуральным параметрическим представлением (18.49):

$$L_{AB} = \left\{ \vec{r}(x, y): x = -R \cos \frac{l}{R}, y = R \sin \frac{l}{R}, l \in ]0, \pi R[ \right\}.$$

В этом случае  $|\vec{r}'_l| = 1$  и интеграл (18.83) имеет простой вид:

$$\int_{L_{AB}} dl = \int_0^{\pi R} dl = \pi R.$$

Очевидно, что параметрические представления (18.47) и (18.49) являются наиболее предпочтительными при вычислении криволинейных интегралов по заданной кривой. Это мы будем иметь в виду при выборе параметрического представления кривой при вычислении криволинейных интегралов первого рода.

**Пример 18.7.** Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_L xy dl, \tag{18.84}$$

где  $L$  – четвертинка эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

из первого квадранта.

**Решение 1.** Исходя из представления

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y): x = x, y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0, a] \right\},$$

с учетом того, что

$$dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx,$$

интеграл (18.84) запишется как

$$\int_L xy dl = \int_0^a x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} x dx.$$

Вычислим этот интеграл:

$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= -\frac{b}{2a^2(a^2 - b^2)} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} d[a^4 - (a^2 - b^2)x^2] = \\ &= -\frac{b}{3a^2(a^2 - b^2)} [a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{3/2} \Big|_0^a = -\frac{b}{3a^2(a^2 - b^2)} (b^3 a^3 - a^6) = \\ &= \frac{ab a^3 - b^3}{3 a^2 - b^2} = \frac{ab a^2 + ab + b^2}{3 a + b}. \end{aligned}$$

2. В обобщенных полярных координатах  $x = a\rho \cos \varphi$ ,  $y = b\rho \sin \varphi$  можно воспользоваться другим параметрическим представлением кривой:

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y): x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Поскольку в этом случае

$$dl = \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi = \sqrt{(-a \sin \varphi)^2 + (b \cos \varphi)^2} d\varphi,$$

то интеграл (18.84) запишется как

$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= \int_0^{\pi/2} a \cos \varphi b \sin \varphi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \sqrt{a^2 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + b^2 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} d\varphi, \end{aligned}$$

и замена

$$\cos 2\varphi = t, \quad \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{dt}{2}, \quad t_1 = \cos 0 = 1, \quad t_2 = \cos \pi = -1$$

приводит его к виду

$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= \frac{ab}{2} \int_1^{-1} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} t} \left(-\frac{dt}{2}\right) = \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} t} t dt = \\ &= \frac{ab}{2(b^2 - a^2)} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} t\right)^{3/2} \Big|_{-1}^1 = \frac{ab a^2 + ab + b^2}{3 a + b}. \end{aligned}$$

Этот результат совпадает с найденным выше.

◇ При интегрировании по замкнутому контуру  $L$  для криволинейного интеграла будем использовать обозначение  $\oint_L f(x, t, z) dl$ .

**Пример 18.8.** Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl \quad (18.85)$$

по кривой  $L: x^2 + y^2 = Rx, R > 0$ .

**Решение.** Кривая представляет собой окружность, уравнение которой в полярных координатах  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$  имеет вид

$$\rho(\varphi) = R \cos \varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

С учетом этого  $x = R \cos^2 \varphi, y = R \cos \varphi \sin \varphi, x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \varphi$  и в силу формулы (18.82) получим

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \varphi \sqrt{(R \cos \varphi)^2 + (-R \sin \varphi)^2} d\varphi = \\ &= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = R^2 \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = R^2(1 + 1) = 2R^2. \end{aligned}$$

**Пример 18.9.** Вычислить интеграл

$$I = \oint_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl, \quad (18.86)$$

где  $L$  задана уравнением  $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$ .

**Решение.** Кривая  $L$  представляет собой еще одну замкнутую кривую – астроида, уравнение которой в полярных координатах  $x = \rho \cos^3 \varphi, y = \rho \sin^3 \varphi$  имеет вид  $\rho = R$ . С учетом этого имеем параметрическое представление астрыды:

$$L = \{\vec{r}(x, y) : x = R \cos^3 \varphi, y = R \sin^3 \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

а поскольку

$$x^{4/3} + y^{4/3} = R^{4/3}(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)$$

и

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi = \sqrt{(-3R \cos^2 \varphi \sin \varphi)^2 + (3R \sin^2 \varphi \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 3R \sqrt{(\sin \varphi \cos \varphi)^2} d\varphi = 3R |\sin \varphi \cos \varphi| d\varphi, \end{aligned}$$

то интеграл (18.86) преобразуется к виду



$$\begin{aligned} \oint_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl &= \int_0^{2\pi} R^{4/3} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) 3R |\sin \varphi \cos \varphi| d\varphi = \\ &= 3R^{7/3} \int_0^{2\pi} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) |\sin \varphi \cos \varphi| d\varphi. \end{aligned}$$

Учтем, что подынтегральная функция этого интеграла является  $\pi/2$ -периодической. Тогда

$$\begin{aligned} \oint_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl &= 12R^{7/3} \int_0^{\pi/2} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= -2R^{7/3} (\cos^6 \varphi - \sin^6 \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 2R^{7/3} (1 + 1) = 4R^{7/3}. \end{aligned}$$

**Пример 18.10.** Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_L (x^2 + y^2) dl, \quad (18.87)$$

по линии  $L$ , заданной уравнением

$$\max\{|x|, |y|\} = R.$$

**Решение.** Линия  $L$  представляет собой контур квадрата, образованного отрезками прямых  $x = \pm R$  и  $y = \pm R$ . Поэтому ее можно рассматривать как совокупность отрезков  $L = L_1 L_2 L_3 L_4$  с параметрическими представлениями:

$$\begin{aligned} L_{1,2} &= \{\vec{r}(x, y) : x = \pm R, y = \pm t, t \in [-R, R]\}, \\ L_{3,4} &= \{\vec{r}(x, y) : x = \pm t, y = \pm R, t \in [-R, R]\}. \end{aligned}$$

Так как  $dl = dt$ , а  $x^2 + y^2 = R^2 + t^2$ , то интеграл (18.87) запишется как

$$\begin{aligned} \oint_L (x^2 + y^2) dl &= \sum_{i=1}^4 \int_{L_i} (x^2 + y^2) dl = 4 \int_{-R}^R (R^2 + t^2) dt = 8 \int_0^R (R^2 + t^2) dt = \\ &= 8 \left( R^2 t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{32}{3} R^3. \end{aligned}$$

**Пример 18.11.** Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_L (x^2 - y^2) dl, \quad (18.88)$$

по кривой  $L$ , заданной уравнениями  $(x - y)^2 = R(x + y)$ ,  $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ , от точки  $O(0, 0, 0)$  до точки  $A(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 > 0$ .

**Решение.** Параметризуем кривую, положив  $x + y = (x - y)t$ . Тогда из уравнений кривой получим

$$x - y = Rt, \quad x + y = Rt^2, \quad z^2 = \frac{8}{9}(x^2 - y^2) = \frac{9}{8}R^2t^3,$$

откуда

$$x = \frac{R}{2}(t^2 + t), \quad y = \frac{R}{2}(t^2 - t), \quad z = \sqrt{\frac{8R^2t^3}{9}}, \quad t \geq 0.$$

При этом точке  $O(0, 0, 0)$  соответствует значение  $t_1 = 0$ , а точке  $A(x_0, y_0, z_0)$  — значение  $t_2 = \frac{1}{2}(3z_0/R)^{2/3}$ . Примем во внимание, что  $x^2 - y^2 = R^2t^3$ , а

$$dl = \sqrt{\left[\frac{R}{2}(2t + 1)\right]^2 + \left[\frac{R}{2}(2t - 1)\right]^2 + [\sqrt{2R}\sqrt{t}]^2} dt = \sqrt{2R}\left(t + \frac{1}{2}\right) dt,$$

тогда интеграл (18.88) запишется как

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 - y^2) dl &= \int_{t_1}^{t_2} R^2t^3 \sqrt{2R}\left(t + \frac{1}{2}\right) dt = \sqrt{2}R^3 \int_{t_1}^{t_2} \left(t^4 + \frac{1}{2}t^3\right) dt = \\ &= \sqrt{2}R^3 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{8}\right) \Big|_{t_1}^{t_2} = \sqrt{2}R^3 \left(\frac{1}{5}t_2^5 + \frac{1}{8}t_2^4\right) = \frac{\sqrt{2}R^3}{32} \left[\frac{1}{5}\left(\frac{3z_0}{R}\right)^{10/3} + \frac{1}{4}\left(\frac{3z_0}{R}\right)^{8/3}\right]. \end{aligned}$$

**Пример 18.12.** Вычислить интеграл

$$I = \int_L \frac{z}{\sqrt{8z^2 + x + 2}} dl, \quad (18.89)$$

где  $L$  — линия пересечения конуса  $x^2 + y^2 = z^2$  с цилиндрической поверхностью  $y^2 = x$ , расположенная между точками  $O(0, 0, 0)$  и  $A(1, 1, \sqrt{2})$ .

**Решение.** Параметризуем кривую  $L$ , выбрав в качестве параметра переменную  $x$ :

$$L = \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = \sqrt{x}, z = \sqrt{x(x+1)}, x \in [0, 1]\}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad z'_x = \frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}, \quad dl = \sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{(2x+1)^2}{4x(x+1)}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8x^2 + 9x + 2}{x(x+1)}} dx, \quad \sqrt{8z^2 + x + 2} = \sqrt{8x^2 + 9x + 2}, \end{aligned}$$

то интеграл (18.89) преобразуется к виду

$$\int_L \frac{z}{\sqrt{8z^2 + x + 2}} dl = \int_0^1 \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{8x^2 + 9x + 2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8x^2 + 9x + 2}{x(x+1)}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

**Пример 18.13.** Вычислить интеграл

$$I = \int_L \sqrt{z} dl, \quad (18.90)$$

где  $L$  – линия, полученная в результате пересечения поверхностей  $x^2 + y^2 = z$  и  $y = x \operatorname{tg} z$ , от точки  $O(0, 0, 0)$  до точки  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

**Решение.** Параметризуем кривую  $L$ , взяв в качестве параметра полярный угол  $\varphi$ . Положив  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , получим  $\rho^2 = z$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} z$  и параметрическое представление кривой

$$L = \{\vec{r}(x, y, z) : x = \sqrt{\varphi} \cos \varphi, y = \sqrt{\varphi} \sin \varphi, z = \varphi, \varphi \in [0, z_0]\}.$$

Поскольку

$$x'_\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \cos \varphi - \sqrt{\varphi} \sin \varphi, \quad y'_\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \sin \varphi - \sqrt{\varphi} \cos \varphi, \quad z'_\varphi = 1$$

и

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \cos \varphi - \sqrt{\varphi} \sin \varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \sin \varphi - \sqrt{\varphi} \cos \varphi\right)^2 + 1} d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\varphi} + \varphi + 1} d\varphi = \sqrt{\frac{1}{4\varphi}(1 + 4\varphi + 4\varphi^2)} d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \sqrt{(1 + 2\varphi)^2} d\varphi = \frac{1 + 2\varphi}{2\sqrt{\varphi}} d\varphi, \end{aligned}$$

то интеграл (18.90) запишется как

$$\int_L \sqrt{z} dl = \int_0^{z_0} \sqrt{\varphi} \frac{1 + 2\varphi}{2\sqrt{\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{z_0} (1 + 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi^2) \Big|_0^{z_0} = \frac{1}{2} (z_0 + z_0^2).$$

#### 18.4. Приложения криволинейных интегралов первого рода

Выше было показано, что масса  $M$  вещества, распределенного по спрямляемой кривой  $L$  с линейной плотностью  $f(x, y, z)$ , вычисляется криволинейным интегралом первого рода

$$M = \int_L f(x, y, z) dl. \quad (18.91)$$

Следуя схеме получения этого равенства с помощью составления соответствующих интегральных сумм, можно показать, что при помощи аналогичных формул вычисляются заряд, количество тепла, длина, площадь и т. п. Другими словами, формула (18.91) позволяет вычислить значение произвольной аддитивной скалярной величины  $M$ , исходя из ее линейной плотности, заданной вдоль этой кривой, с учетом ее формы.

В случае, когда  $f(x, y, z)$  в интеграле (18.91) имеет смысл линейной плотности материальной кривой  $L$ , следующее обобщение этого интеграла:

$$\mathbb{I}_*^{(n)} = \int_L f r^n dl, \quad (18.92)$$

где  $r$  – расстояние от точки  $P \in L$  до некоторой прямой или плоскости (\*), представляет интерес для физики.

◆ Интегралы (18.92) называются *моментами* порядка  $n$  кривой  $L$  относительно соответствующей прямой или плоскости.

Очевидно, что масса кривой  $L$  является моментом  $\mathbb{I}^{(0)}$  нулевого порядка кривой  $L$  относительно любой прямой или плоскости. Моменты первого порядка называются *статическими моментами*, моменты второго порядка – *моментами инерции*. Исходя из этого, формулы для вычисления координат  $x_0, y_0, z_0$  центра масс можно записать следующим образом:

$$x_0 = \frac{\mathbb{I}_{yz}^{(1)}}{\mathbb{I}^{(0)}}, \quad y_0 = \frac{\mathbb{I}_{xz}^{(1)}}{\mathbb{I}^{(0)}}, \quad z_0 = \frac{\mathbb{I}_{xy}^{(1)}}{\mathbb{I}^{(0)}} \quad (18.93)$$

и т. д.

**Пример 18.14.** Найти массу дуги параболы

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y) : x = x, y^2 = 2px, x \in \left[0, \frac{p}{2}\right] \right\}$$

с линейной плотностью  $f(x, y) = |y|$ .

**Решение.** Согласно формуле (18.91), вычислим

$$dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx.$$

Приняв во внимание равенство  $f(x, y) = |y| = \sqrt{2px}$  и симметрию параболы относительно оси  $Ox$ , найдем

$$\begin{aligned} M &= \int_L f(x, y) dl = 2 \int_0^{p/2} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2 \int_0^{p/2} \sqrt{p^2 + 2px} dx = \\ &= \frac{2}{3p} (2px + p^2)^{3/2} \Big|_0^{p/2} = \frac{2}{3} p^2 (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

**Пример 18.15.** Найти статические моменты дуги  $L$  однородной астроида  $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$ ,  $x \geq 0, y \geq 0$ , относительно координатных осей.

**Решение.** Используя параметрическое представление астроида (см. пример 18.9)

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y) : x = R \cos^3 \varphi, y = R \sin^3 \varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\},$$

а также равенство

$$dl = 3R |\sin \varphi \cos \varphi| d\varphi,$$

по определению статических моментов (18.92) получим

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_x^{(1)} &= \int_L y dl = \int_0^{\pi/2} R \sin^3 \varphi \cdot 3R \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 3R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= 3R^2 \frac{\sin^5 \varphi}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} R^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_y^{(1)} &= \int_L x \, dl = \int_0^{\pi/2} R \cos^3 \varphi \cdot 3R \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 3R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= -3R^2 \frac{\cos^5 \varphi}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} R^2. \end{aligned}$$

**Пример 18.16.** Найти координаты центра масс однородной кривой  $L$ , заданной уравнением  $y = a \operatorname{ch}(x/a)$  и располагающейся между точками  $A(0, a)$  и  $B(b, h)$  ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $h > 0$ ).

**Решение.** Воспользуемся формулами (18.93). Поскольку кривая  $L$  однородна, то в формулах (18.93) достаточно взять  $f(x, y) = 1$ . С учетом того, что

$$y'(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} \, dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} \, dx,$$

вычислим массу  $M$ , а затем координаты  $x_0$ ,  $y_0$  центра масс рассматриваемой кривой:

$$\begin{aligned} M &= \int_L dl = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} \, dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = a \sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1} = \\ &= \sqrt{h^2 - a^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\mathbb{I}_y^{(1)}}{M} = \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}} \int_L x \, dl = \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}} \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} \, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left( ax \operatorname{sh} \frac{x}{a} - a^2 \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right) \Big|_0^b = \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left( b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} + a \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left( b \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} - h + a \right) = \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left( \frac{b}{a} \sqrt{h^2 - a^2} - h + a \right) = \\ &= b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\mathbb{I}_x^{(1)}}{M} = \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}} \int_L y \, dl = \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}} \int_0^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} \, dx = \\ &= \frac{a}{2\sqrt{h^2 - a^2}} \int_0^b \left( 1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a} \right) dx = \frac{a}{2\sqrt{h^2 - a^2}} \left( x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right) \Big|_0^b = \\ &= \frac{a}{2\sqrt{h^2 - a^2}} \left( b + a \operatorname{sh} \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right) = \frac{a}{2\sqrt{h^2 - a^2}} \left( b + \frac{h\sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right) = \\ &= \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}} + \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 18.17.** Найти координаты центра масс контура однородного сферического треугольника

$$L = \{ \vec{r}(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}.$$

**Решение.** Сферический треугольник однороден, в силу чего имеем

$$x_0 = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_L x dl, \quad y_0 = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_L y dl, \quad z_0 = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_L z dl,$$

где  $L$  – контур сферического треугольника, а  $\mathcal{L}$  – его длина, равная сумме трех четвертинок окружности радиусом  $R$ , т. е.  $\mathcal{L} = 3(2\pi R/4) = 3\pi R/2$ . Контур сферического треугольника будем рассматривать как совокупность трех дуг:  $L = L_1 L_2 L_3$  (рис. 135). В плоскости  $yOz$  выполняется тождество  $x \equiv 0$ , поэтому

$$x_0 = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_L x dl = \frac{1}{\mathcal{L}} \left( \int_{L_1} x dl + \int_{L_2} x dl \right),$$

где  $L_1$  – часть контура  $L$ , лежащая в плоскости  $xOy$ ;  $L_2$  – та ее часть, которая лежит в плоскости  $xOz$  (рис. 135). Эти кривые можно задать параметрическими представлениями:

$$L_1 = \left\{ \vec{r}(x, y, 0): x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, \varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right\},$$

$$L_2 = \left\{ \vec{r}(x, 0, z): x = R \cos \psi, y = R \sin \psi, \psi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right\},$$

причем на  $L_1$   $dl = R d\varphi$ , а на  $L_2$   $dl = R d\psi$ . Поэтому

$$x_0 = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_L x dl = \frac{1}{\mathcal{L}} \left( \int_{L_1} x dl + \int_{L_2} x dl \right) = \frac{2R^2}{3\pi R} \left( \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos \psi d\psi \right) = \frac{4R}{3\pi}.$$

Аналогично  $y_0 = z_0 = 4R/3\pi$ .

**Пример 18.18.** Найти моменты инерции относительно координатных осей одного витка однородной винтовой линии

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y, z): x = R \cos t, y = R \sin t, z = \frac{ht}{2\pi}, t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

**Решение.** Обозначив через  $r_x, r_y, r_z$  расстояния от точки  $P(x, y, z) \in L$  до соответствующих координатных осей, можем записать формулы для вычисления моментов инерции:

$$\mathbb{I}_x^{(2)} = \int_L r_x^2 dl, \quad \mathbb{I}_y^{(2)} = \int_L r_y^2 dl, \quad \mathbb{I}_z^{(2)} = \int_L r_z^2 dl.$$

Исходя из очевидных формул  $r_x^2 = y^2 + z^2$ ,  $r_y^2 = x^2 + z^2$ ,  $r_z^2 = x^2 + y^2$ , с учетом того, что

$$r_x^2 = R^2 \sin^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2}, \quad r_y^2 = R^2 \cos^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2}, \quad r_z^2 = R^2$$

и

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}{2\pi} dt,$$

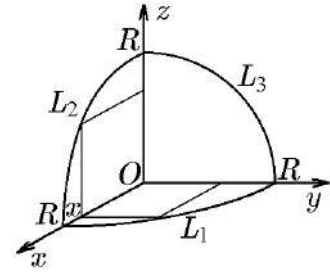


Рис. 135.  $L = L_1 L_2 L_3$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_x^{(2)} &= \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( R^2 \sin^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2} \right) dt = \left( \frac{R^2}{2} + \frac{h^3}{3} \right) \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}; \\ \mathbb{I}_y^{(2)} &= \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( R^2 \cos^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2} \right) dt = \left( \frac{R^2}{2} + \frac{h^3}{3} \right) \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}; \\ \mathbb{I}_z^{(2)} &= \frac{R^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = R^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}. \end{aligned}$$

**Пример 18.19.** Найти полярный момент относительно точки  $O(0, 0)$  одно-родного контура квадрата  $L = \{\vec{r}(x, y, z) : \max\{|x|, |y|\} = R\}$ .

**Решение.** Полярный момент инерции относительно точки  $O(0, 0)$  определяется интегралом

$$\mathbb{I}_0^{(2)} = \int_L (x^2 + y^2) dl,$$

вычисленным в примере 18.10, следовательно,

$$\mathbb{I}_0^{(2)} = \frac{32}{3} R^3.$$

Криволинейный интеграл первого рода может быть использован и в геометрических приложениях. Помимо длины  $\mathcal{L}$  спрямляемой кривой  $L$ , определяемой интегралом

$$\mathcal{L} = \int_L dl,$$

криволинейный интеграл можно использовать для нахождения площади части цилиндрической поверхности. Действительно, пусть  $L$  – кривая, расположенная в плоскости  $xOy$ .

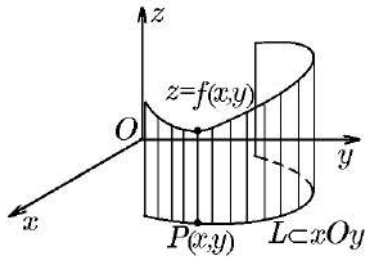


Рис. 136. Цилиндрическая поверхность

Если эту кривую рассматривать как направляющую цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси  $Oz$ , то, восстановив в каждой точке  $P(x, y)$  кривой  $L$  аппликату величиной  $z = f(x, y)$ , мы получим часть цилиндрической поверхности (рис. 136), площадь которой найдется криволинейным интегралом первого рода

$$S = \int_L f(x, y) dl. \quad (18.94)$$

**Пример 18.20.** Найти площадь цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = R^2$ , расположенной между плоскостью  $z = R$  и поверхностью  $z = xy/R$ . Исследовать её величину в зависимости от длины и положения направляющей в плоскости  $z = 0$ .

**Решение.** Из очевидного неравенства  $(x - y)^2 \geq 0$  имеем оценку  $xy \leq (x^2 + y^2)/2$ , которая на цилиндрической поверхности принимает вид  $xy \leq R^2/2$ . Отсюда следует, что  $z = xy/R \leq R^2/2R = R/2 < R$ . Это означает, что на цилиндрической поверхности её линия пересечения с плоскостью  $z = R$  лежит выше её линии пересечения с поверхностью  $z = xy/R$ . С учетом этого искомого площадь можно найти по формуле (18.94):

$$S = \int_{L_{AB}} \left( R - \frac{xy}{R} \right),$$

где  $L_{AB}$  – часть окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  в плоскости  $z = 0$ , расположенной между её точками  $A$  и  $B$ . Этот криволинейный интеграл с помощью неоднократно использованного параметрического представления окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ :

$$L_{AB} = \{(x, y) : x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, \varphi \in (\alpha, \beta) \subset (0, 2\pi)\},$$

где  $\varphi = \alpha$  соответствует точке  $A$ , а  $\varphi = \beta$  – точке  $B$ , запишется как

$$\begin{aligned} S &= \int_{L_{AB}} \left( R - \frac{xy}{R} \right) dl = \int_{\alpha}^{\beta} (R - R \cos \varphi \sin \varphi) R d\varphi = R^2 \int_{\alpha}^{\beta} \left( 1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) d\varphi = \\ &= R^2 \left( \varphi + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} = R^2(\beta - \alpha) + \frac{R^2}{4}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Рассмотрим частные значения площади  $S$  в зависимости от положения точек  $A$  и  $B$ , т. е. от значений углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

1.  $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае направляющей цилиндрической поверхности является четверть окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  из 1-й четверти плоскости  $xOy$ , и

$$S_I = R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{R^2}{4} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{2}.$$

2.  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi$ . В этом случае направляющей цилиндрической поверхности является четверть окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  из 2-й четверти плоскости  $xOy$ , и

$$S_{II} = R^2 \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{R^2}{4} (\cos 2\pi - \cos \pi) = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{R^2}{2}.$$

3.  $\alpha = 0, \beta = \pi$ . В этом случае направляющей цилиндрической поверхности является половина окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ , расположенная в 1-й и 2-й четвертях плоскости  $xOy$ , и

$$S_{III} = R^2 (\pi - 0) - \frac{R^2}{4} (\cos 2\pi - \cos 0) = \pi R^2.$$

Такие результаты объясняются тем, что поверхность  $z = xy/R$  в 1-й четверти плоскости  $xOy$  расположена выше плоскости  $z = 0$ , а во 2-й – ниже. Если через  $S_{\Pi} = (2\pi R) \cdot R = 2\pi R^2$  обозначить площадь боковой поверхности кругового цилиндра с радиусом  $R$  и высотой  $R$ , а через  $S_{\Pi} = \frac{R^2}{2}$  – площадь цилиндрической поверхности между поверхностью  $z = xy/R$  и плоскостью  $z = 0$  в первой четверти, то найденные значения площади можно записать как

$$S_I = \frac{1}{4} S_{\Pi} - S_{\Pi}, \quad S_{II} = \frac{1}{4} S_{\Pi} + S_{\Pi}, \quad S_{III} = S_I + S_{II} = \frac{1}{2} S_{\Pi}.$$



♦ Этот результат достаточно просто объясняется тем, что поверхность  $z = xy/R$  является гиперболическим параболоидом. Действительно при повороте системы координат  $(x, y, z)$  на угол  $\pi/4$  вокруг оси  $Oz$ , т. е. в координатах  $x = (x' - y')/\sqrt{2}$ ,  $y = (x' + y')/\sqrt{2}$ ,  $z = z'$  уравнение поверхности будет иметь канонический вид гиперболического параболоида:  $2Rz = (x')^2 - (y')^2$ .

Следующий пример иллюстрирует другие возможности использования криволинейных интегралов первого рода в приложениях самой разной природы.

**Пример 18.21.** Найти силу, с которой масса  $M$ , равномерно распределенная по окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  в плоскости  $z = 0$ , притягивает массу  $m$ , помещенную в точку  $A(0, 0, h)$ .

**Решение.** Согласно закону притяжения, две массы,  $M_1$  и  $M_2$ , притягиваются с силой

$$\vec{F} = gM_1M_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

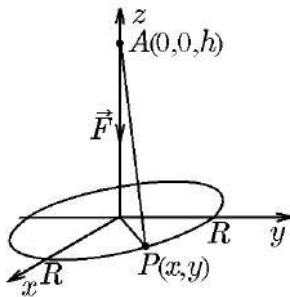


Рис. 137.

Окружность и материальная точка

где  $g$  – гравитационная постоянная и  $|\vec{r}|$  – расстояние между точками, в которых находятся эти массы (рис. 137).

В данной постановке задачи из соображений симметрии можно сделать вывод, что  $F_x = F_y = 0$ , так как точка  $A(0, 0, h)$  одинаково удалена от всех точек однородной окружности с постоянной плотностью  $M/(2\pi R)$ .

В силу этого вектор  $\vec{F} = -F_z \vec{k}$  направлен вдоль оси  $Oz$  в отрицательном направлении (рис. 137). Пусть точка  $P(x, y)$  принадлежит элементу окружности  $dl$  с элементом массы  $M_1 \rightarrow dM = \frac{M}{2\pi R} dl$ . Этот элемент действует на массу  $M_2 = m$ , помещенную в точку  $A$ , с силой, вертикальная составляющая которой

$$dF_z = g \frac{M}{2\pi R} dl \cdot m \frac{h}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^3} = \frac{gMmh}{2\pi R} \frac{dl}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^3}.$$

Интегрирование по всем элементам  $dl$  дает

$$F_z = \frac{gMmh}{2\pi R} \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{dl}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^3}.$$

С помощью неоднократно использованного гладкого параметрического представления окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ :

$$L = \{\vec{r}(x, y, 0) : x = R \cos t, y = R \sin t, t \in [0, 2\pi]\}, \\ dl = R dt,$$

получим

$$F_z = \frac{gMmh}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R dt}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{gMmh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$$

и, следовательно,

$$\vec{F} = -F_z \vec{k} = -\frac{gMmh}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \vec{k}.$$

### 18.5. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам) и его свойства

Наряду с задачами, решаемыми с помощью криволинейных интегралов первого рода, ряд математических и прикладных задач приводят к криволинейным интегралам другого типа. Например, если  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  является радиус-вектором движущейся материальной точки, а вектор  $\vec{F} = \vec{F}(t)$  выражает собой силу, действующую на эту точку, то естественно определить работу силы  $\vec{F}$  вдоль траектории  $L_{AB}$  рассматриваемой точки как интеграл вида

$$A = \int_{L_{AB}} (\vec{F}(t), d\vec{r}(t)), \quad (18.95)$$

отличного от криволинейного интеграла первого рода. Интеграл (18.95) в координатной форме с учетом того, что  $\vec{F} = (P, Q, R)$  и  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ , можно записать как

$$\int_{L_{AB}} (\vec{F}(t), d\vec{r}(t)) = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz. \quad (18.96)$$

Данный интеграл называют *криволинейным интегралом второго рода*, или *по координатам*.

Обозначения (18.96), принятые для криволинейного интеграла второго рода (по координатам), можно рассматривать как краткую запись предела соответствующей интегральной суммы, которую можно представить определенным интегралом. Вид этого интеграла обусловлен параметризацией кривой  $L_{AB}$ . Именно к такому определению (18.96) мы и переходим в рамках более строгих формулировок.

Пусть в некоторой области  $G$  пространства  $\mathbb{R}^3$  с системой координат  $Oxyz$  задана гладкая спрямляемая кривая

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y, z): x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}. \quad (18.97)$$

И пусть в каждой точке этой области задано векторное поле

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)). \quad (18.98)$$

Если функции  $P, Q, R$  непрерывно дифференцируемы в области  $G$ , то векторное поле (18.98) называется *непрерывно дифференцируемым* в этой области  $G$ . Если существует такая система координат, в которой функция  $R = 0$ , а функции  $P$  и  $Q$  не зависят от координаты  $z$ , то векторное поле  $\vec{F}$  называется *плоским*. В этом случае

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z)).$$

В рамках этого замечания будем исходить из следующего определения.

◆ **Определенный интеграл**

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}(\vec{r}(t)), \vec{r}'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt$$

будем называть *криволинейным интегралом второго рода от векторного поля  $\vec{F}$*  по кривой  $L_{AB}$ , используя для него обозначения (18.96).

Таким образом, согласно определению в векторной форме имеем

$$\int_{L_{AB}} (\vec{F}(t), d\vec{r}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}(\vec{r}(t)), \vec{r}'(t)) dt, \quad (18.99)$$

а в координатной форме, соответственно,

$$\int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt, \quad (18.100)$$

Положив в выбранной системе координат  $Q = R = 0$ , получим

$$\int_{L_{AB}} P dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt. \quad (18.101)$$

Аналогично

$$\int_{L_{AB}} Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) dt, \quad (18.102)$$

$$\int_{L_{AB}} R dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt. \quad (18.103)$$

◆ Определенные интегралы, стоящие в правых частях формул (18.101)–(18.103), называются *криволинейными интегралами второго рода от каждой из функций  $P, Q, R$*  соответственно. Символы, стоящие в левых частях этих формул, служат для обозначения этих интегралов.

Рассмотрим свойства криволинейного интеграла второго рода.

**Свойство 1.** Криволинейный интеграл второго рода не зависит от способа параметризации кривой интегрирования.

Это свойство доказывается так же, как и для криволинейного интеграла первого рода.

**Свойство 2.** Криволинейный интеграл второго рода при изменении ориентации кривой на противоположную меняет знак, т. е.

$$\int_{L_{AB}} (\vec{F}, d\vec{r}) = - \int_{L_{BA}} (\vec{F}, d\vec{r}). \quad (18.104)$$

Действительно, будем исходить из параметрических представлений:

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]\}, \\ L_{BA} = \{\vec{\rho}(x, y, z) : \vec{\rho} = \vec{r}(\alpha + \beta - t), t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Тогда  $\vec{\rho}'(t) = -\vec{r}'(\alpha + \beta - t)$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{L_{BA}} (\vec{F}, d\vec{\rho}) &= \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}(\vec{\rho}(t)), \vec{\rho}'(t)) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}(\vec{r}(\alpha + \beta - t)), \vec{r}'(\alpha + \beta - t)) dt = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}(\vec{r}(\tau)), \vec{r}'(\tau)) d\tau = - \int_{L_{AB}} (\vec{F}, d\vec{r}). \end{aligned}$$

**Свойство 3.** Криволинейный интеграл второго рода аддитивен относительно кривой интегрирования, т. е. если  $L_{AB} = L_1 L_2 \dots L_n$ , то

$$\int_{L_{AB}} (\vec{F}, d\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} (\vec{F}, d\vec{r}). \quad (18.105)$$

Это свойство доказывается так же, как и для криволинейного интеграла первого рода.

Как и в случае криволинейного интеграла первого рода, криволинейный интеграл второго рода можно определить пределом интегральной суммы, представляющей определенный интеграл по отрезку параметра  $t \in [\alpha, \beta]$  из параметрического представления кривой  $L_{AB}$  (18.97). Для определенности воспользуемся задачей на вычисление работы силы, с которой мы и начинали рассмотрение криволинейного интеграла второго рода.

Пусть материальная точка движется в силовом поле  $\vec{F}(\vec{r})$  по гладкой кривой  $L_{AB}$  (18.97). При таком движении сила, действующая на материальную точку, должна совершать работу. Для ее вычисления воспользуемся следующим. Пусть  $\tau_n \{t_i\}_{i=0}^n$  – разбиение отрезка  $[\alpha, \beta]$  оси  $Ot$  отрезками  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , длиной  $\Delta t_i = |t_i - t_{i-1}| = l_i - l_{i-1}$  и мелкостью разбиения  $d(\tau_n)$ , а  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . В силу взаимной однозначности отображения отрезка  $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$  на кривую  $L_{AB} \subset \mathbb{R}^3$  каждой точке  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  соответствует точка  $P(\vec{r}(\xi_i))$  и, следовательно, значение векторного поля  $\vec{F}(\vec{r}(\xi_i))$ . При таком разбиении при движении по дуге от точки  $P(\vec{r}(t_{i-1}))$  до точки  $P(\vec{r}(t_i))$  переменную силу  $\vec{F}(\vec{r})$  заменим постоянной силой, равной  $\vec{F}(\vec{r}(\xi_i))$ , а движение по дуге  $L_{P_{i-1}P_i}$  – движением по касательной с постоянной скоростью  $\vec{r}'(\xi_i)$ . Тогда работа силы при движении материальной точки по кривой  $L_{AB}$  приблизительно равна сумме:

$$A_n = \sum_{i=1}^n (\vec{F}(\vec{r}(\xi_i)), \vec{r}'(\xi_i)) \Delta t_i.$$

Предел этой суммы при мелкости разбиения  $d(\tau_n) \rightarrow 0$  естественно назвать *работой*  $A$  силы  $\vec{F}(\vec{r})$  при движении точки по кривой  $L_{AB}$ . Таким образом, работа силы

$$A = \lim_{d(\tau_n) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{F}(\vec{r}(\xi_i)), \vec{r}'(\xi_i)) \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}(\vec{r}(t)), \vec{r}'(t)) dt = \int_{L_{AB}} (\vec{F}, d\vec{r}) \quad (18.106)$$

задается пределом интегральной суммы, соответствующей определенному интегралу на отрезке  $t \in [\alpha, \beta]$  и, следовательно, в силу определения (18.98), криволинейному интегралу второго рода.

В связи с этим мы ограничим рассмотрение свойств сформулированными выше, связанными со спецификой определения (18.98), использующего параметризацию кривой  $L_{AB}$ . Естественно, поскольку криволинейные интегралы второго рода сводятся к обычным интегралам по отрезку, на них переносятся и их свойства (линейность относительно интегрируемых функций, теорема о среднем и т. п.).

Для плоских векторных полей  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  формулы (18.98)–(18.103) упрощаются условием  $R \equiv 0$  со следующим замечанием.

Если плоская кривая  $L_{AB}$  задана как график непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$  функции  $y = f(x)$ , то формула (18.101) приобретает особенно простой вид:

$$\int_{L_{AB}} P dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx. \quad (18.107)$$

Причем стоящий в правой части определенный интеграл имеет смысл не только в том случае, когда функция  $y = f(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , но и в более общем случае, когда функция  $y = f(x)$  всего лишь непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . В этом случае будем считать, что криволинейный интеграл (18.107) есть, по определению, определенный интеграл, стоящий в правой части формулы (18.107).

Таким образом, для решения математических и прикладных задач различных типов мы имеем два типа криволинейных интегралов. Однако между ними можно установить связь, которая наглядно иллюстрирует не только их различие, но и условия их возможной взаимозаменяемости. Действительно, будем исходить из определения (18.98), проведя в нем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} (\vec{F}, d\vec{r}) &= \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{F}(\vec{r}(t)), \vec{r}'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \vec{F}(\vec{r}(t)), \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right) |\vec{r}'(t)| dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_{L_{AB}} f(x(t), y(t), z(t)) dl, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(x(t), y(t), z(t)) &= (\vec{F}(\vec{r}(t)), \vec{\tau}(t)) = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma, \\ \vec{\tau}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \end{aligned} \quad (18.108)$$

Таким образом, с помощью выражений (18.108) криволинейный интеграл второго рода можно записать криволинейным интегралом первого рода:

$$\int_{L_{AB}} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{L_{AB}} (P dx + Q dy + R dz) = \int_{L_{AB}} f(x(t), y(t), z(t)) dl, \quad (18.109)$$

в котором функция  $f(x(t), y(t), z(t))$  представляет собой проекцию вектора  $\vec{F}(\vec{r}(t))$  на единичный направляющий вектор касательной  $\vec{\tau}(t)$  (18.108) к кривой  $L_{AB}$  в каждой ее точке, задающий ориентацию этой кривой. При изменении ориентации кривой проекция вектора  $\vec{F}$  меняет свой знак на противоположный, что полностью соответствует изменению знака интеграла второго рода, стоящего в левой части равенства (18.109).

### 18.6. Примеры вычисления криволинейных интегралов второго рода

**Пример 18.22.** Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\int_{L_{AB}} (x^2 + 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,$$

где кривая интегрирования задается соотношениями  $y = x^2$ ,  $|x| \leq 1$ .

**Решение.** Воспользуемся параметрическим представлением кривой  $L_{AB}$ , выбрав в качестве параметра переменную  $x$  и ориентируя кривую начальной точкой  $A$  с абсциссой  $x_A = -1$  и конечной точкой  $B$  с абсциссой  $x_B = 1$ :

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y): x = x, y = x^2, x \in [-1, 1]\}.$$

Поскольку в этом случае  $dy = 2x dx$  и

$$(x^2 + 2xy)dx = (x^2 + 2x^3)dx, \quad (y^2 - 2xy)dy = (x^4 - 2x^3)2x dx,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} (x^2 + 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{L_{AB}} [(x^2 + 2x^3) + (x^4 - 2x^3)2x] dx = \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 4x^4)dx + \int_{-1}^1 (2x^3 + 2x^5)dx = \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 - 4x^4)dx + 0 = 2 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \right) = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойствами интегралов от четных и нечетных функций в симметричных пределах.

**Пример 18.23.** Вычислить интегралы

$$I_1 = \int_{L_{AB}} xy dx + x^2 dy, \quad I_2 = \int_{L_{AB}} 2xy dx + x^2 dy \quad (18.110)$$

от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$  по кривым

$$\text{а) } y = x, \quad \text{б) } y = x^2, \quad \text{в) } y^2 = x$$

и сравнить результаты интегрирования.

**Решение.** Последовательно рассмотрим все три случая.

1. Так как  $y = x$ ,  $dy = dx$ ,  $x \in [0, 1]$ , то

$$I_1 = \int_0^1 (x \cdot x + x^2)dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}, \quad I_2 = \int_0^1 (2x \cdot x + x^2)dx = x^3 \Big|_0^1 = 1.$$

2. Так как  $y = x^2$ ,  $dy = 2x dx$ ,  $x \in [0, 1]$ , то

$$I_1 = \int_0^1 (x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = 3 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}, \quad I_2 = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = x^4 \Big|_0^1 = 1.$$

3. Так как  $x = y^2$ ,  $dx = 2y dy$ ,  $y \in [0, 1]$ , то

$$I_1 = \int_0^1 (x \cdot y \cdot 2y + y^4) dy = 3 \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{5}, \quad I_2 = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4) dy = y^5 \Big|_0^1 = 1.$$

Как видим, значение интеграла  $I_1$  зависит от формы кривой, а интеграла  $I_2$  – нет. Причину такого различия мы установим позднее, хотя уже сейчас можно заметить, что подынтегральное выражение  $I_2$  представляет собой полный дифференциал:  $d(x^2y) = 2xy dx + x^2 dy$ .

**Пример 18.24.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{L_{AB}} (2R - y) dx + x dy$$

по одной арке циклоиды

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y): x = R(t - \sin t), y = R(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]\}.$$

**Решение.** Так как

$$dx = R(1 - \cos t) dt, \quad dy = R \sin t dt,$$

на кривой  $L_{AB}$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} (2R - y) dx + x dy &= [2R - R(1 - \cos t)] R(1 - \cos t) dt + R(t - \sin t) R \sin t dt = \\ &= R^2 [1 + \cos t)(1 - \cos t) + t \sin t - \sin^2 t] dt = R^2 t \sin t dt, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$I = \int_{L_{AB}} (2R - y) dx + x dy = R^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = R^2 (-t \cos t + \sin t) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi R^2.$$

**Пример 18.25.** Вычислить интегралы

$$I = \oint_L (x^2 + xy + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, \quad J = \int_L xy^2 dx + x^2 y dy \quad (18.111)$$

по контуру треугольника  $OA_1A_2$ :  $O(0, 0)$ ,  $A_1(1, 2)$ ,  $A_2(0, 2)$ .

**Решение.** Заданный треугольник изображен на рис. 138. Очевидно, что в данном случае возможно только кусочно-гладкое представление контура  $L$  в виде  $L = L_1L_2L_3$ . На каждом звене ломаной воспользуемся параметрическими уравнениями прямых (см. пример 18.5):

$$x - x_{0i} = m_i(t - t_{0i}), \quad y - y_{0i} = n_i(t - t_{0i}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\vec{s}_i = (m_i, n_i)$  – направляющие векторы прямых  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (рис. 138):

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{OA_1} = (1, 2), \quad \vec{s}_2 = \overrightarrow{A_1A_2} = (-1, 0), \quad \vec{s}_3 = \overrightarrow{A_2O} = (0, -2),$$

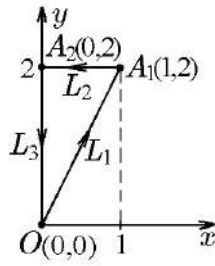


Рис. 138.  
Ломаная  $OA_1A_2$

а  $x_{oi}, y_{oi}$  — координаты точек  $O, A_1, A_2$ , соответствующие значению параметра  $t_{oi}$ . Положив  $t_{oi} = 0$ , последовательно найдем:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\vec{r}(x, y): x = t, y = 2t, t \in [0, 1]\}, \\ L_2 &= \{\vec{r}(x, y): x = 2 - t, y = 2, t \in [1, 2]\}, \\ L_3 &= \{\vec{r}(x, y): x = 0, y = 4 - t, t \in [2, 4]\}. \end{aligned}$$

В силу свойства аддитивности исходные интегралы можно представить суммами интегралов:

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad J = J_1 + J_2 + J_3,$$

для которых на  $L_1$ :  $dx = dt, dy = 2dt, [t \in [0, 1],$  т. е.

$$I_1 = \int_0^1 [(t^2 + 2t^2 + 4t^2) + (t^2 - 4t^2) \cdot 2] dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$J_1 = \int_0^1 [t \cdot 4t^2 + t^2 \cdot 2t \cdot 2] dt = 8 \int_0^1 t^3 dt = 8 \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = 2;$$

на  $L_2$ :  $dx = -dt, dy = 0, [t \in [1, 2],$  т. е.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 [(2-t)^2 + (2-t)2 + 4](-dt) = - \int_1^2 (12 - 6t + t^2) dt = - \left( 12t - 3t^2 + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\ &= - \left[ 12(2-1) - 3(4-1) + \frac{1}{3}(8-1) \right] = -\frac{16}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_1^2 [-(4-t)](-dt) = -4 \int_1^2 (2-t) dt = -4 \left( 2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \\ &= -4 \left[ 2(2-1) - \frac{1}{2}(4-1) \right] = -2; \end{aligned}$$

на  $L_3$ :  $dx = 0, dy = -dt, [t \in [2, 4],$  т. е.

$$I_3 = \int_2^4 [-(4-t)^2](-dt) = \int_2^4 (t-4)^2 dt = \frac{t-4}{3} \Big|_2^4 = \frac{1}{3} [0 - (-2)^3] = \frac{8}{3},$$

$$J_3 = 0.$$

Таким образом,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3} - \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$$

и, соответственно,

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = 2 - 2 + 0 = 0.$$

Как видим, интеграл  $J$  по замкнутому контуру  $L$  обращается в нуль. По этому поводу отметим, что, как и в предыдущем примере, подынтегральное выражение для  $J$  представляет собой полный дифференциал:  $xy^2 dx + x^2 y dy = d\left(\frac{1}{2}x^2 y^2\right)$ . Кроме этого, интеграл  $J_3$  обращается в нуль и на отдельном отрезке  $L_3$  контура  $L$ .



**Пример 18.26.** Доказать, что для криволинейного интеграла второго рода справедлива оценка

$$\left| \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz \right| \leq \mathcal{L} \mathcal{M}, \quad (18.112)$$

где  $\mathcal{L}$  – длина  $L_{AB}$  и

$$\mathcal{M} = \max_{(x,y,z) \in L_{AB}} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}. \quad (18.113)$$

Исходя из оценки (18.112), показать, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2} = 0. \quad (18.114)$$

**Решение.** Без ограничения общности можно считать кривую  $L_{AB}$  гладкой (для кусочно-гладкой кривой можно воспользоваться свойством аддитивности). Согласно (18.109), для  $\vec{F} = (P, Q, R)$  имеем

$$\int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{L_{AB}} (\vec{F}, \vec{\tau}) dl,$$

$\vec{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  – единичный вектор касательной к  $L_{AB}$ . Из оценки  $|(\vec{F}, \vec{\tau})| \leq |\vec{F}| = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz \right| &= \left| \int_{L_{AB}} (\vec{F}, \vec{\tau}) dl \right| \leq \int_{L_{AB}} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} dl \leq \\ &\leq \max_{(x,y,z) \in L_{AB}} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \int_{L_{AB}} dl = \mathcal{M} \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Теперь перейдем ко второй части задачи. В этом случае

$$P = \frac{y}{(x^2 + xy + y^2)^2}, \quad Q = \frac{-x}{(x^2 + xy + y^2)^2}, \quad R = 0,$$

а  $L_{AB} \Rightarrow$  окружность  $x^2 + y^2 = R^2$  с длиной  $\mathcal{L} = 2\pi R$  и параметрическим представлением

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} &= \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{(x^2 + xy + y^2)^4}} = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \frac{R}{R^4(1 + \cos \varphi \sin \varphi)^2} = \\ &= \frac{1}{R^3} \frac{4}{(2 + \sin 2\varphi)^2} \leq \frac{4}{R^3} \end{aligned}$$

для всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и, следовательно,

$$\max_{(x,y) \in x^2+y^2=R^2} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} = \frac{4}{R^3}.$$

С учетом этого

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2} \right| \leq \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4}{R^3} 2\pi R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{8\pi}{R^2} = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Пример 18.27.** Вычислить интеграл

$$\int_L x dx + z dy + x dz$$

по линии  $L$  пересечения цилиндра  $x^2 + y^2 = 9$  и плоскости  $2x + y + z = 1$ .

**Решение.** Линию пересечения можно задать параметрическим представлением

$$L = \{\vec{r}(x, y, z): x = 3 \cos \varphi, y = 3 \sin \varphi, z = 1 - 6 \cos \varphi - 3 \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

исходя из которого, получим

$$\begin{aligned} &\int_L x dx + z dy + x dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [3 \cos \varphi (-3 \sin \varphi) + (1 - 6 \cos \varphi - 3 \sin \varphi) 3 \cos \varphi + 3 \cos \varphi (6 \sin \varphi - 3 \cos \varphi)] d\varphi = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - 9 \cos^2 \varphi) d\varphi = -\frac{27}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = -\frac{27}{2} 2\pi = -27\pi. \end{aligned}$$

**Пример 18.28.** Вычислить интеграл

$$\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

по линии  $L$  пересечения сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  с цилиндром  $x^2 + y^2 = Rx$ , расположенной в полупространстве  $z \geq 0$ .

**Решение.** Переход к цилиндрическим координатам дает  $\rho = R \cos \varphi$ ,  $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ . Приняв в качестве параметра полярный угол  $\varphi$ , имеем параметрическое представление кривой интегрирования:

$$L = \left\{ \vec{r}(x, y, z): x = R \cos^2 \varphi, y = R \sin \varphi \cos \varphi, z = R |\sin \varphi|, \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

Исходя из этого получим:

$$dx = -2R \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad dy = R(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi,$$

$$dz = (\operatorname{sign} \varphi) R \cos \varphi d\varphi = \begin{cases} R \cos \varphi d\varphi, & \varphi \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ , \\ -R \cos \varphi d\varphi, & \varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[ \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3 [-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi + (\operatorname{sign} \varphi) \cos^3 \varphi] d\varphi. \end{aligned}$$

Так как

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + (\operatorname{sign} \varphi) \cos^3 \varphi] d\varphi = 0,$$

как интеграл от нечетных функций в симметричных пределах, и

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi) d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} - \frac{1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{2} \right] d\varphi = \\ &= - \int_0^{\pi/2} \cos^2 2\varphi d\varphi = - \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = - \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} + 0 = -\frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$I = R^3 (I_1 + I_2) = R^3 \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\pi R^3}{4}.$$

**Пример 18.29.** Вычислить интеграл

$$I = \int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

где  $L$  – сферический треугольник  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

**Решение.** Представим интеграл  $I$  на ориентированной кривой  $L$  в виде суммы интегралов по кривым  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , лежащим в координатных плоскостях (рис. 139):

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3, \\ I_i &= \int_{L_i} P dx + Q dy + R dz. \end{aligned}$$

Каждая кривая  $L_1$  представляет собой четверть окружности радиусом  $R = 1$  с центром в начале координат. В плоскости  $xOy$  выполняются равенства  $z = 0$  и  $dz = 0$ , в силу чего на кривой  $L_1$  имеем

$$I_1 = \int_{L_1} y^2 dx - x^2 dy.$$

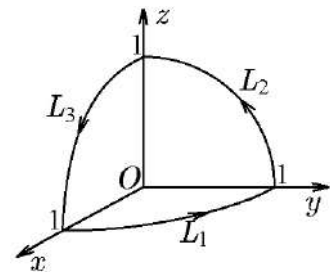


Рис. 139. Сферический треугольник

Положив  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ ,  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , получим

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) d\varphi = -2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) = \\ &= 2 \left( \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) = 2 \left( -1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Вполне очевидно, что

$$I_1 = I_2 = \int_0^{\pi/2} z^2 dy - y^2 dz = I_3 = \int_0^{\pi/2} x^2 dz - z^2 dx = -\frac{4}{3},$$

и, следовательно,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3 \left( -\frac{4}{3} \right) = -4.$$

**Пример 18.30.** Найти работу силы

$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (18.115)$$

при движении точки по кривой  $L_{AB}$ , не проходящей через начало координат  $x = y = z = 0$ .

**Решение.** Пусть кусочно-гладкая кривая  $L_{AB}$  задается параметрическим уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , таким, что  $|\vec{r}'(t)| \neq 0$  для всех  $t \in [\alpha, \beta]$ . Работу силы  $\vec{F}$  найдем по формуле (18.95) (или (18.106)):

$$\begin{aligned} A &= \int_{L_{AB}} (\vec{F}, d\vec{r}) = - \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|^3}, \vec{r}'(t) \right) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{|\vec{r}(t)|^3} \left( \frac{d}{dt} |\vec{r}(t)|^2 \right) dt = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\vec{r}'(t)|}{|\vec{r}(t)|^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|\vec{r}(t)|} \right) dt = \frac{1}{|\vec{r}(t)|} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{|\vec{r}(\beta)|} - \frac{1}{|\vec{r}(\alpha)|} = \frac{1}{|\vec{r}_B|} - \frac{1}{|\vec{r}_A|}. \end{aligned}$$

## 19. Формула Грина

### 19.1. Граница плоской области. Ориентация и связность

Напомним, что *областью* на плоскости ( $\mathbb{R}^2$ ) называется открытое связное множество, а *замыкание области* получается присоединением к области ее границы. Согласно теореме Жордана, любой простой (без точек самопересечения) замкнутый контур разделяет плоскость на две области: ограниченную и неограниченную, общей границей которых он и является.

Пусть  $G$  – ограниченная область на плоскости ( $\mathbb{R}^2$ ) и пусть ее граница состоит из конечного числа простых контуров, которые будем называть *границными контурами*. Количество граничных контуров определяет порядок связности границы области.

Если граничный контур области  $G$  является одновременно и границей неограниченной области, лежащей в  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$ , то будем называть его *внешним* и обозначать как  $\Gamma$ .

Если граничный контур области  $G$  является одновременно и границей ограниченной области, лежащей в  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ , то такой контур будем называть *внутренним* и обозначать как  $\gamma$ .

Из всех граничных контуров области один является внешним, а остальные – внутренними. На рис. 140, *а* изображена односвязная область с единственным внешним контуром  $\Gamma$ . На рис. 140, *б* изображена двусвязная область с внешним контуром  $\Gamma$  и внутренним контуром  $\gamma$ . На рис. 140, *в* изображена трехсвязная область с внешним контуром  $\Gamma$  и двумя внутренними контурами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

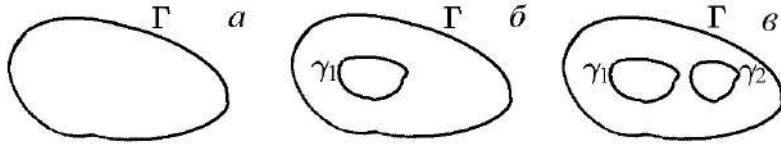


Рис. 140. Области: *а*) односвязная; *б*) двусвязная; *в*) трехсвязная

Еще одной характеристикой замкнутого контура является его ориентация. Будем говорить, что *простой контур*  $\Gamma$  *ориентирован положительно*, если при обходе контура ограничиваемая им область остается слева (рис. 141, *а*). Как следует из рис. 141, *а*, обход контура в этом случае идет против часовой стрелки. Положительно ориентируемый контур будем обозначать как  $\Gamma^+$ , а зачастую и просто  $\Gamma$ . Противоположно ориентированный контур (рис. 141, *б*) будем называть *ориентированным отрицательно* и обозначать как  $\Gamma^-$ . Как следует из рис. 141, *б*, обход контура в этом случае осуществляется по часовой стрелке так, что ограничиваемая им область остается справа.

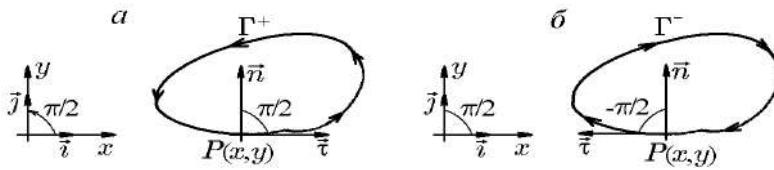


Рис. 141. Контурь: *а*) положительно ориентированный; *б*) отрицательно ориентированный

◇ Следует отметить, что сформулированные выше понятия определены не строго и не в точных математических терминах. Это объясняется тем, что в дальнейшем в каждом отдельном случае ориентация всегда будет конкретно указываться. Поэтому такое «нестрогое» определение послужит для геометрической наглядности рассматриваемых ниже вопросов применительно к криволинейным интегралам.

◇ Более строгие определения, как мы уже отмечали, возможны в терминах многообразий. В этом случае простой замкнутый контур классифицируется как одномерное многообразие без края, которое само является краем двумерного многообразия – плоской области пространства  $\mathbb{R}^2$ , ориентированного выбором канонического базиса  $(\vec{i}, \vec{j})$ . В такой формулировке вопрос об ориентации простого замкнутого контура, ограничивающего плоскую область, сводится к вопросу об ориентации края двумерного многообразия. В этом случае положительная ориентация края (контура) двумерного многообразия (области) выбирается так, чтобы единичный вектор касательного подпространства (направляющий вектор касательной)  $\vec{\tau}$  и единичный вектор его нормали (нормаль к касательной)  $\vec{n}$ , направленный в сторону внутренних точек области, составляли бы локальный базис  $(\vec{\tau}, \vec{n})$ , ориентированный так же, как канонический базис  $(\vec{i}, \vec{j})$  пространства  $\mathbb{R}^2$ . В противном случае ориентация края (контура) считается отрицательной (рис. 141).

Обратимся теперь к вопросу об ориентации границы двусвязной области  $G$ , для которой  $\Gamma$  – ее внешний, а  $\gamma$  – внутренний граничные контуры.

♦ Совокупность внешнего и внутреннего граничных контуров, ориентированных так, что при обходе по каждому из них область  $G$  остается слева, называется *положительной ориентацией* границы области  $G$  (рис. 142, а) и обозначается как

$$\partial G = \Gamma \cup \gamma^-. \quad (19.1)$$

Такое определение оправдано: если двусвязную область  $G$  гладким разрезом превратить в односвязную, то при выбранном положительном направлении обхода внешнего контура его внутренний контур будет обходиться в направлении его отрицательной ориентации относительно внутренней области, не принадлежащей  $G$  (рис. 142, б).

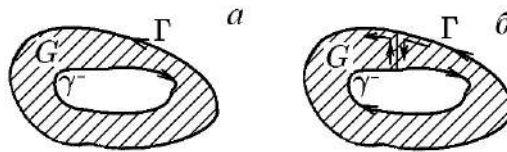


Рис. 142. Положительная ориентация границы области  $G$ :  
а) без разреза, б) с разрезом

Обобщение формулы (19.1) на  $n$ -связную область  $G$  имеет вид

$$\partial G = \Gamma \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} \gamma_i^- \right). \quad (19.2)$$

## 19.2. Формула Грина

**Теорема 19.1 (формула Грина для односвязной области).** Если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , а простой кусочно-гладкий контур  $\Gamma \subset \Omega$  ограничивает область  $G \subset \Omega$ , то справедлива формула Грина:

$$\oint_{\partial G} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_G \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy, \quad (19.3)$$

где  $\partial G$  – положительно ориентированная граница области  $G$ .

**Доказательство** начнем с области  $G$ , элементарной относительно обеих координатных осей. В этом случае, как известно, существуют такие кусочно-непрерывные дифференцируемые функции  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , и  $x = x_1(y)$ ,  $x = x_2(y)$ ,  $y \in [c, d]$  (рис. 143), с помощью которых замкнутую область  $G$  можно определить как

$$\bar{G} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} = \{(x, y) : x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

Теперь, применив формулы сведения двойного интеграла к повторному, получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 - \iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \\
 &= - \int_a^b dx [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] = \\
 &= \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx = \\
 &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \\
 &= \int_{AA_1B_1B} P(x, y) dx - \int_{DD_1C_1C} P(x, y) dx = \\
 &= \int_{AA_1B_1B} P(x, y) dx + \int_{CC_1D_1D} P(x, y) dx.
 \end{aligned} \tag{19.4}$$

Здесь мы воспользовались правилом вычисления криволинейного интеграла второго рода по кривой, являющейся графиком функции на отрезке  $[a, b]$ .

Вместе с этим учтем, что для криволинейных интегралов по отрезкам  $BC$  и  $DA$  справедливы равенства

$$\int_{BC} P(x, y) dx = \int_{DA} P(x, y) dx = 0, \tag{19.5}$$

поскольку для них  $dx = 0$ .

Сложив равенства (19.4) и (19.5), получим

$$\begin{aligned}
 &\int_{AA_1B_1B} P(x, y) dx + \int_{BC} P(x, y) dx + \\
 &+ \int_{CC_1D_1D} P(x, y) dx + \int_{DA} P(x, y) dx.
 \end{aligned}$$

Согласно свойству аддитивности, сумму криволинейных интегралов можно записать одним криволинейным интегралом по положительно ориентированной границе  $\partial G$  области  $G$ , т. е.

$$- \iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial G} P(x, y) dx. \tag{19.6}$$

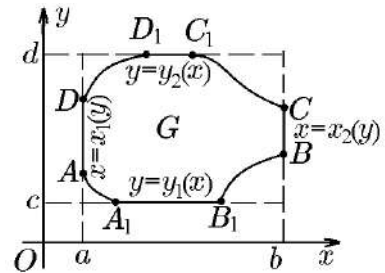


Рис. 143. Область  $G$ , элементарная относительно осей  $Ox$  и  $Oy$

Аналогично доказывается равенство

$$\iint_G \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial G} Q(x, y) dx. \quad (19.7)$$

Сложив равенства (19.6) и (19.7), придем к формуле Грина (19.3).

Пусть теперь область  $G$  по-прежнему ограничена положительно ориентированной границей  $\partial G$ . Предположим, что ее можно кусочно-гладкой простой кривой  $\gamma$  разбить на две области простейшего вида (рис. 144), рассмотренные выше. Тогда  $\partial G_1 = \Gamma_1 \cup \gamma$ ,  $\partial G_2 = \Gamma_2 \cup \gamma^-$ .

Применив формулу Грина для каждой из областей  $G_1$  и  $G_2$ , получим

$$\begin{aligned} \iint_{G_1} \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy &= \oint_{\partial G_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\gamma} P dx + Q dy, \\ \iint_{G_2} \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy &= \oint_{\partial G_2} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy + \int_{\gamma^-} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Сложив эти два равенства и учтя, что

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + \int_{\gamma^-} P dx + Q dy = 0,$$

снова придем к формуле Грина (19.3) для области  $G = G_1 \cup G_2$  с положительно ориентированной границей  $\partial G$ .

Исходя из этого, методом математической индукции справедливость формулы Грина (19.3) для односвязной области самого общего вида доказывается с помощью непересекающихся гладких перегородок, разбивающих область  $G$  на области  $G_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , простейшего вида (рис. 145). Таким образом, теорема (19.1) доказана.

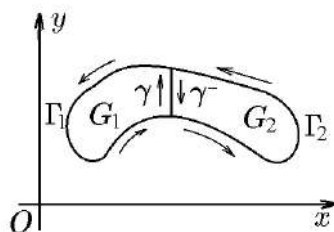


Рис. 144.  $G = \bigcup_{i=1}^2 G_i$

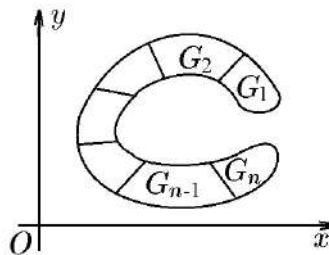


Рис. 145.  $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$

**Следствие 19.1.1.** Площадь  $S$  плоской области  $G$  с положительно ориентированной границей  $\partial G$  можно найти с помощью следующих криволинейных интегралов второго рода:

$$S = \oint_{\partial G} x dy = - \oint_{\partial G} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} x dy - y dx. \quad (19.8)$$

При практическом применении формул (19.8) для последнего интеграла иногда полезно использовать равенство

$$x dy - y dx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = -y^2 d\left(\frac{x}{y}\right) = (x^2 + y^2) d\left(\arctg \frac{y}{x}\right). \quad (19.9)$$



Действительно, поскольку площадь плоской области  $G$  есть ее плоская мера  $m(G)$  в  $\mathbb{R}^2$ :

$$S = m(G) = \iint_G dx dy,$$

то из формулы Грина (19.3) при  $Q = x$ ,  $P = 0$  имеем

$$\iint_G dx dy = \oint_{\partial G} x dy,$$

а при  $Q = 0$ ,  $P = y$ , соответственно,

$$\iint_G dx dy = - \oint_{\partial G} y dx.$$

Эти равенства, а также их сумма дают формулы (19.8).

**Теорема 19.2 (формула Грина для многосвязной области).** Пусть в условиях теоремы 19.1 область  $G$  является  $n$ -связной областью с положительно ориентированной границей (19.2), т. е.

$$\partial G = \Gamma \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} \gamma_i^- \right).$$

В этом случае формула Грина (19.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \iint_G \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = \\ & = \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\gamma_i^-} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy). \end{aligned} \quad (19.10)$$

**Доказательство** начнем с двусвязной области  $G$  с положительно ориентированной границей  $G = \Gamma \cup \gamma^-$ . При помощи гладких перегородок  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  (рис. 146) разделим ее на две односвязные:  $G = G_1 \cup G_2$ . Как следует из рис. 146,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  и  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  и, соответственно,

$$\begin{aligned} \partial G_1 &= \Gamma_1 \cup \gamma_3 \cup \gamma_1^- \cup \gamma_4, \\ \partial G_2 &= \Gamma_2 \cup \gamma_4^- \cup \gamma_2^- \cup \gamma_3^-, \end{aligned} \quad (19.11)$$

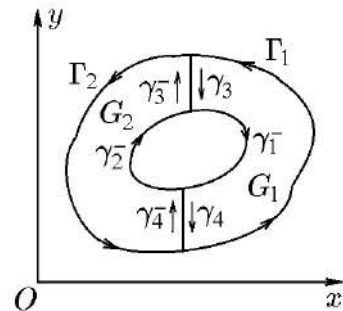


Рис. 146.  $G = G_1 \cup G_2$

где  $\partial G_1$  и  $\partial G_2$  – положительно ориентированные границы областей  $G_1$  и  $G_2$ .

Применив к  $G_1$  и  $G_2$  формулу Грина для односвязной области и исходя из (19.11), получим:

$$\iint_{G_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G_1} P dx + Q dy = \left( \int_{\Gamma_1} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_1^-} + \int_{\gamma_4} \right) (P dx + Q dy),$$

$$\iint_{G_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G_2} P dx + Q dy = \left( \int_{\Gamma_2} + \int_{\gamma_4^-} + \int_{\gamma_2^-} + \int_{\gamma_3^-} \right) (P dx + Q dy).$$

Здесь в правой части равенств использовано сокращенное обозначение для суммы четырех криволинейных интегралов по соответствующим кривым. Сложив эти равенства и учтя, что криволинейные интегралы по противоположно ориентированным кривым взаимно уничтожаются, получим

$$\begin{aligned} \iint_{G_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{\gamma^-} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_{\partial G} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Формально формула Грина для двусвязной области имеет тот же вид, что и для односвязной, если интеграл по  $\partial G$  понимать как сумму криволинейных интегралов по  $\Gamma$  и  $\gamma^-$ .

По индукции эта формула Грина обобщается на случай  $n$ -связной области в виде (19.10).

**Пример 19.1.** Насколько различаются интегралы

$$I_a = \int_{AaB} xy dx + x^2 dy, \quad I_b = \int_{AbB} xy dx + x^2 dy,$$

если точки  $A(0, 0)$  и  $B(1, 1)$  лежат:

- на параболе  $y = x^2 \Rightarrow L_{AaB}$ ;
- на прямой  $y = x \Rightarrow L_{AbB}$ ?

**Решение.** Искомая разность имеет вид

$$\begin{aligned} I_a - I_b &= \int_{AaB} xy dx + x^2 dy - \int_{AbB} xy dx + x^2 dy = \\ &= \int_{AaB} xy dx + x^2 dy + \int_{BbA} xy dx + x^2 dy = \oint_{\partial G} xy dx + x^2 dy. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что, во-первых, при изменении направления прохождения прямой с  $AbB$  на  $BbA$  соответствующий криволинейный интеграл меняет знак. Во-вторых, полученный замкнутый контур  $AaBbA$  представляет собой положительно ориентированную границу  $\partial G$  области  $G$  (рис. 147). Проведём вычисления при помощи формулы Грина:

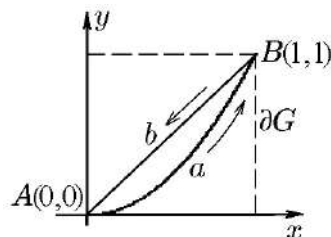


Рис. 147. Граница  $\partial G$  области  $G$

$$\begin{aligned} I_a - I_b &= \oint_{\partial G} xy dx + x^2 dy = \iint_G \left[ \frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right] dx dy = \\ &= \iint_G x dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x dy = \int_0^1 x \left( y \Big|_{x^2}^x \right) dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Этот результат можно проверить, воспользовавшись решением примера 18.23. Действительно, в этом примере показано, что

$$I_a = \frac{3}{4}, \quad I_b = \frac{2}{3},$$

следовательно, искомая разность

$$I_a - I_b = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

совпадает с полученным при помощи формулы Грина ответом.

**Пример 19.2.** Вычислить интегралы

$$I = \oint_L (x^2 + xy + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy, \quad J = \int_L xy^2 dx + x^2y dy$$

по контуру треугольника  $OA_1A_2$ :  $A(0, 0)$ ,  $A_1(1, 2)$ ,  $A_2(0, 2)$ .

**Решение.** Контур треугольника (см. рис. 138) с направлением обхода  $OA_1A_2O$  представляет собой положительно ориентированную границу  $\partial G$  области

$$G = \{(x, y): 2x \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 1\}.$$

С учетом этого оба интеграла по формуле Грина сводятся к соответствующим двойным интегралам:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\partial G} (x^2 + xy + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \iint_G \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y^2) \right] dx dy = \\ &= \iint_G (x - 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{2x}^2 (x - 2y) dy = \int_0^1 dx \left[ (xy - y^2) \Big|_{2x}^2 \right] = \\ &= \int_0^1 (2x + 2x^2 - 4) dx = \left( x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 4x \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}; \end{aligned}$$

$$J = \int_{\partial G} xy^2 dx + x^2y dy = \iint_G \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \right] dx dy = \iint_G (2xy - 2xy) dx dy = 0.$$

Значения интегралов  $I$ ,  $J$ , найденные здесь по формуле Грина, совпадают со значениями этих интегралов, полученных при помощи непосредственного вычисления в примере 18.25.

**Пример 19.3.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{L_{AB}} (2R - y)dx + x dy,$$

по одной арке циклоиды

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y): x = R(t - \sin t), y = R(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]\}.$$

**Решение.** Непосредственное вычисление этого интеграла приведено в примере 18.24. Рассмотрим вариант решения с использованием формулы Грина. Для этого арку циклоиды замкнем отрезком  $BA$  оси  $Ox$  (рис. 148) с параметрическим представлением

$$BA = \{\vec{r}(x, y) : x = R(2\pi - t), y = 0, t \in [0, 2\pi]\}.$$

В результате получим замкнутый контур  $L = L_{AB} \cup BA$ , представляющий собой отрицательно ориентированную границу области  $G$  (рис. 148). Применив к интегралу по замкнутому контуру формулу Грина и учтя ориентацию  $L$ , получим

$$\begin{aligned} \oint_L (2R - y)dx + x dy &= \int_{L_{AB}} (2R - y)dx + x dy + \int_{BA} (2R - y)dx + x dy = \\ &= - \iint_G \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(2R - y) \right] dx dy = -2 \iint_G dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{L_{AB}} (2R - y)dx + x dy = - \int_{BA} 2R dx - 2 \iint_G dx dy. \quad (19.12)$$

Вычисление интегралов в правой части сводится к вычислению простейших определенных интегралов:

$$\begin{aligned} - \int_{BA} dx &= \int_0^{2\pi R} dx = 2\pi R; \\ \iint_G dx dy &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \frac{3}{2} R^2 \int_0^{2\pi} dt = 3\pi R^2. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что определенные интегралы от функций  $\cos t$  и  $\cos 2t$  по промежутку  $[0, 2\pi]$  равны нулю. Подстановка этих значений в (19.12) дает результат

$$\int_{L_{AB}} (2R - y)dx + x dy = 2R \cdot 2\pi R - 2 \cdot 3\pi R^2 = -2\pi R^2,$$

совпадающий с найденным в примере 18.24.

**Пример 19.4.** Вычислить интеграл

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, \quad (19.13)$$

где  $\Gamma$  – положительно ориентированный замкнутый контур, не проходящий через начало координат.

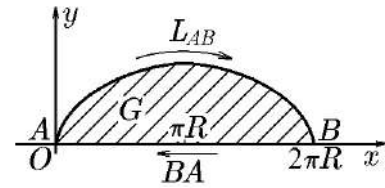


Рис. 148.  
 $L = L_{AB} \cup BA = (\partial G)^-$

**Решение.** Если контур  $\Gamma$  не окружает начало координат (рис. 149, а), то, применив формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \oint_{\Gamma} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy = \\ &= \iint_G \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] dx dy = \\ &= \iint_G \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy = 0. \end{aligned}$$

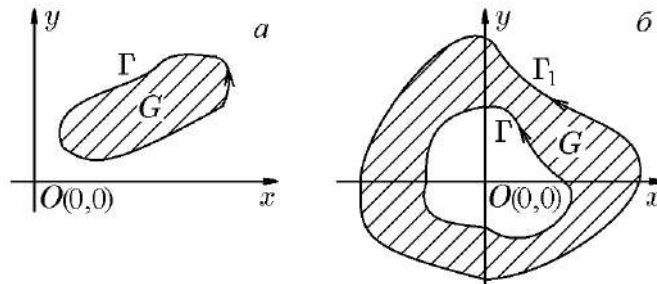


Рис. 149. Контурь: а)  $\partial G = \Gamma$ ; б)  $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma^-$

Если же контур  $\Gamma$  окружает начало координат (рис. 149, б), то в этом случае формулу Грина в формулировке для односвязной области применять нельзя, поскольку функции

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

в точке  $O(0, 0)$  не определены.

В этом случае контур  $\Gamma$  окружим не пересекающимся с ним положительно ориентированным контуром  $\Gamma_1$  (рис. 149, б). В результате получим двусвязную область  $G$  (рис. 149, б) с внутренним контуром  $\Gamma$  и внешним  $\Gamma_1$ , составляющим положительно ориентированную границу  $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma^-$ . Поскольку построенная таким образом область  $G$  не содержит особую точку  $O(0, 0)$ , то для нее справедлива формула Грина для двусвязной области  $G$ :

$$\oint_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\oint_{\partial G} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \oint_{\Gamma^-} P dx + Q dy = 0.$$

Поэтому

$$\oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0.$$

Но это означает, что интеграл  $I$  (19.13) не зависит от формы контура, охватывающего начало координат – точку  $O(0, 0)$ . Поэтому, выбрав в качестве контура  $\Gamma$ , например, положительно ориентированную окружность

$$\Gamma = \{\vec{r}(x, y) : x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

найдем значение интеграла  $I$ :

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}{R^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Таким образом, интеграл  $I$  (19.13) имеет всего два значения:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|} dl = \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0, & \text{если } \Gamma \text{ не охватывает точку } O(0, 0), \\ 2\pi, & \text{если } \Gamma \text{ охватывает точку } O(0, 0). \end{cases}$$

**Пример 19.5.** Найти площадь  $S$  области  $G$ , ограниченной астроидой

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

**Решение.** Искомая площадь  $S$  ранее была уже найдена в приложениях определенного интеграла, а затем двукратного. Найдем ее теперь с помощью криволинейного интеграла второго рода. В этом случае, согласно следствию 19.1.1, имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_{\partial G} x dy - y dx,$$

где  $\partial G$  – положительно ориентированная граница области  $G$ , ограниченной астроидой. Неоднократно использованное выше параметрическое представление астроиды  $\partial G$  имеет вид

$$\partial G = \{\vec{r}(x, y) : x = R \cos^3 \varphi, y = R \sin^3 \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Исходя из этого, найдем площадь:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\partial G} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [R \cos^3 \varphi 3R \sin^2 \varphi \cos \varphi + R \sin^3 \varphi 3R \cos^2 \varphi \sin \varphi] d\varphi = \\ &= \frac{3R^2}{2} \int_0^{2\pi} [\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi] d\varphi = \frac{3R^2}{8} \int_0^{2\pi} [\sin^2 2\varphi] d\varphi = \\ &= \frac{3R^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{3R^2}{16} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi R^2}{8}. \end{aligned}$$

**Пример 19.6.** Найти площадь  $S$  области  $G$ , ограниченной кривой

$$x^3 + y^3 - 3Rxy = 0. \quad (19.14)$$

**Решение.** Как и для предыдущего примера, искомая площадь  $S$  была найдена в приложениях определенного и двойного интегралов. Найдем ее теперь с помощью криволинейного интеграла второго рода. Легко заметить, что замена  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$  не изменяет вида заданного уравнения (19.14). Это означает, что кривая (19.14) симметрична относительно прямой  $y = x$ . Если учесть, что кривая (19.14) пересекает прямую  $y = x$  в двух точках, координаты  $x$  которых находятся из уравнений

$$2x^3 - 3Rx^2 = 0, \quad x^2(2x - 3R) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3R}{2},$$

то это означает, что уравнение (19.14) описывает петлю, ограничивающую область  $G$  (рис. 150).

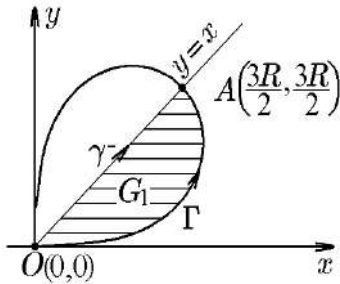


Рис. 150. Область  $G$  из примера 19.6

Чтобы параметризовать границу области  $G$ , воспользуемся тем, что функция (19.14) является суммой двух полиномов от  $x$  и  $y$  – третьей и второй степени. Обозначив через  $t$  отношение  $y/x$ , т. е.  $t = y/x$ , получим связывающее  $x$  и  $t$  равенство:

$$x^3(1 + t^3) - 3Rx^2t = 0.$$

Это равенство определяет две однозначные функции:

$$x(t) = \frac{3Rt}{1 + t^3}, \quad y(t) = \frac{3Rt^2}{1 + t^3}.$$

В силу симметрии области  $G$  можно найти площадь ее половины – области  $G_1$  (рис. 150), ограниченной кривыми  $\Gamma$  и  $\gamma^-$ , составляющими положительно ориентированную границу  $\partial G = \Gamma \cup \gamma^-$  области  $G_1$ .

Поскольку точке  $O$  с координатами  $x = y = 0$  соответствует значение параметра  $t_1 = 0$ , а точке  $A$  с координатами  $x = y = 3R/2$  – значение  $t_2 = 1$ , то это позволяет записать параметрическое представление  $\Gamma$  и  $\gamma^-$  в виде

$$\Gamma = \left\{ \vec{r}(x, y): x = \frac{3Rt}{1 + t^3}, y = \frac{3Rt^2}{1 + t^3}, t \in [0, 1] \right\},$$

$$\gamma^- = \left\{ \vec{r}(x, y): x = x, y = x, x \in \left[ 0, \frac{3R}{2} \right] \right\}.$$

Обозначив через  $S_1$  площадь области  $G_1$ , по формуле (19.8) находим

$$S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\partial G} x dy - y dx = \int_{\Gamma} x dy - y dx + \int_{\gamma^-} x dy - y dx. \quad (19.15)$$

Последовательное вычисление этих интегралов с учетом (19.9) дает

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x dy - y dx &= \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \int_0^1 \frac{9R^2 t^2 (1 + t^3)}{(1 + t^3)^2} d(\arctg t) = \\ &= 9R^2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + t^3)^2} = -3R^2 \int_0^1 d\left(\frac{1}{1 + t^3}\right) = -3R^2 \frac{1}{1 + t^3} \Big|_0^1 = \frac{3R^2}{2}; \\ \int_{\gamma^-} x dy - y dx &= \int_0^{3R/2} (x - x) dx = 0 \end{aligned}$$

Подстановка этих значений в (19.15) дает искомую площадь:

$$S = \frac{3R^2}{2} + 0 = \frac{3R^2}{2}.$$

**Пример 19.7.** Вычислить площадь фигуры  $G$ , ограниченной кривой  $\Gamma$ , заданной уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n, \quad a > 0, b > 0, c > 0, n > 0.$$

**Решение.** Перейдя к обобщенным полярным координатам

$$x = a\rho \cos^{2/(2n+1)} \varphi, \quad y = b\rho \sin^{2/(2n+1)} \varphi,$$

получим уравнение кривой  $\Gamma$  в виде

$$\rho = c \cos^{2n/(2n+1)} \varphi \sin^{2n/(2n+1)} \varphi,$$

из которого заключаем, что при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\pi/2$  кривая выходит из начала координат и возвращается в него, т. е. является петлей с параметрическим представлением

$$\Gamma = \left\{ \vec{r}(\rho, \varphi): x = ac \cos^{\frac{2n+2}{2n+1}} \varphi \sin^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi, y = bc \cos^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi \sin^{\frac{2n+2}{2n+1}} \varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

и положительной ориентацией. Далее снова используем формулу (19.8) с учетом (19.9):

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{abc^2}{2n+1} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{abc^2}{2n+1} \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{abc^2}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенства

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 c^2 (\sin^{1+\frac{1}{2n+1}} \varphi)^2 (\sin^{1-\frac{1}{2n+1}} \varphi)^2 = a^2 c^2 \cos^{2+\frac{2}{2n+1}} \varphi \sin^{2-\frac{2}{2n+1}} \varphi, \\ d\left(\frac{y}{x}\right) &= d\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg}^{\frac{2}{2n+1}} \varphi\right) = \frac{2b}{a(2n+1)} \operatorname{tg}^{\frac{2}{2n+1}-1} \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{2b}{a(2n+1)} \frac{\sin^{\frac{2}{2n+1}-1} \varphi}{\cos^{\frac{2}{2n+1}+1} \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

◇ Формулу Грина (19.3), записанную для криволинейного интеграла второго рода, можно записать и для криволинейного интеграла первого рода, причем в двух вариантах. Для этого воспользуемся геометрическими построениями (рис. 151). Вектор  $\vec{\tau}(\cos \alpha, \cos \beta)$  представляет собой единичный вектор касательной в граничной точке  $M(x, y)$ , соответствующий положительной ориентации границы  $\partial G$ ;  $\vec{n}(\cos \beta, -\cos \alpha)$  — единичный вектор, перпендикулярный вектору  $\vec{\tau}$  и направленный извне области  $G$  или, другими словами, внешняя нормаль к границе  $\partial G$  в точке  $M(x, y)$ .

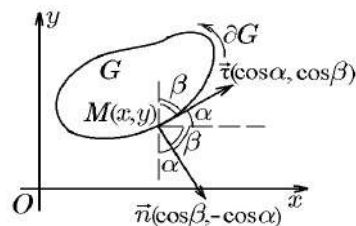


Рис. 151. Область  $G$

или, другими словами, внешняя нормаль к границе  $\partial G$  в точке  $M(x, y)$ .



Теперь, учтя, что

$$dx = \cos \alpha dl, \quad dy = \cos \beta dl, \quad (19.16)$$

получим

$$P dx + Q dy = (P \cos \alpha + Q \cos \beta) dl = (\vec{F}, \vec{\tau}) dl.$$

С помощью этого равенства координатную форму записи криволинейного интеграла в формуле Грина (19.3) можно заменить векторной формой в виде криволинейного интеграла первого рода:

$$\oint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{\tau}) dl = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (19.17)$$

Теперь обратимся к скалярному произведению  $(\vec{F}, \vec{n})$ , которое с помощью (19.16) можно представить в виде

$$(\vec{F}, \vec{n}) dl = [P \cos \beta + Q(-\cos \beta)] dl = -Q \cos \beta dl + P \cos \beta dl = -Q dx + P dy,$$

что позволяет записать равенство

$$\oint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{n}) dl = \oint_{\partial G} (-Q) dx + P dy. \quad (19.18)$$

Криволинейный интеграл в правой части этого равенства по формуле Грина (19.3) можно преобразовать к двойному следующего вида:

$$\oint_{\partial G} (-Q) dx + P dy = \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

Подстановка этого равенства в (19.10) дает еще одну запись формулы Грина с криволинейным интегралом первого рода (19.3):

$$\oint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{n}) dl = \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy. \quad (19.19)$$

Формулы (19.17) и (19.19), формально полученные из формулы Грина (19.3) тождественными преобразованиями, в физических приложениях разнятся своими интерпретациями. Так, например, для плоских векторных полей (магнитного, электрического, поля скоростей в гидродинамике и др.)

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

криволинейный интеграл

$$\oint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{\tau}) dl = \Pi \quad (19.20)$$

называется *циркуляцией векторного поля  $\vec{F}$  по замкнутому контуру  $\partial G$* , охватывающему область  $G$ , а интеграл

$$\oint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{n}) dl = \Pi \quad (19.21)$$

– потоком векторного поля  $\vec{F}$  через замкнутый контур  $\partial G$ , являющийся границей области  $G$ .

Структуры подынтегральных выражений двойных интегралов, представляющих циркуляцию и поток вектора  $\vec{F}$  в формулах (19.20) и (19.21), отличаются друг от друга, отображая особенности свойств различных классов векторных полей (потенциального, соленоидального и т. п.).

В дополнение к этому уместно будет заметить, что формулы (19.20) и (19.21) представляют собой двумерные аналоги более общих формул: формулы Стокса и формулы Остроградского–Гаусса для трехмерных полей  $\vec{F}(x, y, z)$ , которые мы рассмотрим ниже.

В свою очередь, известную формулу Ньютона–Лейбница для определенного интеграла можно рассматривать уже как одномерный аналог двумерной формулы Остроградского–Гаусса:

$$\iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{n}) dl. \quad (19.22)$$

Действительно, смысл формулы (19.22) состоит в том, что двойной интеграл от производных  $\partial P/\partial x$ ,  $\partial Q/\partial y$  можно свести к криволинейному интегралу по границе  $\partial G$  области  $G$  от самих функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ . Если при этом учесть, что криволинейный интеграл – это, по сути, одномерный интеграл по параметру, то это соответствует переходу от двойного интеграла к одномерному, но уже от самих функций  $P$  и  $Q$ . Другими словами и коротко: однократное интегрирование снимает однократное дифференцирование.

Поскольку аналогом двумерной области  $G''$  является одномерная область  $G'$  – одномерный интервал  $]a, b[$ , а аналогом границы  $\partial G''$  области  $G''$  является граница  $\partial G'$  – граница интервала  $]a, b[$ , состоящая из двух точек,  $x_1 = a$  и  $x_2 = b$ :  $\partial G' = \{a\} \cup \{b\}$ , то одномерный аналог формулы (19.14) будет иметь вид

$$\int_{G'=]a,b[} \frac{dP}{dx} dx = P(x)n(x) \Big|_{x \in \partial G' = \{a\} \cup \{b\}}. \quad (19.23)$$

В развернутой записи с учетом того, что в точке  $x_1 = a$  нормаль  $n(a)$  направлена против базисного вектора  $\vec{i}$ , а нормаль  $n(b)$  направлена по вектору  $\vec{i}$ , т. е.  $n(a) = -1$ ,  $n(b) = 1$ , имеем

$$\int_{G'=]a,b[} \frac{dP}{dx} dx = \int_a^b \frac{dP}{dx} dx$$

и

$$P(x)n(x) \Big|_{x \in \partial G' = \{a\} \cup \{b\}} = -P(a) + P(b).$$

Подставив это равенство в (19.23), приходим к формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b \frac{dP}{dx} dx = P(b) - P(a), \quad (19.23a)$$

согласно которой однократное интегрирование снимает однократное дифференцирование, задавая в результате значения самой функции  $P(x)$  на границе области интегрирования – в точках  $x_1 = a$  и  $x_2 = b$  с учетом знака нормали в этих точках (рис. 152).

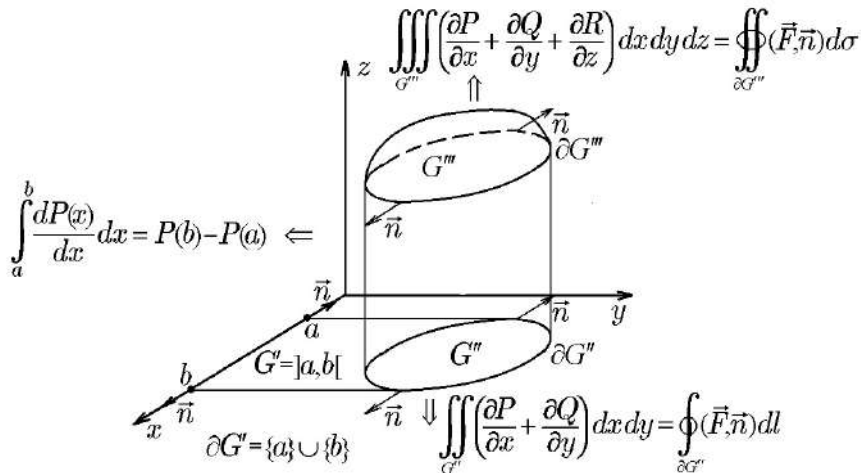


Рис. 152. Взаимосвязь формул Ньютона–Лейбница, Грина и Остроградского–Гаусса

Примечательно, что, следуя логике построения формул (19.22), (19.23) и (19.23, a) и исходя из формулы Остроградского–Гаусса (19.22), можно попытаться предсказать формулировку ее трехмерного аналога в виде

$$\iiint_{G'''} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G'''} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma, \quad (19.24)$$

где в правой части формулы должен присутствовать неизвестный пока еще нам интеграл по замкнутой поверхности  $\partial G'''$ , ограничивающей область  $G'''$  (рис. 152). Действительно, именно эту формулу мы и получим ниже – при рассмотрении свойств поверхностных интегралов в виде теоремы Остроградского–Гаусса.

Для формулы Грина (19.19) – двумерной формулы Стокса – также можно установить ее трехмерный аналог. Однако в этом случае для наглядности и краткости изложения необходимо все-таки иметь представление о поверхностных интегралах. Именно к рассмотрению поверхностных интегралов мы и перейдем после рассмотрения еще одного аспекта криволинейного интеграла – независимости от пути интегрирования.

Возвратившись к формуле Остроградского всех трех измерений:

$$\begin{aligned} \iiint_{G'''} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iint_{\partial G'''} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma, \\ \iint_{G''} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\partial G''} (\vec{F}, \vec{n}) dl, \\ \int_a^b \frac{dP}{dx} dx &= P(b) - P(a), \end{aligned}$$

дополним их геометрической иллюстрацией редукции от трехмерной размерности к одномерной (рис. 152).

**Пример 19.8.** Для постоянного векторного поля  $\vec{F}$  найти его циркуляцию  $\Pi$  по кусочно-гладкому замкнутому контуру  $\Gamma$  и его поток  $\Pi$  через тот же контур  $\Gamma$ .

**Решение.** Согласно (19.17)–(19.21), для циркуляции  $\Pi$  с учетом того, что  $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y = 0$ , имеем

$$\Pi = \oint_{\Gamma} (\vec{F}, \vec{\tau}) dl = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (19.25)$$

В свою очередь, согласно (19.19), для потока  $\Pi$  с учетом того, что  $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y = 0$ , получим

$$\Pi = \oint_{\Gamma} (\vec{F}, \vec{\tau}) dl = \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (19.26)$$

**Пример 19.9.** Показать, что если  $\Gamma$  – замкнутый контур и  $\vec{e}$  – произвольное направление, то

$$\oint_{\Gamma} \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{n}}) dl = 0,$$

где  $\vec{n}$  – внешняя единичная нормаль к контуру  $\Gamma$ .

**Решение.** Пусть  $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta)$  – постоянный вектор, заданный своими направляющими косинусами. Так как  $|\vec{e}| = 1$  и  $|\vec{n}| = 1$ , то  $\cos(\widehat{\vec{e}, \vec{n}}) = (\vec{e}, \vec{n})$ . Но тогда

$$\oint_{\Gamma} \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{n}}) dl = \oint_{\Gamma} (\vec{e}, \vec{n}) dl = 0,$$

что следует из соотношения (19.25) предыдущего примера.

Равенство

$$\oint_{\Gamma} (\vec{e}, \vec{n}) dl = 0,$$

как и равенство (19.25), геометрически соответствует утверждению: *среднее значение единичной нормали для кусочно-гладкого контура равно нулю.*

**Пример 19.10.** Для радиус-вектора  $\vec{r} = (x, y)$  найти его циркуляцию  $\Pi$  по кусочно-гладкому замкнутому контуру  $\Gamma$  и его поток  $\Pi$  через тот же контур.

**Решение.** Поскольку  $\vec{F} = (P, Q) = \vec{r} = (x, y)$  и, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1,$$

то в силу (19.17) имеем

$$\Pi = \oint_{\Gamma} (\vec{r}, \vec{\tau}) dl = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

и, соответственно, в силу (19.19) имеем

$$\Pi = \oint_{\Gamma} (\vec{r}, \vec{n}) dl = \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_G dx dy = 2S,$$

где  $S$  – площадь плоской области  $G$ , охватываемой контуром  $\Gamma$ .

**Пример 19.11.** Показать, что для гармонической функции  $U(x, y)$  справедливо соотношение

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} dl = 0,$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к замкнутому контуру  $\Gamma$ , охватывающему область  $G$ .

**Решение.** Учтем, что гармоническая функция удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

а

$$\frac{\partial U}{\partial n} = (\vec{\text{grad}}U, \vec{n}), \quad \vec{\text{grad}}U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Тогда в силу (19.19) имеем

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} dl = \oint_{\Gamma} (\vec{\text{grad}}U, \vec{n}) dl = \iint_G \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0.$$

**Пример 19.12.** Вычислить интеграл Гаусса

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|} dl,$$

где  $\vec{r} = (x, y)$  – радиус-вектор, а  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к простому кусочно-гладкому контуру, охватывающему область  $G$ .

**Решение.** Если  $\vec{r} = (\cos \alpha, \cos \beta)$  – единичный направляющий вектор касательной, соответствующий положительному обходу контура  $\Gamma$  и, согласно соотношениям (19.16),  $\vec{r} dl = (dx, dy)$ , то единичный вектор внешней нормали к контуру  $\Gamma$  имеет координаты  $\vec{n} = (\cos \beta, -\cos \alpha)$  и, следовательно,  $\vec{n} dl = (dy, -dx)$ . С учетом этого

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{|\vec{r}| \cos(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|} = \frac{(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|}$$

и интеграл  $I$  примет вид

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|} dl = \oint_{\Gamma} \frac{(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|^2} dl = \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

совпадающий с (19.13) примера 19.4. Вычисление этого интеграла в примере 19.4 дает для него два значения:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|} dl = \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0, & \text{если } \Gamma \text{ не охватывает точку } O(0, 0), \\ 2\pi, & \text{если } \Gamma \text{ охватывает точку } O(0, 0). \end{cases}$$

### 19.3. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования (плоский случай)

В примере 18.23 мы для сравнения вычислили два интеграла,  $I_1$  и  $I_2$ , по различным кривым  $L_{AB}$ , соединяющим две заданные точки –  $A$  и  $B$ . Интеграл  $I_1$  оказался зависимым от пути, соединяющего точки  $A$  и  $B$ , а интеграл  $I_2$  – нет. Предварительно мы установили, что подынтегральное выражение интеграла  $I_2$  представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $dU(x, y)$ . Перейдем теперь к более детальному рассмотрению условий независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Исходить будем из следующих предположений.

Пусть в области  $G \subset \mathbb{R}^2$  задано непрерывное векторное поле  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ . Возьмем в области  $G$  две произвольные точки:  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x, y)$ . Соединим эти точки кусочно-гладкой кривой  $L_{AB}$ , лежащей в  $G$ . Выясним условия, при которых значение интеграла

$$I = \int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (19.27)$$

не зависит от пути интегрирования  $L_{AB}$ .

**Теорема 19.3.** *Следующие три условия эквивалентны:*

1) для любой замкнутой ломаной  $L \subset G$

$$I = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0; \quad (19.28)$$

2) интеграл (19.27) не зависит от ломаной  $L_{AB}$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ ;

3) поле  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  потенциально, т. е. существует такая непрерывно дифференцируемая функция  $U(x, y)$ , называемая потенциалом поля, что

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= dU(x, y), \\ P(x, y) &= \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (19.29)$$

т. е.

$$\vec{F}(x, y) = \overrightarrow{\text{grad}}U(x, y) \quad (19.30)$$

и

$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_{AB}} dU(x, y) = U(B) - U(A). \quad (19.31)$$

**Доказательство I.** Докажем, что условие 2 является следствием условия 1, т. е. исходим из выполнения равенства (19.28). Для этого в области  $G$  выберем две точки,  $A$  и  $B$ , которые соединим двумя различными не пересекающимися ломаными –  $L_{AB}$  и  $L'_{AB}$  (рис. 153). Тогда  $L = L_{AB} + L'_{AB}$  есть замкнутая ломаная, для которой, в силу условия (19.28), имеем

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + \int_{L'_{AB}} P dx + Q dy = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy - \int_{L'_{AB}} P dx + Q dy = 0$$

и, следовательно,

$$\int_{L_{AB}} P dx + Q dy = \int_{L'_{AB}} P dx + Q dy,$$

т. е. интеграл

$$\int_{L_{AB}} P dx + Q dy$$

не зависит от ломаной  $L_{AB}$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ , что и требовалось доказать.

II. Докажем, что условие 3 есть следствие условия 2. Здесь мы исходим из того, что интеграл

$$\int_{L_{AB}} P dx + Q dy \quad (19.32)$$

не зависит от ломаной  $L_{AB}$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ . Зафиксируем точку  $A(x_0, y_0)$ , а точку  $B(x, y)$  будем считать переменной. Тогда интеграл (19.3) зависит только от точки  $B$ , и, следовательно, в области  $G$  определена функция

$$U(x, y) = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy. \quad (19.33)$$

Покажем, что функция  $U(x, y)$  (19.33) является потенциалом поля  $\vec{F} = (P, Q)$ . Для этого соединим точку  $B(x, y)$  с точкой  $C(x + \Delta x, y)$  (рис. 153) отрезком  $BC$ , не выходящим за пределы  $G$ . Это всегда можно сделать при достаточно малом  $\Delta x$ , так как  $G$  – область, т. е. открытое множество. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} [U(x + \Delta x, y) - U(x, y)] &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{L_{ABC}} P dx + Q dy - \int_{L_{AB}} P dx + Q dy \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{L_{BC}} P dx + Q dy = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt. \end{aligned}$$

Применив при фиксированном  $y$  к непрерывной функции  $P(y, t)$  интегральную теорему о среднем, получим

$$\frac{1}{\Delta x} [U(x + \Delta x, y) - U(x, y)] = P(x + \theta \Delta x, y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Предельный переход при  $\Delta x \rightarrow 0$  в этом равенстве с учетом непрерывности функции  $P(x, y)$  дает

$$\frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y),$$

а тем самым и справедливость соотношения (19.30) из условия 3.

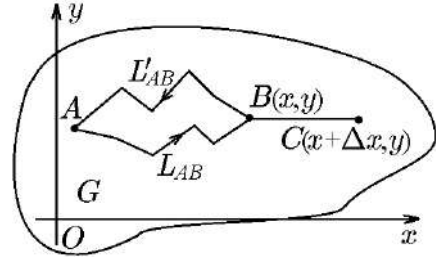


Рис. 153. Ломаные  $L_{AB}$  и  $L'_{AB}$

Для доказательства (19.31) воспользуемся параметрическим представлением ломаной

$$L_{AB} = \{\vec{r}(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]\},$$

где значение  $t = \alpha$  соответствует координатам точки  $A$ , а  $t = \beta$  – координатам точки  $B$ . С учетом этого вычисление интеграла (19.31):

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{\partial U(x(t), y(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U(x(t), y(t))}{\partial y} y'(t) \right] dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dU(x(t), y(t))}{dt} dt = \\ &= U(x(t), y(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = U(x(\beta), y(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha)) = U(B) - U(A), \end{aligned}$$

дает значение, совпадающее с (19.31).

III. Доказательство того, что из условия 3 следует условие 1, очевидным образом вытекает из (19.31) при совпадении точек  $A$  и  $B$ , что соответствует замкнутой кривой  $L$ :

$$\int_L P dx + Q dy = U(B) - U(A) = U(B) - U(B) = 0,$$

и, следовательно, условию (19.29) из 1.

**Следствие 19.3.1.** Если интеграл

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

равен нулю по любой замкнутой ломаной, то этот интеграл равен нулю и по любому кусочно-гладкому контуру  $\Gamma$ .

Действительно, если для любой замкнутой ломаной  $\Gamma$

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0,$$

то в силу условия 3 теоремы 19.3 существует потенциал  $U(x, y)$  и

$$P dx + Q dy = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy = dU(x, y).$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0,$$

где  $\Gamma$  – кусочно-гладкий замкнутый контур.

Эквивалентность формул (19.28)–(19.31) весьма полезна в приложениях формулы Грина, однако она не дает практического способа для выяснения вопроса о потенциальности поля  $\vec{F} = (P, Q)$ . Для односвязной области эффективным критерием потенциальности поля  $\vec{F}$  является следующая теорема.



**Теорема 19.4.** Для того чтобы дифференцируемое в области  $G$  поле  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  было потенциальным, необходимо, а в случае односвязной области и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (19.34)$$

**Доказательство I. Необходимость.** Пусть поле  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  непрерывно дифференцируемо и потенциально. Тогда

$$P(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = U_{xy}, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x} = U_{yx}.$$

Так как производные  $\partial P/\partial y$  и  $\partial Q/\partial x$  непрерывны, то смешанные производные  $U_{xy}$  и  $U_{yx}$  также непрерывны, а следовательно, равны. Условие (19.34) в области  $G$  выполнено.

**II. Достаточность.** Пусть поле  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  задано в односвязной (согласно условиям теоремы) области  $G \subset \mathbb{R}^2$  и выполнено условие (19.34).

Возьмем произвольную простую замкнутую ломаную  $L_a \subset G$  (рис. 154, а). Так как область  $G$  односвязна, то ограничиваемая ломаной  $L_a$  область  $G_a \subset G$  односвязна и к ней применима формула Грина:

$$\oint_{L_a} P dx + Q dy = \iint_{G_a} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (19.35)$$

Таким образом, интеграл (19.35) равен нулю для любой простой замкнутой ломаной  $L_a$ .

Теперь можно показать, что интеграл (19.35) равен нулю для любой ломаной, даже имеющей точки пересечения.

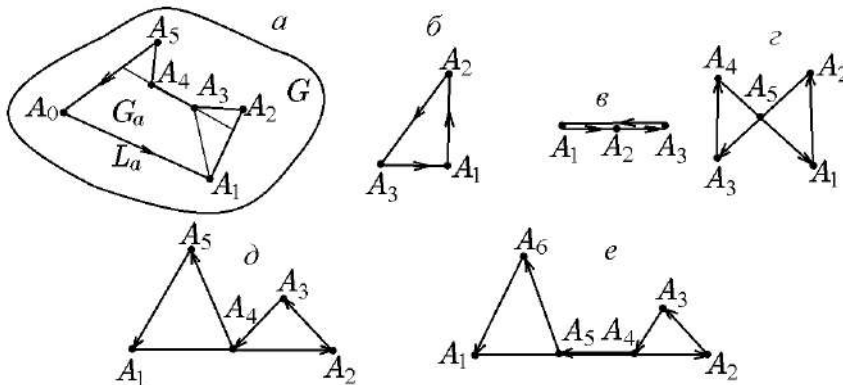


Рис. 154. Ломаные: а) простая замкнутая; б) трехзвенная (1-й случай); в) трехзвенная (2-й случай); г)  $n > 3$ -звенная (1-й случай); д)  $n > 3$ -звенная (2-й случай); е)  $n > 3$ -звенная (3-й случай);

Начнем с трехзвенных ломаных. Для трехзвенной ломаной интеграл (19.35) всегда равен нулю, если эта ломаная замкнута. Действительно, если три ее

вершины не лежат на одной прямой, то трехзвенная ломаная будет простой (рис. 154, б) и, согласно доказанному, интеграл (19.35) равен нулю. Для случая, когда три ее вершины лежат на одной прямой (рис. 154, в), интеграл (19.35) также равен нулю, поскольку отрезок интегрирования пробегается дважды в противоположных направлениях.

Переходя к  $n$ -звенным ломаным с  $n > 3$  (рис. 154, г, д, е), отметим, что любую  $n$ -звенную замкнутую ломаную, даже с точками самопересечения, можно представить как совокупность трехзвенных замкнутых контуров (рис. 154, б, в). А поскольку интеграл (19.35) для каждого отдельного трехзвенного контура равен нулю, то в силу аддитивности интеграл по их совокупности тоже будет равен нулю.

Таким образом, интеграл (19.35) равен нулю по любой замкнутой ломаной  $L \subset G$ , но тогда в силу теоремы 19.3 поле  $\vec{F} = (P, Q)$  будет потенциальным.

Заметим, что условие односвязности области существенно для справедливости теоремы 19.4, что иллюстрирует следующий пример.

**Пример 19.13.** Показать, что непрерывно дифференцируемое при  $x^2 + y^2 > 0$  плоское векторное поле  $\vec{F} = (P, Q)$ :

$$P(x, y) = -\frac{\alpha y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{\alpha x}{x^2 + y^2}, \quad (19.36)$$

удовлетворяет условию (19.34) теоремы 19.4, но не является потенциальным.

**Решение.** Действительно, условие (19.34) выполнено, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\alpha \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \alpha \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \alpha \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \alpha \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Однако интеграл

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \alpha \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

по любому замкнутому контуру, охватывающему точку  $x = y = 0$ , как показано в примере 19.4, имеет значение, не равное нулю:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \alpha \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \alpha \cdot 2\pi \neq 0, \quad (19.37)$$

при  $\alpha \neq 0$ . Это означает, что поле (19.36) не является потенциальным. Такой результат объясняется тем, что теорема 19.4 здесь не применима, поскольку поле (19.36) определено в неодносвязной области

$$G = \{\vec{r}(x, y) : x^2 + y^2 > 0\}.$$

Заметим, что результат (19.37) можно легко получить, не обращаясь к результату примера 19.4. Действительно, задав контур  $\Gamma$  параметрическим представлением

$$\Gamma = \{\vec{r}(x, y) : x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, 0 \in [0, 2\pi]\},$$

получим

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} P dx + Q dy = \alpha \int_0^{2\pi} \frac{R^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{R^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi = \alpha \cdot 2\pi.$$

◇ Для векторных полей  $\vec{F} = (P, Q)$ , потенциальных в области  $G$ , криволинейный интеграл по кривой  $L_{AB} \subset G$  вычисляется по формуле (19.33). Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования в этом случае позволяет записать его в виде

$$\int_{L_{AB}} P dx + Q dy = \int_A^B P dx + Q dy$$

и, соответственно,

$$\int_A^B P dx + Q dy = \int_A^B dU(x, y) = U(x, y) \Big|_A^B = U(B) - U(A), \quad (19.38)$$

где  $U(x, y)$  – потенциал векторного поля  $\vec{F} = (P, Q)$ . Найти сам потенциал  $U(x, y)$  проще всего интегрированием по двузвенным ломаным  $AA_1B$  или  $AB_1B$ , со звеньями, параллельными координатным осям (рис. 155). Такое интегрирование, по сути, сводится к вычислению обычных определенных интегралов вида

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx. \quad (19.39)$$

Поскольку для потенциального поля  $\vec{F} = (P, Q)$  выражение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \\ P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y},$$

можно записать в виде полного дифференциала

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

то формулы (19.39) называют еще формулами восстановления функции по ее известному полному дифференциалу, или формулами нахождения первообразной.

**Пример 19.14.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{L_{AB}} x dx + y dy$$

по любой кривой  $L_{AB}$ , соединяющей точки  $A(0, 1)$  и  $B(3, -4)$ .

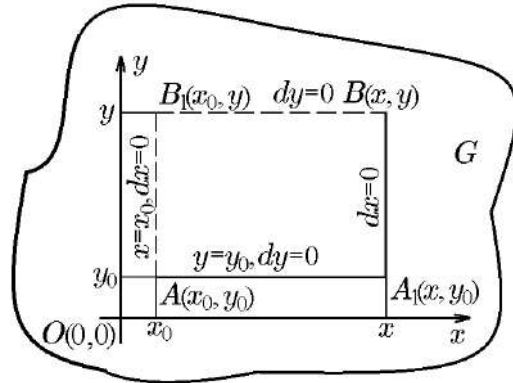


Рис. 155. Ломаные  $AA_1B$  и  $AB_1B$

**Решение.** Так как здесь  $P(x, y) = x$ , а  $Q(x, y) = y$  и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

то поле  $\vec{F} = (P, Q) = (x, y)$  является потенциальным в произвольной односвязной области  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Это означает, что интеграл  $I$  не зависит от пути интегрирования и, следовательно,

$$I = \int_{L_{AB}} x dx + y dy = \int_A^B x dx + y dy = U(B) - U(A). \quad (19.40)$$

В силу простоты подынтегрального выражения его легко записать как полный дифференциал:

$$x dx + y dy = dU(x, y),$$

где

$$U(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (19.41)$$

– потенциал поля  $\vec{F} = (x, y) = \vec{\nabla}U = \vec{\nabla}((x^2 + y^2)/2)$ .

Подставив найденный потенциал вида (19.41) в (19.40), с учетом значений координат точек  $A(0, 1)$  и  $B(3, -4)$  получим

$$\begin{aligned} I &= \int_A^B x dx + y dy = U(B) - U(A) = \frac{x^2 + y^2}{2} \Big|_{\substack{x=3 \\ y=-4}} - \frac{x^2 + y^2}{2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \\ &= \frac{9 + 16}{2} - \frac{1}{2} = \frac{24}{2} = 12. \end{aligned} \quad (19.42)$$

Заметим, что потенциал (19.41) можно найти и другим способом – с помощью формулы (19.39):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x x dx + \int_{y_0}^y y dy = \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^x + \frac{y^2}{2} \Big|_{y_0}^y = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2}.$$

Выбрав  $x_0 = y_0 = 0$ , придем к (19.41).

Отметим, что интеграл  $I$  можно вычислить и без использования потенциала  $U(x, y)$ , непосредственно по ломаной, согласно первой из формул (19.39):

$$I = \int_0^3 x dx + \int_1^{-4} y dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 + \frac{y^2}{2} \Big|_1^{-4} = \frac{9}{2} + \frac{15}{2} = 12.$$

**Пример 19.15.** Показать, что векторное поле

$$\vec{F} = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5, 3x^4y^2 - 6xy - 4) \quad (19.43)$$

является потенциальным и найти его потенциал.

**Решение.** Функции

$$P(x, y) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5, \quad Q(x, y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$$

являются непрерывно дифференцируемыми в любой ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^2$ , и для них выполняется условие (19.35)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12x^3y^2 - 6y = \frac{\partial Q}{\partial y} = 12x^3y^2 - 6y.$$

Это означает, что векторное поле (19.43) является потенциальным, потенциал которого можно найти по формуле (19.39):

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy = \int_0^x 5 dx + \int_0^y (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy = \\ &= 5x \Big|_0^x + \left( 3x^4 \frac{y^3}{3} - 6x \frac{y^2}{2} - 4y \right) \Big|_0^y = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y. \end{aligned} \quad (19.44)$$

**Пример 19.16.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{L_{AB}} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy$$

по любой кривой, соединяющей точки  $A(1, 1)$  и  $B(2, 2)$ .

**Решение.** Из решения предыдущего примера следует, что векторное поле

$$\vec{F} = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5, 3x^4y^2 - 6xy - 4)$$

является потенциальным с потенциалом (19.44)

$$U(x, y) = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y.$$

Это означает, что интеграл  $I$  не зависит от пути интегрирования и может быть вычислен по формулам (19.39):

$$\begin{aligned} I &= \int_{(1,1)}^{(2,2)} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy = \\ &= (x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y) \Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = \\ &= (2^7 - 3 \cdot 2^2 + 10 - 8) - (1 - 3 + 5 - 4) = 128 - 24 + 3 = 107. \end{aligned} \quad (19.45)$$

Интеграл  $I$  можно вычислить и без использования потенциала, выбрав в качестве пути интегрирования прямолинейный отрезок, соединяющий точки  $A(1, 1)$  и  $B(2, 2)$ . Уравнение прямой, на которой лежит отрезок  $AB$ , находится из уравнения

$$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-1}{2-1},$$

т. е.  $y = x$ . Поскольку  $dy = dx$  и  $x \in ]1, 2[$ , то интеграл  $I$  запишется определенным интегралом вида

$$\begin{aligned} I &= \int_{(1,1)}^{(2,2)} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy = \\ &= \int_1^2 [4x^6 - 3x^2 + 5 + 3x^6 - 6x^2 - 4] dx = \int_1^2 (7x^6 - 9x^2 + 1) dx = \\ &= (x^7 - 3x^3 + x) \Big|_1^2 = (2^7 - 3 \cdot 2^3 + 2) - (1 - 3 - 1) = 128 - 24 + 3 = 107. \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает с найденным ранее в (19.45).

**Пример 19.17.** Установить область, в которой выражение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} dx + \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} dy \quad (19.46)$$

является полным дифференциалом и найти первообразную для этой области.

**Решение.** При  $y \neq 0$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right) = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

причём в первой формуле знак «плюс» или «минус» берется в соответствии со знаком  $y$ . Таким образом, условие интегрируемости выполняется только для  $y > 0$ .

Ограничившись в силу этого верхней полуплоскостью, воспользуемся для восстановления первообразной интегрированием выражения (19.46) по прямолинейному отрезку, соединяющему точки  $A(0, 0)$  и  $B(x', y')$  (координаты точки  $B$  мы обозначили через  $x'$  и  $y'$ , чтобы не путать их с координатами  $x, y$  переменной точки отрезка интегрирования). Для удобства воспользуемся параметрическим представлением отрезка

$$AB = \{\vec{r}(x, y) : x = x't, y = y't, t \in [0, 1]\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} U(x', y') &= \int_{(0,0)}^{(x',y')} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_0^1 (x' \sqrt{\sqrt{(x')^2 + (y')^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{(x')^2 + (y')^2} + x'}) \sqrt{t} dt = \\ &= \frac{2}{3} (x' \sqrt{\sqrt{(x')^2 + (y')^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{(x')^2 + (y')^2} + x'}). \end{aligned}$$

Возвратившись к обычным обозначениям  $x, y$ , получим первообразную

$$U(x, y) = \frac{2}{3}(x\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} + y\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}). \quad (19.47)$$

В любой односвязной области  $G$  полуплоскости  $y > 0$  функцию (19.47) можно рассматривать как потенциал векторного поля  $\vec{F} = (P, Q) = \vec{\nabla}U(x, y)$  из (19.46).

## 20. Поверхностные интегралы

### 20.1. Параметризация поверхности. Простые, почти простые и кусочно-гладкие поверхности

При определении поверхности по аналогии с определением кривой будем исходить из понятия непрерывно дифференцируемых отображений в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , но уже не отрезков ( $\mathbb{R}$ ), а плоских ( $\mathbb{R}^2$ ) областей. Как и ранее, будем предполагать, что в пространстве  $\mathbb{R}^3$  задана декартова система координат  $Oxyz$ . Декартовы координаты в плоскостях ( $\mathbb{R}^2$ ), в которых лежат отображаемые плоские области, будем обозначать буквами  $u, v$ , а сами области – буквой  $D$ . Как обычно, через  $\bar{D}$  будем обозначать замкнутую область – замыкание области  $D$ , а через  $\partial D$  – ее границу. Для образов точек  $P(u, v) \in \bar{D}$  при указанных отображениях будем употреблять как запись вида  $f(P)$ , так и вида  $f(u, v)$ . Функцию  $f(u, v)$  будем называть *непрерывно дифференцируемой на замкнутом множестве*  $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ , если она определена и имеет непрерывные частные производные  $\partial f/\partial u$  и  $\partial f/\partial v$  на открытом множестве  $G$ , содержащем замкнутое множество  $\bar{D}$ .

Далее будем исходить из следующих предположений.

Пусть  $D$  – плоская жорданова область в  $\mathbb{R}^2$  с декартовой системой координат  $uOv$ , а функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  непрерывно дифференцируемы на замкнутом множестве  $\bar{D} = D \cup \partial D$ .

◆ Отображение  $\Phi: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , определяемое формулами

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, \quad (20.1)$$

называется *непрерывно дифференцируемым*, если функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  являются непрерывно дифференцируемыми в  $\bar{D}$ .

◆ Непрерывно дифференцируемое отображение  $\Phi: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (20.1) называется *гладким*, если в каждой точке  $P(u, v) \in D$  функциональная матрица

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (20.2)$$

имеет ранг, равный двум:

$$\text{Rang } \Phi(u, v) = 2 \text{ для всех } P(u, v) \in \bar{D}. \quad (20.3)$$

◆ Если при гладком отображении  $\Phi: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  соответствие между множествами  $\bar{D}$  и  $\Sigma = \Phi(\bar{D})$  является взаимно однозначным, то множество  $\Sigma$  будем называть *простой поверхностью* в  $\mathbb{R}^3$ , а множество  $\partial\Sigma = \Phi(\gamma)$ , где  $\gamma$  – кусочно-гладкая граница области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , будем называть *краем простой поверхности*  $\Sigma$ .

С помощью функций (20.1), задающих отображение  $\Phi: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , простую поверхность  $\Sigma$  будем определять параметрическим представлением

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}. \quad (20.4)$$

В свою очередь, если кривая  $\gamma$  задается параметрическим представлением

$$\gamma = \{\vec{r}(u, v) : u = u(t), v = v(t), t \in [\alpha, \beta]\}, \quad (20.5)$$

то параметрическое представление края поверхности  $\partial\Sigma$  будет иметь вид

$$\partial\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), z = z(u(t), v(t)), t \in [\alpha, \beta]\}. \quad (20.6)$$

Графические иллюстрации указанных определений представлены на рис. 156. Из этого рисунка следует, что график функции  $z = f(x, y)$ , непрерывно дифференцируемой на замкнутом ограниченном множестве  $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ , также является простой поверхностью  $\Sigma$  (рис. 157) с параметрическим представлением

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : x = u, y = v, z = f(u, v) (u, v) \in \bar{D}\}, \quad (20.7)$$

поскольку матрица (20.1) в этом случае имеет ранг, равный двум:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

Край простой поверхности  $\partial\Sigma$  является гладкой или кусочно-гладкой кривой в  $\mathbb{R}^3$ .

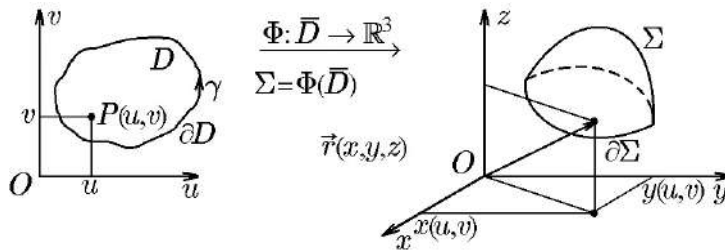


Рис. 156. Графическая иллюстрация отображения  $\Phi: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Если  $\Sigma$  – простая поверхность, заданная параметрическим представлением (20.4), а непрерывно дифференцируемые функции,

$$u = u(u', v'), \quad v = v(u', v'), \quad (u', v') \in D', \quad (20.8)$$

задают взаимно однозначное отображение  $\bar{D}'$  на  $\bar{D}$ , причем якобиан отображения

$$J(u', v') = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall (u', v') \in \bar{D}',$$

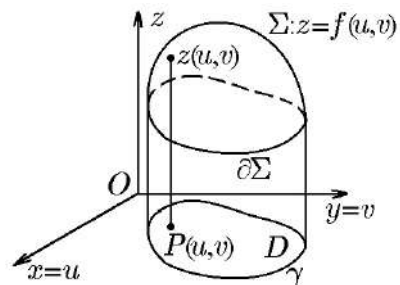


Рис. 157. Простая поверхность  $\Sigma$



то простую поверхность  $\Sigma$  можно задать эквивалентным параметрическим представлением

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z): \vec{r}(u(u', v'), v(u', v')) = \vec{\rho}(u', v'), (u', v') \in \bar{D}'\}, \quad (20.9)$$

где

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

– векторная запись уравнений (20.1).

◆ Замена (20.8), переводящая параметрическое представление простой поверхности  $\Sigma$  в эквивалентное ему представление (20.9), называется *допустимой*.

Совокупность допустимых замен (20.9) задает класс эквивалентных параметризаций простой поверхности  $\Sigma$ .

**Пример 20.1.** Записать параметрическое представление множества

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0. \quad (20.10)$$

**Решение 1.** Уравнение (20.10) допускает переход к явному заданию переменной

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Условие  $z \geq 0$  оставляет одно из них:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (20.11)$$

Функция (20.11) осуществляет взаимно однозначное отображение части круга  $x^2 + y^2 \leq R^2$  из первой четверти в плоскости  $(x, y)$  в часть сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

в первом октанте  $(x, y, z)$  (рис. 158). Вместе с этим функция (20.11) является непрерывно дифференцируемой в области  $D$  и, следовательно, задает простую поверхность  $\Sigma$  с параметрическим представлением

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z): x = u, y = v, z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, (u, v) \in \bar{D}\}, \quad (20.12)$$

$$\bar{D} = \{\vec{r}(u, v): u^2 + v^2 \leq R^2, u \geq 0, v \geq 0\}.$$

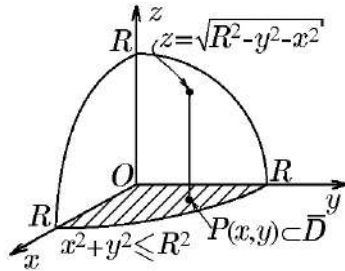


Рис. 158.  $\{\bar{D} = x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

Отметим, что для данного параметрического представления частные производные  $\partial z/\partial u$  и  $\partial z/\partial v$  стремятся к бесконечности при приближении точки  $P(u, v)$  к окружности  $u^2 + v^2 = R^2$ . Это затрудняет использование (20.12) в

замкнутой области  $\bar{D}$ . В этом случае допустимой заменой параметров  $u, v$  можно перейти к эквивалентному параметрическому представлению, что и будет сделано ниже.

2. Воспользуемся допустимой заменой параметров

$$u = Rt, \quad v = R\tau \quad (20.13)$$

с якобианом

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(t, \tau)} = \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{vmatrix} = R^2 \neq 0.$$

Такая замена позволяет записать эквивалентное (20.12) параметрическое представление:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = Rt, y = R\tau, z = R\sqrt{1 - t^2 - \tau^2}, (t, \tau) \in \bar{D}\}, \\ \bar{D} &= \{\vec{r}(t, \tau): t^2 + \tau^2 \leq 1, t \geq 0, \tau \geq 0\}. \end{aligned} \quad (20.14)$$

3. Множество (20.10) при условии  $0 < z < R$  можно записать в виде уравнения  $x^2 + y^2 = R^2 - z^2$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ , которое, следуя примеру 18.1, при фиксированном  $z$  можно параметризовать следующим образом:

$$x = \sqrt{R^2 - z^2}t, \quad y = \sqrt{R^2 - z^2}\sqrt{1 - t^2}, \quad t \in ]0, 1[.$$

С учетом этого параметрическое представление поверхности  $\Sigma$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = \sqrt{R^2 - z^2}t, y = \sqrt{R^2 - z^2}\sqrt{1 - t^2}, z = z, (t, z) \in D\}, \\ D &= \{\vec{r}(t, z): 0 < t < 1, 0 < z < R\}. \end{aligned} \quad (20.15)$$

4. Заменой  $z = R\tau$ ,  $\tau \in ]0, 1[$ , представление (20.15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = R\sqrt{1 - \tau^2}t, y = R\sqrt{1 - \tau^2}\sqrt{1 - t^2}, \\ z &= R\tau, (t, \tau) \in D\}, \quad D = \{\vec{r}(t, \tau): 0 < t < 1, 0 < \tau < 1\}. \end{aligned} \quad (20.16)$$

5. В сферических координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

уравнение (20.10) имеет вид  $r = R$ . С учетом этого

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta$$

и при условии  $\theta \in ]0, \pi/2[$ ,  $\varphi \in ]0, \pi/2[$  имеем еще одно параметрическое представление:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta, (\theta, \varphi) \in D\}, \\ D &= \left\{(\theta, \varphi): 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}, \end{aligned} \quad (20.17)$$

свободное при  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$  от недостатков предыдущих.

6. Еще одно параметрическое представление, аналогичное (20.17), можно получить из (20.16) заменой

$$t = \sin \alpha, \quad \tau = \sin \beta, \quad \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

тогда

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = R \sin \alpha \cos \beta, y = R \cos \alpha \cos \beta, z = R \sin \beta, (\alpha, \beta) \in D\}, \\ D &= \left\{(\alpha, \beta): 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (20.18)$$

**Пример 20.2.** Записать параметрическое представление множества  $\Sigma$ :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 > R^2, \quad z > 0, \quad R > r > 0. \quad (20.19)$$

**Решение.** Уравнения (20.19) определяют часть поверхности тора, полученного вращением вокруг оси  $Oz$  окружности радиусом  $r$ , первоначально находящейся в плоскости  $y = 0$  и имеющей центр в точке с координатами  $x = R > r$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  (рис. 159). Из геометрических построений координаты точки  $P(x, y, z)$ , лежащей на поверхности  $\Sigma$ , можно определить следующим образом:

$$x = (R + r \sin \theta) \cos \varphi, \quad y = (R + r \sin \theta) \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

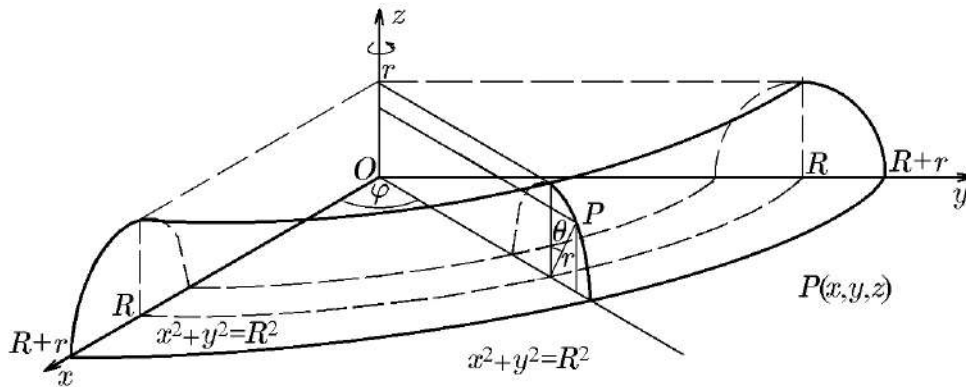


Рис. 159. Поверхность тора

Из условий (20.19) следует, что углы  $\theta$  и  $\varphi$  изменяются здесь в пределах от 0 до  $\pi/2$ . Исходя из этого, параметрическое представление данной части поверхности тора  $\Sigma$  можно записать в виде

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x = (R + r \sin \theta) \cos \varphi, y = (R + r \sin \theta) \sin \varphi, z = r \cos \theta, \\ (\theta, \varphi) \in D\}, \quad D = \left\{ (\theta, \varphi) : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (20.20)$$

что соответствует простой поверхности  $\Sigma$ .

**Пример 20.3.** Является ли сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (20.21)$$

простой поверхностью?

**Решение.** Для параметрического представления (20.21) воспользуемся гладким параметрическим представлением (20.17) из примера 20.1, заменив область  $D$  изменения параметров  $\theta$  и  $\varphi$ . Тогда

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta, (\theta, \varphi) \in \bar{D}\}, \\ \bar{D} = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad (20.22)$$

Из геометрической иллюстрации отображения (20.22) (рис. 160) видно, что образами отрезков  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  являются меридианы  $M$  сферы  $\Sigma$ , а образами отрезков  $\theta = \theta_0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  — ее параллели  $\Pi$ . Это означает, что отображение  $\Phi: \bar{D} \rightarrow \Sigma$  не взаимно однозначно, так как меридианы  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  совпадают, а отрезки  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  с  $\varphi \in [0, 2\pi]$  отображаются, соответственно, в северный  $N$  и южный  $S$  полюсы сферы  $\Sigma$ .

Нарушение взаимной однозначности отображения  $\bar{D} \rightarrow \Sigma$  означает, что сфера  $\Sigma$  не является простой поверхностью.

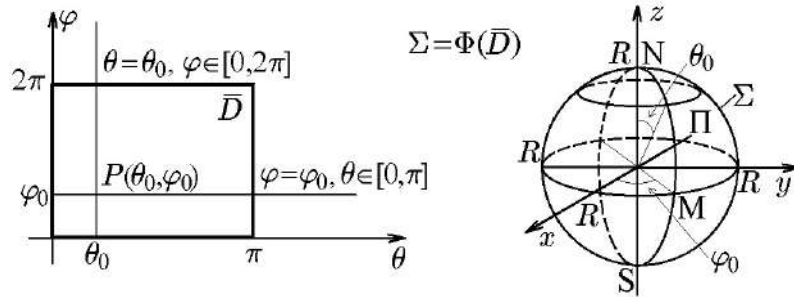


Рис. 160. Геометрическая иллюстрация отображения (20.22)

◇ Результат, вообще говоря, достаточно предсказуем, поскольку с механической точки зрения формулы

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

определяют гладкую (без разрывов и изломов) деформацию плоской области  $D$  в пространственную поверхность  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . Интуитивно понятно, что сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  нельзя получить никакой гладкой деформацией плоской области, поэтому она и не является простой поверхностью.

По этой причине, полагая использование поверхностей в формулировках поверхностных интегралов, имеет смысл класс простых поверхностей расширить до класса почти простых поверхностей. Вместе с этим (по этой же причине) можно расширить класс параметризаций, допустив такие замены параметров, при которых непрерывная дифференцируемость, взаимная однозначность и необращение якобиана отображения в нуль нарушаются на границе области. Тогда можно получить такие параметризации простой поверхности, задаваемые функциями, которые на границе области  $D$  не являются непрерывно дифференцируемыми (см. пример 20.1).

◆ Если  $D$  – плоская область и  $\Phi: \bar{D} \rightarrow \Sigma$  – непрерывно дифференцируемое отображение, то множество  $\Sigma = \Phi(\bar{D})$  будем называть *почти простой поверхностью* при условии, что найдется такая расширяющаяся последовательность ограниченных областей  $\{D_n\}$ , что  $\bar{D}_n \subset D_{n+1}$ ,  $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ , и поверхности  $\Sigma_n = \Phi(\bar{D}_n)$  простые.

**Пример 20.4.** Показать, что сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  является почти простой поверхностью.

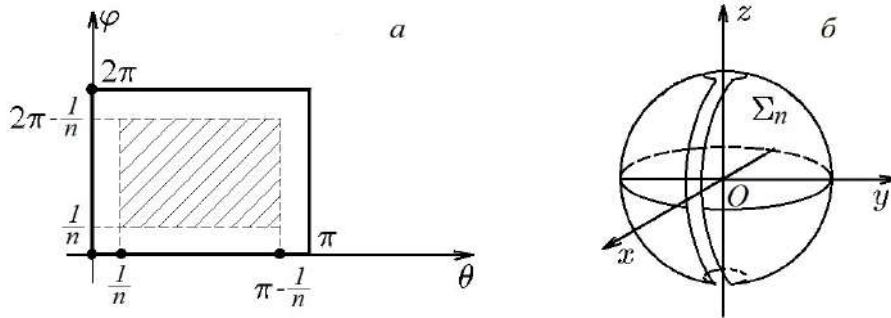
**Решение.** Воспользуемся параметрическим представлением сферы (20.22):

$$\Sigma_n = \{(x, y, z): x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta, (\theta, \varphi) \in D_n\},$$

заменив плоскую область  $D$  на расширяющуюся ограниченную последовательность областей:

$$D_n = \left\{ (\theta, \varphi): \frac{1}{n} < \theta < \pi - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} < \varphi < 2\pi - \frac{1}{n} \right\}.$$

Легко проверить, что  $\bar{D}_n \subset D_{n+1}$ ,  $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ , и что поверхности  $\Sigma_n = \Phi(\bar{D}_n)$  являются простыми (рис. 161). Поэтому поверхность  $\Sigma$  – почти простая поверхность.

Рис. 161.  $D_n$  (а) и  $\Sigma_n$  (б)

К сожалению, простые и почти простые поверхности исчерпывают далеко не все классы поверхностей. Действительно, многие объекты, которые мы привыкли называть поверхностями, не удовлетворяют определениям простых и почти простых поверхностей. Попытка дать общую классификацию поверхностей выходит далеко за рамки нашего курса. Тем не менее мы можем выделить совершенно замечательный класс поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ , являющихся (как и в случае кривых) гладкими, но уже двумерными многообразиями в  $\mathbb{R}^3$ . Эти многообразия представляют собой связные множества, которые локально, т. е. в окрестности каждой своей точки, устроены как простая гладкая поверхность. Например, рассмотренная выше сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  является гладким двумерным многообразием в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Действительно, если  $P$  – точка, лежащая на сфере радиусом  $R$ , то шар  $S(P, r)$  при  $r < R$  вырезает из сферы простой кусок. Затруднение здесь вызывает то, что хотя локально гладкие многообразия устроены просто, но в целом, глобально, они могут иметь очень сложное строение, выводящее их из класса простых поверхностей. Для примера можно сослаться на поверхность шара или тора с одним, а то и с двумя отверстиями, а также на другие, еще более причудливые поверхности.

Несмотря на сложность глобального строения гладких многообразий, все они обладают одним очень важным свойством: каждое из них можно разрезать на конечное число гладких поверхностей или, что то же самое, их можно склеить из конечного числа простых гладких кусков. Замечательно то, что из гладких кусков можно склеивать не только гладкие многообразия, но и связные поверхности, имеющие ребра и вершины, которыми обладают поверхности многогранников.

Математическая формализация таких понятий, как разрезание и склеивание поверхностей, и тем более основанная на этом классификация поверхностей, как уже отмечалось, выходит далеко за рамки нашего курса. Тем не менее следует отметить, что трудности, как правило, возникают при построении общих теорий. В любом разумном частном случае проблем с разрезанием поверхности на простые куски не возникает. Исходя из этого, введем в рассмотрение класс кусочно-гладких поверхностей.

◆ Поверхность, которую можно разрезать на конечное число простых кусков, будем называть *кусочно-гладкой*.

## 20.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть простая поверхность задана параметрическим представлением в векторной форме:

$$\Sigma = \{(x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}. \quad (20.23)$$

Предположим, что плоская область  $D$  выпукла и отрезок  $[a, b]$  есть ее про-

екция на ось  $Ou$  (рис. 162, а). Если  $u_0 \in ]a, b[$ , то прямая  $u = u_0$  будет пересекать область  $D$  по отрезку  $u = u_0, v \in [\alpha, \beta]$  (рис. 162, а). Образ этого отрезка при отображении (20.23) есть кривая

$$L_{u_0} = \{(x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(u_0, v), v \in [\alpha, \beta]\}, \quad (20.24)$$

лежащая на поверхности  $\Sigma$  (рис. 162, б).

◆ Кривую  $L_{u_0}$  будем называть *координатной кривой*  $u = u_0$ , лежащей на поверхности  $\Sigma$  (рис. 162, б).

Придавая  $u_0$  все значения из отрезка  $[a, b]$ , получим семейство координатных кривых  $u = \text{const}$ , лежащих на поверхности  $\Sigma$ . Аналогично определяются координатные линии  $L_{v_0}$  и семейство координатных кривых  $v = \text{const}$ .

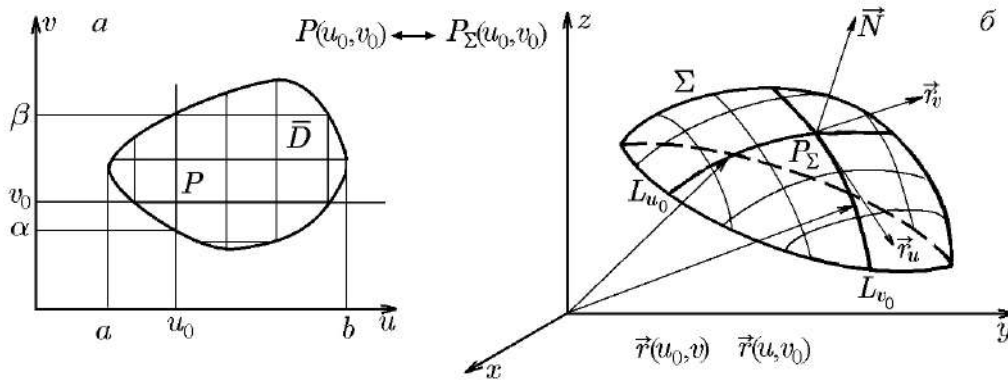


Рис. 162.  $\bar{D}$  (а);  $\Sigma = \Phi(\bar{D})$  (б)

Для простой поверхности  $\Sigma$  в силу взаимной однозначности отображения (20.23) каждая ее точка  $P_\Sigma$  определится как пересечение двух координатных линий:  $L_{u_0}$  и  $L_{v_0}$ .

◆ Пару чисел  $(u_0, v_0) \in D$  будем называть *криволинейными координатами* точки  $P_\Sigma(u_0, v_0)$  на поверхности  $\Sigma$ .

Запись  $P_\Sigma(u_0, v_0)$  будет означать, что точка  $P_\Sigma$  поверхности  $\Sigma$  задана криволинейными координатами  $(u_0, v_0)$ . В примере 20.3 на рис. 160 приведены координатные линии сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , которыми являются меридианы  $\varphi = \varphi_0$  и параллели  $\theta = \theta_0$ .

В том случае, когда область  $D$  не является выпуклой, а точка  $P(u_0, v_0)$  лежит внутри  $D$ , нужно взять выпуклую окрестность  $O(P(u_0, v_0), \delta)$  этой точки, лежащую внутри  $D$ . Тогда образ этой выпуклой окрестности будет куском  $\Sigma_\delta$  на поверхности  $\Sigma$  и координатные кривые можно строить на этом куске поверхности (локально). Примечательно, что для точки  $P(u_0, v_0)$  всегда найдется такая окрестность, для которой этот кусок поверхности  $\Sigma_\delta$  будет совпадать с графиком некоторой дифференцируемой функции. Это вытекает непосредственно из теоремы о неявных функциях, определяемых системой двух уравнений.

◇ В теории многообразий указанные выше локальные системы координат называют *локальными картами*. А множество локальных карт, покрывающих двумерное многообразие (т. е. поверхность  $\Sigma$ ), называют *атласом этого многообразия* (т. е. *атласом поверхности  $\Sigma$* ).

Итак, имея в своем распоряжении систему координатных линий, отметим, что вектор-функция  $\vec{r}(u_0, v)$  (рис. 162, б) есть непрерывно дифференцируемая функция параметра  $v$  и, следовательно, координатная кривая  $L_{u_0}$ , определяемая равенством (20.24) как годограф радиус-вектора  $\vec{r}(u_0, v)$ , является непрерывно дифференцируемой. Вектор  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  является касательным к этой кривой в точке  $P_\Sigma(u_0, v_0)$  (рис. 162, б). Аналогично вектор  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  является касательным вектором к координатной кривой  $L_{v_0}$  в точке  $P_\Sigma(u_0, v_0)$ . Векторы

$\vec{r}_u(u_0, v_0)$  и  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  не могут обратиться в нуль, так как в этом случае ранг матрицы (20.2) будет меньше двух. Следовательно, для простой поверхности координатные кривые являются гладкими.

Касательные векторы  $\vec{r}_u(u, v)$  и  $\vec{r}_v(u, v)$  обладают следующими свойствами.

**Свойство 20.1.** В любой точке  $P_\Sigma(u, v)$  простой поверхности  $\Sigma$  векторы  $\vec{r}_u(u, v)$  и  $\vec{r}_v(u, v)$  не коллинеарны.

Действительно, если для любой точки поверхности рассмотрим вектор

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \vec{k} \quad (20.25)$$

и положим  $\vec{N} = 0$ , то все компоненты вектора  $\vec{N}$  будут равны нулю и ранг матрицы (20.2) будет меньше двух, что невозможно для простых поверхностей  $\Sigma$ .

**Свойство 20.2.** Направление вектора  $\vec{N}$  (20.25) при изменении способа параметризации или не изменяется, или изменяется на противоположное.

Действительно, пусть простая поверхность параметризована двумя способами: (20.4) и (20.20). Тогда, воспользовавшись правилом нахождения частных производных сложной функции и свойствами векторного произведения, получим

$$\begin{aligned} \vec{N}' &= [\vec{\rho}_{u'}, \vec{\rho}_{v'}] = \left[ \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial u'} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial u'}, \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial v'} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial v'} \right] = \\ &= [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \left( \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'} \frac{\partial v}{\partial u'} \right) = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} = \vec{N} \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\vec{N}' = \vec{N} J(u', v'), \quad (20.26)$$

где якобиан

$$J(u', v') = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}$$

не обращается в нуль в области  $D'$ . Это означает, что векторы  $\vec{N}'$  и  $\vec{N}$  коллинеарны, т. е. сонаправлены при  $J > 0$  и противоположно направлены при  $J < 0$ , что и требовалось доказать.

◆ Векторы  $\vec{N} = \pm [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$  будем называть *векторами нормали к поверхности*  $\Sigma$  в точке  $P_\Sigma(u, v)$ .

**Свойство 20.3.** Вектор нормали  $\vec{N}$  к простой поверхности  $\Sigma$  в точке  $P_\Sigma(u_0, v_0)$  ортогонален ко всем гладким кривым, лежащим на поверхности  $\Sigma$  и проходящим через точку  $P_\Sigma(u_0, v_0)$ .

В самом деле, такая кривая есть образ при отображении (20.4) некоторой гладкой кривой  $L$ , лежащей в области  $D$  и задаваемой параметрическим представлением

$$L = \{(u, v) : u = u(t), v = v(t), t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Уравнение кривой  $L_\Sigma$  на поверхности тогда имеет вид

$$L_\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), t \in [\alpha, \beta]\}, \quad (20.27)$$

а точка  $P_\Sigma(u_0, v_0)$  имеет координаты  $u_0 = u(t_0)$ ,  $v_0 = v(t_0)$ . Касательный вектор  $\vec{\tau}$  в точке  $P_\Sigma(u_0, v_0)$  к кривой (20.27) есть

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} [\vec{r}(u(t_0), v(t_0))] = \vec{r}_u(u_0, v_0) \frac{du(t_0)}{dt} + \vec{r}_v(u_0, v_0) \frac{dv(t_0)}{dt}.$$

Это означает, что вектор  $\vec{\tau}$  есть линейная комбинация векторов  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  и  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ . Так как  $\vec{N}$  ортогонален  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  и  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ , то он ортогонален и вектору  $\vec{\tau}$ , т. е. вектор нормали  $\vec{N}$  к поверхности  $\Sigma$  в точке  $P_\Sigma$  ортогонален любой гладкой кривой, лежащей на поверхности  $\Sigma$  и проходящей через точку  $P_\Sigma$ , что и требовалось доказать.

◆ Плоскость, проходящую через точку  $P_\Sigma(u, v)$  поверхности  $\Sigma$  и ортогональную вектору нормали  $\vec{N}$ , будем называть *касательной плоскостью к поверхности  $\Sigma$  в точке  $P_\Sigma$* .

◆ Прямую, проходящую через точку  $P_\Sigma(u, v)$  поверхности  $\Sigma$  и параллельную вектору нормали  $\vec{N}$ , будем называть *нормалью к поверхности  $\Sigma$  в точке  $P_\Sigma$* .

Для вывода уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности  $\Sigma$  в точке  $P_\Sigma(u_0, v_0)$  введем вектор

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

где  $X, Y, Z$  – декартовы координаты точки касательной плоскости. Тогда три вектора:  $\vec{R} - \vec{r}(u, v)$ ,  $\vec{r}_u(u, v)$  и  $\vec{r}_v(u, v)$  – параллельны касательной плоскости и, следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид

$$(\vec{R} - \vec{r}(u, v), \vec{r}_u(u, v), \vec{r}_v(u, v)) = 0, \quad (20.28a)$$

и в координатной форме, соответственно,

$$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & Y - y(u, v) & Z - z(u, v) \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \quad (20.28b)$$

Так как, согласно определению, направляющим вектором нормали является вектор  $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ , то ее векторное уравнение можно записать в виде

$$\vec{R} - \vec{r}(u, v) = k[\vec{r}_u, \vec{r}_v], \quad |k| < \infty. \quad (20.29a)$$

В декартовых координатах это уравнение, в силу (20.25), примет вид

$$\frac{X - x(u, v)}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(u, v)}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(u, v)}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}, \quad (20.29b)$$

но здесь декартовы координаты  $X, Y, Z$  – координаты точек прямой-нормали.

В силу равенства (20.26) свойства 20.2 форма уравнений (20.28a)–(20.29b) не зависит от выбора параметризации поверхности  $\Sigma$ .

Если поверхность  $\Sigma$  представляет собой график непрерывно дифференцируемой функции  $z = z(x, y)$ , то формулы (20.28) и (20.29) приобретают вид, известный из курса теории функций многих переменных.



### 20.3. Ориентируемые поверхности. Согласование ориентаций поверхности и простого контура на поверхности

Понятие ориентации поверхности продолжает ряд уже известных операций по ориентации прямой, плоскости и пространства  $\mathbb{R}^3$ , а также кривой и контура в  $\mathbb{R}^2$ . Напомним, что мы используем пространство  $\mathbb{R}^3$ , ориентированное выбором правой тройки базисных векторов  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

◆ Гладкую поверхность будем называть *ориентируемой*, если на ней можно построить непрерывное поле единичных нормальных векторов.

Выбор направления поля единичных нормалей определяет ориентацию (или сторону) поверхности. Меняя направление всех единичных нормалей на противоположное, снова получим непрерывное поле единичных нормальных векторов. Такой выбор определяет противоположную ориентацию (другую сторону) поверхности.

◆ Простая гладкая поверхность всегда является ориентируемой (двусторонней), поскольку на ней всегда определено непрерывное поле единичных нормальных векторов:

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\text{mod } [\vec{r}_u, \vec{r}_v]}. \quad (20.30)$$

Произвольные гладкие и кусочно-гладкие поверхности могут быть как ориентируемыми (двусторонними), так и неориентируемыми (односторонними).

Так, например, на рис. 163 изображен результат склеивания плоской полоски  $ABA'B'$  двумя способами. В первом случае (рис. 163, а) края полосы  $AB$  и  $A'B'$  склеиваются так, что точка  $A$  совпадает с точкой  $A'$ , а  $B$  с  $B'$  и  $C$  с  $C'$ . В результате получится часть цилиндрической поверхности, для которой существует непрерывное поле единичных нормалей  $\vec{n}$  (рис. 163, б). Легко увидеть, что выбранный в точке  $C$  единичный вектор нормали  $\vec{n}$  после перемещения по замкнутому контуру  $CC'$  возвращается в точку  $C$ , совпадающую с  $C'$ , в свое исходное положение.

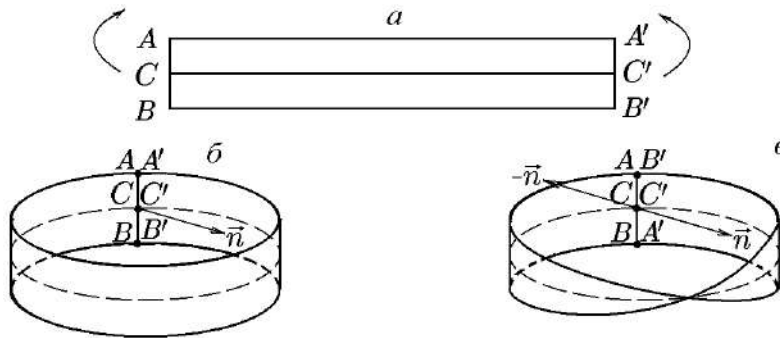


Рис. 163. Полоска  $ABA'B'$  (а) и различные типы её склеивания: без перекручивания (б); с перекручиванием (в)

Во втором случае полоска один раз перекручивается вокруг оси  $CC'$  и сторона  $AB$  склеивается со стороной  $B'A'$  так, что точка  $A$  совпадает с точкой  $B'$ , а точка  $B$  – с точкой  $A'$ , при этом точка  $C$ , как и в предыдущем случае, совпадает с точкой  $C'$  (рис. 163, в). Такая поверхность, называемая *листом Мебиуса*, является односторонней, т. е. неориентируемой, поскольку для нее не существует непрерывное поле единичных нормалей. Действительно, выбранный в точке  $C$  вектор нормали  $\vec{n}$  при непрерывном перемещении по замкнутому контуру  $CC'$ ,

возвратившись в точку  $C$ , совпадающую с  $C'$ , будет иметь ориентацию, противоположную исходной (рис. 163, в). (Лист Мебиуса нельзя задать никаким способом параметризации.)

На рис. 164 представлен аналогичный (хотя и менее наглядный) пример для гладких двумерных многообразий без края. Здесь изначально вместо полоски выбирается трубка (рис. 164, а), которую также можно склеить двумя способами. В первом из них края трубки после ее изгиба склеиваются самым простым способом (рис. 164, б). В результате получается гладкое двумерное многообразие без края в виде тороидальной поверхности (рис. 164, б). Во втором случае более узкий конец трубки после изгиба пропускается через ее стенку и склеивается со вторым концом, загнутым внутрь. Такая поверхность называется *бутылкой Клейна* и представляет собой гладкое двумерное многообразие без края.

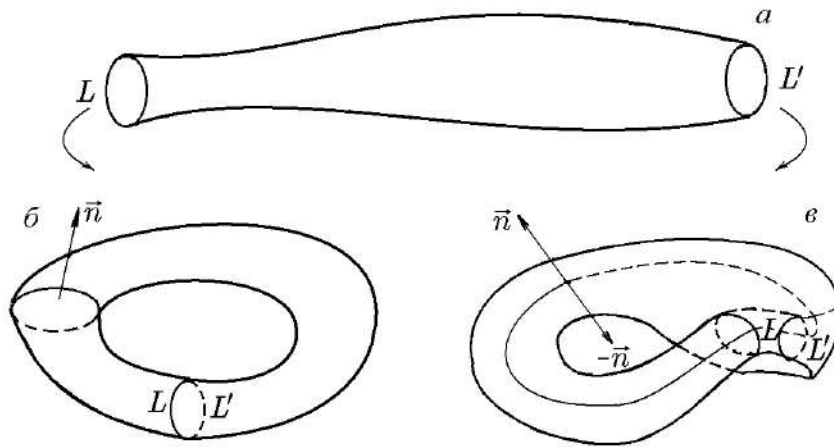


Рис. 164. Трубка (а) и ее два способа склейки: тороидальная поверхность (б) и бутылка Клейна (в)

Нетрудно заметить, что тороидальная поверхность (рис. 164, а) является двусторонней, т. е. ориентируемой, для которой существует непрерывное поле единичных нормалей. Соответственно, бутылка Клейна является односторонней поверхностью, т. е. неориентируемой. На этой поверхности можно построить замкнутый гладкий контур (рис. 164, в), такой что выбрав в какой-то точке вектор единичной нормали к поверхности и непрерывно изменяя его при движении по контуру, мы придем к начальной точке с противоположным направлением нормали (рис. 164, в). Следовательно, на бутылке Клейна построить непрерывное поле единичных нормальных векторов невозможно, т. е. она является односторонней поверхностью.

Из приведенных выше примеров следует, что сфера и тороидальная поверхность делят пространство в  $\mathbb{R}^3$  на ограниченную и неограниченную области, общей границей которых они и являются. Бутылка Клейна таким свойством не обладает.

Можно показать, что гладкая поверхность, являющаяся границей области в  $\mathbb{R}^3$ , ориентируема. Ее внутренняя сторона задается нормальными векторами, направленными внутрь области и называемыми *внутренними нормальными*. Внешняя сторона поверхности, соответственно, определяется *внешними нормальными*.

◇ Для построения поля внутренних (внешних) нормалей к границе области достаточно построить внутреннюю (внешнюю) нормаль к какой-либо одной точке границы.

Каждая плоскость (в том числе и касательная) делит пространство в  $\mathbb{R}^3$  на два полупространства. Если плоскость рассматривать как границу полупространства, то внутренняя нормаль определяется естественным образом как направленная внутрь выбранного полупространства (рис. 165, а).

◆ Пусть  $\partial G$  есть гладкая граница области  $G \subset \mathbb{R}^3$ . Касательная плоскость в точке  $P(x, y) \in \partial G$  называется *опорной*, если область лежит по одну сторону от касательной плоскости, т. е. в одном из полупространств, определяемых этой плоскостью. Таким образом, внутренняя нормаль опорной плоскости является внутренней нормалью поверхности  $G$  (рис. 165, б, в).

Для ограниченной области  $G$  с гладкой границей  $\partial G$  хотя бы в одной точке границы существует опорная касательная плоскость (рис. 165, в).

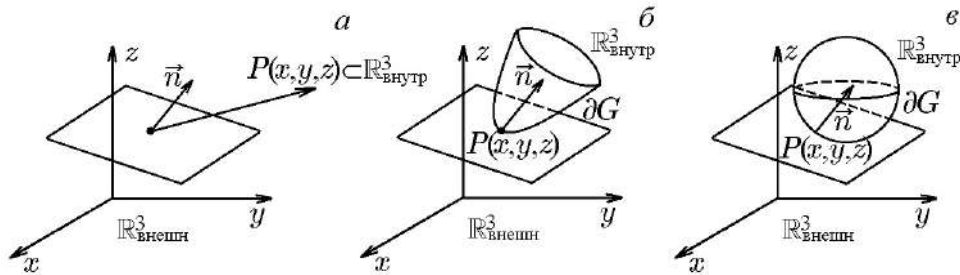


Рис. 165. Разделение  $\mathbb{R}^3$  на два полупространства: а) плоскостью; б), в) опорными плоскостями

◆ Границу области  $G$ , ориентированную внешними нормалью, будем обозначать через  $\partial G$ , а внутренними – через  $\partial G^-$ .

Прежде чем перейти к рассмотрению вопроса об ориентации кусочно-гладкой поверхности, рассмотрим вопрос об ориентации простого гладкого контура  $\Gamma_\Sigma$ , лежащего на поверхности  $\Sigma$ .

Пусть  $\Sigma$  – простая гладкая поверхность (рис. 166, б), т. е. гладкий и взаимно однозначный образ замыкания плоской области  $D$ , задаваемый параметрическим представлением (20.23), и пусть  $\Gamma_\Sigma$  – гладкий простой контур на поверхности  $\Sigma$ , являющийся образом плоского простого гладкого контура  $\Gamma \subset D$  (рис. 166, а).

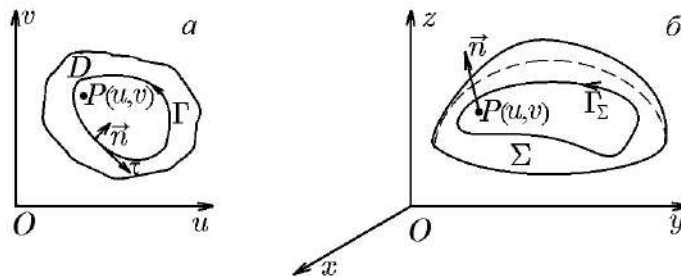


Рис. 166. Гладкие простые контуры: а)  $\Gamma$  – плоский; б)  $\Gamma_\Sigma$  – на поверхности  $\Sigma$

◆ Контур  $\Gamma_\Sigma \subset \Sigma$  будем называть *ориентированным положительно*, если его плоский образ  $\Gamma$  в плоскости  $(u, v)$  имеет положительную ориентацию, т. е. при обходе контура  $\Gamma$  область, ограничиваемая им, остается слева, или вектор касательной  $\vec{\tau}$  и вектор внутренней нормали  $\vec{n}$  образуют правую тройку векторов в правоориентированной плоскости  $(u, v)$ .

◆ Ориентацию простой гладкой поверхности  $\Sigma$ , задаваемую полем единичных нормалей

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\text{mod } [\vec{r}_u, \vec{r}_v]},$$

будем называть *согласованной с положительной ориентацией простых контуров*  $\Gamma_\Sigma$ , лежащих на поверхности  $\Sigma$  (рис. 167).

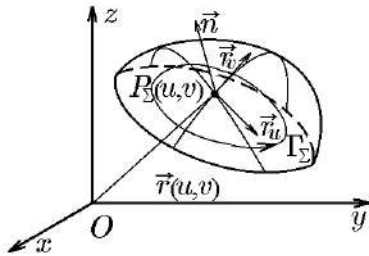


Рис. 167. Положительно ориентированная гладкая поверхность

Очевидно, что для согласования ориентированных поверхностей  $\Sigma$  и простого контура  $\Gamma_\Sigma$  на этой поверхности тройка векторов  $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$  образует правую тройку в полном соответствии с определением векторного произведения векторов  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$ .

Перейдем теперь к рассмотрению ориентации кусочно-гладкой поверхности. Пусть  $\Sigma$  – кусочно-гладкая поверхность, составленная из гладких кусков  $\Sigma_i, i = \overline{1, n}$ , примыкающих один к другому по ребру – общей части их контуров. Предположим, прежде всего, что каждый из этих кусков в отдельности является двусторонней поверхностью.

Но этого, разумеется, недостаточно для того, чтобы всю поверхность  $\Sigma$  можно было рассматривать как двустороннюю, ведь и односторонняя поверхность Мебиуса, как это следует из рис. 163, легко составляется из двух гладких двусторонних кусков.

В связи с этим введем следующие правила склеивания двусторонних кусков в одну кусочно-гладкую двустороннюю поверхность.

На границе  $\partial\Sigma_i$  каждого двустороннего куска  $\Sigma_i$  выберем в качестве положительного одно из двух возможных направлений ее обхода. Этим, как мы установили выше, фиксируется направление нормали  $\vec{n}$ , т. е. сторона поверхности  $\Sigma_i$  (рис. 168, а, б). Если для двух кусков этот выбор можно сделать так, чтобы общая часть склеиваемых контуров на каждом из кусков обходилась в противоположных направлениях (рис. 168, а, б), то такое склеивание дает двустороннюю поверхность. Сторона склеенной поверхности определяется как совокупность сторон ее частей, выбранных указанным образом.

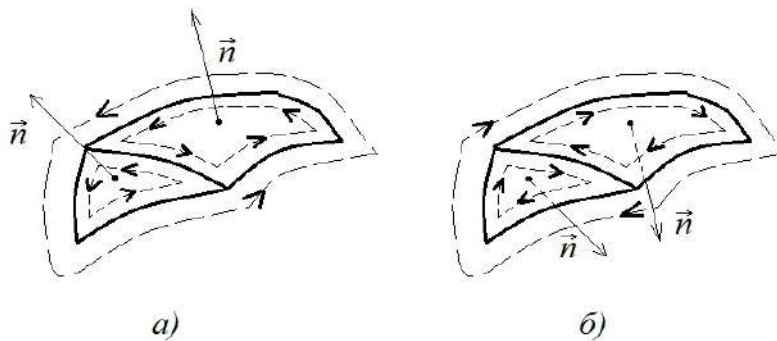


Рис. 168. Склеивание двусторонних кусков для выбранного (а) и противоположного к выбранному (б) направлений нормали  $\vec{n}$

Если хоть в одном случае направление обхода контура заменить на противоположное, то для соблюдения нашего условия придется то же самое сделать и с другими контурами. Тогда и выбранные стороны склеиваемых кусков заменятся противоположными им; их совокупность составит вторую сторону склеенной поверхности (рис. 168, б).

Правило склеивания двух кусков обобщается на случай их произвольного количества.

Пусть кусочно-гладкая поверхность склеена из гладких простых кусков  $\Sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Если склеивание происходит вдоль кривой  $\gamma$ , то после удаления концов кривой  $\gamma$  она может входить в края двух и только двух поверхностей из совокупности  $\Sigma_i$ . Кусочно-гладкую поверхность  $\Sigma$  будем называть *ориентируемой* (*двусторонней*), если можно так ориентировать гладкие куски  $\Sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , что после согласования ориентаций  $\Sigma_i$  ориентацией  $\partial\Sigma_i$  любая склейка будет входить в состав краев двух соответствующих поверхностей с противоположными ориентациями. В качестве примера на рис. 169 изображена двусторонняя поверхность пирамиды, склеенной из треугольников, являющихся ее гранями. Как следует из этого рисунка, все ребра пирамиды, являющиеся склейками, обходятся дважды в противоположных направлениях.

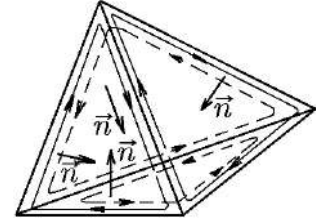


Рис. 169. Двусторонняя поверхность пирамиды

◇ Можно показать, что кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей ограниченной трехмерной области, ориентируема, при этом каждый ее гладкий кусок можно ориентировать внутренними нормальными.

Рисунок 169 иллюстрирует это утверждение весьма наглядно. В дальнейшем мы будем рассматривать только ориентируемые гладкие и кусочно-гладкие поверхности.

## 20.4. Площадь поверхности

При работе с приложениями для гладких и кусочно-гладких поверхностей, к рассмотрению которых мы переходим, важную роль играет соотношение, называемое *первой квадратичной формой поверхности*. По сути дела, первая квадратичная форма задает метрику поверхности, знание которой позволяет вычислять длины кривых, лежащих на поверхности, углы между ними, площади кривых поверхностей и т. д.

### 20.4.1. Первая квадратичная форма поверхности

Пусть простая гладкая поверхность задана параметрическим представлением в векторной форме:

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^2\}. \quad (20.31)$$

Геометрическая иллюстрация отображения (20.31)  $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$  представлена на рис. 170, а, б.

Скалярный квадрат дифференциала вектора  $\vec{r}$  (20.31)

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv \quad (20.32)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} |d\vec{r}|^2 &= (d\vec{r}, d\vec{r}) = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \\ &= (\vec{r}_u, \vec{r}_u) du^2 + 2(\vec{r}_u, \vec{r}_v) du dv + (\vec{r}_v, \vec{r}_v) dv^2. \end{aligned}$$

С помощью обозначений

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (\vec{r}_u, \vec{r}_u) = |\vec{r}_u|^2, & F(u, v) &= (\vec{r}_u, \vec{r}_v), & G(u, v) &= (\vec{r}_v, \vec{r}_v) = |\vec{r}_v|^2, \\ Q &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20.33)$$

его можно записать в скалярной или векторной форме:

$$|d\vec{r}|^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)du dv + G(u, v)dv^2 = (du \quad dv) Q \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}. \quad (20.34)$$

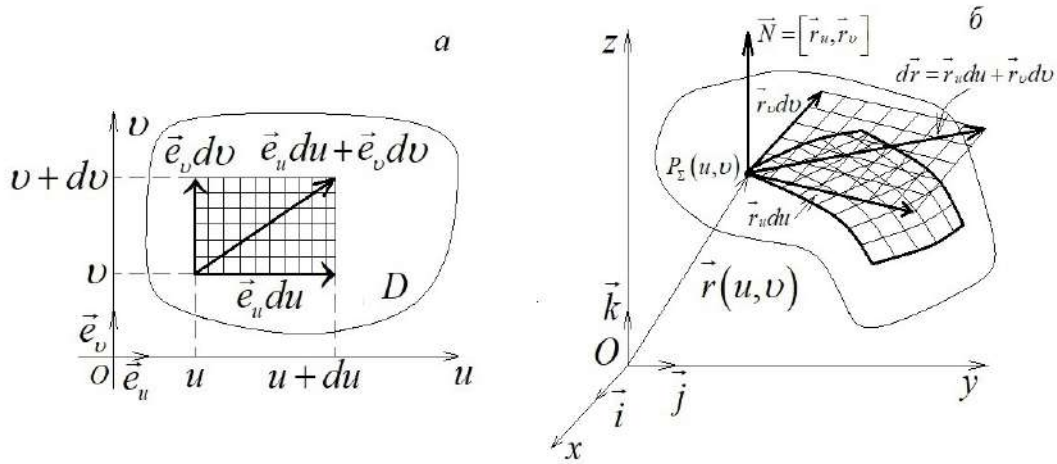


Рис. 170. Отображение жордановой клетки (а) в криволинейный параллелограмм (б)

◆ Выражение (20.34) называется *первой квадратичной формой поверхности* (20.31), величины  $E, F, G$  – ее *коэффициентами* (или *коэффициентами Гаусса*), а матрица  $Q$  – *матрицей первой квадратичной формы поверхности*.

Для простой поверхности (20.31) ее первая квадратичная форма (20.34) является положительно определенной, т. е.  $|d\vec{r}|^2 > 0$ , если  $(du)^2 + (dv)^2 > 0$  (или  $|du| + |dv| \neq 0$ ). Действительно, согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма (20.34) является положительно определенной, если главные миноры матрицы  $Q$  положительны:

$$E > 0, \quad G > 0, \quad \det Q = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 > 0. \quad (20.35)$$

Но для простой поверхности (20.31) эти условия выполняются, поскольку

$$\begin{aligned} E &= |\vec{r}_u|^2 > 0, \quad G(u, v) = |\vec{r}_v|^2 > 0, \\ \det Q &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 = |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_u)^2 = \\ &= |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 \{1 - \cos^2(\widehat{\vec{r}_u, \vec{r}_u})\} = |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 \sin^2(\widehat{\vec{r}_u, \vec{r}_u}) = |[\vec{r}_u, \vec{r}_u]|^2 = |\vec{N}|^2 > 0. \end{aligned} \quad (20.36)$$

Перейдем теперь к рассмотрению геометрического смысла аналитических выражений (20.31)–(20.36) и их составляющих.

#### 20.4.2. Площадь простой поверхности

Пусть простая поверхность  $\Sigma$  задана параметрическим представлением вида (20.31) и точка  $P(u, v)$  квадратуемой области  $D$  отображается в точку  $P_\Sigma(u, v)$  (рис. 170).

В области  $D$  плоскости  $(u, v)$  выделим жорданову клетку со сторонами  $du > 0$  и  $dv > 0$ , исходящими из точки  $P(u, v)$  (рис. 170, а). Эта клетка посредством (20.31) отображается в криволинейный параллелограмм на поверхности  $\Sigma$ , а посредством (20.32) – в параллелограмм, расположенный в касательной плоскости к поверхности  $\Sigma$ , проходящей через точку  $P_\Sigma(u, v)$  (рис. 170, а, б). Оба параллелограмма имеют общую вершину в точке  $P_\Sigma(u, v)$ , а векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$ , исходящие из этой точки, образуют естественный базис касательной плоскости.

Векторы  $\vec{r}_u du$  и  $\vec{r}_v dv$ , являющиеся сторонами параллелограмма в касательной плоскости, будут касательными к кривым, представляющим стороны криволинейного параллелограмма, а длины этих векторов будут отличаться от длин сторон криволинейного параллелограмма на величины  $o(\Delta u)$  и  $o(\Delta v)$  при  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta v \rightarrow 0$ . Поэтому естественно считать, что площадь криволинейного параллелограмма  $d\sigma$  приближенно равна площади  $dS$  параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{r}_u du$ ,  $\vec{r}_v dv$ , равной  $dS = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ . Таким образом, при  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta v \rightarrow 0$

$$d\sigma = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|^2 du dv = \sqrt{\det G} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (20.37)$$

◆ Выражение (20.37) называется *элементом площади*  $\Sigma$  (20.31).

С помощью определителя Грамма  $\Gamma(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$  выражение (20.37) можно записать в виде

$$d\sigma = \sqrt{\Gamma(\vec{r}_u, \vec{r}_v)} du dv. \quad (20.38)$$

Следуя основной идее интегрального исчисления и исходя из известного выражения для элемента площади  $d\sigma$  поверхности  $\Sigma$ , площадь ее полной поверхности  $S(\Sigma)$  найдется интегрированием по жордановой области  $D \subset \mathbb{R}^2$  изменения параметров  $u$  и  $v$ :

$$S(\Sigma) = \iint_D d\sigma = \iint_D |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (20.39)$$

Из свойств параметрических представлений простых поверхностей  $\Sigma$  и двойных интегралов вытекает независимость величины  $S(\Sigma)$  (20.39) от параметризации поверхности. Действительно, пусть переход от параметрического представления (20.31) к эквивалентному параметрическому представлению

$$\Sigma = \{\vec{\rho} \in \mathbb{R}^3 : \vec{\rho} = \vec{\rho}(u', v'), (u', v') \in \bar{D}'\}$$

совершается при помощи взаимно однозначного отображения области  $D'$  на область  $D$  с якобианом, не равным нулю. Тогда в силу (20.26) свойства 20.2 и формулы замены переменных в двойном интеграле получим равенство

$$S(\Sigma) = \iint_{D'} |[\vec{\rho}_{u'}, \vec{\rho}_{v'}]| du' dv' = \iint_{D'} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \right| du dv = \iint_D |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv.$$

◇ Формула (20.39) упрощается для поверхности  $\Sigma$ , являющейся графиком непрерывно дифференцируемой функции  $z = z(x, y)$  на замыкании жордановой области  $\bar{D}$ , к виду

$$S(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy, \quad (20.40)$$

поскольку для  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z(x, y))$  в этом случае имеем

$$\vec{r}_x = (1, 0, z_x), \quad \vec{r}_y = (0, 1, z_y), \quad E = |\vec{r}_x|^2 = 1 + z_x^2, \quad G = |\vec{r}_y|^2 = 1 + z_y^2,$$

$$F = (\vec{r}_x, \vec{r}_y) = z_x z_y, \quad EG - F^2 = (1 + z_x^2)(1 + z_y^2) - z_x^2 z_y^2 = 1 + z_x^2 + z_y^2.$$

Именно формула (20.40), записанная в форме (15.3), использовалась выше в приложениях двойных интегралов для вычисления площади кривых поверхностей.

◇ В свою очередь, формула (20.40) упрощается еще более, переходя в известную формулу

$$S(D) = \iint_D dx dy, \quad (20.41)$$

когда поверхность  $\Sigma$  является поверхностью плоской (при  $z = 0$ ) жордановой области  $D$ . Формула (20.41), как известно, определяет меру плоской области  $D$ , т. е. ее площадь  $S(D)$ .

Возвратившись к формуле (20.39), отметим, что выражение  $S(\Sigma)$  аддитивно зависит от поверхности. Действительно, если область  $D$  разбить гладкой перегородкой на области  $D_1$  и  $D_2$ , то и поверхность  $\Sigma$  разобьется на простые поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Из аддитивности двойного интеграла следует, что

$$\begin{aligned} S(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{D_1} \sqrt{EG - F^2} du dv + \\ &+ \iint_{D_2} \sqrt{EG - F^2} du dv = S(\Sigma_1) + S(\Sigma_2). \end{aligned} \quad (20.42)$$

Кроме этого, формула (20.39) остается справедливой и для почти простых поверхностей. Если же поверхность  $\Sigma$  не является простой или почти простой, но может быть разрезана на конечное число простых кусков, то ее площадью называют сумму площадей всех простых кусков.

## 20.5. Поверхностные интегралы первого рода

Обратимся к классической задаче интегрального исчисления о вычислении массы, распределенной в данном случае по простой ориентированной поверхности  $\Sigma$  с заданной поверхностной плотностью  $\rho(\vec{r})$ ,  $\vec{r}(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ .

Пусть поверхность  $\Sigma$  задана параметрическим представлением

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in D\}.$$

Произвольному разбиению области  $D$  на области  $D_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , соответствует разбиение поверхности  $\Sigma$  на простые ориентированные поверхности  $\Sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Согласно определению площади поверхности (20.39)

$$S(\Sigma_i) = \iint_{D_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv.$$

Интегральная теорема о среднем для двойного интеграла (4.21) позволяет записать это равенство в виде

$$S(\Sigma_i) = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_i \iint_{D_i} du dv = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_i m(D_i), \quad (20.43)$$

где символ  $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_i$  означает, что значение функции  $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$  вычисляется в некоторой точке  $P_{\Sigma_i}(u_i, v_i) \in \Sigma_i$ , являющейся образом точки  $P(u_i, v_i) \in D_i$ , а  $m(D_i)$  –



мера области  $D_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  (т. е. площадь плоской области  $D_i$ :  $S(D_i)$ ). С учетом этого массу  $M_n$ , распределенную по поверхности  $\Sigma = \Sigma_1 + \dots + \Sigma_n$ , можно приблизительно найти суммой

$$M_n = \sum_{i=1}^n \rho(P_{\Sigma_i}) S(\Sigma_i) = \sum_{i=1}^n \rho(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_i m(D_i), \quad (20.44)$$

где  $\rho(P_{\Sigma_i})$  – поверхностная плотность в точке  $P_{\Sigma_i}$ , которая считается постоянной величиной на каждом куске поверхности  $\Sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Точное значение массы  $M$  есть, по определению, предел величины  $M_n$  при мелкости разбиения поверхности  $\Sigma_i$ , стремящейся к нулю ( $n \rightarrow \infty$ ). Этот предел принято называть *поверхностным интегралом первого рода* от функции  $\rho(x, y, z)$  по поверхности  $\Sigma$  и обозначать как

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) d\sigma. \quad (20.45)$$

Вместе с этим в силу равенства (20.44) точное значение массы  $M$  можно найти при помощи предела суммы

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_i m(D_i), \quad (20.46)$$

представляющего собой предел интегральной суммы, определяющей двойной интеграл по области  $D$  плоскости  $(u, v)$ :

$$M = \iint_D \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv, \quad (20.47)$$

поскольку пределом площади  $m(D_i)$  является площадь элементарной двумерной жордановой клетки  $du dv$ .

Сравнение значений  $M$  из (20.45) и (20.47) позволяет записать равенство

$$\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) d\sigma = \iint_D \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv. \quad (20.48)$$

Отвлекаясь от физического смысла функции  $\rho(x, y, z)$  из (20.48), для поверхностного интеграла первого рода будем исходить из следующего определения.

◆ Для функции  $f(x, y, z)$ , непрерывной на поверхности  $\sigma$ , заданной параметрическим представлением

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \overline{D}\}, \quad (20.49)$$

двойной интеграл

$$\iint_D \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv$$

будем называть *поверхностным интегралом первого рода* (интегралом по поверхности) от функции  $f(x, y, z)$  по поверхности  $\Sigma$  и обозначать символом

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma.$$

Таким образом, по определению,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv. \quad (20.50)$$

◇ Как и в случае криволинейных интегралов, определение (20.50) поверхностного интеграла через двойной является иллюстрацией применения более общего метода построения интегралов на многообразиях как кратных интегралов по объему (мере) его касательного подпространства.

Если в терминах многообразий кривая классифицируется как одномерное многообразие, касательным подпространством которого является одномерное подпространство – касательная прямая, то поверхность классифицируется как двумерное многообразие, касательным подпространством которого является двумерное подпространство – касательная плоскость. Поскольку элементом объема одномерного касательного подпространства – касательной прямой – является элемент длины  $dl = |\vec{r}'_t(t)| dt$ , а элементом объема двумерного касательного подпространства – касательной плоскости – является элемент площади  $d\sigma = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv$ , то криволинейный и поверхностный интегралы первого рода задаются определенным (одномерным) и двойным (двумерным) интегралами соответственно:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'_t(t)| dt, \quad (20.51a)$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv. \quad (20.51b)$$

Формулы (20.51a), (20.51b) формально очень сильно отличаются друг от друга. Но форму их записи можно унифицировать с помощью определителя Грама базисных векторов пространства  $\mathbb{R}^m$ :  $\{\vec{x}_i\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ :

$$\Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = \begin{vmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_1) & \dots & (\vec{x}_1, \vec{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{x}_m, \vec{x}_1) & \dots & (\vec{x}_m, \vec{x}_m) \end{vmatrix} = \det(\vec{x}_i, \vec{x}_j), \quad i, j = \overline{1, m}. \quad (20.52)$$

Теперь, исходя из того, что вектор  $\vec{r}'_t = d\vec{r}/dt$  представляет собой базисный вектор одномерного касательного подпространства – касательной прямой, а пара векторов  $\vec{r}_u = d\vec{r}/du$ ,  $\vec{r}_v = d\vec{r}/dv$  является естественным базисом двумерного касательного подпространства – касательной плоскости, для них, по определению, можно записать равенства:

$$\begin{aligned} |\vec{r}'_t(t)| &= \sqrt{(\vec{r}'_t(t), \vec{r}'_t(t))} = \sqrt{\Gamma(\vec{r}'_t(t))}, \\ |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| &= \sqrt{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]^2} = \sqrt{|\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 \sin^2(\widehat{\vec{r}_u, \vec{r}_v})} = \sqrt{|\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 (1 - \cos^2(\widehat{\vec{r}_u, \vec{r}_v}))} = \\ &= \sqrt{|\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2} = \left| \begin{pmatrix} \vec{r}_u, \vec{r}_u & \vec{r}_u, \vec{r}_v \\ \vec{r}_v, \vec{r}_u & \vec{r}_v, \vec{r}_v \end{pmatrix} \right|^{1/2} = \sqrt{\Gamma(\vec{r}_u, \vec{r}_v)}. \end{aligned} \quad (20.53)$$

С учетом (20.53), используя обозначение  $(x, y, z) = \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ , формулы (20.51a), (20.51b) можно преобразовать к виду

$$\int_L f(\vec{r}) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t)) \sqrt{\Gamma(\vec{r}'_t)} dt; \quad t \in D^{(1)} = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, \quad (20.54a)$$

$$\iint_{\Sigma} f(\vec{r}) d\sigma = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{\Gamma(\vec{r}_u, \vec{r}_v)} du dv; \quad (u, v) \in D^{(2)} \subset \mathbb{R}^2. \quad (20.54б)$$

В общем случае для  $p$ -мерного гладкого ориентированного многообразия  $H^{(p)}$ , заданного в  $\mathbb{R}^n$  параметрическим представлением

$$H^{(p)} = \{\vec{r}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{x}(\vec{u}), \vec{u} = (u_1, \dots, u_p) \in \overline{D}^{(p)} \subset \mathbb{R}^p\}, \quad p \leq n, \quad (20.55)$$

естественным базисом его касательного  $p$ -мерного подпространства является система векторов:

$$\vec{x}_{u_1} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}, \quad \vec{x}_{u_2} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2}, \quad \dots, \quad \vec{x}_{u_p} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_p}.$$

В этих терминах интеграл от функции  $f(\vec{x})$  на многообразии  $H^{(p)}$  с элементом  $dh^{(p)}$  обозначается как

$$\int \dots \int_{H^{(p)}} f(\vec{x}) dh^{(p)}$$

и определяется  $p$ -мерным кратным интегралом по жордановой области  $D^{(p)} \subset \mathbb{R}^p$ :

$$\int \dots \int_{H^{(p)}} f(\vec{x}) dh^{(p)} = \int \dots \int_{D^{(p)}} f(\vec{x}(\vec{u})) \sqrt{\Gamma(\vec{x}_{u_1}, \dots, \vec{x}_{u_p})} du_1 \dots du_p. \quad (20.56)$$

Очевидно, что формулы (20.51а), (20.51б) и, следовательно, (20.54а), (20.54б) вытекают из общего определения (20.56):

при  $p = 1$ ,  $u_1 = t \in \mathbb{R}$ ,  $H^{(1)} = L$ ,  $dh^{(1)} = dl$ ,  $D^{(1)} = [\alpha, \beta]$  приходим к (20.54а);

при  $p = 2$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $H^{(2)} = \Sigma$ ,  $dh^{(2)} = d\sigma$ ,  $D^{(2)} = D \subset \mathbb{R}^2$  приходим к (20.54б).

◇ Небольшое отступление, сделанное выше, объясняет обращение к определениям криволинейных и поверхностных интегралов первого рода соответствующими кратными интегралами без обращения к рассмотрению соответствующих интегральных сумм, сумм Дарбу и их свойств, поскольку предельный переход здесь приводит к результату, совпадающему с (20.56).

Возвратившись к определению поверхностного интеграла первого рода (20.50), отметим, что он не зависит от выбора параметрического представления поверхности  $\Sigma$ . Это доказывается так же, как и для интеграла (20.39), задающего площадь поверхности. Вместе с этим он не зависит и от выбора ориентации поверхности  $\Sigma$ , поскольку в подынтегральном выражении присутствует только модуль вектора нормали касательной плоскости  $|\vec{N}| = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ .

Аддитивность интеграла (20.50) относительно поверхности  $\Sigma$  следует из аддитивности двойного интеграла по области интегрирования. Другие свойства и оценки, присущие двойным интегралам, также распространяются на поверхностные интегралы (20.50). Мы не будем останавливаться на их перечислении здесь, обращаясь к ним по мере необходимости, в соответствующих приложениях. И, наконец, сформулированные условия существования поверхностного интеграла первого рода могут быть дополнены более общими, которые вытекают из условий существования кратных интегралов в правой части определения (20.50).

Для поверхностных интегралов первого рода обозначим некоторые стандартные их приложения. Выше уже было показано, что масса  $M$  вещества, распределенного по двусторонней квадратуемой кусочно-гладкой поверхности  $\Sigma$  с поверхностной плотностью  $f(x, y, z)$ , вычисляется поверхностным интегралом первого рода

$$M = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma. \quad (20.57)$$

Следуя схеме получения этого равенства с помощью составления соответствующих интегральных сумм, можно показать, что аналогичными (20.57) формулами вычисляются заряд, количество тепла, площадь и т. п. Другими словами, формула (20.57) позволяет вычислять значение произвольной аддитивной скалярной величины  $M$ , исходя из ее поверхностной плотности, заданной на поверхности  $\Sigma$ , с учетом формы этой поверхности.

В физике существует обобщение формулы (20.57) в виде поверхностных интегралов первого рода:

$$\mathbb{I}_*^{(n)} = \iint_{\Sigma} f r^n d\sigma, \quad (20.58)$$

где  $r$  – расстояние от точки  $P_{\Sigma} \in \Sigma$  до некоторой прямой или поверхности (\*), а функция  $f(x, y, z)$  является поверхностной плотностью материальной поверхности  $\Sigma$ .

◆ Интегралы (20.58) называются *моментами* порядка  $n$  поверхности  $\Sigma$  относительно соответствующей прямой или плоскости.

Очевидно, что масса поверхности  $\Sigma$  является моментом  $\mathbb{I}^{(0)}$  нулевого порядка поверхности  $\Sigma$  относительно любой прямой или плоскости. Моменты первого порядка называются *статическими моментами*, моменты второго порядка – *моментами инерции*. Исходя из этого, формулы для вычисления координат  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  центра масс можно найти соотношениями

$$x_0 = \frac{\mathbb{I}_{yz}^{(1)}}{\mathbb{I}^{(0)}}, \quad y_0 = \frac{\mathbb{I}_{xz}^{(1)}}{\mathbb{I}^{(0)}}, \quad z_0 = \frac{\mathbb{I}_{xy}^{(1)}}{\mathbb{I}^{(0)}} \quad (20.59)$$

и т. д.

В свою очередь, интеграл

$$\vec{F} = \gamma M \iint_{\Sigma} f \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\sigma, \quad (20.60)$$

где  $\gamma$  – постоянная тяготения, а  $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  определяет силу  $\vec{F}$ , с которой материальная поверхность  $\Sigma$  притягивает материальную точку массой  $M$ , помещенную в точку  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  вне поверхности  $\Sigma$ . Аналогично находится ньютонов потенциал материальной поверхности и другие характеристики физических величин, распределенных на поверхности.

## 20.6. Практика вычислений поверхностных интегралов первого рода и их приложений

Будем исходить из определения (20.50)

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv. \quad (20.61)$$

для поверхности  $\Sigma$ , заданной параметрическим представлением

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2\}. \quad (20.62)$$

Двойной интеграл в правой части (20.61) преобразуем к виду, более удобному для вычислений, воспользовавшись записью модуля  $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$  через коэффициенты Гаусса первой квадратичной формы поверхности, согласно равенству (20.33):

$$E = |\vec{r}_u|^2, \quad F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v), \quad G(u, v) = |\vec{r}_v|^2, \quad (20.63)$$

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|^2 = \sqrt{\Gamma(\vec{r}_u, \vec{r}_v)} = \sqrt{EG - F^2},$$

тогда

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (20.64)$$

Для поверхности  $\Sigma$ , являющейся графиком непрерывно дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , формула примет следующий вид:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy. \quad (20.65)$$

Действительно, в этом случае поверхность  $\Sigma$  задается параметрическим представлением

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : x = x, y = y, z = z(x, y) \ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\}, \quad (20.66)$$

для которого плоская область  $D$  является ортогональной проекцией  $\Sigma$  на координатную плоскость  $xOy$  (рис. 171, а) и

$$E = 1 + z_x^2, \quad G = 1 + z_y^2, \quad F = z_x z_y, \\ \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

в силу чего (20.64) и упрощается к (20.65).

Очевидно, что если поверхность  $\Sigma$  является графиком непрерывно дифференцируемой функции  $y = y(x, z)$  (рис. 171, б) или  $x = x(y, z)$  (рис. 171, в) то формула (20.64) запишется как

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2} dx dz, \quad (20.67)$$

где плоская область  $D$  является ортогональной проекцией  $\Sigma$  на координатную плоскость  $xOz$  (рис. 171, б), и, соответственно,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x_y)^2 + (x_z)^2} dy dz, \quad (20.68)$$

где плоская область  $D$  является ортогональной проекцией  $\Sigma$  на координатную плоскость  $yOz$  (рис. 171, в).

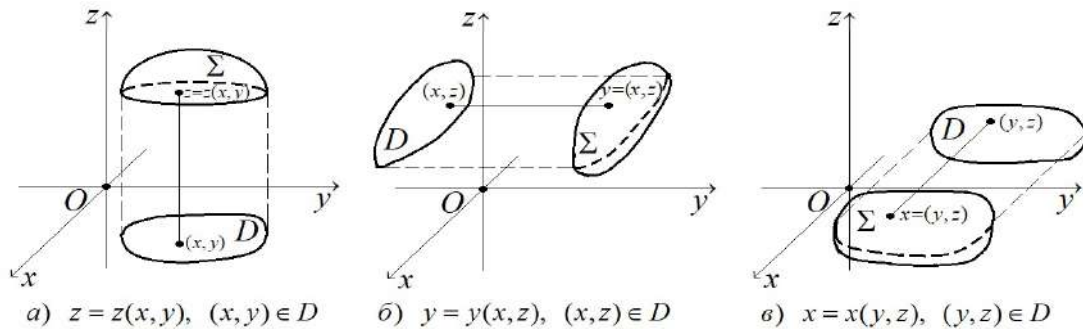


Рис. 171. Проекции поверхности  $\Sigma$  на плоскость  $Oxy$  (а), на плоскость  $Oxz$  (б), на плоскость  $Oyz$  (в)

**Пример 20.5.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint_{\Sigma} z \, d\sigma,$$

где  $\Sigma$  – часть поверхности  $x + y/a + z = 1$ ,  $a \neq 0$ , ограниченной координатными плоскостями  $x = y = z = 0$ .

**Решение.** Поверхность интегрирования  $\Sigma$  представляет собой часть плоскости, заданной уравнением в отрезках

$$x + \frac{y}{a} + z = 1, \quad a \neq 0. \quad (20.69)$$

Эта поверхность изображена на рис. 172, где непрерывными линиями показана  $\Sigma$  для  $a > 0$ , а штриховыми –  $\Sigma$  для  $a < 0$ .

Чтобы вычислить интеграл  $I$ , уравнение (20.69) можно разрешить относительно любой переменной  $x, y, z$ , а затем воспользоваться формулами (20.65), (20.67) или (20.68). В этом примере для сравнения мы рассмотрим все возможные варианты решений.

I. Уравнение (20.69) разрешим относительно переменной  $z$ :

$$z = \left(1 - x - \frac{y}{a}\right),$$

соответственно,

$$z_x = -1, \quad z_y = -\frac{1}{a}, \quad \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}$$

и

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} z \, d\sigma = \iint_{\Sigma} \left(1 - x - \frac{y}{a}\right) d\sigma = \\ &= \iint_D \left(1 - x - \frac{y}{a}\right) \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (20.70)$$

Область  $D$  представляет собой проекцию поверхности  $z = 1 - x - y/a$  на плоскость  $z = 0$  (рис. 173). Это означает, что расстановка пределов в повторных интегралах для двойного интеграла (20.70) зависит от знака коэффициента  $a$ . Рассмотрим оба варианта.

1. Пусть  $a > 0$ . В этом случае область  $D$  (рис. 173) определится неравенствами

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq a(1 - x)\}, \quad (20.71)$$

и, следовательно, из (20.70) имеем

$$I = \iint_{\Sigma} z \, d\sigma = \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} \int_0^1 dx \int_0^{a(1-x)} \left(1 - x - \frac{y}{a}\right) dy = \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} J_I, \quad (20.72)$$

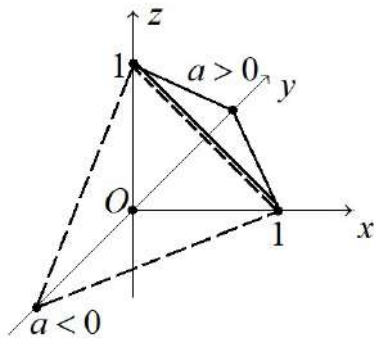


Рис. 172. Плоскость  $x + \frac{y}{a} + z = 1$ ,  $a \neq 0$

где

$$\begin{aligned}
 J_I &= \int_0^1 dx \int_0^{a(1-x)} \left(1 - x - \frac{y}{a}\right) dy = -a \int_0^1 dx \int_0^{a(1-x)} \left(1 - x - \frac{y}{a}\right) d\left(1 - x - \frac{y}{a}\right) = \\
 &= -a \int_0^1 dx \frac{(1 - x - y/a)|_0^{a(1-x)}}{2} = -\frac{a}{2} \int_0^1 [0 - (1-x)^2] dx = \\
 &= -\frac{a}{2} \int_0^1 (1-x)^2 d(1-x) = -\frac{a}{2} \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{a}{6} [0 - 1] = \frac{a}{6}.
 \end{aligned}
 \tag{20.73}$$

Подставив (20.73) в (20.72), получим

$$I = \iint_{\Sigma} z d\sigma = \frac{a}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}.
 \tag{20.74}$$

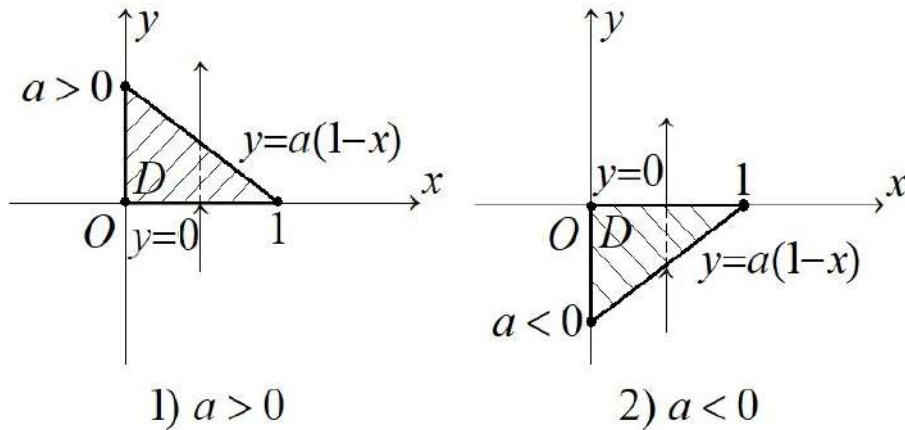


Рис. 173. Проекция плоскости  $x + \frac{y}{a} + z = 1$ ,  $a \neq 0$ , на координатную плоскость  $Oxy$

2. Пусть  $a < 0$ . В этом случае область  $D$  (рис. 173) определится неравенствами

$$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, a(1-x) \leq y \leq 0\},
 \tag{20.75}$$

и, следовательно, из (20.70) имеем

$$I = \iint_{\Sigma} z d\sigma = \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} \int_0^1 dx \int_{a(1-x)}^0 \left(1 - x - \frac{y}{a}\right) dy.
 \tag{20.76}$$

Этот интеграл отличается от интеграла (20.72) только обратным порядком расстановки пределов во внутреннем интеграле. Изменение порядка во внутреннем интеграле (20.76) дает

$$I = \iint_{\Sigma} z d\sigma = -\sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} \int_0^1 dx \int_0^{a(1-x)} \left(1 - x - \frac{y}{a}\right) dy,$$

и, следовательно, согласно (20.74), получим

$$I = \iint_{\Sigma} z \, d\sigma = -\sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} J_I = -\frac{a}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}. \quad (20.77)$$

Результаты (20.74) и (20.77) для противоположных знаков  $a$  можно объединить следующим образом:

$$I = \begin{cases} \frac{a}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} & a > 0 \\ -\frac{a}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} & a < 0 \end{cases} = \frac{|a|}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{6} \sqrt{2a^2 + 1}.$$

Таким образом, интеграл  $I$  не зависит от знака коэффициента  $a$ :

$$I = \iint_{\Sigma} z \, d\sigma = \frac{1}{6} \sqrt{1 + 2a^2}. \quad (20.78)$$

II. Уравнение (20.69) разрешим относительно переменной  $x$ :

$$x = \left(1 - \frac{y}{a} - z\right),$$

соответственно,

$$x_y = -\frac{1}{a}, \quad x_z = -1, \quad \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}$$

и, следовательно,

$$I = \iint_{\Sigma} z \, d\sigma = \iint_D z \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} \, dy \, dz. \quad (20.79)$$

Здесь область  $D$  представляет собой ортогональную проекцию поверхности  $x = 1 - y/a - z$  на плоскость  $x = 0$  (рис. 174). Это означает, что расстановка пределов в повторных интегралах для двойного интеграла (20.79) зависит от знака коэффициента  $a$ . Рассмотрим оба варианта.

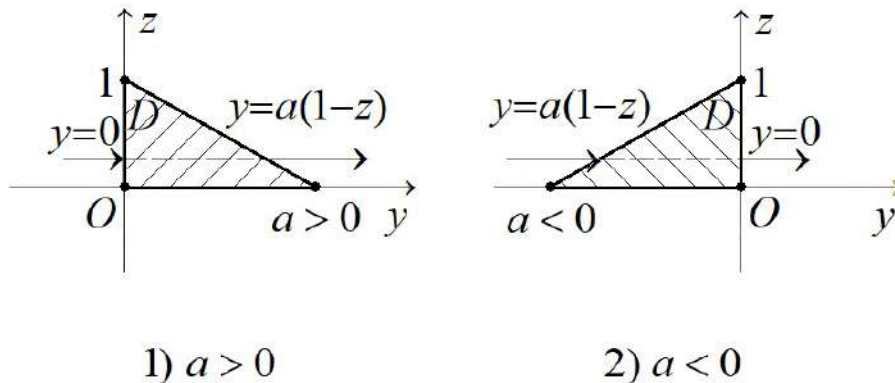


Рис. 174. Проекция плоскости  $x + \frac{y}{a} + z = 1$ ,  $a \neq 0$ , на координатную плоскость  $Oyz$



1. Пусть  $a > 0$ . В этом случае область  $D$  (рис. 174) определится неравенствами

$$D = \{(y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq a(1 - z)\},$$

и, следовательно, из (20.79) имеем

$$I = \iint_{\Sigma} z d\sigma = \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} \int_0^1 z dx \int_0^{a(1-z)} dy = \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} J_{II}, \quad (20.80)$$

где

$$\begin{aligned} J_{II} &= \int_0^1 z dz \int_0^{a(1-z)} dy = \int_0^1 z dz \left( y \Big|_0^{a(1-z)} \right) = \\ &= a \int_0^1 z(1-z) dz = a \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{a}{6}. \end{aligned} \quad (20.81)$$

Подставив (20.81) в (20.80), получим

$$I = \iint_{\Sigma} z d\sigma = \frac{a}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}. \quad (20.82)$$

2. Пусть  $a < 0$ . В этом случае область  $D$  (рис. 174) определится неравенствами

$$D = \{(y, z) : 0 \leq z \leq 1, a(1 - z) \leq y \leq 0\},$$

и, следовательно, из (20.79) имеем

$$I = \iint_{\Sigma} z d\sigma = \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} \int_0^1 z dz \int_{a(1-z)}^0 dy. \quad (20.83)$$

Этот интеграл отличается от интеграла (20.81) только обратным порядком постановки пределов во внутреннем интеграле. Изменение порядка во внутреннем интеграле (20.83) дает

$$I = \iint_{\Sigma} z d\sigma = -\sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} \int_0^1 z dz \int_0^{a(1-z)} dy,$$

и, следовательно, согласно (20.81), получим

$$I = \iint_{\Sigma} z d\sigma = -\sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} J_{II} = -\frac{a}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}. \quad (20.84)$$

Результаты (20.82) и (20.84) для противоположных знаков  $a$  можно объединить в один, совпадающий с полученным выше (20.78):

$$I = \begin{cases} \frac{a}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} & a > 0 \\ -\frac{a}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} & a < 0 \end{cases} = \frac{|a|}{6} \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{6} \sqrt{2a^2 + 1}.$$

III. Уравнение (20.69) разрешим относительно переменной  $y$ :

$$y = a(1 - x - z),$$

соответственно,

$$y_x = -a, \quad y_z = -a, \quad \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{1 + 2a^2},$$

и, следовательно,

$$I = \iint_{\Sigma} z \, d\sigma = \iint_D z \sqrt{1 + 2a^2} \, dx \, dz. \quad (20.85)$$

Здесь область  $D$  представляет собой ортогональную проекцию поверхности  $y = a(1 - x - z)$  на плоскость  $y = 0$  (рис. 175). В данном случае вид области  $D$  не зависит от знака коэффициента  $a$  и определится неравенствами

$$D = \{(x, z): 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - z\},$$

и, следовательно, из (20.85) имеем

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} z \, d\sigma = \sqrt{1 + 2a^2} \int_0^1 z \, dz \int_0^{1-z} dx = \sqrt{1 + 2a^2} \int_0^1 z \, dz \left( x \Big|_0^{1-z} \right) = \\ &= \sqrt{1 + 2a^2} \int_0^1 z(1 - z) \, dz = \sqrt{1 + 2a^2} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \sqrt{1 + 2a^2}, \end{aligned}$$

результат, совпадающий с найденными ранее (20.78) и (20.84).

Таким образом, из всех вариантов решений самым затратным является вариант I, за ним следует вариант II, а самым простым решением является вариант III. Равенству

$$I = \iint_{\Sigma} z \, d\sigma = \frac{1}{6} \sqrt{1 + 2a^2},$$

полученному как решение вычислительной задачи, можно придать физический смысл в виде значения, например, суммарного заряда, распределенного по поверхности  $\Sigma$  с поверхностной плотностью  $f(x, y, z) = z$ . Поскольку на поверхности интегрирования  $\Sigma$  переменная  $z$  принимает только положительные значения, то и суммарный заряд  $I$  является положительной величиной, не зависящей от знака коэффициента  $a$ .

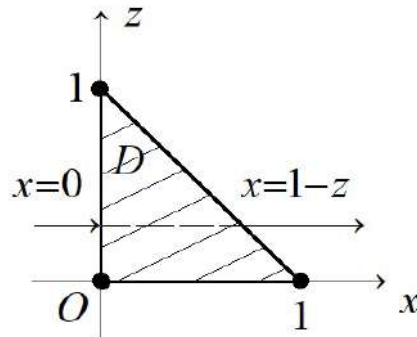


Рис. 175. Проекция плоскости  $x + \frac{y}{a} + z = 1, a \neq 0$  на координатную плоскость  $Oxz$

**Пример 20.6.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{d\sigma}{(1 + x + y)^2}$$

на кусочно-гладкой поверхности  $\Sigma = \partial G$ , являющейся границей трехмерного тела

$$G = \{\vec{r}(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}. \quad (20.86)$$

**Решение.** Симплекс  $G$  (20.86) геометрически представляет собой треугольную пирамиду (рис. 176).

Поверхность  $\Sigma$  состоит из четырех треугольных граней:  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$ , и, следовательно, исходный интеграл  $I$  можно представить суммой интегралов:

$$I = \sum_{i=1}^4 I_i, \quad (20.87)$$

где

$$I_i = \iint_{\Sigma_i} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}, \quad i = \overline{1,4}, \quad (20.88)$$

– поверхностные интегралы по поверхностям  $\Sigma_i$  с параметрическими представлениями:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = y, z = 0 (x, y) \in D_1\}, \\ D_1 &= \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}, \end{aligned} \quad (20.89)$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1;$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = 0, z = z (x, z) \in D_2\}, \\ D_2 &= \{(x, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}, \end{aligned} \quad (20.90)$$

$$\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1;$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = 0, y = y, z = z (y, z) \in D_3\}, \\ D_3 &= \{(y, z): 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y\}, \end{aligned} \quad (20.91)$$

$$\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1;$$

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = y, z = 1 - x - y (x, y) \in D_4\}, \\ D_4 &= D_1, \quad \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (20.92)$$

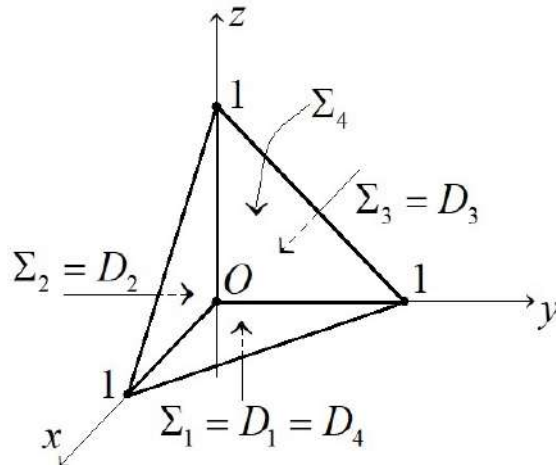


Рис. 176. Трехмерное тело (20.86)

Из рис. 176 и формул (20.89)–(20.91) следует, что поверхности  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  совпадают со своими ортогональными проекциями на координатные плоскости  $z = 0, y = 0, x = 0$  соответственно, и, следовательно,  $\Sigma_1 = D_1, \Sigma_2 = D_2, \Sigma_3 = D_3$ .

Ортогональной проекцией поверхности  $\Sigma_4$  на плоскость  $z = 0$  является область  $D_4$ , которая совпадает с областью  $D_1$ , т. е.  $D_4 = D_1$  (рис. 176).

Вычислим последовательно с учетом этого интегралы  $I_i$ .

Согласно (20.89)

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_1} \frac{dx dy}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{d(1+x+y)}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \left( \frac{1}{1+x+y} \Big|_0^{1-x} \right) = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2}x \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln \frac{2}{\sqrt{e}}. \end{aligned} \quad (20.93)$$

Согласно (20.90)

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\Sigma_2} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_2} \frac{dx dz}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} \left( z \Big|_0^{1-x} \right) = \int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{2-(1+x)}{(1+x)^2} dx = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{d(1+x)}{(1+x)^2} - \int_0^1 \frac{d(1+x)}{1+x} = \\ &= 2 \left( -\frac{1}{1+x} \Big|_0^1 \right) - \ln(1+x) \Big|_0^1 = 2 \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) - \ln 2 = 1 - \ln 2 = \ln \frac{e}{2}. \end{aligned} \quad (20.94)$$

Согласно (20.91)

$$I_3 = \iint_{\Sigma_3} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_3} \frac{dy dz}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{dz}{(1+y)^2} = \ln \frac{e}{2}, \quad (20.95)$$

поскольку вычисление этого интеграла аналогично вычислению интеграла  $I_2$ .

Согласно (20.92)

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint_{\Sigma_4} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_4} \frac{\sqrt{3} dx dy}{(1+x+y)^2} = \\ &= \sqrt{3} \iint_{D_1} \frac{dx dy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3} I_1 = \sqrt{3} \ln \frac{2}{\sqrt{e}}. \end{aligned} \quad (20.96)$$

Подстановка найденных значений в (20.88) дает

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} = \sum_{i=1}^4 I_i = (1 + \sqrt{3}) \ln \frac{2}{\sqrt{e}} + 2 \ln \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

**Пример 20.7.** Записать формулы вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$I = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma \quad (20.97)$$

по поверхности  $\Sigma$ , допускающей параметрическое представление переменными сферической системы координат.

**Решение.** Если в соотношениях

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta, \\ r &\in [0, \infty[, & \varphi &\in [0, 2\pi[, & \theta &\in [0, \pi], \end{aligned} \quad (20.98)$$

связывающих декартовы и сферические координаты, зафиксировать одну из координат:  $r, \varphi$  или  $\theta$ , то получим три вида поверхностей, параметризуемых переменными сферической системы координат.

I. Сферическая.

Зафиксировав в (20.98) переменную  $r$  значением  $R$ , получим:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi, & y &= R \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= R \cos \theta, & \varphi &\in [0, 2\pi[, & \theta &\in [0, \pi], \end{aligned} \quad (20.99)$$

и, следовательно, два уравнения в сферических и декартовых координатах:

$$r = R, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Оба уравнения определяют сферу радиусом  $R$  с центром в начале координат. Формула (20.99) позволяет записать параметрическое представление поверхности  $\Sigma$ , расположенной на этой сфере (рис. 177, *a, б*), в виде

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = R \sin \theta \cos \varphi, \\ & y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta, (\varphi, \theta) \in D\}, \end{aligned} \quad (20.100)$$

где

$$D = \{(\varphi, \theta): \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi)\}, \quad (20.100a)$$

если область  $\Sigma$  расположена между двумя меридианами  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$  и любой меридиан пересекает  $\Sigma$  не более двух раз (рис. 177, *а'*), и, соответственно

$$D = \{(\varphi, \theta): \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}, \quad (20.100б)$$

если область  $\Sigma$  расположена между двумя параллелями,  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ , и любая параллель пересекает  $\Sigma$  не более двух раз (рис. 177, *б'*).

Поверхность  $\Sigma$  на сфере  $r = R$  с параметрическим представлением (20.100) в зависимости от вида области  $D$  может быть как простой, так и почти простой (пример 20.4) поверхностью. В любом случае вычисление поверхностного интеграла (20.97) осуществляется по формуле (20.64):

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (20.101)$$

с коэффициентами Гаусса:

$$E = |\vec{r}_u|^2, \quad F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v), \quad G(u, v) = |\vec{r}_v|^2.$$

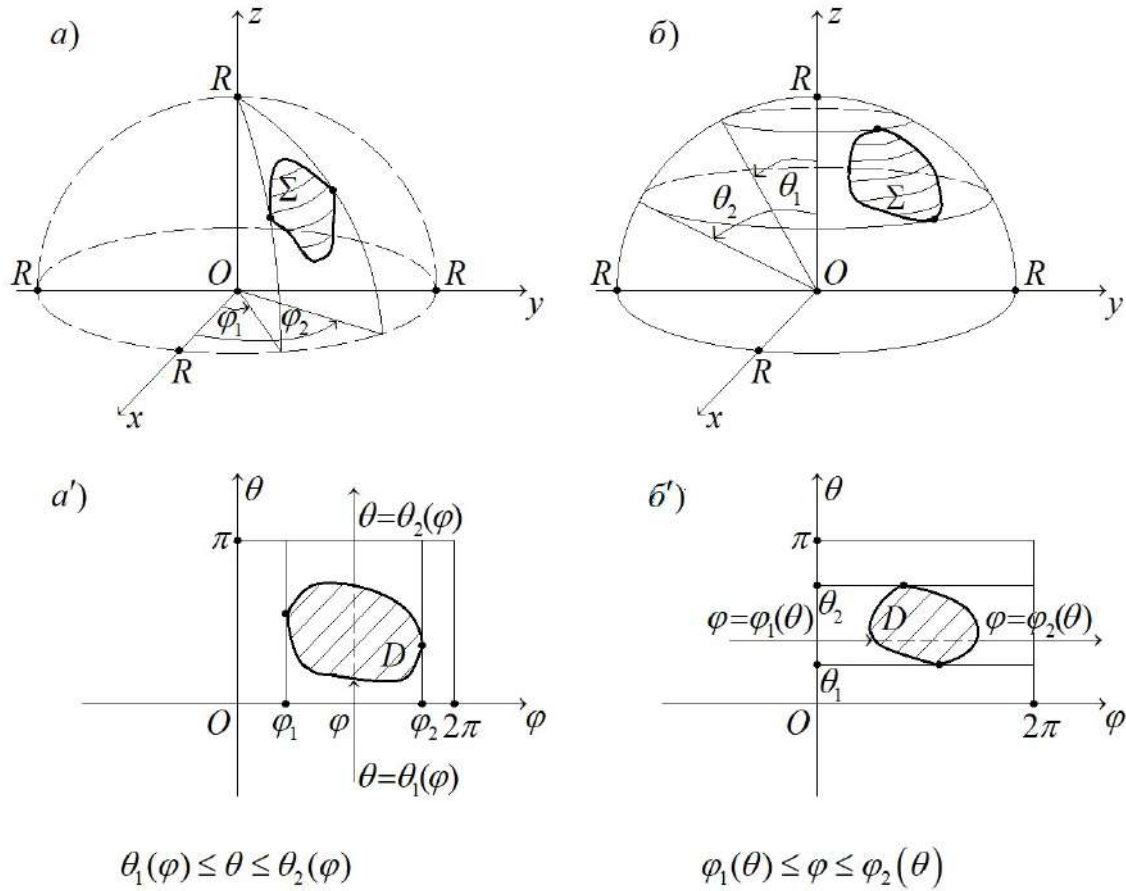


Рис. 177.  $\Sigma$  – часть сферической поверхности:  
 расположенная между двумя меридианами (а) и её проекция (а');  
 расположенная между двумя параллелями (б) и её проекция (б')

Поскольку в наших обозначениях  $u = \varphi$ ,  $v = \theta$ , то из (20.100) найдем коэффициенты Гаусса:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_u &= \vec{r}_\varphi = (-R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, 0), \\
 \vec{r}_v &= \vec{r}_\theta = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta), \\
 E &= |\vec{r}_\varphi|^2 = R^2 \sin^2 \varphi, \quad F = (\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\theta) = 0, \quad G(u, v) = |\vec{r}_\theta|^2 = R^2, \\
 \sqrt{EG - F^2} &= R^2 \sin \theta, \quad f(\varphi, \theta) = f(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\theta)).
 \end{aligned}
 \tag{20.102}$$

С учетом этого формула (20.101) примет вид

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(\varphi, \theta) R^2 \sin \theta d\varphi d\theta.
 \tag{20.103}$$

Для области  $D$  вида (20.100а) интеграл (20.103) может быть записан повторными:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} f(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta,
 \tag{20.104}$$

а для области  $D$  вида (20.100б) интеграл (20.103) запишется, соответственно, как

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\varphi, \theta) d\varphi. \quad (20.105)$$

Таким образом, формулы (20.104), (20.105) являются вычислительными формулами для поверхностных интегралов (20.97) по сферическим поверхностям вида (20.96), (20.100а), (20.100б). Для областей более общего вида можно воспользоваться свойством аддитивности, разделив их на сумму поверхностей указанного вида.

### II. Коническая.

Зафиксировав в (20.98) переменную  $\theta$  значением  $\alpha$ , получим:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \alpha \cos \varphi, & y &= r \sin \alpha \sin \varphi, \\ z &= r \cos \alpha, & r &\in [0, \infty[, & \varphi &\in [0, 2\pi[. \end{aligned} \quad (20.106)$$

и, следовательно, два уравнения в сферических и декартовых координатах:

$$\theta = \alpha, \quad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

При  $\alpha \neq \pi/2$  оба уравнения определяют коническую поверхность (при  $\alpha = \pi/2$  имеем координатную плоскость  $z = 0$ , в силу чего поверхностный интеграл (20.97) вырождается в двойной интеграл по плоской области  $\Sigma$  в плоскости  $xOy$ ). Формула (20.106) позволяет записать параметрическое представление поверхности  $\Sigma$ , расположенной на этой конической поверхности (рис. 178, а, б), в виде

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = r \sin \alpha \cos \varphi, y = r \sin \alpha \sin \varphi, \\ & z = r \cos \alpha, (r, \varphi) \in D\}, \end{aligned} \quad (20.107)$$

где

$$D = \{(r, \varphi): \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}, \quad (20.107a)$$

если область  $\Sigma$  расположена между двумя лучами,  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$ , и любой луч пересекает  $\Sigma$  не более двух раз (рис. 178, а'), и, соответственно

$$D = \{(r, \varphi): \varphi_1(r) \leq \varphi \leq \varphi_2(r), r_1 \leq r \leq r_2\}, \quad (20.107б)$$

если область  $\Sigma$  расположена между двумя окружностями,  $r = r_1$  и  $r = r_2$ , и любая окружность пересекает  $\Sigma$  не более двух раз (рис. 178, б').

Поверхность  $\Sigma$  на конусе  $\theta = \alpha$  с параметрическим представлением (20.107) в зависимости от вида области  $D$  может быть как простой, так и почти простой поверхностью. В любом случае вычисление поверхностного интеграла (20.93) осуществляется по формуле (20.64):

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (20.108)$$

с коэффициентами Гаусса:

$$E = |\vec{r}_u|^2, \quad F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v), \quad G(u, v) = |\vec{r}_v|^2.$$

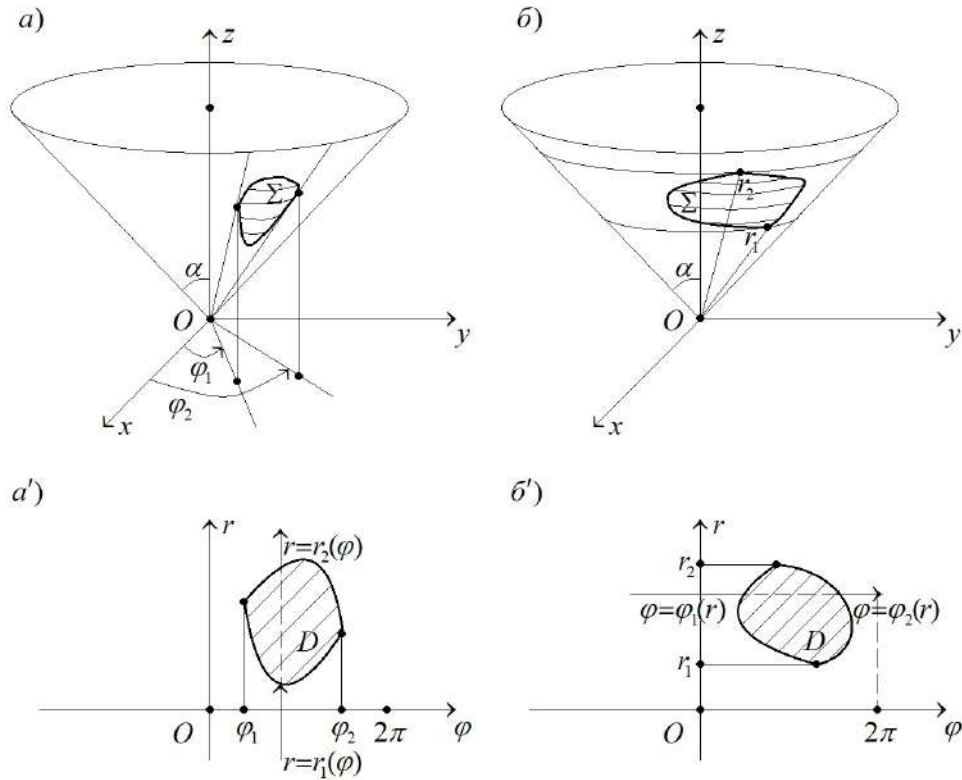


Рис. 178.  $\Sigma$  – часть конической поверхности: расположенная между двумя полуплоскостями (а) и ее проекция (а'); расположенная между двумя плоскостями (б) и ее проекция (б')

Поскольку в наших обозначениях  $u = r$ ,  $v = \varphi$ , то из (20.106) найдем:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \vec{r}_r = (\sin \alpha \cos \varphi, \sin \alpha \sin \varphi, \cos \alpha), \\ \vec{r}_v &= \vec{r}_\varphi = (-r \sin \alpha \sin \varphi, r \sin \alpha \cos \varphi, 0), \\ E &= |\vec{r}_r|^2 = 1, \quad F = (\vec{r}_r, \vec{r}_\varphi) = 0, \quad G = |\vec{r}_\varphi|^2 = r^2 \sin^2 \alpha, \\ \sqrt{EG - F^2} &= r \sin \alpha, \quad f(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi), z(r, \varphi)). \end{aligned} \tag{20.109}$$

С учетом этого формула (20.108) примет вид

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(r, \varphi) \sin \alpha r dr d\varphi. \tag{20.110}$$

Для области  $D$  вида (20.107а) интеграл (20.110) запишется повторными как

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \sin \alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r, \varphi) r dr, \tag{20.111}$$

а для области  $D$  вида (20.107б) интеграл (20.110) запишется, соответственно, как

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \sin \alpha \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r, \varphi) d\varphi. \tag{20.112}$$



Таким образом, формулы (20.111), (20.112) являются вычислительными формулами для поверхностных интегралов (20.97) по сферическим поверхностям вида (20.107), (20.107а), (20.107б). Для областей более общего вида можно воспользоваться свойством аддитивности, разделив их на сумму поверхностей указанного вида.

### III. Полу плоскость.

Зафиксировав в (20.98) переменную  $\varphi$  значением  $\beta$ , получим:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \beta, & y &= r \sin \theta \sin \beta, \\ z &= r \cos \theta, & r &\in [0, \infty[, & \theta &\in [0, \pi[, \end{aligned} \quad (20.113)$$

и, следовательно, два уравнения в сферических и декартовых координатах:

$$\varphi = \beta, \quad y = x \operatorname{tg} \beta.$$

Оба уравнения определяют полу плоскость, границей которой является ось  $Oz$ , а сама плоскость образует с осью  $Ox$  угол  $\beta$  (рис. 179).

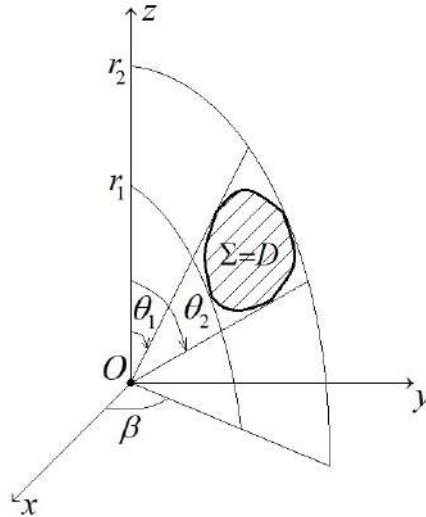


Рис. 179.  $\Sigma$  – часть полу плоскости

Согласно схеме, рассмотренной выше, и учитывая, что здесь  $u = r$ ,  $v = \theta$ , найдем коэффициенты Гаусса:

$$E = |\vec{r}_u|^2 = |\vec{r}_r|^2 = 1,$$

$$F = (\vec{r}_r, \vec{r}_\theta) = 0,$$

$$G = |\vec{r}_v|^2 = |\vec{r}_\theta|^2 = r^2$$

и, соответственно,

$$\sqrt{EG - F^2} = r,$$

$$f(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta), z(r, \theta)).$$

С учетом этого поверхностный интеграл (20.97) запишется как

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (20.114)$$

В зависимости от вида области  $D$  (рис. 179) двойной интеграл можно представить повторными интегралами с различными порядками интегрирования, а именно:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\varphi \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \varphi) r dr = \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r, \theta) d\theta. \quad (20.115)$$

Эти формулы замыкают перечень вычислительных формул для поверхностных интегралов (20.97) по поверхностям  $\Sigma$ , допускающим параметрическое представление переменными сферической системы координат.

**Пример 20.8.** Найти координаты центра масс однородной полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0.$$

**Решение.** Без ограничения общности для однородной полусферы поверхностную плотность  $\rho$  можно считать равной единице:  $\rho = 1$ . При этом координаты центра масс определяются по формулам (20.59). В силу однородности и симметрии полусферы относительно оси  $Oz$  координаты  $x_0$  и  $y_0$  равны нулю, т. е.  $x_0 = y_0 = 0$ , а координата  $z_0$  определится отношением моментов

$$z_0 = \frac{\mathbb{I}_{xy}^{(1)}}{\mathbb{I}^0}, \quad (20.116)$$

где момент

$$\mathbb{I}_{xy}^{(1)} = \iint_{\Sigma} \rho z d\sigma = \iint_{\Sigma} z d\sigma, \quad (20.117)$$

и момент (масса)

$$\mathbb{I}^0 = \iint_{\Sigma} \rho d\sigma = \iint_{\Sigma} d\sigma. \quad (20.118)$$

Поверхностные интегралы первого рода (20.117), (20.118) вычисляются по полусфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0. \quad (20.119)$$

Для сравнения вычислим их, используя различные параметризации  $\Sigma$  (20.119).

I. Параметрическое представление декартовыми координатами.

Уравнение (20.119) для  $z \geq 0$  допускает переход к явному заданию однозначной функции

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (20.120)$$

графиком которой и является полусфера  $\Sigma$ . Поскольку проекцией полусферы на плоскость  $z = 0$  является окружность  $x^2 + y^2 = R^2$ , то для нее справедливо параметрическое представление

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = y, z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}, \quad (20.121)$$

где

$$D = \{(x, y): -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}. \quad (20.122)$$

Так как в силу (20.120)

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

и

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = z_x = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

то для интеграла (20.117)

$$\iint_{\Sigma} z d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = RS, \quad (20.123)$$

где

$$S = \iint_D dx dy = \pi R^2,$$

поскольку этот интеграл определяет площадь круга радиусом  $R$ . Впрочем, этот интеграл легко вычисляется:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin \frac{x}{R} \right] \Big|_0^R = 2[0 - 0 + R^2(\arcsin 1 - \arcsin 0)] = \\ &= 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2. \end{aligned} \quad (20.123a)$$

Таким образом,

$$\iint_{\Sigma} z d\sigma = RS = \pi R^3. \quad (20.123б)$$

В свою очередь, для интеграла (20.118) имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} d\sigma &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= 2R \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= 2R \int_{-R}^R dx \left( \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) = 2R \int_{-R}^R dx (\arcsin 1 - 0) = \\ &= 2R \frac{\pi}{2} \int_{-R}^R dx = 2R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2R = 2\pi R^2. \end{aligned} \quad (20.124)$$

Подстановка (20.123б), (20.124) в (20.116) дает

$$z_0 = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}. \quad (20.125)$$

Таким образом, координаты центра масс  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $z_0 = R/2$ .

II. Параметрическое представление сферическими координатами.

В этом случае полусфера (20.120), согласно (20.100), (20.100a), имеет параметрическое представление

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z): x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta, (\varphi, \theta) \in D\}, \quad (20.126)$$

где

$$D = \left\{ (\varphi, \theta): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (20.127)$$

с коэффициентами Гаусса:

$$E = R^2 \sin^2 \theta, F = 0, G = R^2, \quad d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta. \quad (20.128)$$

С учетом (20.126)–(20.128) для интеграла (20.117) получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z d\sigma &= \iint_D R \cos \theta R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= R^3 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = 2\pi R^3 \left( \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \pi R^3, \end{aligned} \quad (20.129)$$

а для интеграла (20.118), соответственно,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} d\sigma &= \iint_D R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \\ &= R^2 2\pi \left( -\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) = 2\pi R^2. \end{aligned} \quad (20.130)$$

Подстановка (20.129), (20.130) в (20.116) дает тот же результат, что и (20.125):

$$z_0 = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}.$$

Отметим, что при вычислении поверхностных интегралов (20.117), (20.118) переход от параметрического представления полусферы (20.120) декартовыми координатами (20.121), (20.122) к параметрическому представлению сферическими координатами (20.126), (20.127) формально соответствует замене переменных

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi$$

в двойных интегралах (20.123a), (20.124), приводящей их к более простым интегралам (20.129), (20.130).

III. Параметрическое представление цилиндрическими координатами  $(\rho, \varphi, z)$

IIIa. Рассмотрим следующее параметрическое представление поверхности  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z): x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = \sqrt{R^2 - \rho^2}, (\rho, \varphi) \in D\}, \quad (20.131)$$

$$D = \{(\rho, \varphi): 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (20.132)$$

Поскольку здесь

$$\vec{r}_\rho = \left( \cos \varphi, \sin \varphi, -\frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right), \quad \vec{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0),$$

имеем следующие выражения для коэффициентов Гаусса:

$$E = |\vec{r}_\rho|^2 = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}, \quad F = (\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi) = 0, \quad G = |\vec{r}_\varphi|^2 = \rho^2, \quad (20.133)$$

и, соответственно,

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\rho d\varphi = \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho d\varphi. \quad (20.134)$$

С учетом (20.131)–(20.134) для интеграла (20.117) имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z d\sigma &= \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho d\varphi = \\ &= R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho = R 2\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^3, \end{aligned} \quad (20.135)$$

а для интеграла (20.118), соответственно,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} d\sigma &= \iint_D \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho d\varphi = \\ &= R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -R\pi \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{1/2} \Big|_0^R = 2\pi R^2. \end{aligned} \quad (20.136)$$

Подстановка (20.135), (20.136) в (20.116) дает тот же результат, что и (20.125):

$$z_0 = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}.$$

Шб. Рассмотрим еще одно параметрическое представление поверхности  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{ \vec{r}(x, y, z) : x = \sqrt{R^2 - z^2} \cos \varphi, \\ &y = \sqrt{R^2 - z^2} \sin \varphi, z = z, (z, \varphi) \in D \}, \end{aligned} \quad (20.137)$$

$$D = \{ (z, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq R \}. \quad (20.138)$$

Поскольку здесь

$$\begin{aligned} \vec{r}_z &= \left( -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \cos \varphi, -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \sin \varphi, 1 \right), \\ \vec{r}_\varphi &= (-\sqrt{R^2 - z^2} \sin \varphi, \sqrt{R^2 - z^2} \cos \varphi, 0), \end{aligned}$$

коэффициенты Гаусса равны:

$$E = |\vec{r}_z|^2 = \frac{R^2}{R^2 - z^2}, \quad F = (\vec{r}_z, \vec{r}_\varphi) = 0, \quad G = |\vec{r}_\varphi|^2 = R^2 - z^2, \quad (20.139)$$

и, следовательно,

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dz d\varphi = R dz d\varphi. \quad (20.140)$$

С учетом (20.137)–(20.140) для интеграла (20.117) имеем

$$\iint_{\Sigma} z d\sigma = \iint_D z R dz d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z dz = R \cdot 2\pi \frac{z^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^3, \quad (20.141)$$

а для интеграла (20.118), соответственно,

$$\iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_D R dz d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dz = R \cdot 2\pi R = 2\pi R^2. \quad (20.142)$$

Подстановка (20.141), (20.142) в (20.116) дает тот же результат, что и (20.125).

Как и в предыдущих случаях, при вычислении поверхностных интегралов (20.117), (20.118) переход от параметрического представления полусферы (20.120) декартовыми координатами (20.121), (20.122) к параметрическому представлению цилиндрическими координатами (20.131), (20.132) и (20.137), (20.138) формально соответствует заменам переменных

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

и, соответственно,

$$x = \sqrt{R^2 - z^2} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{R^2 - z^2} \sin \varphi$$

в двойных интегралах (20.123a), (20.124), приводящим их к более простым интегралам – (20.129), (20.130).

◇ Далее параметрические представления, рассмотренные в этом примере, будем использовать без дополнительных пояснений. При необходимости их можно дополнить параметрическими представлениями из примера 20.1.

**Пример 20.9.** Найти площадь части сферы радиусом  $R$ , ограниченной двумя меридианами и двумя параллелями.

**Решение.** Для определенности будем рассматривать сферу радиусом  $R$  с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Ее параметрическое представление сферическими координатами, согласно 20.99, имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = R \sin \theta \cos \varphi, \\ & y = R \sin \theta \sin \varphi, \\ & z = R \cos \theta, (\varphi, \theta) \in D\}. \end{aligned}$$

Если два меридиана заданы углами  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$ , а две параллели углами  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  (рис. 180), то область  $D$  запишется неравенствами

$$D = \{(\varphi, \theta): 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Площадь  $S$  поверхности  $\Sigma$  определяется поверхностным интегралом

$$S = \iint_{\Sigma} d\sigma,$$

который, согласно (20.39), (20.102), представляется двойным интегралом:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = \\ &= \iint_D R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \\ &= R^2(\varphi_2 - \varphi_1) \left( -\cos \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \right) = R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \end{aligned} \quad (20.143)$$

Если  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi$  и  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ , то формула (20.143) дает площадь сферы радиусом  $R$  (являющейся почти простой поверхностью):

$$S = 4\pi R^2.$$

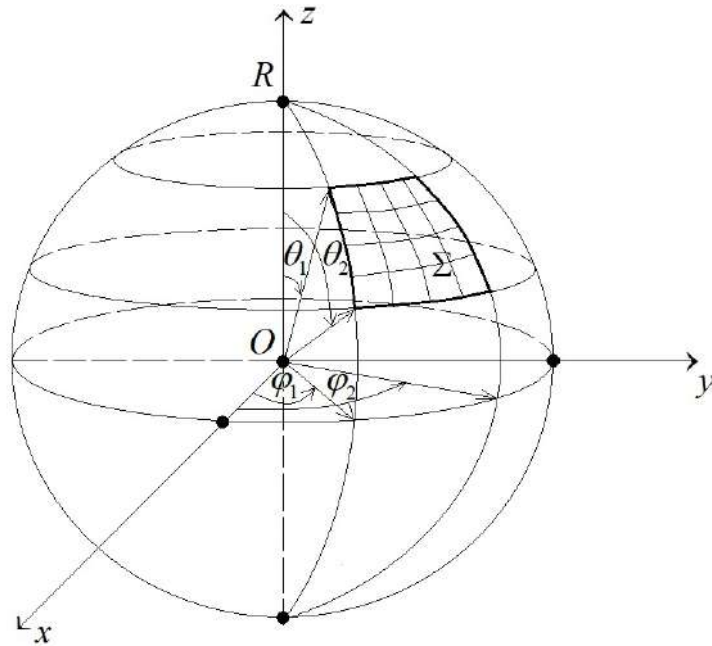


Рис. 180. Область  $\Sigma$ , ограниченная двумя меридианами и двумя параллелями

**Пример 20.10.** Найти площадь части полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \geq 0$ , расположенной внутри и вне цилиндров  $x^2 + y^2 = \pm Rx$ .

**Решение.** Указанные поверхности изображены на рис. 181, а, а их проекции на плоскость  $XOY$  – на рис. 181, б. В силу симметрии рассматриваемых поверхностей относительно координатных плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$  достаточно найти четвертую часть площадей искомых поверхностей, расположенных в I октанте. Площадь поверхности  $\Sigma_1$ , расположенной внутри цилиндров, обозначим как  $S_1/4$ , а площадь поверхности  $\Sigma_2$ , расположенной вне цилиндров, – как

$S_2/4$ . Для вычисления площадей  $S_1$  и  $S_2$  воспользуемся параметризацией сферы цилиндрическими координатами (20.131):

$$\Sigma_{1,2} = \{\vec{r}(x, y, z): x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = \sqrt{R^2 - \rho^2}, (\rho, \varphi) \in D_{1,2}\},$$

где области  $D_1$  и  $D_2$  (рис. 181, б) записываются неравенствами:

$$D_1 = \left\{ (\rho, \varphi): 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq R \cos \varphi \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \varphi): 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, R \cos \varphi \leq \rho \leq R \right\},$$

а элемент  $d\sigma$ , согласно (20.134),

$$d\sigma = \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho d\varphi.$$

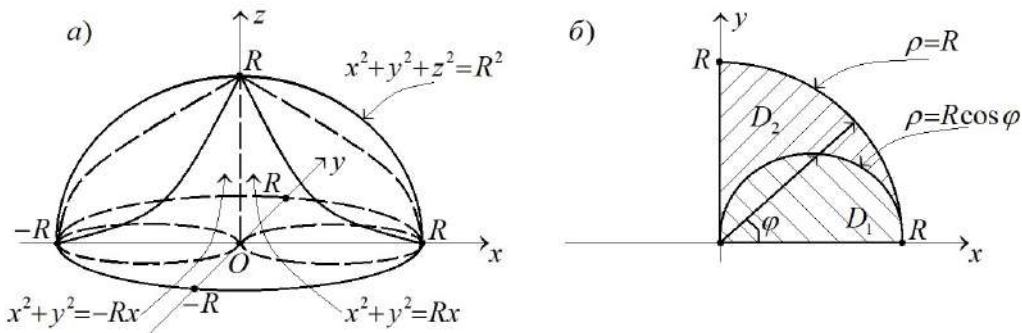


Рис. 181. Полусфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \geq 0$  и цилиндры  $x^2 + y^2 = \pm Rx$  (а) и их проекции на плоскость  $Oxy$  (б)

Исходя из этого, для  $S_1$  имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= 4 \iint_{\Sigma_1} d\sigma = 4 \iint_{D_1} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho d\varphi = 4R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \\ &= 4R \int_0^{\pi/2} d\varphi \left( -\sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^{R \cos \varphi} \right) = -4R \int_0^{\pi/2} (R \sin \varphi - R) d\varphi = \\ &= 4R^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi) d\varphi = 4R^2 (\varphi + \cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 4R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} S_2 &= 4 \iint_{\Sigma_2} d\sigma = 4 \iint_{D_2} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho d\varphi = 4R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{R \cos \varphi}^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \\ &= 4R \int_0^{\pi/2} d\varphi \left( -\sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_{R \cos \varphi}^R \right) = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = -4R^2 \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} = 4R^2. \end{aligned}$$



Как и следовало ожидать, сумма  $S_1 + S_2$  дает площадь полусферы радиусом  $R$ :

$$S_1 + S_2 = 4R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + 4R^2 = 2\pi R^2.$$

**Пример 20.11.** Вычислить поверхностные интегралы первого рода

$$J_1 = \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{z+1}, \quad J_2 = \iint_{\Sigma_2} (z + \sqrt{R^2 - x^2}) d\sigma$$

по цилиндрическим поверхностям  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , где  $\Sigma_1$  – часть цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x \geq 0$ , заключенная между плоскостями  $z = 0$ ,  $z = H > 0$ ;  $\Sigma_2$  – часть цилиндрической поверхности  $x^2 + z^2 = R^2$ , заключенная между плоскостями  $y = 0$  и  $y = H > 0$ .

**Решение 1.** Для поверхности  $\Sigma_1$  (рис. 182, а) с параметризацией

$$\Sigma_1 = \{ \vec{r}(x, y, z) : x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z, (\varphi, z) \in D_1 \},$$

$$D_1 = \left\{ (\varphi, z) : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq H \right\}$$

и производными

$$\vec{r}_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0), \quad \vec{r}_z = (0, 0, 1),$$

определяющими коэффициенты Гаусса

$$E = |\vec{r}_\varphi|^2 = R^2, \quad F = (\vec{r}_z, \vec{r}_\varphi) = 0, \quad G = |\vec{r}_z|^2 = 1$$

и элемент поверхности

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dz d\varphi = R dz d\varphi,$$

имеем

$$J_1 = \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{z+1} = \iint_{D_1} \frac{1}{z+1} R d\varphi dz = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^H \frac{dz}{1+z} =$$

$$= R \left( \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \left[ \ln(1+z) \Big|_0^H \right] = R\pi \ln(1+H).$$

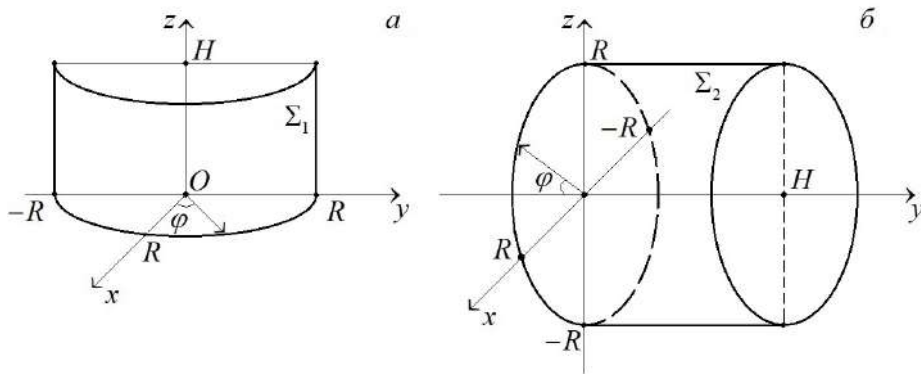


Рис. 182. Цилиндрические поверхности: а)  $\Sigma_1$ ; б)  $\Sigma_2$

2. Для поверхности  $\Sigma_2$  (рис. 182, б) с параметризацией

$$\Sigma_2 = \{\vec{r}(x, y, z): x = R \cos \varphi, y = y, z = R \sin \varphi, (\varphi, z) \in D_2\},$$

$$D_2 = \{(\varphi, y): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq y \leq H\}$$

и производными

$$\vec{r}_\varphi = (-R \sin \varphi, 0, R \cos \varphi), \quad \vec{r}_y = (0, 1, 0),$$

определяющими коэффициенты Гаусса

$$E = |\vec{r}_\varphi|^2 = R^2, \quad F = (\vec{r}_\varphi, \vec{r}_y) = 0, \quad G = |\vec{r}_y|^2 = 1$$

и элемент поверхности

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dy d\varphi = R dy d\varphi,$$

имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= \iint_{\Sigma_2} (z + \sqrt{R^2 - x^2}) d\sigma = \iint_{D_2} (R \sin \varphi + R |\sin \varphi|) R d\varphi dy = \\ &= R^2 \int_0^H dy \int_0^{2\pi} (\sin \varphi + |\sin \varphi|) d\varphi = R^2 \left( y \Big|_0^H \right) \int_0^\pi 2 \sin \varphi d\varphi = \\ &= 2R^2 H \left( -\cos \varphi \Big|_0^\pi \right) = 4R^2 H. \end{aligned}$$

**Пример 20.12.** Найти массу  $M$  вещества с поверхностной плотностью

$$\mu(x, y, z) = x^2 + y^2,$$

распределенного по поверхности тела  $G: 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$ .

**Решение.** Масса вещества  $M$  определяется поверхностными интегралами первого рода:

$$M = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) d\sigma, \quad (20.144)$$

где  $\Sigma$  – полная поверхность кругового конуса (рис. 183), состоящая из двух частей;  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ .

Для плоской области  $\Sigma_1$  – основания конуса – с параметризацией

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \\ &\quad z = H, (\rho, \varphi) \in D_1\}, \\ D_1 &= \{(\rho, \varphi): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq H\}, \\ \vec{r}_\rho &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \vec{r}_\varphi &= (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0), \\ E &= |\vec{r}_\rho|^2 = 1, \quad F = (\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi) = 0, \\ G &= |\vec{r}_\varphi|^2 = \rho^2, \\ d\sigma &= \sqrt{EG - F^2} d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi \end{aligned}$$

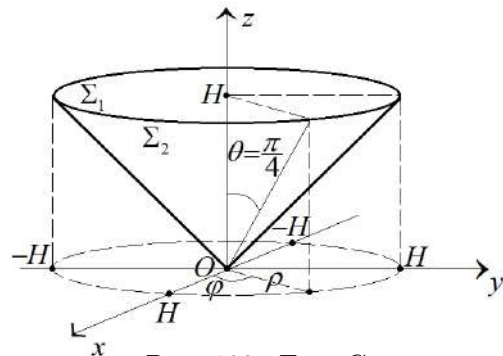


Рис. 183. Тело  $G$   
 $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$

имеем

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{D_1} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^H = \frac{\pi}{2} H^4. \quad (20.145)$$

Для боковой поверхности конуса  $\Sigma_2$  с параметризацией

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = \rho, (\rho, \varphi) \in D_2\}, \\ D_2 &= \{(\rho, \varphi): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq H\} \end{aligned} \quad (20.146)$$

и

$$\begin{aligned} \vec{r}_\rho &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 1), \quad \vec{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0), \\ E &= |\vec{r}_\rho|^2 = 2, \quad F = (\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi) = 0, \quad G = |\vec{r}_\varphi|^2 = 0, \\ d\sigma &= \sqrt{EG - F^2} d\rho d\varphi = \sqrt{2}\rho d\rho d\varphi \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) d\sigma &= \iint_{D_2} \rho^2 \sqrt{2}\rho d\rho d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \rho^3 d\rho = \sqrt{2} 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^H = \frac{\pi}{\sqrt{2}} H^4. \end{aligned} \quad (20.147)$$

Подставив (20.145) и (20.147) в (20.144), найдем полное значение массы:

$$M = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \frac{\pi}{2} H^4 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} H^4 = \frac{\pi}{2} H^4 (1 + \sqrt{2}).$$

Заметим, что поверхность  $\Sigma_2$  допускает еще одно эквивалентное представление при формальной замене в (20.145)  $\rho$  на  $z$ .

**Пример 20.13.** Найти полный заряд  $Q$ , распределенный по поверхности одного витка геликоида, заданного параметризацией

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = \rho \cos \varphi, \\ &y = \rho \sin \varphi, z = \varphi, (\rho, \varphi) \in D\}, \\ D &= \{(\rho, \varphi): 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \end{aligned} \quad (20.148)$$

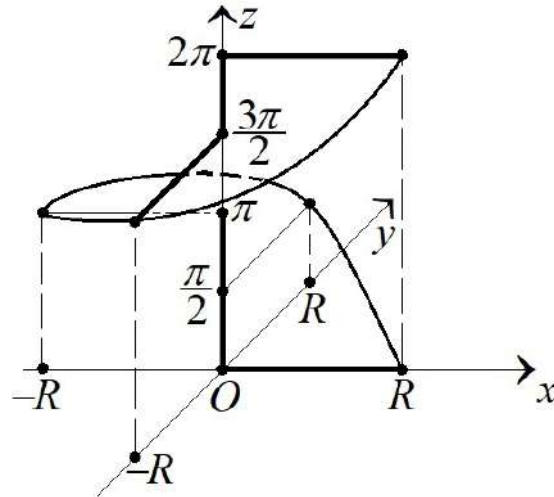
Поверхностная плотность заряда

$$q = z \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Решение.** Полный заряд  $Q$  определяется поверхностным интегралом первого рода:

$$Q = \iint_{\Sigma} z \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma, \quad (20.149)$$

где  $\Sigma$  – поверхность одного витка геликоида (20.148), представляющая собой винтообразную поверхность (рис. 184).

Рис. 184. Поверхность одного витка геликоида  $\Sigma$ 

Поскольку коэффициенты Гаусса параметризации (20.148) поверхности  $\Sigma$  имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{r}_\rho &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \vec{r}_\varphi &= (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 1), \\ E = |\vec{r}_\rho|^2 &= 1, \quad F = (\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi) = 0, \\ G = |\vec{r}_\varphi|^2 &= 1 + \rho^2,\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}d\sigma &= \sqrt{EG - F^2} d\rho d\varphi = \\ &= \sqrt{1 + \rho^2} d\rho d\varphi,\end{aligned}$$

то поверхностный интеграл (20.149) запишется двойным интегралом:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} z \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma &= \iint_D \varphi \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi \int_0^R \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = \left( \frac{\varphi^2}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) \frac{1}{3} (1 + \rho^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{2\pi^2}{3} [(1 + R^2)^{3/2} - 1].\end{aligned}$$

**Пример 20.14.** Найти момент инерции однородной конической оболочки

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2, \quad 0 \leq z \leq H,$$

относительно прямой  $l$ , заданной параметрическими уравнениями  $x = t$ ,  $y = 0$ ,  $z = H$ . Поверхностная плотность оболочки равна  $\mu$ .

**Решение.** Момент инерции оболочки  $\Sigma$  относительно прямой  $l$  определяется поверхностным интегралом первого рода (20.58):

$$\mathbb{I}_l^{(2)} = \iint_{\Sigma} d^2\mu d\sigma, \quad (20.150)$$

где  $d$  – расстояние от точки  $P_\Sigma$ , лежащей на конической поверхности  $\Sigma$ , до прямой  $l$  (рис. 185). Квадрат расстояния  $d$  может быть найден из соотношения (см. рис. 185)

$$d^2 = x^2 + y^2 + (H - z)^2 - x^2 = y^2 + (H - z)^2,$$

поэтому интеграл (20.150) запишется как

$$\mathbb{I}_l^{(2)} = \mu \iint_{\Sigma} [y^2 + (H - z)^2] d\sigma. \quad (20.151)$$

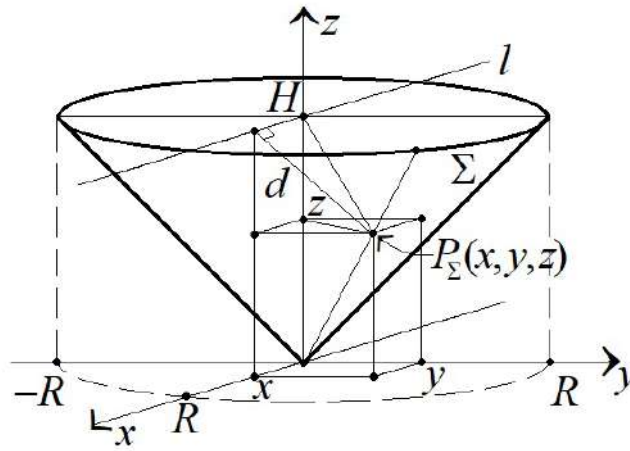


Рис. 185. Коническая оболочка  $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2$ ,  $0 \leq z \leq H$

Значение  $d^2$  также можно получить методами аналитической геометрии:

$$d^2 = \frac{|[\vec{s}, \vec{P}_\Sigma P]|}{|\vec{s}|} = y^2 + (H - z)^2,$$

где  $\vec{s} = (1, 0, 0)$  – направляющий вектор прямой  $l$ ;  $P(0, 0, H)$  – точка, принадлежащая прямой  $l$ ;  $P_\Sigma(x, y, z)$  – точка, лежащая на конической поверхности  $\Sigma$ . Тогда  $\vec{P}_\Sigma P = (-x, -y, H - z)$  и, следовательно,

$$[\vec{s}, \vec{P}_\Sigma P] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -x & -y & H - z \end{vmatrix} = -\vec{j}(H - z) - \vec{k}y,$$

$$|[\vec{s}, \vec{P}_\Sigma P]|^2 = y^2 + (H - z)^2, \quad |\vec{s}|^2 = 1.$$

Для конической поверхности  $\Sigma$  воспользуемся параметрическим представлением

$$\Sigma = \left\{ \vec{r}(x, y, z): x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = \frac{H}{R}\rho, (\rho, \varphi) \in D \right\},$$

$$D = \{(\rho, \varphi): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < \rho < R\},$$

для которого выпишем коэффициенты Гаусса:

$$\vec{r}_\rho = \left( \cos \varphi, \sin \varphi, \frac{H}{R} \right), \quad \vec{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0),$$

$$E = |\vec{r}_\rho|^2 = 1 + \frac{H^2}{R^2}, \quad F = (\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi) = 0, \quad G = |\vec{r}_\varphi|^2 = \rho^2,$$

и, соответственно,

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\rho d\varphi = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \rho d\rho d\varphi.$$

С учетом этого интеграл (20.151) сводится к двойному интегралу следующего вида:

$$\mathbb{I}_l^{(2)} = \mu \iint_{\Sigma} [y^2 + (H - z)^2] d\sigma = \mu \iint_D \left[ \rho^2 \sin^2 \varphi + \left( H - \frac{H}{R} \rho \right)^2 \right] \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \mu \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \iint_D \left[ \rho^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) + H^2 \left( 1 - \frac{\rho}{R} \right)^2 \right] \rho d\rho d\varphi = \mu \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} (J_2 - J_1),$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2} \iint_D \rho^3 \cos 2\varphi d\rho d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

и

$$J_2 = \iint_D \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \rho^3 - 2 \frac{H^2}{R} \rho^2 + H^2 \rho \right] d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \rho^3 - 2 \frac{H^2}{R} \rho^2 + H^2 \rho \right] d\rho =$$

$$= 2\pi \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \frac{\rho^4}{4} - \frac{2}{3} \frac{H^2}{R} \rho^3 + \frac{H^2}{2} \rho^2 \right] \Big|_0^R =$$

$$= 2\pi \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \frac{R^4}{4} - \frac{2}{3} \frac{H^2}{R} R^3 + \frac{H^2}{2} R^2 \right] =$$

$$= 2\pi R^2 \left[ (R^2 + 2H^2) \frac{1}{8} - \frac{2}{3} H^2 + \frac{H^2}{2} \right] = \frac{\pi R^2}{12} (3R^2 + 2H^2).$$

С учетом этого для  $\mathbb{I}_l^{(2)}$  получим

$$\mathbb{I}_l^{(2)} = \mu \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \frac{\pi R^2}{12} (3R^2 + 2H^2) = \frac{\pi \mu}{12} \sqrt{R^2 + H^2} (3R^2 + 2H^2).$$

**Пример 20.15.** С какой силой  $\vec{F}$  однородная усеченная коническая поверхность  $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2$ , расположенная между плоскостями  $z = H_1$  и  $z = H_2$ ,  $0 < H_1 < H_2$ , имеющая поверхностную плотность  $\mu$ , притягивает материальную точку массой  $M$ , помещенную в вершине этой конической поверхности?

**Решение.** Искомая величина  $\vec{F}$  определяется поверхностным интегралом первого рода (20.60):

$$\vec{F} = \gamma M \iint_{\Sigma} \mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\sigma,$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная, а  $\vec{r}$  – радиус-вектор, исходящий из точки  $O(0,0,0)$  (точки расположения  $M$ ) в точку  $P_{\Sigma}(x,y,z)$ , расположенную на поверхности  $\Sigma$  (рис. 186).

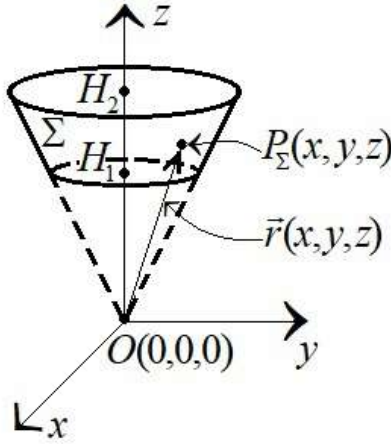


Рис. 186. Поверхность  $\Sigma$

и, следовательно,

$$\vec{F} = \gamma M \mu \iint_{\Sigma} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\sigma = \gamma M \mu \iint_D \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \sqrt{2} z dz d\varphi.$$

Учтя, что  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + z^2} = \sqrt{2} z$ , найдем компоненты вектора  $\vec{F}$ :

$$F_x = \gamma M \mu \iint_D \frac{z \cos \varphi}{2\sqrt{2}z^3} \sqrt{2} z dz d\varphi = \frac{1}{2} \gamma M \mu \int_{H_1}^{H_2} \frac{dz}{z} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0;$$

$$F_y = \gamma M \mu \iint_D \frac{z \sin \varphi}{2\sqrt{2}z^3} \sqrt{2} z dz d\varphi = \frac{1}{2} \gamma M \mu \int_{H_1}^{H_2} \frac{dz}{z} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0;$$

$$F_z = \gamma M \mu \iint_D \frac{z \cos \varphi}{2\sqrt{2}z^3} \sqrt{2} z dz d\varphi = \frac{1}{2} \gamma M \mu \int_{H_1}^{H_2} \frac{dz}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \gamma M \mu \ln \frac{H_1}{H_2}.$$

Из физических соображений можно было сразу сделать вывод, что  $F_x = 0$  и  $F_y = 0$ , так как однородная поверхность  $\Sigma$  имеет ось симметрии  $Oz$ , на которой и находится центр тяжести поверхности, в силу чего

$$\vec{F} = \pi \gamma M \mu \ln \frac{H_1}{H_2} \vec{k},$$

где  $\vec{k}$  – орт оси  $Oz$ .

Чтобы вычислить поверхностный интеграл, воспользуемся параметрическим представлением усеченной конической поверхности  $x^2 + y^2 = z^2$ , рассмотренным в примере 20.12:

$$\Sigma = \left\{ \vec{r}(x, y, z): x = z \cos \varphi, \right.$$

$$\left. y = z \sin \varphi, z = z, (\varphi, z) \in D \right\},$$

$$D = \{(\varphi, z): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < H_1 < z < H_2\}.$$

Согласно замечанию в конце этого примера, для элемента поверхности  $d\sigma$  имеем равенство

$$d\sigma = \sqrt{2} z dz d\varphi,$$

### 20.7. Поверхностный интеграл второго рода

Пусть на простой поверхности  $\Sigma$  с параметризацией

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D\}, \quad (20.152)$$

ориентированной единичными нормальными

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, \quad \vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v], \quad (20.153)$$

задано непрерывное векторное поле  $\vec{F}(x, y, z)$ , т. е. определена вектор-функция

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \quad (20.154)$$

компоненты  $P, Q, R$  которой есть непрерывные функции в некоторой области, содержащей поверхность  $\Sigma$ . Напомним, что для простой поверхности  $\Sigma$  вектор нормали  $|\vec{N}| \neq 0$ , а противоположная ориентация  $\Sigma$  осуществляется заменой  $\vec{N}$  противоположным  $(-\vec{N})$ .

Исходя из этого, в каждой точке поверхности  $\Sigma$  определим проекцию вектор-функции  $\vec{F}(x, y, z)$  на единичный вектор нормали  $\vec{n}(x, y, z)$ . Тогда на поверхности  $\Sigma$  будет определена непрерывная функция  $F_n = (\vec{F}, \vec{n})$ .

Поверхностный интеграл первого рода от функции  $F_n(x, y, z)$ :

$$\Pi = \iint_{\Sigma} F_n d\sigma = \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma \quad (20.155)$$

– называют *поток вектор-функции  $\vec{F}(x, y, z)$  через ориентированную поверхность  $\Sigma$* .

Если  $\vec{F}(x, y, z)$  есть векторное поле скоростей движущейся жидкости, то абсолютная величина интеграла (20.155) равна массе жидкости единичной плотности, протекающей через поверхность  $\Sigma$  за единицу времени. Отсюда и происходит название «поток».

Учитывая то, что вектор  $\vec{F}$  характеризуется своими компонентами  $(P, Q, R)$ , а единичный вектор нормали  $\vec{n}$  – направляющими косинусами  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , для потока (20.155) используют еще обозначения

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy), \end{aligned} \quad (20.156)$$

а также название *поверхностные интегралы второго рода* (по координатам).

Чтобы вычислить поверхностные интегралы (20.156), воспользуемся формулой (20.50), выразив поток векторного поля  $\vec{F}$  через простую поверхность  $\Sigma$ , ориентированную нормальными (20.153), двойным интегралом по плоской области  $D$  (20.152) от смешанного произведения трех векторов  $(\vec{F}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma &= \iint_D \left( \vec{F}, \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \right) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv = \\ &= \iint_D (\vec{F}, \vec{N}) du dv = \iint_D (\vec{F}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) du dv. \end{aligned} \quad (20.157)$$

Здесь мы воспользовались определением (20.153).



◆ Формулу (20.157) можно рассматривать и как определение поверхностного интеграла второго рода двойным интегралом по плоской области  $D$  из параметрического представления (20.152) пространственной поверхности  $\Sigma$ .

Приняв во внимание, что

$$(\vec{F}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = P \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix},$$

где определители второго порядка представляют собой соответствующие якобианы:

$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad (20.158)$$

формулу (20.157) можно записать в координатной форме:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) = \\ & = \iint_D \left[ P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \right. \\ & \quad + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \\ & \quad \left. + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv. \end{aligned} \quad (20.159)$$

Формула (20.159), несмотря на свою громоздкость, имеет весьма простую структуру. При переходе от левой части к правой нужно провести следующие замены:

$$dy dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv, \quad dz dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv, \quad dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

При этом важно помнить, что левые части здесь нужно записывать в том же виде, что и в формуле (20.159), не допуская в символах типа  $dx dy$  перестановок. Это объясняется тем, что якобианы (20.158) являются определителями и перестановка столбцов меняет их знак, в силу чего

$$\iint_{\Sigma} R dx dy = - \iint_{\Sigma} R dy dx.$$

Если поверхность  $\Sigma$  является графиком непрерывной дифференцируемой функции (рис. 187)

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

то формулы (20.157) и (20.159) примут вид

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_D (\vec{F}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) dx dy,$$

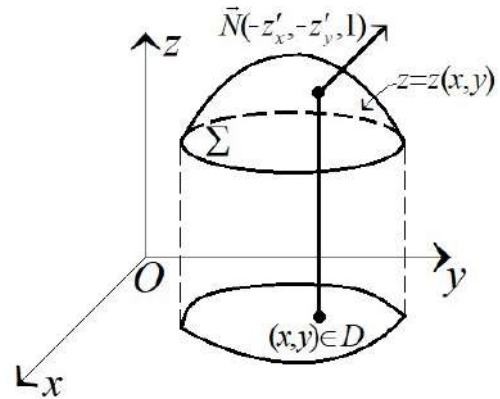


Рис. 187. График функции  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$

где

$$\begin{aligned} (\vec{F}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) &= \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = \\ &= -P(x, y, z(x, y))z_x - \\ &- Q(x, y, z(x, y))z_y + R(x, y, z(x, y)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_D (-Pz_x - Qz_y + R) dx dy. \quad (20.160)$$

Ясно, что формула (20.160) соответствует ориентации поверхности  $\Sigma$ , при которой нормаль  $\vec{n}$  составляет острый угол с осью  $Oz$ , так как

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (-z_x, -z_y, 1), \\ \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} > 0. \end{aligned}$$

Формулы (20.159), (20.160) выглядят особенно просто, если  $P = Q = 0$ :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R d\sigma &= \iint_{\Sigma} R dx dy = \\ &= \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (20.161)$$

Отметим, что формула (20.161) может иметь смысл и тогда, когда частные производные  $z_x$  и  $z_y$  не определены на  $D$ . В этом случае под поверхностным интегралом

$$\iint_{\Sigma} R dx dy$$

будем понимать двойной интеграл в правой части (20.161).

По своим свойствам поверхностный интеграл второго рода, в силу определения (20.152), повторяет все свойства поверхностных интегралов первого рода, за исключением свойства ориентированности, состоящего в том, что знак интеграла зависит от выбора ориентации поверхности  $\Sigma$ . При переходе от выбранной ориентации к противоположной интеграл второго типа (20.153) меняет знак на противоположный, поскольку для направляющих косинусов нормали  $\vec{n}$  выполняется известное тригонометрическое равенство  $\cos(\delta + \pi) = -\cos \delta$ .

## 20.8. Практика вычислений поверхностных интегралов второго рода и их приложений

Исходя из рассмотренных выше предложений, для поверхностных интегралов второго рода будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{F}, d\vec{\sigma}) &= \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy), \end{aligned}$$

а для их вычисления – формулы (20.157), (20.159) и (20.160).

◇ В случае, когда  $P = Q = 0$ , на основании (20.159), (20.160) получаем простую вычислительную формулу:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (20.162)$$

При изменении здесь ориентации поверхности интегрирования на противоположную знак в правой части меняется на противоположный.

Если же поверхность  $\Sigma$  является цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси  $Oz$ , то независимо от ее ориентации

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = 0, \quad (20.163)$$

поскольку для  $\vec{F}(0, 0, R)$  и  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, 0)$  скалярное произведение  $(\vec{F}, \vec{n}) = 0$ .

Для функции  $R(x, y, z) = z$  формулы (20.162), (20.163) позволяют находить объем  $V$  тела  $T$ , ограниченного кусочно-гладкой поверхностью  $\Sigma$ , с помощью поверхностного интеграла второго рода

$$V = \iint_{\Sigma} z dx dy. \quad (20.164)$$

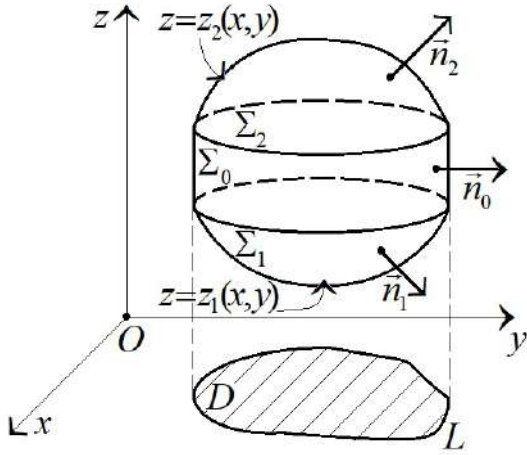


Рис. 188. Тело, ограниченное поверхностями  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$

Действительно, пусть тело  $T$  ограничено кусочно-гладкой поверхностью  $\Sigma = \Sigma_2 + \Sigma_1 + \Sigma_0$ , где  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$  — графики функций

$$z = z_2(x, y), \quad z = z_1(x, y), \\ z_2(x, y) > z_1(x, y),$$

а  $\Sigma_0$  — цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна оси  $Oz$  (рис. 188). Направляющей этой поверхности служит кусочно-гладкая замкнутая кривая  $L$  на плоскости  $xOy$ , ограничивающая плоскую область  $D$ . В частном случае на кривой  $L$  может выполняться равенство  $z_2(x, y) = z_1(x, y)$ , тогда поверхность  $\Sigma_0$  вырождается в линию.

Объем  $V$  тела  $T$ , очевидно, равен разности двойных интегралов:

$$V = \iint_D z_2(x, y) dx dy - \iint_D z_1(x, y) dx dy.$$

Введя поверхностные интегралы, можно это равенство переписать:

$$V = \iint_{\Sigma_2} z dx dy + \iint_{\Sigma_1} z dx dy, \quad (20.165)$$

где поверхностные интегралы берутся по поверхностям  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$ , ориентация которых совпадает с ориентацией замкнутой поверхности  $\Sigma$  ее внешней нормалью. Это означает, что для поверхности  $\Sigma_2$  ее нормаль  $\vec{n}_2$  образует с осью  $Oz$  острый угол  $\gamma_2$ , а нормаль  $\vec{n}_1$  для поверхности  $\Sigma_1$  образует с осью  $Oz$  тупой угол  $\gamma_1$ , что и соответствует изменению знака у второго слагаемого в (20.165). К сумме интегралов в правой части (20.165) прибавим поверхностный интеграл

$$\iint_{\Sigma_0} z \, dx \, dy$$

по внешней стороне цилиндрической поверхности  $\Sigma_0$ . Этот интеграл в силу (20.163) равен нулю, а поэтому прибавление его не нарушает равенства. Тогда

$$V = \iint_{\Sigma_2} z \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_1} z \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_0} z \, dx \, dy,$$

откуда и следует заявленная формула (20.165):

$$V = \iint_{\Sigma_2} z \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_1} z \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_0} z \, dx \, dy = \iint_{\Sigma} z \, dx \, dy.$$

**Пример 20.16.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) \quad (20.166)$$

по внешней стороне сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Пояснить геометрический смысл этого интеграла.

**Решение.** Рассмотрим различные способы вычисления интеграла (20.166), исходя из параметрических представлений сферы как почти простой поверхности (пример 20.8) либо как кусочно-гладкой.

1. Поскольку векторное поле  $\vec{F}$  определяется равенством  $\vec{F} = \vec{r}(x, y, z)$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор декартовой системы координат  $Oxyz$ , а внешняя нормаль  $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$  (рис. 189), то интеграл можно записать в виде (20.157):

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma = \iint_{\Sigma} \left( \vec{r}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) \, d\sigma = \iint_{\Sigma} |\vec{r}| \, d\sigma.$$

Поскольку  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{R^2} = R$  на поверхности  $\Sigma$ , то

$$\Pi = \iint_{\Sigma} |\vec{r}| \, d\sigma = R \iint_{\Sigma} d\sigma = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

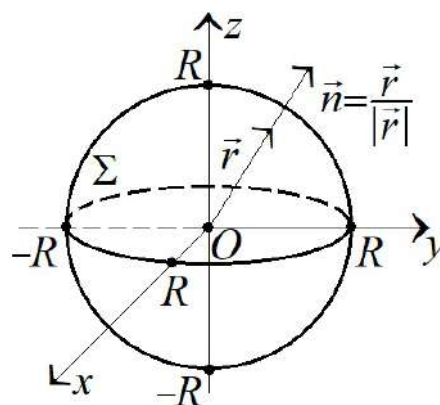


Рис. 189. Сфера радиусом  $R$

Здесь мы учли, что интеграл по поверхности  $\Sigma$

$$\iint_{\Sigma} d\sigma = S_R = 4\pi R^2$$

дает площадь сферы радиусом  $R$ , т. е.  $S_R = 4\pi R^2$ .

2. Воспользуемся параметрическим представлением сферы  $\Sigma$  как почти простой параметрами  $\theta, \varphi$ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z): x = R \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta, (\theta, \varphi) \in D\}, \\ D &= \{(\theta, \varphi): 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}. \end{aligned}$$

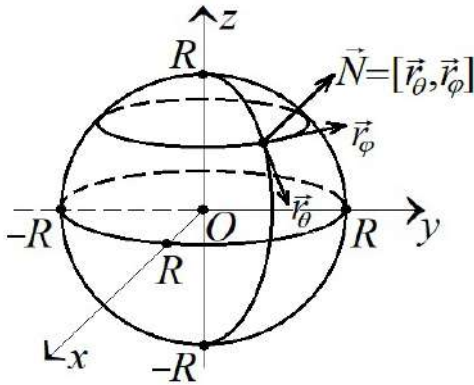


Рис. 190. Вектор  $\vec{N} = [\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi]$

При такой параметризации поверхность  $\Sigma$  ориентируется (рис. 190) вектором нормали

$$\begin{aligned} \vec{N} &= [\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi] = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi + \vec{j} R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi + \\ &\quad + \vec{k} R^2 \sin \theta \cos \varphi, \end{aligned}$$

который является ее внешней нормалью в каждой точке  $(\theta, \varphi) \in D$ .

Воспользовавшись теперь формулой (20.157), получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Sigma} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma = \iint_D (\vec{r}, \vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi) d\theta d\varphi = \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} R \sin \theta \cos \varphi & R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^3 \sin \theta d\theta = R^3 \cdot 2\pi \left( -\cos \theta \Big|_0^\pi \right) = 4\pi R^3, \end{aligned}$$

тот результат, что и выше.

3. Поверхность сферы  $\Sigma$  можно рассматривать как кусочно-гладкую поверхность, состоящую из двух гладких поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Эти поверхности можно задать параметрическими представлениями:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = y, z = z^+ = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}, \\ \Sigma_2 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = y, z = z^- = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}, \quad (20.167) \\ D &= \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}. \end{aligned}$$

Общей границей поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  является окружность  $x^2 + y^2 = R^2$  в плоскости  $z = 0$ . Ориентация этих поверхностей определяется вектором нормали

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = -z_x \vec{i} - z_y \vec{j} + \vec{k}.$$

Эта нормаль для поверхности  $\Sigma_1$  является внешней, а для поверхности  $\Sigma_2$  внешней нормалью является вектор  $(-\vec{N})$ . С учетом этого

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \\ &= \iint_D (-xz_x^+ - yz_y^+ + z^+) dx dy - \iint_D (-xz_x^- - yz_y^- + z^-) dx dy, \end{aligned} \quad (20.168)$$

и поскольку

$$\begin{aligned} z_x^+ &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, & z_y^+ &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, & z^+ &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; \\ z_x^- &= \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, & z_y^- &= \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, & z^- &= -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \end{aligned}$$

то (20.168) запишется как

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_D \left( \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy - \\ &- \iint_D \left( \frac{-x^2 - y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy = 2 \iint_D \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Переход в этом двойном интеграле к полярным координатам дает результат, совпадающий с полученным выше:

$$\begin{aligned} \Pi &= 2R^2 \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\ &= 4\pi R^2 \left( -\sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^R \right) = 4\pi R^3. \end{aligned}$$

4. Рассмотрим каждый из интегралов суммы (20.166) отдельно. Если для интеграла

$$\Pi_1 = \iint_{\Sigma} z dx dy$$

воспользоваться параметрическим представлением (20.167) поверхности  $\Sigma$ , то его можно записать как

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\Sigma} z dx dy = \iint_{\Sigma_1} z dx dy + \iint_{\Sigma_2} z dx dy = \\ &= \iint_D z^+ dx dy + \iint_D z^- dx dy = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy. \end{aligned}$$

После перехода в этом двойном интеграле к полярным координатам получим

$$\Pi_1 = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Из очевидных равенств

$$\Pi_2 = \iint_{\Sigma} y \, dz \, dx = \Pi_1, \quad \Pi_3 = \iint_{\Sigma} x \, dy \, dz = \Pi_1$$

окончательно найдем  $\Pi$ :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 3\Pi_1 = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\pi R^3.$$

Согласно определению (20.155), поверхностный интеграл второго рода (20.166) определяет, например, поток жидкости с полем скоростей  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , протекающей через поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  в направлении ее внешней нормали, характеризуя тем самым источники жидкости, расположенные внутри сферы.

С другой стороны, согласно формуле (20.165) каждый из интегралов поверхностного интеграла (20.166) задает объем тела, ограниченного поверхностью  $\Sigma$ , т. е. объем шара радиусом  $R$ :

$$\iint_{\Sigma} x \, dy \, dz = \iint_{\Sigma} y \, dz \, dx = \iint_{\Sigma} z \, dx \, dy = V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

В силу этого интеграл (20.166) равен тройному объему шара:

$$\iint_{\Sigma} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) = 3V = 4\pi R^3.$$

Эта формула остается справедливой для любой кусочно-гладкой поверхности, позволяя вычислять объем  $V$  тела, ограниченного поверхностью  $\Sigma$ , по формуле

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) \quad (20.169)$$

поверхностным интегралом второго рода.

**Пример 20.17.** Вычислить интеграл

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \left( \frac{dy \, dz}{x} + \frac{dz \, dx}{y} + \frac{dx \, dy}{z} \right) \quad (20.170)$$

по внешней стороне части поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ограниченной двумя меридианами и двумя параллелями.

**Решение.** Поверхность интегрирования  $\Sigma$  зададим параметризацией

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z): x = a \sin \theta \cos \varphi, y = b \sin \theta \sin \varphi, z = c \cos \theta, (\theta, \varphi) \in D\}, \\ D = \{(\theta, \varphi): \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}.$$

При такой параметризации поверхность  $\Sigma$  ориентируется (рис. 191) вектором нормали

$$\begin{aligned}\vec{N} = [\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos \theta \cos \varphi & b \cos \theta \sin \varphi & -c \sin \theta \\ -a \sin \theta \sin \varphi & b \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}bc \sin^2 \theta \cos \varphi + \vec{j}ac \sin^2 \theta \sin \varphi + \vec{k}ab \cos \theta \sin \theta, \end{aligned} \quad (20.171)$$

который является ее внешней нормалью в каждой точке  $(\theta, \varphi) \in D$ .

Воспользовавшись теперь формулой (20.157), получим

$$\begin{aligned}\Pi &= \iint_{\Sigma} \left( \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} \right) = \\ &= \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_D (\vec{F}, [\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi]) d\theta d\varphi.\end{aligned}$$

Учитывая, что здесь

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{a \sin \theta \cos \varphi}, \frac{1}{b \sin \theta \sin \varphi}, \frac{1}{c \cos \theta} \right),\end{aligned}$$

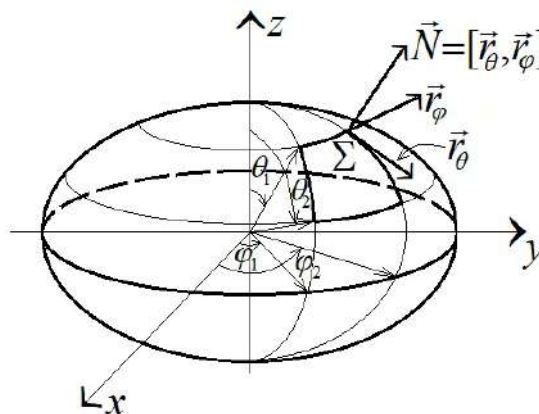


Рис. 191. Вектор внешней нормали к точке поверхности эллипсоида

а  $[\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi]$  определяется равенством (20.171), найдём поток:

$$\begin{aligned}\Pi &= \iint_D (\vec{F}, [\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi]) d\theta d\varphi = \iint_D \left( \frac{ab}{c} + \frac{cb}{a} + \frac{ca}{b} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) (\varphi|_{\varphi_1}^{\varphi_2}) (-\cos \theta|_{\theta_1}^{\theta_2}) = \\ &= abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) (\varphi_2 - \varphi_1) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).\end{aligned} \quad (20.172)$$

Формула (20.172) допускает очевидные обобщения. При  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$  имеем всю поверхность эллипсоида

$$\Pi = abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) 4\pi.$$

При  $a = b = c = R$  имеем часть сферы радиусом  $R$ :

$$\Pi = 3R(\varphi_2 - \varphi_1)(\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

При  $a = b = c = R$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$  имеем всю поверхность сферы

$$\Pi = 12\pi R.$$

**Пример 20.18.** Вычислить поток вектора  $\vec{F}(x^3, y^3, z^3)$  в направлении внешней нормали к полной поверхности конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq H$ .



**Решение.** Полную поверхность конуса  $\Sigma$  можно представить суммой двух поверхностей:  $\Sigma_1$  (боковой) и  $\Sigma_2$  (основания) (рис. 192). Для этих поверхностей воспользуемся параметрическими представлениями

$$\Sigma_1 = \{\vec{r}(x, y, z): x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = \rho, (\rho, \varphi) \in D\}, \quad (20.173)$$

$$\Sigma_2 = \{\vec{r}(x, y, z): x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = H, (\rho, \varphi) \in D\}, \quad (20.174)$$

где

$$D = \{(\rho, \varphi): 0 \leq \rho \leq H, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (20.175)$$

Для таких параметрических представлений проекция вектора нормали  $\vec{N} = [\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi]$  на ось  $Oz$  удовлетворяет неравенству

$$N_z = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho > 0.$$

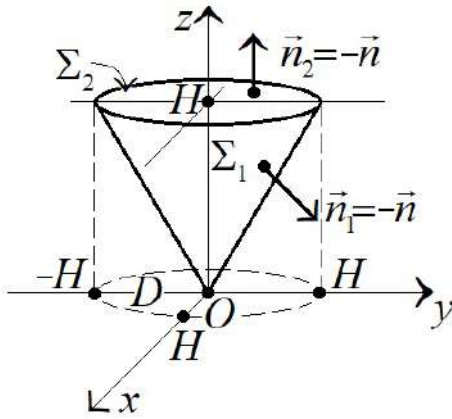


Рис. 192. Вектор внешней нормали к поверхности конуса

Это означает, что вектор нормали  $\vec{n} = \vec{N}/|\vec{N}|$  составляет с осью  $Oz$  острый угол. Поэтому для поверхности  $\Sigma_2$  вектор внешней нормали  $\vec{n}_2$  совпадает с вектором  $\vec{n}$ , т. е.  $\vec{n}_2 = \vec{n}$ ; для поверхности  $\Sigma_1$  вектор внешней нормали  $\vec{n}_1$  противоположен вектору  $\vec{n}$ , т. е.  $\vec{n}_1 = -\vec{n}$  (рис. 192).

Согласно определению, поток вектора  $\vec{F}$  через поверхность  $\Sigma$  записывается поверхностным интегралом

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma.$$

Для этого потока справедливо равенство

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \quad (20.176)$$

где потоки  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  определяются выражениями

$$\Pi_1 = \iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma, \quad \Pi_2 = \iint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma.$$

Учитывая, что поверхность  $\Sigma_2$  является простой поверхностью, а поверхность  $\Sigma_1$  — почти простой, их можно вычислить, например, по формулам (20.157). Исходя из параметрических представлений (20.173)–(20.175) и связи внешних нормалей с нормальными  $\vec{n}$ , имеем

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = - \iint_D \begin{vmatrix} x^3 & y^3 & z^3 \\ x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ z_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \\ &= - \iint_D \begin{vmatrix} \rho^3 \cos^3 \varphi & \rho^3 \sin^3 \varphi & \rho^3 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 1 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \\ &= - \int_0^H \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_0^H \int_0^{2\pi} [\cos^2 \varphi(1 - \cos^2 \varphi) + \sin^2 \varphi(1 - \sin^2 \varphi)] d\varphi = \\
&= -\frac{2H^5}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{H^5}{10} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \\
&= -\frac{H^5}{10} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos^4 \varphi) d\varphi = -\frac{H^5}{10} \frac{1}{2} 2\pi = -\frac{\pi}{10} H^5
\end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \iint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_D \begin{vmatrix} x^3 & y^3 & z^3 \\ x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ z_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \iint_D \begin{vmatrix} \rho^3 \cos^3 \varphi & \rho^3 \sin^3 \varphi & \rho^3 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \\
&= H^3 \iint_D \rho d\rho d\varphi = H^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \rho d\rho = H^3 \cdot 2\pi \left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^H\right) = \pi H^5.
\end{aligned}$$

Подставив найденные значения  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  в (20.176), получим

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = -\frac{\pi}{10} H^5 + \pi H^5 = \frac{9\pi}{10} H^5.$$

**Пример 20.19.** Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (4x^2 + z^2) dy dz + 4xy dz dx + z^2 dx dy, \quad (20.177)$$

где  $\Sigma$  – часть поверхности гиперболического цилиндра  $4x^2 - y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , лежащая внутри конуса  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$  и ориентированная нормалью, составляющей острый угол с осью  $Ox$ .

**Решение.** Поскольку  $x \geq 0$ , то уравнение поверхности  $\Sigma$  можно записать явно заданной функцией

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + a^2}$$

на множестве  $D$ , представляющем собой область плоскости  $yOz$ , границей которой является проекция линии пересечения конической и цилиндрической поверхностей (рис. 193). Уравнение границы области  $D$  можно найти, исключив переменную  $x$  из уравнений  $4x^2 - y^2 = a^2$  и  $x^2 = y^2 + z^2$ . Это приводит к уравнению эллипса:

$$3y^2 + 4z^2 = a^2.$$

Исходя из этого, параметрическое представление  $\Sigma$  можно записать как

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z): x = x(y, z), y = y, z = z, (y, z) \in D\}, \quad (20.178)$$

где

$$x(y, z) = \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + a^2} \quad (20.178a)$$

и

$$D = \{(y, z): 3y^2 + 4z^2 \leq a^2\}. \quad (20.178б)$$

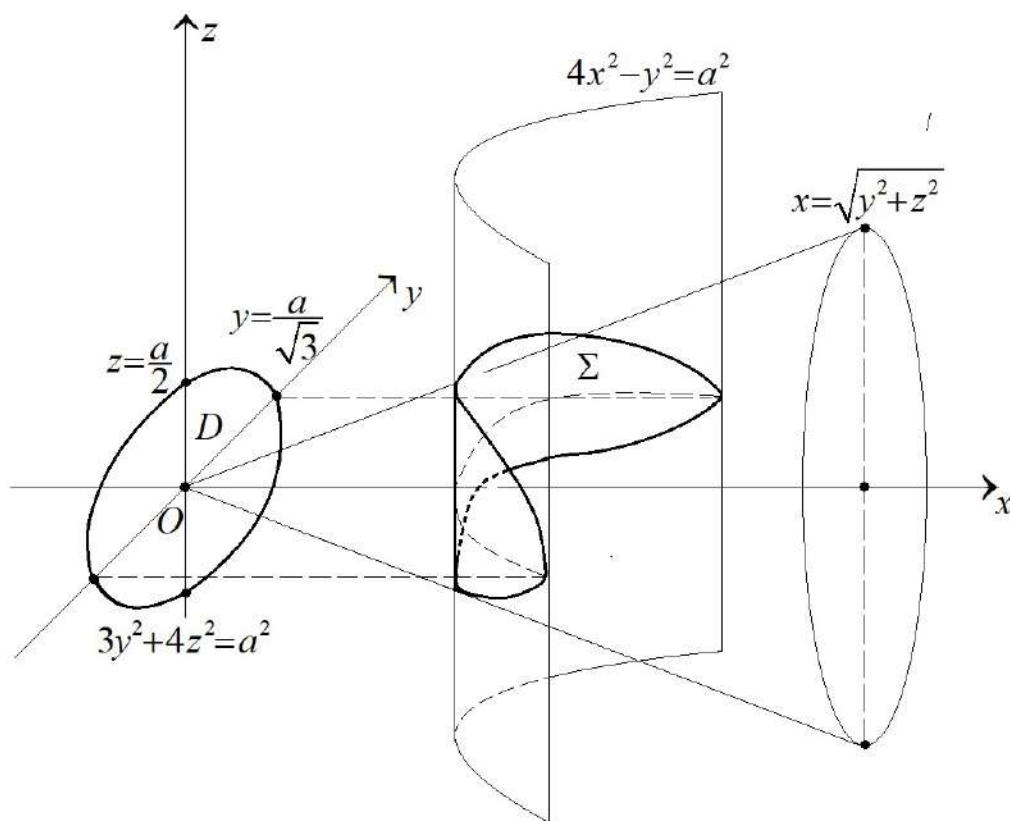


Рис. 193. Часть поверхности гиперболического цилиндра  $4x^2 - y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , лежащая внутри конуса  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$

Параметризация (20.178) ориентирует поверхность  $\Sigma$  вектором нормали

$$\vec{N} = [\vec{r}_y, \vec{r}_z] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_y & 1 & 0 \\ x_z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \vec{i} - x_y \vec{j} - x_z \vec{k},$$

составляющим с осью  $Ox$  острый угол ( $N_z = 1 > 0$ ), поэтому для поверхности  $\Sigma$  (20.178) поверхностный интеграл для  $\vec{F} = (P, Q, R)$  запишется двойным интегралом

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \\ & = \iint_D \left( P \frac{\partial(y, z)}{\partial(y, z)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(y, z)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(y, z)} \right) dy \, dz = \\ & = \iint_D (P - x_y Q - x_z R) dy \, dz, \end{aligned} \quad (20.179)$$

поскольку

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} 0 & x_y \\ 1 & x_z \end{vmatrix} = -x_y, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} x_y & 1 \\ x_z & 0 \end{vmatrix} = -x_z.$$

Применив формулу (20.179) для исходного интеграла (20.177) с учетом явного вида выражений для  $x_y$  и  $x_z$ :

$$x_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}, \quad x_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + y^2} \right) = 0$$

и

$$P(x(y, z), y, z) = (4x^2 + z^2) \Big|_{x=\frac{1}{2}\sqrt{y^2+a^2}} = y^2 + a^2 + z^2,$$

$$Q(x(y, z), y, z) = 4xy \Big|_{x=\frac{1}{2}\sqrt{y^2+a^2}} = 2y\sqrt{y^2 + a^2},$$

получим

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (4x^2 + z^2) dy dz + 4xy dz dx + z^2 dx dy = \\ & = \iint_D \left( y^2 + a^2 + z^2 - \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} 2y\sqrt{y^2 + a^2} \right) dy dz = \\ & = \iint_D (a^2 + z^2) dy dz = a^2 I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (20.180)$$

где

$$I_1 = \iint_D dy dz, \quad I_2 = \iint_D z^2 dy dz.$$

Двойной интеграл  $I_1$  определяет площадь области  $D$ , т. е. площадь эллипса с полуосями  $a/\sqrt{3}$  и  $a/2$ , и, следовательно,

$$I_1 = \iint_D dy dz = \pi \frac{a}{\sqrt{3}} \frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{2\sqrt{3}}.$$

Чтобы вычислить двойной интеграл  $I_2$ , от декартовых координат  $y, z$  перейдем к обобщенным полярным координатам

$$y = \frac{a}{\sqrt{3}} \rho \cos \varphi, \quad z = \frac{a}{2} \rho \sin \varphi$$

с якобианом

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} y_\rho & z_\rho \\ y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \rho.$$

В координатах  $\rho, \varphi$  область  $D$  задается неравенствами

$$D = \{(\rho, \varphi): 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

и, следовательно, интеграл  $I_2$  запишется как

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_D z^2 dy dz = \iint_D \left(\frac{a}{2}\rho \sin \varphi\right)^2 \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{a^4}{8\sqrt{3}} \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{a^4}{32\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{\pi a^4}{32\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Подставив  $I_1$  и  $I_2$  в (20.180), получим

$$\iint_{\Sigma} (4x^2 + z^2) dy dz + 4xy dz dx + z^2 dx dy = a^2 \frac{\pi a^2}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi a^4}{32\sqrt{3}} = \frac{17\pi a^4}{32\sqrt{3}}.$$

◇ Заметим, что в силу ортогональности вектора нормали  $\vec{N} = (1, x_y, 0)$  к оси  $Oz$  значение интеграла (20.177) не зависит от явного вида функциональной зависимости  $R(x, y, z)$  третьей координаты вектора  $\vec{F} = (P, Q, R)$ .

**Пример 20.20.** Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dy dz, \quad (20.181)$$

где  $\Sigma$  – поверхность, полученная вращением дуги кривой

$$L = \left\{ (x, y) : x = x, y = \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

вокруг оси  $Oz$  и ориентированная нормалью, образующей тупой угол с осью вращения.

**Решение.** Уравнение поверхности вращения  $\Sigma$ , в силу равенства  $y^2 = \cos^2 x$ , можно получить формальной заменой  $y^2 \rightarrow y^2 + z^2$ . Это приведет к уравнению  $y^2 + z^2 = \cos^2 x$ , которое допускает переход к явной зависимости

$$x = \arccos \sqrt{y^2 + z^2}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Исходя из этого, параметрическое представление поверхности интегрирования можно записать как

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\vec{r}(x, y, z) : \\ &x = \arccos \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (20.182) \\ &y = y, z = z, (y, z) \in D\}, \end{aligned}$$

где

$$D = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Такая параметризация (рис. 194) ориентирует поверхность  $\Sigma$  вектором нормали

$$\vec{N} = [\vec{r}_y, \vec{r}_z] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_y & 1 & 0 \\ x_z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \vec{i} - x_y \vec{j} - x_z \vec{k},$$

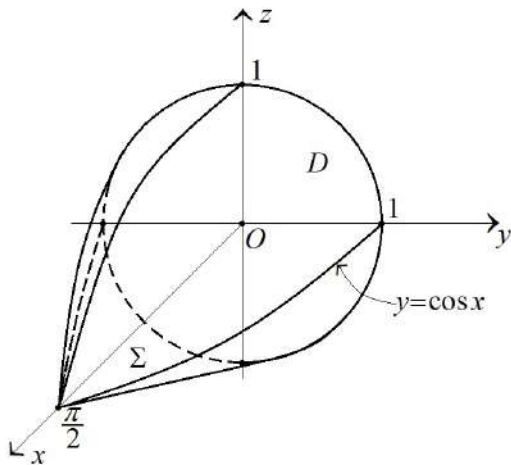


Рис. 194. Поверхность  $\Sigma$

образующим с осью  $Ox$  (осью вращения) острый угол. В силу этого поверхностный интеграл (20.181) запишется двойным интегралом по области  $D$ , взятой со знаком минус:

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dy dz = - \iint_D [(\arccos \sqrt{y^2 + z^2})^2 + y^2 + z^2] dy dz.$$

Для вычисления этого двойного интеграла перейдем от декартовых координат  $y, z$  к полярным координатам  $y = \rho \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi$  с якобианом  $\rho$ .

В координатах  $\rho, \varphi$  область  $D$  задается неравенствами

$$D = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

и, следовательно, двойной интеграл запишется как

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dy dz &= - \iint_D [(\arccos \rho)^2 + \rho^2] \rho d\rho d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [\rho \arccos^2 \rho + \rho^3] d\rho = -2\pi \left[ \int_0^1 \rho^3 d\rho + \int_0^1 \rho \arccos^2 \rho d\rho \right] = \\ &= -2\pi \left[ \frac{1}{4} + \int_0^1 \rho \arccos^2 \rho d\rho \right]. \end{aligned} \quad (20.183)$$

Последний интеграл заменой

$$\begin{aligned} \arccos \rho &= t, \quad \rho = \cos t, \quad d\rho = -\sin t dt, \\ \rho = 0 &\Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad \rho = 1 \Rightarrow t = 0, \end{aligned}$$

приводится к виду

$$\int_0^1 \rho \arccos^2 \rho d\rho = \int_{\pi/2}^0 t^2 \cos t (-\sin t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} t^2 \sin 2t dt.$$

Вычислим его при помощи двукратного интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi/2} t^2 \sin 2t dt = \frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} t \cos 2t dt = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

С учетом этого (20.183) примет вид

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dy dz = -2\pi \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{\pi^3}{8}.$$

**Пример 20.21.** Вычислить поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_{\Sigma} xy dx dy \quad (20.184)$$

через внешнюю сторону поверхности  $\Sigma$ , являющейся границей симплекса

$$G = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}. \quad (20.185)$$

**Решение.** Симплекс  $G$  (20.185) геометрически представляет собой треугольную пирамиду (рис. 195).

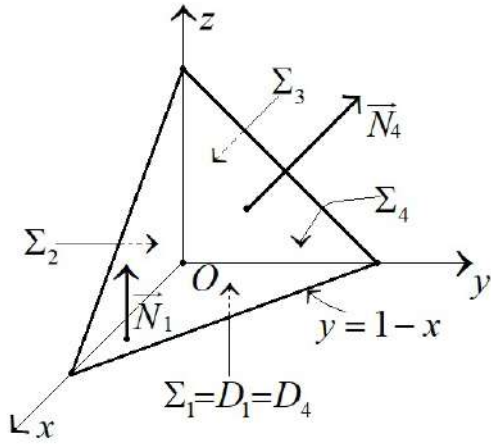


Рис. 195. Поверхность пирамиды

$y = 0$  и  $x = 0$ , соответственно (рис. 195) справедливы следующие равенства:

$$\Pi_2 = \iint_{\Sigma_2} xy \, dx \, dy = 0, \quad \Pi_3 = \iint_{\Sigma_3} xy \, dx \, dy = 0.$$

Поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_4$  задаются параметрическими представлениями:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = y, z = 0, (x, y) \in D_1\}, \\ \Sigma_4 &= \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = y, z = 1 - x - y, (x, y) \in D_1\}, \end{aligned}$$

где

$$D_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Поверхность  $\Sigma_1$  ориентирована нормалью

$$\vec{N}_1 = [\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k},$$

а  $\Sigma_4$  –

$$\vec{N}_4 = [\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Учтем, что направление вектора  $\vec{N}_1$  противоположно направлению вектора внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ , а направление вектора  $\vec{N}_4$  совпадает с направлением вектора внешней нормали к  $\Sigma$  (рис. 195). Тогда при сведении поверхностного интеграла  $\Pi_1$  в двойному интегралу по  $D_1$  ставим перед ним знак минус, а при вычислении  $\Pi_4$  – знак плюс:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\Sigma_1} xy \, dx \, dy = - \iint_{D_1} xy \, dx \, dy = - \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y \, dy = - \int_0^1 x \, dx \left( \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} \right) = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x^2) \, dx = - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = - \frac{1}{24}; \end{aligned}$$

Поверхность  $\Sigma$  этой пирамиды состоит из четырех треугольных граней:  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$ , и, следовательно исходный интеграл (20.184) можно представить суммой интегралов:

$$\Pi = \sum_{i=1}^4 \Pi_i, \quad (20.186)$$

где

$$\Pi_i = \iint_{\Sigma_i} xy \, dx \, dy.$$

Поскольку поверхности  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  совпадают со своими ортогональными проекциями на координатные плоскости

$$\Pi_4 = \iint_{\Sigma_4} xy \, dx \, dy = \iint_{D_1} xy \, dx \, dy = -\Pi_1 = \frac{1}{24}.$$

Подставив  $\Pi_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , в (20.186), получим значение потока  $\Pi$ :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \Pi_1 + 0 + 0 - \Pi_1 = 0.$$

## 21. Кратные, поверхностные и криволинейные интегралы – связь между интегрированием и дифференцированием

Для функций одной переменной связь между операциями интегрирования и дифференцирования, интервалом интегрирования  $]a, b[$  и его границей (точками  $a$  и  $b$ ) наглядно выражается формулой Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b \frac{dP(x)}{dx} dx = P(b) - P(a). \quad (21.1)$$

Для функций нескольких переменных существуют аналогичные связи, которые можно рассматривать как обобщение этой формулы. В этом случае, однако, виды интегральных операций расширяются кратным, поверхностным и криволинейным интегрированием, границы областей интегрирования которых обладают большим разнообразием, чем две точки, – замкнутые кривые и поверхности.

Именно к рассмотрению теорем об интегрировании по таким множествам мы и переходим.

### 21.1. Теорема Остроградского–Гаусса

Пусть в ориентированном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  задана ограниченная область  $G$ , граница которой  $\partial G$  есть кусочно-гладкая поверхность, ориентированная внешней нормалью  $\vec{n}$ . Для заданной на множестве  $\overline{G} = G \cup \partial G$  вектор-функции  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  справедлива следующая теорема.

**Теорема 21.1 (Остроградского–Гаусса).** *Если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны вместе со своими частными производными в замкнутой области  $\overline{G}$ , то имеют место формулы:*

$$\iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \oiint_{\partial G} (P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy), \quad (21.2)$$

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \oiint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma, \quad (21.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (21.4)$$

называемые формулами Остроградского–Гаусса, причем (21.2) – формулой в координатной форме, а (21.3) – в векторной.



**Доказательство.** Начнем со случая, когда область  $G$  является элементарной относительно всех трех координатных осей. Ее определение было введено еще при рассмотрении кратных интегралов и означает, что для области, элементарной относительно, например, оси  $Oz$ , найдутся две непрерывные в  $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$  функции  $z = z_1(x, y)$  и  $z = z_2(x, y)$ , такие, что

$$G = \{(x, y, z) : z_1(x, y) < z < z_2(x, y), \\ (x, y) \in D\}.$$

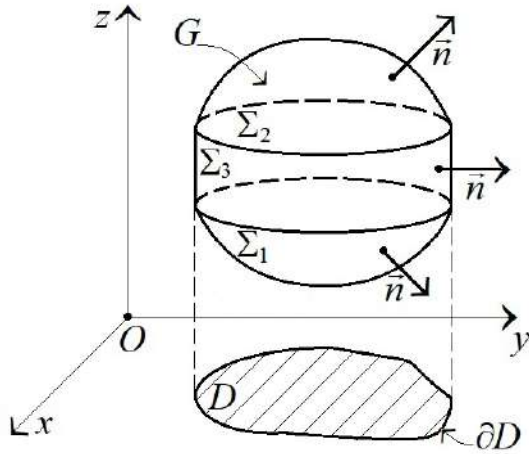


Рис. 196. Область  $G$ , элементарная относительно оси  $Oz$

Геометрически это означает, что поверхность  $\partial G$  представляет собой сумму поверхностей:  $\partial G = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ . Две из них –  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  – являются графиками функций  $z = z_1(x, y)$  и  $z = z_2(x, y)$ , определенных на множестве  $D \in \mathbb{R}^2$ , а  $\Sigma_3$  – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси  $Oz$ , а направляющая есть кривая  $\partial D$  – граница области  $D$  (рис. 196). При этом поверхность  $\Sigma_2$  ориентирована нормалью, совпадающей с внешней, поверхность  $\Sigma_1$  – нормалью, направленной противоположно внешней, а поверхность  $\Sigma_3$  – нормалью, перпендикулярной оси  $Oz$  (рис. 196).

С учетом этого применим формулу сведения тройного интеграла к повторному:

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz = \\ &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Добавив к двум поверхностным интегралам в (21.5) равный нулю интеграл по цилиндрической поверхности  $\Sigma_3$ :

$$\iint_{\Sigma_3} R(x, y, z) dx dy = 0,$$

получим

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma_1} R dx dy + \iint_{\Sigma_2} R dx dy + \iint_{\Sigma_3} R dx dy = \iint_{\partial G} R dx dy. \quad (21.6)$$

Аналогично, исходя из элементарности области  $G$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , получим:

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \iint_{\partial G} P dy dz; \\ \iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz &= \iint_{\partial G} Q dz dx. \end{aligned} \tag{21.7}$$

Сложив равенства (21.6) и (21.7), получим формулу (21.2).

Далее схема расширения классов областей, для которых справедлива формула (21.2), повторяет схему, использованную при доказательстве формулы Грина. Для этого воспользуемся понятием связности пространственной области  $D$ .

◆ Область  $G$  будем называть *объемно односвязной* (или просто *односвязной*), если для любой ограниченной области  $G'$  из условия  $\partial G' \subset G$  следует, что  $G' \subset G$ .

◆ Область  $G$  будем называть *объемно двусвязной* (или просто *двусвязной*), если ее можно представить как  $G = G_1 \setminus \bar{G}_2$ , где  $G_1$  и  $G_2$  – односвязные области. При этом поверхность  $\partial G_1$  будем называть *внешней границей двусвязной области  $G$* , а  $\partial G_2$  – *внутренней границей  $G$*  (рис. 197).

Доказательство формулы (21.2) выше было приведено для частного случая односвязной области  $G$ , элементарной относительно всех координатных осей. Теперь формулу (21.2) можно доказать и для более общего случая.

Пусть  $G$  – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей, которая кусочно-гладкой перегородкой делится на две области:  $G_1$  и  $G_2$ , элементарные относительно всех трех координатных осей. При этом  $\partial G_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma_3$ ,  $\partial G_2 = \Sigma_2 \cup \Sigma_3^-$ ,  $\partial G = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ .

Если  $\partial G_1$  и  $\partial G_2$  ориентированы внешними нормальными, то  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_3^-$  ориентированы противоположно (рис. 198). Применив для простоты записи формулу Остроградского–Гаусса в векторной форме (21.3) для каждой из областей  $G_1$  и  $G_2$ , получим:

$$\begin{aligned} \iiint_{G_1} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= \oiint_{\partial G_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \\ &= \oiint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma + \oiint_{\Sigma_3} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma, \\ \iiint_{G_2} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= \oiint_{\partial G_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \\ &= \oiint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma + \oiint_{\Sigma_3^-} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma. \end{aligned}$$

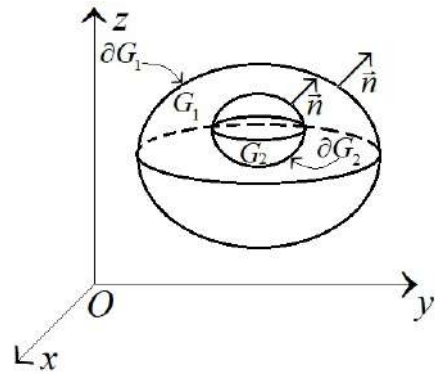


Рис. 197. Двусвязная область

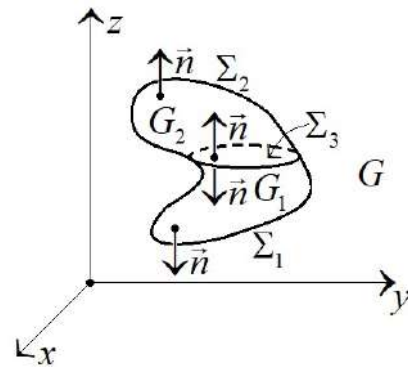


Рис. 198. Односвязная область с кусочно-гладкой границей

Сложив эти формулы и учтя, что потоки через перегородку  $\Sigma_3$  взаимно уничтожаются, получим формулу (21.3) и, соответственно, (21.2) для области  $G$ .

По аналогии справедливость формул (21.2), (21.3) можно распространить на области с двумя, тремя и т. д. кусочно-гладкими непересекающимися перегородками.

Наряду с этим формулы (21.2), (21.3), подобно формуле Грина, могут быть с односвязных областей распространены на многосвязные пространственные области. Действительно, пусть  $G$  – объемно двусвязная область, которая, согласно определению, есть  $G = G_1 \setminus \overline{G_2}$ ,  $\overline{G_2} \subset G_1$ , где  $G_1, G_2$  – односвязные области.

Внешнюю  $\partial G_1$  и внутреннюю  $\partial G_2$  поверхности области  $G$  будем ориентировать нормальными, внешними по отношению к области  $G$ . Тогда, разрезав гладкой перегородкой область  $G$  на две односвязные области, применив к каждой из областей формулу (21.3), сложив полученные формулы и учтя, что потоки через перегородку взаимно уничтожаются, получим формулу (21.3) для двусвязной области  $G$ :

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial G_1} (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma - \iint_{\partial G_2} (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma = \iint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma,$$

и ее координатную форму (21.2).

Аналогично справедливость формул (21.2), (21.3) распространяется на ограниченные объемно  $n$ -связные области  $G$  с кусочно-гладкими границами.

**Следствие 21.1.1.** Объем  $V$  пространственной области  $G$  (т. е.  $V = m(G)$ ) определяется поверхностными интегралом по ее границе  $\partial G$ :

$$V = m(G) = \frac{1}{2} \iint_{\partial G} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} (\vec{r}, \vec{n}) \, d\sigma. \quad (21.8)$$

Действительно, применив формулу (21.3) для вектор-функции

$$\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \vec{r},$$

с учетом того, что  $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ , получим

$$\begin{aligned} \iiint_G \operatorname{div} \vec{r} \, dx \, dy \, dz &= 3 \iiint_G dx \, dy \, dz = 3m(G) = 3V = \iint_{\partial G} (\vec{r}, \vec{n}) \, d\sigma = \\ &= \iint_{\partial G} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy. \end{aligned}$$

◇ Формула (21.8) совпадает с формулой (20.169) из примера 20.16, полученной другим способом.

◇ Обозначение

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

используется не только для сокращения записи, но и является важной характеристикой вектор-функции (или векторного поля)  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , которую мы рассмотрим позднее.

### 21.2. Примеры применения формулы Остроградского–Гаусса

**Пример 21.1.** Вычислить поток вектора  $\vec{F}(x^3, y^3, z^3)$  в направлении внешней нормали через полную поверхность конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq H$ .

**Решение.** Эта задача в примере 20.18 была решена непосредственным вычислением поверхностного интеграла по полной поверхности конуса  $\Sigma$ . Здесь для решения этой задачи мы воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса и рис. 192 из примера 20.18.

Поскольку

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

а область  $G$ , ограниченная поверхностью  $\Sigma$ , в цилиндрических координатах  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$  задается неравенствами  $0 \leq \rho \leq H$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $\rho \leq z \leq H$ , то в силу (21.3)

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma &= \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 3 \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= 3 \iiint_G (\rho^2 + z^2) \rho d\rho d\varphi dz = 6\pi \iint_D (\rho^2 + z^2) \rho d\rho dz = 6\pi(J_1 + J_2), \end{aligned}$$

где

$$J_1 = \iint_D \rho^3 d\rho dz, \quad J_2 = \iint_D z^2 \rho d\rho dz.$$

Вычислим эти двойные интегралы:

$$\begin{aligned} J_1 &= \iint_D \rho^3 d\rho dz = \int_0^H \rho^3 d\rho \int_{\rho}^H dz = \int_0^H \rho^3 (H - \rho) d\rho = \left( H \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^H = \\ &= H^5 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{H^5}{20}, \\ J_2 &= \iint_D \rho dz z^2 dz = \int_0^H \rho d\rho \int_{\rho}^H z^2 dz = \int_0^H \rho \frac{1}{3} (H^3 - \rho^3) d\rho = \frac{1}{3} \left( H^3 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^H = \\ &= \frac{1}{3} H^5 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{H^5}{10}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = 6\pi(J_1 + J_2) = 6\pi H^5 \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) = \frac{9\pi H^5}{10}.$$

Это значение совпадает с найденным в примере 20.18. Использование формулы Остроградского–Гаусса в данном случае упрощает решение задачи.

Следующие примеры показывают, что изменение вектор-функции  $\vec{F}(P, Q, R)$  или поверхности интегрирования  $\Sigma$  может сделать эти упрощения еще более значительными.

**Пример 21.2.** Вычислить поток вектора  $\vec{F}(x^3, y^3, z^3)$  через полную поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  в направлении внешней нормали.

**Решение.** Условие этого примера отличается от условий предыдущего примера лишь поверхностью интегрирования: коническая поверхность заменена на сферическую. Поскольку при этом вектор-функция  $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$  осталась прежней, то, как и в примере 21.1,

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

При помощи формулы Остроградского–Гаусса получим значение потока:

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 3 \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

где  $G$  – шар, ограниченный сферой  $\Sigma$ .

Чтобы вычислить тройной интеграл, воспользуемся сферическими координатами  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$  (с якобианом перехода  $r^2 \sin \theta$ ).

В сферических координатах шар  $G$  задается системой неравенств  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Исходя из этого, найдем

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma &= 3 \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \iiint_G r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 3 \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left( \frac{r^5}{5} \Big|_0^R \right) \left( -\cos \theta \Big|_0^{\pi} \right) = 3 \cdot 2\pi \frac{R^5}{5} \cdot 2 = \frac{12\pi}{5} R^5. \end{aligned}$$

**Пример 21.3.** Вычислить поток вектора  $\vec{F} = (y - z, z - x, x - y)$  в направлении внешней нормали через

- $\Sigma_1$  – полную поверхность конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z = H > 0$ ;
- $\Sigma_2$  – полную поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

**Решение.** Условие этого примера отличается от условий двух предыдущих лишь видом вектор-функции  $\vec{F} = (P, Q, R)$ . Как и в предыдущих примерах, для вычисления искомого потока воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса (21.3). Вычислим  $\operatorname{div} \vec{F}$ :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(y - z)}{\partial x} + \frac{\partial(z - x)}{\partial y} + \frac{\partial(x - y)}{\partial z} = 0.$$

Это означает, что

$$\Pi_1 = \oiint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{G_1} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 0;$$

$$\Pi_2 = \oiint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{G_2} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 0,$$

т. е. потоки через обе поверхности равны между собой и являются нулевыми. Более того, поток вектора  $\vec{F} = (y - z, z - x, x - y)$  через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность будет равен нулю. Таково свойство вектор-функции  $\vec{F} = (y - z, z - x, x - y)$ .

**Пример 21.4.** Найти поток вектора  $\vec{F} = (2z \cos y + 4x, e^{x^2} - 1, xy - 2z)$  через внешнюю сторону

- а) поверхности  $\Sigma_1$  – симплекса  $3x - 2y + z = 6, x = y = z = 0$ ;
- б) поверхности  $\Sigma_2$  – сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ .

**Решение.** Поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  представляют собой поверхность треугольной пирамиды  $G_1$  и поверхность шара  $G_2$  (рис. 199).

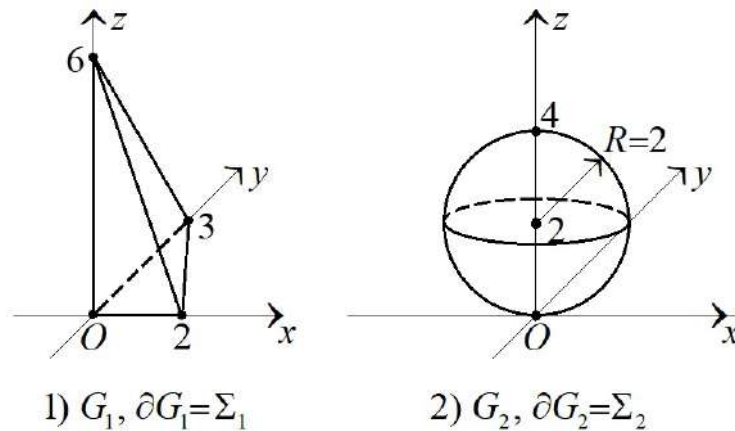


Рис. 199. Треугольная пирамида  $G_1$  и шар  $G_2$

Применим для вычисления потока вектора  $\vec{F}$  формулу Остроградского–Гаусса и учтем при этом, что

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2z \cos y + 4x) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2} - 1) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - 2z) = 4 - 2 = 2.$$

Получим

$$\Pi_i = \iint_{\Sigma_i} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{G_i} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 2 \iiint_{G_i} dx dy dz = 2V_i, \quad i = 1, 2. \quad (21.9)$$

Здесь  $V_i$  – объем области  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ . Очевидно, что

$$V_1 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 6, \quad V_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}.$$

Тогда

$$\Pi_1 = \iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = 2V_1 = 12, \quad \Pi_2 = \iint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = 2V_2 = \frac{64\pi}{3}.$$

Заметим, что, согласно (21.9), поток заданного векторного поля  $\vec{F}$  через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность будет равен удвоенному объему пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

**Пример 21.5.** Найти поток векторного поля

$$\vec{F} = \left( \frac{x^2}{2} - 2x + z^2, \cos^2 z + 6y, e^{y^2} + x - 4z \right)$$

через внешнюю сторону поверхности  $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ ,  $x^2 + y^2 = 2 - z$ .

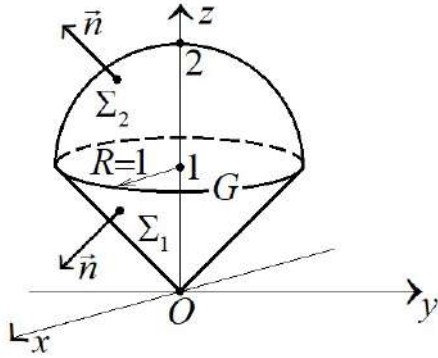


Рис. 200. Поверхность  $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ ,  $x^2 + y^2 = 2 - z$

**Решение.** Кусочно-гладкая поверхность  $\Sigma$  представляет собой сумму двух поверхностей:  $\Sigma_1$  – поверхности верхней половины конуса  $\sqrt{x^2 + y^2} = z > 0$  и закрывающей ее сверху поверхности  $\Sigma_2$  – параболоида  $x^2 + y^2 = 2 - z$  (рис. 200).

Эти поверхности пересекаются по окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , лежащей в плоскости  $z = 1$ . Действительно, из уравнения поверхностей находим  $z^2 + z - 2 = 0$ . Отсюда  $z = 1 > 0$  и, соответственно,  $x^2 + y^2 = 1$ .

Применив для вычисления потока вектора  $\vec{F}$  формулу Остроградского–Гаусса, с учетом того, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{2} - 2x + z^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\cos^2 z + 6y) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (e^{y^2} + x - 4z) = x - 2 + 6 - 4 = x, \end{aligned}$$

получим

$$\Pi = \iint_{\Sigma_i} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_G x dx dy dz = 0,$$

поскольку область  $G$  симметрична относительно плоскости  $x = 0$ , а подынтегральная функция  $x$  нечетна по переменной  $x$ .

Впрочем, этот же результат несложно получить и непосредственным вычислением тройного интеграла в цилиндрических координатах  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ :

$$\begin{aligned} \iiint_G x dx dy dz &= \iiint_G \rho \cos \varphi \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} dz \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} dz \left( \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$

**Пример 21.6.** Вычислить поток векторного поля

$$\vec{F} = \left( \frac{x^2 y}{1 + y^2} + 6yz^2, 2x \operatorname{arctg} y, -1 - \frac{2xz(1 + y)}{1 + y^2} \right)$$

через внешнюю сторону части поверхности  $z = 1 - (x^2 + y^2)$ , расположенной над плоскостью  $z = 0$ .

**Решение.** Поверхность интегрирования, которую мы обозначим как  $\Sigma_1$ , представляет собой часть кругового параболоида (рис. 201). Очевидно, что непосредственное вычисление поверхностного интеграла по поверхности  $\Sigma_1$  в силу громоздкого вида вектор-функции  $\vec{F}$  является трудоемкой задачей. Этим трудностям можно избежать, воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса. Исходя из того, что эта формула применима лишь для замкнутых поверхностей, замкнем поверхность  $\Sigma_1$  поверхностью  $\Sigma_2$ , представляющей собой круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ , лежащий в плоскости  $z = 0$  и ориентированный внешней нормалью  $\vec{n} = (0, 0, -1)$  (рис. 201).

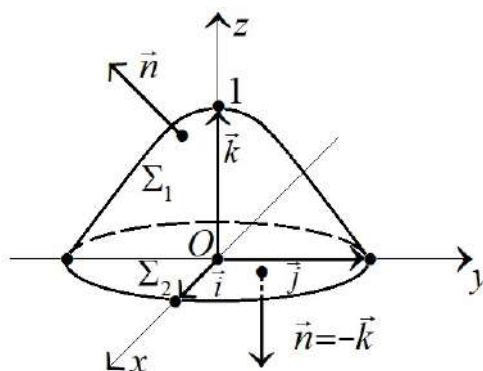


Рис. 201. Часть параболоида  $z = 1 - (x^2 + y^2)$

Пусть  $G$  – область, ограниченная замкнутой поверхностью  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ , тогда с учетом того, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 y}{1 + y^2} + 6y z^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (2x \operatorname{arctg} y) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -1 - \frac{2xz(1 + y)}{1 + y^2} \right) = \\ &= \frac{2xy}{1 + y^2} + \frac{2x}{1 + y^2} - \frac{2x(1 + y)}{1 + y^2} = 0, \end{aligned}$$

имеем

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 0.$$

С другой стороны, в силу свойства аддитивности поверхностного интеграла имеем равенство

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = 0.$$

Следовательно,

$$\iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = - \iint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma.$$

Так как в плоскости  $z = 0$

$$\vec{F} = \left( \frac{x^2 y}{1 + y^2}, 2x \operatorname{arctg} y, -1 \right), \quad \vec{n} = (0, 0, -1),$$

то  $(\vec{F}, \vec{n}) = 1$ . Поэтому

$$\iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = - \iint_{\Sigma_2} d\sigma = -\pi,$$

поскольку интеграл по поверхности  $\Sigma_2$  задает ее площадь, т. е. площадь круга единичного радиуса.



**Пример 21.7.** Тело  $G$  целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, показать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости, занимающей объем, равный объему тела  $G$ , и направлена вверх – закон Архимеда.

**Решение.** Согласно закону Паскаля, погруженная в жидкость площадка испытывает давление, направленное по нормали к ней и равное весу столбца жидкости, основанием которого служит площадка, а высота столбика равна глубине погружения.

Пусть тело  $G$  ограничено кусочно-гладкой поверхностью  $\Sigma$  и  $\mu$  – удельный вес жидкости. Систему координат  $xOy$  выберем так, чтобы свободная поверхность жидкости совпадала с плоскостью  $xOy$ , а ось  $Oz$  была направлена вверх. Рассмотрим элемент поверхности  $d\sigma$ , площадь которого равна  $dS$ , и пусть  $M(x, y, z) \in d\sigma$  – произвольная точка. Согласно закону Паскаля, мы можем записать приближенное равенство для выталкивающей силы:

$$d\vec{F}(M) = \mu z \vec{n}(M) d\sigma,$$

где  $\vec{n}(M)$  – единичный вектор нормали к поверхности  $\Sigma$  в точке  $M$ ;  $z$  – аппликата этой точки. Просуммировав по всем элементам  $d\sigma$  и совершив предельный переход, когда диаметры этих элементов стремятся к нулю, получим формулу для вычисления силы:

$$\vec{F} = \mu \iint_{\Sigma} z \vec{n} d\sigma = \mu \left[ \vec{i} \iint_{\Sigma} z \cos \alpha d\sigma + \vec{j} \iint_{\Sigma} z \cos \beta d\sigma + \vec{k} \iint_{\Sigma} z \cos \gamma d\sigma \right].$$

Применим к каждому интегралу формулу Остроградского–Гаусса:

$$\iint_{\Sigma} z \cos \alpha d\sigma = \iint_{\Sigma} z \cos \beta d\sigma = 0, \quad \iint_{\Sigma} z \cos \gamma d\sigma = \iiint_G dx dy dz = V,$$

где  $V$  – объем тела  $G$ .

Окончательно получим  $\vec{F} = \mu V \vec{k}$ , где  $\mu V$  – вес жидкости, занимающей объем тела  $G$ .

**Пример 21.8.** Вычислить интеграл Гаусса

$$J = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\vec{k}, \vec{r})}{|\vec{r}|^2} d\sigma, \quad (21.10)$$

где  $\Sigma$  – простая замкнутая гладкая поверхность, являющаяся границей области  $G$ ;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности  $\Sigma$  в ее точке  $M(x, y, z) \in \Sigma$ ;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, соединяющий точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  с точкой  $M(x, y, z)$ , и

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

**Решение.** Рассмотрим два случая: поверхность  $\Sigma$  не окружает и окружает точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

I. Пусть поверхность  $\Sigma$  не окружает точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

В этом случае, применив формулу Остроградского–Гаусса, с учетом того, что  $\cos(\vec{k}, \vec{r}) = (\vec{r}, \vec{n})/|\vec{r}|$ , получим

$$J = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \vec{n} \right) d\sigma = \iiint_G \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} dx dy dz = 0,$$

поскольку

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \frac{\vec{i}(x-x_0) + \vec{j}(y-y_0) + \vec{k}(z-z_0)}{|\vec{r}|^3} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x-x_0}{|\vec{r}|^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y-y_0}{|\vec{r}|^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z-z_0}{|\vec{r}|^3} \right) = \\ & = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - 3 \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{|\vec{r}|^5} = 3 \left( \frac{1}{|\vec{r}|^3} - \frac{1}{|\vec{r}|^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (21.11)$$

II. Пусть поверхность  $\Sigma$  окружает точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . В этом случае формула Остроградского–Гаусса не применима в силу неограниченности подынтегральной функции в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Поэтому интеграл (21.10) вычислим непосредственно. Для этого от пространственно односвязной области  $G$  с границей  $\partial G = \Sigma$  перейдем к двусвязной области  $G_1 = G \setminus \bar{G}_0$ , где  $G$  и  $G_0$  – односвязные области, причем  $\bar{G}_0 \subset G$  и  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G_0$ . Границей двусвязной области  $G_1$  будет  $\partial G_1 = \partial G \cup \partial G_0$ , где внешняя граница  $\partial G$  и внутренняя  $\partial G_0$  ориентированы нормальными, внешними к своим областям  $G$  и  $G_0$  (рис. 202).

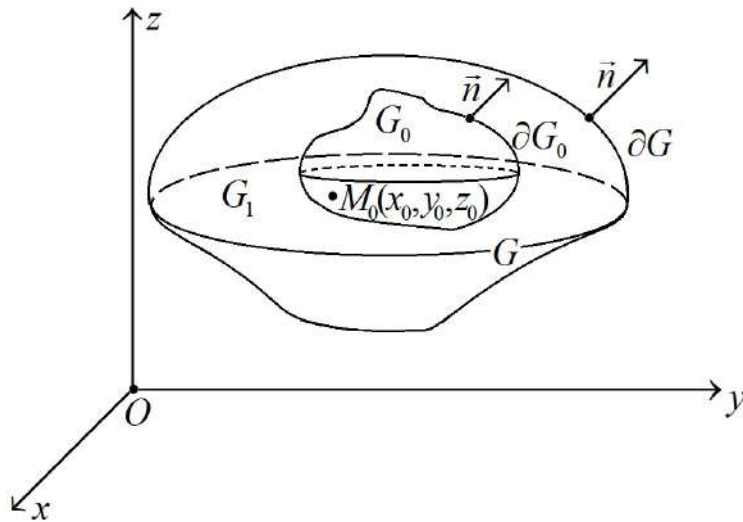


Рис. 202. Двусвязная область  $G_1$

В двусвязной области  $G_1$  равенство (21.11) также выполняется, и по формуле Остроградского–Гаусса для двусвязной области  $G_1$  имеем

$$\iint_{\partial G_1} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \vec{n} \right) d\sigma = \iiint_{G_1} \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} dx dy dz = 0.$$

Вместе с этим, приняв во внимание, что

$$\iint_{\partial G_1} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \vec{n} \right) d\sigma = \iint_{\partial G} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \vec{n} \right) d\sigma - \iint_{\partial G_0} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \vec{n} \right) d\sigma = 0,$$

придем к равенству

$$J = \iint_{\partial G} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \vec{n} \right) d\sigma = \iint_{\partial G_0} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \vec{n} \right) d\sigma,$$

из которого следует, что интеграл  $J$  не зависит от вида поверхности, окружающей точку  $M_0$ . Поэтому в качестве поверхности  $G_0$  можно взять сферу достаточно малого радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в точке  $M_0$ , и тогда

$$J = \iint_{\partial G_0} \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) d\sigma = \iint_{\partial G_0} \frac{1}{|\vec{r}|^2} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi,$$

поскольку  $\vec{r}$  и  $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$  коллинеарны на сфере  $\partial G_0$  и  $r = \varepsilon$ .

◇ Полученные результаты легко устанавливаются и непосредственно, если исходить из геометрического смысла интеграла Гаусса как меры телесного угла, под которым поверхность  $\Sigma$  видна из точки  $M_0$ . Действительно, если поверхность  $\Sigma$  замкнута и точка  $M_0$  лежит внутри ограниченной ею области  $G_0$ , то телесный угол  $J = 4\pi$ . Наоборот, если точка  $M_0$  лежит вне этой области, то углы видимости различных частей поверхности имеют разные знаки и взаимно уничтожаются, и, следовательно,  $J = 0$ .

### 21.3. Теорема Стокса

Пусть в ориентированном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  параметризацией

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\} \quad (21.12)$$

задана простая поверхность  $\Sigma$ , где  $D$  – замкнутая область, граница которой есть положительно ориентированный кусочно-гладкий контур  $\partial D$ . При обходе границы  $\partial D$  область  $D$  остается слева, а сама граница задается параметризацией

$$\partial D = \{(u, v) : u = u(t), v = v(t), \alpha \leq t \leq \beta\}. \quad (21.13)$$

Образом кривой  $\partial D$  при отображении (21.13) является положительно ориентированная граница  $\partial\Sigma$  поверхности  $\Sigma$ . Напомним, что ориентация поверхности  $\Sigma$ , задаваемая полем нормалей  $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ , называется *согласованной с положительной ориентацией границы  $\partial\Sigma$* . Иногда для наглядности поверхность  $\Sigma$  с границей  $\partial\Sigma = L$  будем называть *поверхностью, натянутой на контур  $L$* .

Для вектор-функции  $\vec{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , заданной в окрестности поверхности  $\Sigma$  с краем  $\partial\Sigma$  справедлива следующая теорема.

**Теорема 21.2 (Стокса).** *Если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывно дифференцируемы в окрестности простой поверхности  $\Sigma$  с краем  $\partial\Sigma$ , то имеют место формулы*

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx = \\ = \oint_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz, \end{aligned} \quad (21.14)$$

$$\iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} (\vec{F}, d\vec{r}), \quad (21.15)$$

где  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$  и

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad (21.16)$$

называемые *формулами Стокса в координатной (21.14) и векторной (21.15) формах*.

**Доказательство.** Воспользовавшись параметризацией (21.12) поверхности  $\Sigma$ , левую часть формулы (21.14) представим суммой трех двойных интегралов по компонентам  $P, Q, R$  соответственно:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (R_y - Q_z) dy dz + (P_z - R_x) dz dx + (Q_x - P_y) dy dx = \\ & = \iint_{\Sigma} \left[ (R_y - Q_z) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (P_z - R_x) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + (Q_x - P_y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv = \quad (21.17) \\ & = I_P + I_Q + I_R, \end{aligned}$$

где

$$I_P = \iint_D \left( P_z \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} - P_y \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) du dv, \quad (21.18a)$$

$$I_Q = \iint_D \left( Q_x \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} - Q_z \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) du dv, \quad (21.18б)$$

$$I_R = \iint_D \left( R_y \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - R_x \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) du dv. \quad (21.18в)$$

Рассмотрим каждый из этих интегралов. Начнем с интеграла (21.18a), положив в нем  $u = x, v = y$ . В этом случае поверхность  $\Sigma$  можно рассматривать как график функции  $z = z(x, y)$ , а область  $D$ , которую мы обозначим как  $D_{xy}$ , на плоскости  $xOy$  будет представлять собой область определения функции  $z = z(x, y)$ . Вычислив якобиан в (21.18a):

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} z_x & 1 \\ z_y & 0 \end{vmatrix} = -z_y, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

и, воспользовавшись правилом дифференцирования сложных функций,

$$P_z(x, y, z(x, y))z_y + P_y(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y} P_z(x, y, z(x, y)),$$

получим

$$\begin{aligned} I_P &= \iint_{D_{xy}} [P_z(x, y, z(x, y))(-z_y) - P_y(x, y, z(x, y))] dx dy = \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P_z(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (21.19)$$

Полученный двойной интеграл с помощью формулы Грина (19.3) можно заменить криволинейным интегралом по контуру  $L_{xy}$ , являющимся границей области  $D_{xy}$ :

$$\iint_{D_{xy}} \left[ -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z(x, y)) \right] dx dy = \oint_{L_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dx. \quad (21.20)$$

Это приведет к равенству

$$I_P = \oint_{L_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dx. \quad (21.21)$$

Теперь примем во внимание, что  $L_{xy}$  является границей области  $D_{xy}$ , которая, в свою очередь, является проекцией поверхности  $\Sigma$  на плоскость  $xOy$ . Но это означает, что  $L_{xy}$  есть ортогональная проекция границы  $\partial\Sigma$  на плоскость  $xOy$ . В силу этого интеграл (21.21) по плоской кривой  $L_{xy}$  можно записать криволинейным интегралом по пространственной кривой  $\partial\Sigma$ , которая является границей поверхности  $\Sigma$ , задаваемой уравнением  $z = z(x, y)$ :

$$I_P = \oint_{L_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dx = \oint_{\partial\Sigma} P(x, y, z) dx. \quad (21.22)$$

Аналогично доказывается справедливость еще двух формул для интегралов (21.18б) и (21.18в):

$$I_Q = \oint_{\partial\Sigma} Q(x, y, z) dy, \quad I_R = \oint_{\partial\Sigma} R(x, y, z) dz. \quad (21.23)$$

Подставив выражения (21.21), (21.22), (21.23) в (21.17), получим формулу Стокса (21.14) в координатной форме, доказав ее справедливость, а следовательно, и справедливость ее векторной формы (21.15).

Итак, формула Стокса доказана для простой гладкой поверхности, натянутой на кусочно-гладкий контур.

◇ Формулы Стокса (21.14), (21.15) остаются справедливыми и для кусочно-гладких поверхностей. Действительно, разрежем кусочно-гладкую поверхность на конечное число гладких простых кусков и запишем формулу Стокса для каждого из них. Далее, воспользовавшись правилом ориентации границ полученных кусков и свойством аддитивности поверхностных интегралов, убедимся в справедливости формулы Стокса и для кусочно-гладких поверхностей.

◇ Формула Стокса справедлива и в том случае, когда поверхность  $\Sigma$  является плоской областью, параллельной какой-либо координатной плоскости. Для такой поверхности формула Стокса переходит в формулу Грина. Так, например, если поверхность  $\Sigma$  параллельна плоскости  $xOy$ , то вектор нормали  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  и  $\oint_{\partial\Sigma} R dz = 0$ , и из равенства (21.14) мы получим формулу Грина:

$$\int_{\partial\Sigma} P dx + Q dy = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

◇ Если граница поверхности  $\Sigma$  состоит из нескольких контуров, то формула Стокса (21.14) остается в силе. При этом в правой части формулы (21.14) нужно записать сумму интегралов по всем контурам, пробегаемым в положительном направлении.

◇ Формула Стокса (21.14) остается справедливой, если в ней взять противоположную ориентацию контура  $\partial\Sigma$  и противоположную ориентацию поверхности  $\Sigma$ , поскольку в этом случае обе части равенства (21.14), (21.15) изменят знак на противоположный.

◇ Обозначение (21.16)

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

которое еще можно записать в операторной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \quad (21.24)$$

используется не только для сокращения записи, но и является важной характеристикой вектор-функции (или векторного поля)  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , которую мы рассмотрим ниже.

#### 21.4. Примеры применения формулы Стокса

**Пример 21.9.** Вычислить интеграл

$$\int_L x dx + z dy + x dz$$

по линии  $L$  пересечения цилиндра  $x^2 + y^2 = 9$  с плоскостью  $2x + y + z = 1$ .

**Решение.** Этот криволинейный интеграл уже был вычислен в примере 18.27. Здесь мы вычислим его, воспользовавшись формулой Стокса. Для этого для вектора  $\vec{F} = (x, z, x)$  найдем его ротор:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j} \cdot 1 + \vec{k} \cdot 0 = -\vec{i} - \vec{j}.$$

Сама поверхность  $\Sigma$ , ограниченная контуром  $L$ , есть часть плоскости с параметризацией

$$\Sigma = \{\vec{r}(x, y, z): x = x, y = y, z = 1 - 2x - y, (x, y) \in D\}, \\ D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Поскольку  $\vec{r}_x = (1, 0, -2)$ ,  $\vec{r}_y = (0, 1, -2)$ , то

$$(\vec{r}_x, \vec{r}_y, \operatorname{rot} \vec{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

и, следовательно, по формуле Стокса

$$\oint_L x dx + z dy + x dz = \iint_{\Sigma} (\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F}) d\sigma = \iint_D (\vec{r}_x, \vec{r}_y, \operatorname{rot} \vec{F}) dx dy = \\ = -3 \iint_D dx dy = -3S_D = -27\pi.$$

Здесь мы воспользовались тем, что полученный двойной интеграл дает площадь  $S_D$  области  $D$ , которой является окружность радиусом  $R = 3$ , и, следовательно,  $S_D = 9\pi$ .

Из сравнения двух решений очевидно, что данное решение намного проще решения из примера 18.27, использующего непосредственное вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.

**Пример 21.10.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{L_{AB}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz, \quad (21.25)$$

взятый по отрезку линии  $L_{AB}$ , заданной уравнениями

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi}t \quad (21.26)$$

от точки  $A(R, 0, 0)$  до  $B(R, 0, h)$ ,

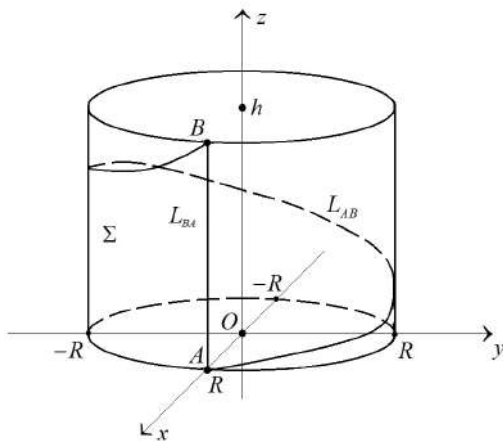


Рис. 203. Винтовая линия

**Решение.** Из (21.25) в силу соотношения  $x^2 + y^2 = R^2$  следует то, что линия  $L_{AB}$  представляет собой часть винтовой линии, расположенной на цилиндрической поверхности (рис. 203).

Для того чтобы воспользоваться формулой Стокса, кривую  $L_{AB}$  дополним отрезком  $L_{BA}$  до замкнутой кривой  $L$  (рис. 203). Теперь, исходя из явного вида вектор-функции  $\vec{F} = (P, Q, R)$ :

$$P = x^2 - yz, \quad Q = y^2 - xz, \\ R = z^2 - xy,$$

найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial y}(z^2 - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - xz) \right] - \vec{j} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x}(z^2 - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - yz) \right] - \\ &- \vec{k} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - yz) \right] = \vec{i} \cdot (-x + x) - \vec{j} \cdot (-y + y) + \vec{k} \cdot (-z + z) = 0. \end{aligned}$$

Все это позволяет записать равенство

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} (\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F}) d\sigma = 0,$$

из которого вытекает

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz + \int_{L_{BA}} P dx + Q dy + R dz = 0,$$

и, следовательно, искомое значение интеграла

$$J = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz = - \int_{L_{BA}} P dx + Q dy + R dz = - \int_h^0 z^2 dz = - \frac{z^3}{3} \Big|_h^0 = \frac{h^3}{3},$$

так как  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $dx = dy = 0$  на отрезке  $L_{BA}$ .

**Пример 21.11.** Вычислить интеграл

$$\oint_L (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2) dz, \quad (21.27)$$

взятый по линии  $L$  пересечения куба  $0 \leq x \leq h$ ,  $0 \leq y \leq h$ ,  $0 \leq z \leq h$  с плоскостью  $2x + y + z = 3h/2$ , ориентированной нормалью, составляющей острый угол с осью  $Oz$ .

**Решение.** Согласно условию задачи, контур  $L$  является линией пересечения куба и плоскости, т. е. представляет собой шестиугольник  $ABCDEF$  (рис. 204). Это означает, что непосредственное вычисление интеграла (21.27) сводится к вычислению шести криволинейных интегралов по каждому звену периметра  $ABCDEF$ . Этого можно избежать, если воспользоваться формулой Стокса. Тогда для вектор-функции  $\vec{F}(P, Q, R)$ ,  $P = z^2 - y^2$ ,  $Q = x^2 - y^2$ ,  $R = y^2 x^2$ , найдем

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - y^2 & x^2 - y^2 & y^2 - x^2 \end{vmatrix} = 2(y+z)\vec{i} + 2(x+z)\vec{j} + 2(x+y)\vec{k}.$$

Вместе с этим сама поверхность  $\Sigma$ , ограниченная контуром  $L$ , есть часть плоскости с параметризацией

$$\Sigma = \left\{ \vec{r}(x, y, z) : x = x, y = y, z = \frac{3h}{2} - x - y, (x, y) \in D_{xy} \right\},$$

где  $D_{xy}$  – шестиугольник  $ABC'D'E'F'$  на плоскости  $xOy$  (рис. 204). Поскольку  $\vec{r}_x = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{r}_y = (0, 1, -1)$  и  $\vec{N} = [\vec{r}_x, \vec{r}_y] = (1, 1, 1)$ , то поверхность  $\Sigma$  ориентирована нормальными, составляющими с осью  $Oz$  острый угол. С учетом этого, применяя формулу Стокса, получим:

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2) dz = \iint_{\Sigma} (\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F}) d\sigma = \\ &= \iint_{D_{xy}} (\vec{r}_x, \vec{r}_y, \operatorname{rot} \vec{F}) dx dy = \iint_{D_{xy}} 4[x + y + z(x, y)] dx dy = 6h \iint_{D_{xy}} dx dy = \\ &= 6h D_{xy} = 6h \left( h^2 - \frac{h^2}{4} \right) = \frac{9h^3}{3}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что  $z(x, y) = 3h/2 - x - y$ , а площадь  $S_{D_{xy}}$  как площадь шестиугольника  $ABC'D'E'F'$  равна  $h^2 - h^2/4 = 3h^2/4$ , что следует из рис. 204.



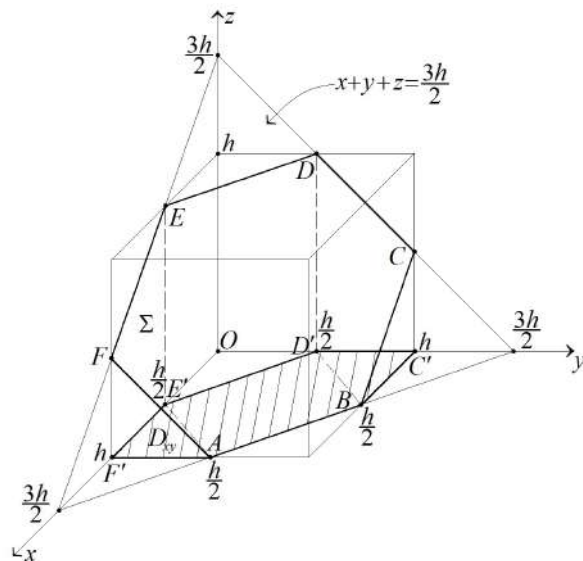


Рис. 204. Линия  $L$  пересечения куба  $0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq h, 0 \leq z \leq h$  с плоскостью  $2x + y + z = 3h/2$

**Пример 21.12.** Вычислить интеграл

$$I = \oint_L y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$$

вдоль замкнутой кривой  $L$ , заданной уравнениями  $x = R \cos t, y = R \cos 2t, z = R \cos 3t$  и пробегаемой в направлении возрастания параметра  $t$ .

**Решение.** При изменении параметра  $t$  от 0 до  $\pi$  подвижная точка  $M(x, y, z)$  пробегает часть кривой  $L$  от  $M_0(R, R, R)$  до точки  $M_1(-R, R, -R)$ , а при изменении  $t$  от  $\pi$  до  $2\pi$  точка  $M$  пробегает ту же самую часть кривой  $L$  в противоположном направлении – от точки  $M_1$  до точки  $M_0$  (рис. 205). Таким образом, точки замкнутой кривой  $L$  взаимно накладываются, и эта кривая не ограничивает никакую поверхность, следовательно,  $I = 0$ .

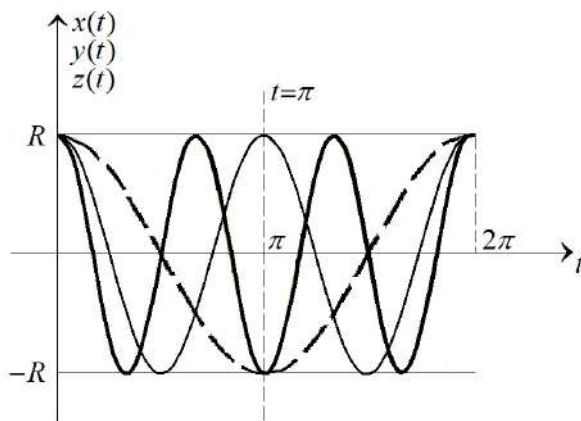


Рис. 205. Графики функций  $x(t), y(t)$  и  $z(t)$

**Пример 21.13.** Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_L yz \, dx + 2xz \, dy + y^2 \, dz$$

по контуру  $L$ , являющемуся линией пересечения сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  и цилиндра  $x^2 + z^2 = 16$ ,  $y > 0$ .

**Решение.** Контур  $L$ , являющийся линией пересечения сферы и цилиндра, представляет собой окружность

$$x^2 + z^2 = 16,$$

лежащую в плоскости  $y = 3$  (рис. 206). Это непосредственно следует из решения системы

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 25 &\Rightarrow 16 + y^2 = 25 \\ x^2 + z^2 = 16 &\Rightarrow y = 3 > 0. \end{aligned}$$

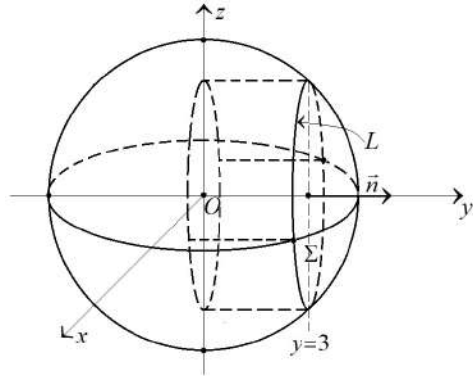


Рис. 206. Линия пересечения сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  и цилиндра  $x^2 + z^2 = 16$ ,  $y > 0$

Из рис. 206 видно, что из двух поверхностей, которые можно натянуть на окружность  $x^2 + z^2 = 16$ , наиболее простой является не сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ , а плоскость  $y = 3$ . Поскольку вектор нормали к плоскости  $y = 3$  имеет координаты  $\vec{n} = (0, 1, 0)$ , а

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & y^2 \end{vmatrix} = 2(y-x)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

то по формуле Стокса

$$\begin{aligned} I &= \oint_L yz \, dx + 2xz \, dy + y^2 \, dz = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma} y \, d\sigma = \iint_D 3 \, dz \, dx = 3\pi \cdot 4^2 = 48\pi, \end{aligned}$$

поскольку поверхность  $\Sigma$ , натянутая на контур  $L$ , совпадает со своей проекцией на плоскость  $y = 3$ , представляющей собой круг  $x^2 + z^2 = 16$ .

## 22. Элементы векторного анализа

Рассмотренные выше теоремы Остроградского–Гаусса, Стокса, Грина и следствия из них первоначально появились в теории функций нескольких переменных, причем в обычной числовой, или «скалярной», форме. Позднее в связи с проблемами математической физики возник так называемый векторный анализ со специфическими векторными дифференциальными операциями (градиент, дивергенция, ротор). А затем выяснилось, что задачи векторного анализа,

по существу, и есть задачи о тех или иных формах связи между дифференцированием и интегрированием в пространстве. Но язык векторного анализа был значительно удобнее и нагляднее, чем классический «скалярный» язык математиков, что привело к «векторной» перестройке всего этого раздела дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных. С другой стороны, и векторный анализ освободился от физической специфики, а набор его дифференциальных операций оказался исчерпывающим набором дифференциальных операций теории функций нескольких переменных.

### 22.1. Скалярные и векторные поля

Если каждой точке  $M$  пространства  $\mathbb{R}^3$  или некоторой области этого пространства поставлено в соответствие некоторое число  $f(M)$ , то говорят, что задано скалярное поле (например, поле давлений или температуры в атмосфере, поле плотности сплошного распределения массы в объеме  $V$  и т. д.).

Если каждой точке  $M$  пространства  $\mathbb{R}^3$  или области этого пространства поставлен в соответствие некоторый вектор  $\vec{F}(M)$ , то говорят, что задано векторное поле  $\vec{F} = (P(M), Q(M), R(M))$  (например, поле тяготения системы масс, системы зарядов, поле плотности тока, поле магнитных сил и т. п.).

Положение точки  $M$  в выбранной системе координат будем обозначать или ее радиус-вектором  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , или набором ее декартовых координат:  $f(\vec{r})$ ,  $f(x, y, z)$ ,  $\vec{F}(\vec{r})$ ,  $\vec{F}(x, y, z)$ .

◇ Как видим, определения скалярного и векторного полей дословно совпадают с определением скалярной функции и вектор-функции нескольких переменных. Однако, согласно установившейся традиции, векторный анализ оперирует понятиями скалярных и векторных полей, изначально придавая им некоторый физический смысл.

Рассмотрим различные типы векторных полей.

◆ Векторное поле будем называть *однородным*, если  $\vec{F}(\vec{r})$  – постоянный вектор, т. е. его составляющие  $P, Q, R$  – постоянные величины.

◆ Векторное поле будем называть *плоскопараллельным*, если возможно выбрать такую декартову систему координат  $Oxyz$ , в которой вектор  $\vec{F}(\vec{r})$  будет зависеть лишь от двух координат, например от  $x$  и  $y$ :  $F_x(\vec{r}) = P(x, y)$ ,  $F_y(\vec{r}) = Q(x, y)$ ,  $F_z(\vec{r}) = R(x, y)$ . Если одна из компонент равна нулю, то векторное поле будем называть *плоским*. Например, если  $R(\vec{r}) = 0$ , то для такого плоского поля будет справедливо представление

$$\vec{F}(\vec{r}) = P(\vec{r})\vec{i} + Q(\vec{r})\vec{j}.$$

◆ Векторное поле будем называть *центральный полем*, если можно выбрать начало координат так, что для поля возможно представление  $\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\vec{r}$ .

◆ Векторное поле будем называть *осесимметричным*, если существует такая цилиндрическая система координат  $O\rho\varphi z$ , для которой в каждой точке  $\vec{r}$  вектор поля  $\vec{F}(\vec{r})$  зависит лишь от  $\rho$  и  $z$  (но не от  $\varphi$ ):  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\rho, z)$ . Осесимметричное поле будем называть *цилиндрическим*, если оно будет зависеть только от  $\rho$ :  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\rho)$ .

### 22.2. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей

◆ *Поверхностью уровня* (или *изоповерхностью*) скалярного поля  $f(\vec{r})$  называется геометрическое место точек, в которых функция  $f(\vec{r})$  имеет одно и то же значение. Таким образом, уравнение изоповерхности имеет вид  $f(\vec{r}) = c$ ,

где  $c$  – константа, своя для каждой изоповерхности. В случае двумерного поля понятие изоповерхности заменяется понятием линии уровня (или изолинии).

Геометрически поверхности уровня соответствуют  $c$ -поверхностям функций нескольких переменных:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ . При  $n = 2, 3$  имеем изолинии и изоповерхности скалярных полей, т. е. линии и поверхности, на которых физический процесс, определенный данной величиной, происходит одинаково.

**Пример 22.1.** Найти поверхности уровня скалярных полей

$$1) f = x^2 + y^2 - z^2, \quad 2) f = e^{(\vec{a}, \vec{r})},$$

где  $\vec{a}$  – постоянный вектор.

**Решение 1.** Согласно определению, поверхность уровня описывается уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = c,$$

где  $c$  – константа. Значение  $c = 0$  соответствует круговому конусу

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Значение  $c = R^2 > 0$  соответствует семейству однополостных гиперboloидов, ось которых совпадает с осью  $Oz$ :

$$x^2 + y^2 = z^2 + R^2.$$

При  $c = -R^2 < 0$  получим семейство двуполостных гиперboloидов вращения с осью симметрии  $Oz$ :

$$x^2 + y^2 = z^2 - R^2.$$

2. В этом случае

$$e^{(\vec{a}, \vec{r})} = c = R^2 > 0,$$

откуда

$$(\vec{a}, \vec{r}) = \ln R^2$$

или

$$a_x x + a_y y + a_z z = \ln R^2,$$

что соответствует семейству параллельных плоскостей.

♦ *Векторными* (или *силовыми*) линиями векторного поля  $\vec{F}(\vec{r})$  называются кривые, в каждой точке которых вектор  $\vec{F}(\vec{r})$  направлен по касательной к кривой.

Чтобы исследовать заданное векторное поле  $\vec{F}(\vec{r})$ , необходимо выделить пространственную область  $G$  и рассмотреть картину силовых линий в этом объеме. На рис. 207 изображены несколько типов расположения силовых линий (пунктиром изображена граница  $\partial G$  области  $G$ ).

Для конкретных векторных полей  $\vec{F} = (P, Q, R)$  силовые линии можно найти из решения некоторой системы дифференциальных уравнений. Действительно, возьмем произвольную точку  $M \in G$  и предположим, что  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  – параметрические уравнения векторной линии поля, проходящей через эту точку. Поскольку вектор  $\vec{\tau}$  – касательный к этой кривой в точке  $M$  – имеет вид  $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ , а вектор  $\vec{F}$  направлен вдоль  $\vec{\tau}$ , то в силу их коллинеарности имеем

$$\frac{x'(t)}{P} = \frac{y'(t)}{Q} = \frac{z'(t)}{R},$$

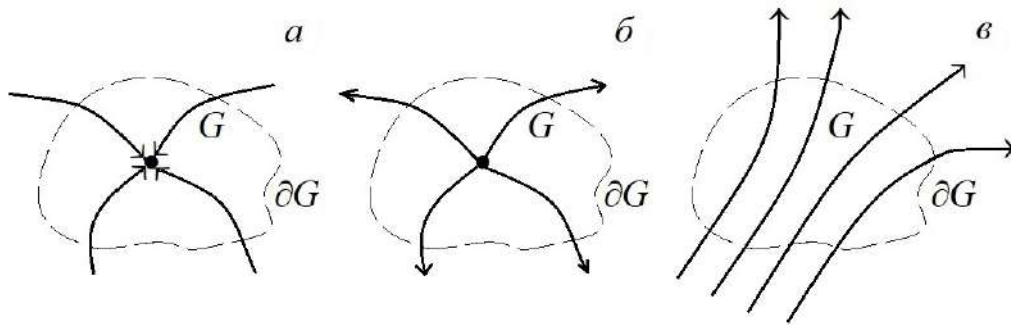


Рис. 207. Силовые линии векторного поля в области  $G$ : а) сток; б) источник; в) свободная от источников и стоков

откуда

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = dt. \quad (22.1)$$

Если в некоторой области  $G$  для системы (22.1) выполнены условия существования и единственности решения, то через каждую точку  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$  проходит единственная векторная линия

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \varphi_1(x_0, y_0, z_0), \\ \varphi_2(x, y, z) &= \varphi_2(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

где  $\varphi_1(x, y, z) = c_1$ ,  $\varphi_2(x, y, z) = c_2$  – два первых линейно независимых интеграла системы (22.1).

**Пример 22.2.** Найти силовые линии векторного поля  $\vec{F} = [\vec{N}, \vec{r}]$ , где  $\vec{N} = (A, B, C)$  – постоянный вектор.

**Решение.** Исходя из условий задачи

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ x & y & z \end{vmatrix} = (Bz - Cy)\vec{i} + (Cx - Az)\vec{j} + (Ay - Bx)\vec{k},$$

запишем

$$P(x, y, z) = Bz - Cy, \quad Q(x, y, z) = Cx - Az, \quad R(x, y, z) = Ay - Bx,$$

и, следовательно, согласно (22.1), имеем систему

$$\frac{dx}{Bz - Cy} = \frac{dy}{Cx - Az} = \frac{dz}{Ay - Bx}.$$

Исходя из свойств пропорций, методом интегрируемых комбинаций найдем

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x(Bz - Cy) + y(Cx - Az) + z(Ay - Bx)} = \frac{dz}{Ay - Bx}$$

и

$$\frac{A dx + B dy + C dz}{A(Bz - Cy) + B(Cx - Az) + C(Ay - Bx)} = \frac{dz}{Ay - Bz},$$

откуда

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{0} = \frac{dz}{Ay - Bz},$$

$$\frac{A dx + B dy + C dz}{0} = \frac{dz}{Ay - Bz},$$

и, следовательно,

$$x dx + y dy + z dz = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

$$A dx + B dy + C dz = d(Ax + By + Cz) = 0.$$

Интегрирование этих выражений дает два первых линейно независимых интеграла:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (22.2a)$$

$$Ax + By + Cz = D, \quad (22.2b)$$

где  $R^2$  и  $D$  – произвольные постоянные.

Таким образом, уравнения (22.2, а, б) определяют силовые линии векторного поля, которые являются линиями пересечения сфер (22.2а) с плоскостями (22.2б), перпендикулярными вектору  $\vec{N} = (A, B, C)$ .

**Пример 22.3.** Найти векторную линию поля  $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ , проходящую через точку  $M_0(1, 0, 0)$ .

**Решение.** Согласно (22.1), имеем систему для нахождения векторных линий

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = dz.$$

Из уравнения

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x dx = -y dy$$

найдем первый интеграл

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если ввести параметр  $t$ , то будем иметь  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ . С учетом этого уравнение

$$\frac{dy}{x} = dz$$

запишется как

$$\frac{R \cos t dt}{R \cos t} = dz,$$

откуда  $dz = -dt$  и, следовательно,  $z = t + z_0$ , где  $z_0$  – произвольная постоянная.

Таким образом, параметрические уравнения векторных линий

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = t + z_0$$

представляют семейство винтовых линий. По любому из них можно определить значение параметра  $t$ , соответствующее точке  $M_0(1, 0, 0)$ , и это значение  $t = 0$ . Но тогда  $R = 1$ ,  $z_0 = 0$ , и мы окончательно получим:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$

### 22.3. Дифференциальные характеристики скалярных и векторных полей

Для скалярного и векторного полей сформулируем некоторые известные понятия дифференциального исчисления на геометрическом языке.

◆ Скалярное поле  $f(M)$  называется *дифференцируемым в точке  $M_0$* , если найдется такой вектор  $\vec{g}$ , что

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = (\vec{g}, \Delta\vec{r}) + o(|\Delta\vec{r}|) \text{ при } |\Delta\vec{r}| = |\overrightarrow{MM_0}| \rightarrow 0, \quad (22.3)$$

сам вектор  $\vec{g}$  называется *производной скалярного поля  $f$*  и обозначается как  $\vec{g} = \vec{\nabla}f$ .

Объяснение такого обозначения будет приведено ниже. Здесь же мы поясним определение (22.3), используя координатные обозначения  $M(x, y, z)$ ,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} = \Delta\vec{r} &= \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k} = (x - x_0) \cdot \vec{i} + (y - y_0) \cdot \vec{j} + (z - z_0) \cdot \vec{k}, \\ |\overrightarrow{M_0M}| = |\Delta\vec{r}| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \end{aligned}$$

и формулу (22.3) можно будет записать как

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = g_1(x - x_0) + g_2(y - y_0) + g_3(z - z_0) + \\ &+ o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}) \text{ при } (x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (22.4)$$

Отсюда следует, что функция  $f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и что

$$g_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad g_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \quad g_3 = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \quad (22.5)$$

С помощью символического вектора

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (22.6)$$

являющегося одновременно дифференциальным оператором, производную  $\vec{g}$  можно записать как

$$\vec{g} = \vec{\nabla}f = \vec{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (22.6a)$$

В дальнейшем с оператором  $\vec{\nabla}$  (22.6) будем обращаться как с обычным вектором, договорившись, что он действует как дифференциальный оператор на функции, стоящие в записи справа от оператора  $\vec{\nabla}$ , а с функциями и векторами, стоящими в записи слева, перемножается как обычный оператор. Например, пусть  $\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}$  — произвольный вектор, тогда с помощью дифференциального оператора

$$(\vec{l}, \vec{\nabla}) = l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (22.7)$$

можем записать

$$(\vec{l}, \vec{\nabla})f = l_x \frac{\partial f}{\partial x} + l_y \frac{\partial f}{\partial y} + l_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (22.8)$$

Если  $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  – единичный вектор в направлении вектора  $\overrightarrow{M_0M} = \Delta\vec{r}$ , то формула (22.8) определяет производную скалярного поля по направлению  $\vec{l}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = (\vec{l}, \vec{\nabla})f, \quad (22.9)$$

поскольку, согласно определению и с учетом (22.3) и (22.6a),

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{|\Delta\vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \lim_{|\Delta\vec{r}| \rightarrow 0} \frac{(\Delta\vec{r}, \vec{g}) + o(|\Delta\vec{r}|)}{|\Delta\vec{r}|} = (\vec{l}, \vec{g}) = (\vec{l}, \vec{\nabla})f.$$

◆ Векторное поле  $\vec{F}(M)$  называется *дифференцируемым в точке  $M_0$* , если существует такое линейное преобразование  $\mathcal{A}$ , что

$$\vec{F}(M) - \vec{F}(M_0) = \mathcal{A}(\overrightarrow{M_0M}) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \text{ при } M \rightarrow M_0. \quad (22.10)$$

Само линейное преобразование  $\mathcal{A}$  называется *производной векторного поля в точке  $M_0$*  и обозначается через  $\vec{F}'(M_0)$ .

Спроектировав векторное уравнение (22.10) на координатные оси, получим три равенства:

$$F_i(M) - F_i(M_0) = \mathcal{A}_{i1}(x - x_0) + \mathcal{A}_{i2}(y - y_0) + \mathcal{A}_{i3}(z - z_0) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \quad (22.11)$$

при  $M \rightarrow M_0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $\mathcal{A}_{ij}$  – матрица линейного преобразования  $\mathcal{A}$ .

Из равенств (22.11) следует, что компоненты  $F_i(M)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , дифференцируемы в точке  $M_0$ . Верно и обратное утверждение. Из дифференцируемости компонент  $F_i(M)$  следует дифференцируемость и векторного поля в точке  $M_0$ , и, следовательно, равенств

$$F_i(M) - F_i(M_0) = (\overrightarrow{M_0M}, \vec{\nabla})F_i(M_0) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \text{ при } M \rightarrow M_0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Эти равенства можно записать в векторной форме:

$$\vec{F}(M) - \vec{F}(M_0) = (\overrightarrow{M_0M}, \vec{\nabla})\vec{F}(M_0) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \text{ при } M \rightarrow M_0. \quad (22.12)$$

Из (22.11) и (22.12) следует, что

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{M_0M}) = (\overrightarrow{M_0M}, \vec{\nabla})\vec{F}(M_0).$$

С учетом этого производная векторного поля в точке  $M_0$  по направлению  $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  определится так же, как и производная по направлению  $\vec{l}$  для скалярного поля:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{l}} = (\vec{l}, \vec{\nabla})\vec{F}(M_0). \quad (22.13)$$

◇ Если скалярное поле  $f$  и векторное поле  $\vec{F}$  дифференцируемы в точке  $M_0$ , то представления (22.3) и (22.11) единственны.

Действительно, предположим, что существуют два различных представления (22.3):

$$\Delta f = (\vec{g}, \Delta\vec{r}) + o_1(|\Delta\vec{r}|) \text{ и } \Delta f = (\vec{h}, \Delta\vec{r}) + o_2(|\Delta\vec{r}|).$$



Тогда при  $\Delta\vec{r} \neq 0$  можно записать:

$$\frac{(\vec{g} - \vec{h}, \Delta\vec{r})}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{o_1(|\Delta\vec{r}|) - o_2(|\Delta\vec{r}|)}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{o(|\Delta\vec{r}|)}{|\Delta\vec{r}|}$$

или

$$(\vec{g} - \vec{h}, \vec{l}) = \frac{o(|\Delta\vec{r}|)}{|\Delta\vec{r}|}, \quad \vec{l} = \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}.$$

Так как при  $\Delta\vec{r} \rightarrow 0$  величина  $o(|\Delta\vec{r}|)/|\Delta\vec{r}| \rightarrow 0$ , то  $(\vec{g} - \vec{h}, \vec{l}) = 0$  для любого  $\vec{l}$ , а значит,  $\vec{g} = \vec{h}$ .

Аналогично и для векторного поля  $\vec{F}$ .

◇ Определения (22.3) и (22.11) дифференцируемости скалярного и векторного полей имеют инвариантный, не зависящий от выбора системы координат характер. Поэтому вектор  $\varepsilon g$  и линейное преобразование  $\mathcal{A}$  представляют собой инварианты скалярного и, соответственно, векторного полей.

**Пример 22.4.** Для скалярного поля

$$f = x^3 e^y + z^2 y$$

найти его производную и производную по направлению  $\vec{l}(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ .

**Решение.** Согласно определениям (22.6a) и (22.9), имеем

$$\begin{aligned} f' = \vec{\nabla} f &= \vec{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{i} \cdot 3x^2 e^y + \vec{j} \cdot (x^3 e^y + z^2) + \vec{k} \cdot 2zy, \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} &= (\vec{l}, \vec{\nabla}) f = \frac{3}{2} x^3 e^y + \frac{1}{2} (x^3 e^y + z^2) + \sqrt{2} zy. \end{aligned}$$

**Пример 22.5.** Найти производную векторного поля

$$\vec{F} = x\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\vec{k}$$

по направлению  $\vec{l}(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$  в произвольной точке  $M(x, y, z)$ .

**Решение.** Согласно (22.13), имеем

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{l}} = (\vec{l}, \vec{\nabla}) \vec{F} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{F} = \frac{1}{2} \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j} + \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + \sqrt{2} z^2) \cdot \vec{k}.$$

◇ Положив последовательно  $\vec{l} = \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , найдем:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{i}} = (\vec{i}, \vec{\nabla}) \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{F}; \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{j}} = (\vec{j}, \vec{\nabla}) \vec{F} = \frac{\partial}{\partial y} \vec{F}; \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{k}} = (\vec{k}, \vec{\nabla}) \vec{F} = \frac{\partial}{\partial z} \vec{F}.$$

Если  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , то матрица линейного преобразования векторного поля запишется как

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 2y & 0 \\ 3x^3 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}.$$

### 22.4. Оператор Гамильтона и дифференциальные операции векторного анализа

Введенные выше операции дифференцирования скалярных и векторных полей позволяют ввести для них и другие дифференциальные характеристики, необходимые для работы в физических приложениях. Их, как и производные, проще всего определить с помощью оператора  $\vec{\nabla}$  (22.6). Так, например, простейшие из них, такие как  $\overrightarrow{\text{grad}}f$ ,  $\text{div } \vec{F}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}f &= \vec{\nabla}f = \left( \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}; \\ \text{div } \vec{F} &= (\vec{\nabla}, \vec{F}) = \left( \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \vec{i} \cdot P + \vec{j} \cdot Q + \vec{k} \cdot R \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};\end{aligned}\quad (22.14)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} &= [\vec{\nabla}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Эти формулы записаны в соответствии с установленной выше договоренностью, что оператор  $\vec{\nabla}$  на функции, стоящие справа от него, действует как дифференциальный оператор, а со скалярами и векторами, стоящими в записи слева, перемножается как обычный вектор, давая в результате новый дифференциальный оператор. Например,

$$(\vec{\nabla}, \vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

есть  $\text{div } \vec{F}$ , а

$$(\vec{F}, \vec{\nabla}) = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}$$

есть дифференциальный оператор.

В тех случаях, когда в операциях с  $\vec{\nabla}$  участвуют суммы или произведения функций и векторов, будем действовать с учетом правил векторной алгебры и правил дифференцирования.

Так, применение  $\vec{\nabla}$  к линейной комбинации скаляров и векторов с учетом (22.14) осуществляется по правилам:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= c_1 \vec{\nabla} f_1 + c_2 \vec{\nabla} f_2 = c_1 \overrightarrow{\text{grad}}f_1 + c_2 \overrightarrow{\text{grad}}f_2; \\ (\vec{\nabla}, c_1 \vec{F}_1 + c_2 \vec{F}_2) &= c_1 (\vec{\nabla}, \vec{F}_1) + c_2 (\vec{\nabla}, \vec{F}_2) = c_1 \text{div } \vec{F}_1 + c_2 \text{div } \vec{F}_2; \\ [\vec{\nabla}, c_1 \vec{F}_1 + c_2 \vec{F}_2] &= c_1 [\vec{\nabla}, \vec{F}_1] + c_2 [\vec{\nabla}, \vec{F}_2] = c_1 \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}_1 + c_2 \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}_2.\end{aligned}$$

Действие оператора  $\vec{\nabla}$  на сложные функции  $f(u)$ ,  $u = u(x, y, z)$  будет описываться формулой

$$\vec{\nabla}f(u) = f'_u \vec{\nabla} = f'_u \cdot \overrightarrow{\text{grad}}u. \quad (22.15)$$

В частном случае центрального поля:

$$u = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

из (22.15) получим

$$\vec{\nabla} f(|\vec{r}|) = f'_{|\vec{r}|} \vec{\nabla} |\vec{r}| = f'_{|\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = f'_{|\vec{r}|} \vec{n},$$

где  $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$  – единичный вектор нормали к поверхностям  $f(|\vec{r}|)$ , представляющим собой совокупность сферических поверхностей  $|\vec{r}| = R$ .

И наконец, применяя оператор  $\vec{\nabla}$  к произведениям векторов и скаляров, будем пользоваться правилом дифференцирования произведений. Для этого результат применения оператора  $\vec{\nabla}$  к произведению запишем в виде суммы произведений. В каждом слагаемом этой суммы оператор  $\vec{\nabla}$  действует только на один из сомножителей, который мы подчеркнем. Далее каждое слагаемое преобразуем так, чтобы все неподчеркнутые сомножители оказались слева от  $\vec{\nabla}$ . После этого подчеркивание убирается. Поясним это на примере одномерного оператора  $\vec{\nabla}$ , когда он является просто оператором дифференцирования  $\nabla = d/dx$ . В этом случае предлагаемое правило сводится к правилу нахождения производной произведения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f_1 f_2) &= \nabla(f_1 f_2) = \nabla(\underline{f_1} f_2) + \nabla(f_1 \underline{f_2}) = f_2(\nabla f_1) + f_1(\nabla f_2) = \\ &= f_2(\nabla f_1) + f_1(\nabla f_2) = f_2 \frac{df_1}{dx} + f_1 \frac{df_2}{dx}. \end{aligned}$$

Можно показать, что предложенное правило не приводит к ошибкам в формулах, линейных относительно оператора  $\vec{\nabla}$ . На нижеследующих примерах можно усвоить некоторые элементы техники обращения с оператором  $\vec{\nabla}$ . Заметим, что в справедливости полученных формул можно убедиться непосредственной проверкой.

1.  $\text{grad}(f_1 f_2) = \vec{\nabla}(f_1 f_2) = \vec{\nabla}(\underline{f_1} f_2) + \vec{\nabla}(f_1 \underline{f_2}) = f_2(\nabla f_1) + f_1(\nabla f_2) =$   
 $= f_2 \text{grad } f_1 + f_1 \text{grad } f_2;$
2.  $\text{div}(f \vec{F}) = (\vec{\nabla}, f \vec{F}) = (\vec{\nabla}, \underline{f} \vec{F}) + (\vec{\nabla}, f \underline{\vec{F}}) = (\vec{\nabla} f, \vec{F}) + f(\vec{\nabla}, \vec{F}) =$   
 $= (\vec{F}, \vec{\nabla} f) + f(\vec{\nabla}, \vec{F}) = (\vec{F}, \vec{\nabla} f) + f(\vec{\nabla}, \vec{F}) = (\vec{F}, \text{grad } f) + f \text{div } \vec{F};$
3.  $\text{rot}(f \vec{F}) = [\vec{\nabla}, f \vec{F}] = [\vec{\nabla}, \underline{f} \vec{F}] + [\vec{\nabla}, f \underline{\vec{F}}] = [\vec{\nabla} f, \vec{F}] + f[\vec{\nabla}, \vec{F}] =$   
 $= -[\vec{F}, \vec{\nabla} f] + f[\vec{\nabla}, \vec{F}] = -[\vec{F}, \text{grad } f] + f \text{rot } \vec{F};$
4.  $\text{div}[\vec{F}_1, \vec{F}_2] = (\vec{\nabla}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{\nabla}, \underline{\vec{F}_1}, \vec{F}_2) + (\vec{\nabla}, \vec{F}_1, \underline{\vec{F}_2}) =$   
 $= (\vec{F}_2, \vec{\nabla}, \underline{\vec{F}_1}) - (\vec{F}_1, \vec{\nabla}, \underline{\vec{F}_2}) = (\vec{F}_2, [\vec{\nabla}, \vec{F}_1]) - (\vec{F}_1, [\vec{\nabla}, \vec{F}_2]) =$   
 $= (\vec{F}_2, \text{rot } \vec{F}_1) - (\vec{F}_1, \text{rot } \vec{F}_2).$

Здесь мы воспользовались свойствами смешанного произведения векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}).$$

Ниже мы будем пользоваться еще и свойствами двойного векторного произведения:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c},$$

чтобы получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
5. \operatorname{rot}[\vec{F}_1, \vec{F}_2] &= [\vec{\nabla}, [\vec{F}_1, \vec{F}_2]] = [\vec{\nabla}, [\vec{F}_1, \vec{F}_2]] + (\vec{\nabla}, [\vec{F}_1, \vec{F}_2]) = -[\vec{\nabla}, [\vec{F}_2, \vec{F}_1]] + \\
&+ [\vec{\nabla}, [\vec{F}_1, \vec{F}_2]] = -\vec{F}_2(\vec{\nabla}, \vec{F}_1) + (\vec{\nabla}, \vec{F}_2)\vec{F}_1 + \vec{F}_1(\vec{\nabla}, \vec{F}_2) - (\vec{\nabla}, \vec{F}_1)\vec{F}_2 = \\
&= -\vec{F}_2(\vec{\nabla}, \vec{F}_1) + (\vec{F}_2, \vec{\nabla})\vec{F}_1 + \vec{F}_1(\vec{\nabla}, \vec{F}_2) - (\vec{\nabla}, \vec{F}_1)\vec{F}_2 = \\
&= -\vec{F}_2 \operatorname{div} \vec{F}_1 + (\vec{F}_2, \vec{\nabla})\vec{F}_1 + \vec{F}_1 \operatorname{div} \vec{F}_2 - (\vec{F}_1, \vec{\nabla})\vec{F}_2; \\
6. [\vec{F}_2, \operatorname{rot} \vec{F}_1] &= [\vec{F}_2, [\vec{\nabla}, \vec{F}_1]] = \vec{\nabla}(\vec{F}_2, \vec{F}_1) - (\vec{F}_2, \vec{\nabla})\vec{F}_1; \\
[\vec{F}_1, \operatorname{rot} \vec{F}_2] &= \vec{\nabla}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) - (\vec{F}_1, \vec{\nabla})\vec{F}_2.
\end{aligned}$$

Сложив эти равенства, получим

$$[\vec{F}_2, \operatorname{rot} \vec{F}_1] + [\vec{F}_1, \operatorname{rot} \vec{F}_2] = \vec{\nabla}(\vec{F}_2, \vec{F}_1) + \vec{\nabla}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) - (\vec{F}_2, \vec{\nabla})\vec{F}_2 - (\vec{F}_1, \vec{\nabla})\vec{F}_2$$

или

$$\vec{\nabla}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = [\vec{F}_2, \operatorname{rot} \vec{F}_1] + [\vec{F}_1, \operatorname{rot} \vec{F}_2] + (\vec{F}_1, \vec{\nabla})\vec{F}_2 + (\vec{F}_2, \vec{\nabla})\vec{F}_1.$$

При  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$  получим

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{F}, \vec{F}) = [\vec{F}, \operatorname{rot} \vec{F}] + (\vec{F}, \vec{\nabla})\vec{F}$$

и т. д. С помощью этих формул составим таблицу дифференциальных операций 2-го порядка для основных дифференциальных характеристик скалярных и векторных полей.

Таблица 1

	Скалярное поле $f$	Векторное поле $\vec{F}$	
	$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$	$\operatorname{div} \vec{F}$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F}$
$\overrightarrow{\operatorname{grad}}$		$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{F})$	
$\operatorname{div}$	$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \Delta f$		$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F}) = 0$
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = 0$		$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$

Приведём доказательства свойств из таблицы 1.

$$1. \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} f) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \Delta f.$$

2.  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla} f] = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]f = 0 \cdot f = 0$ . Во-первых, это вытекает из свойств векторного произведения, во-вторых, проверяется непосредственно:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) - \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

3.  $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F}) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}, \vec{F}) = 0$  следует из свойств смешанного произведения векторов или проверяется непосредственно.

4.  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla} \vec{F}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{F}) - (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) \vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$ , что вытекает из свойств двойного векторного произведения векторов.

◇ Обозначение  $\vec{\nabla} f$  было введено ирландским математиком У.Р. Гамильтоном в 1853 г. Почти через полвека, в 1892 г., английский физик и инженер О. Хевисайд ввел для символа  $\vec{\nabla}$  название «оператор Гамильтона» и более короткое – «набла» (от греч.  $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$  – арфа, форму которой напоминает символ  $\nabla$ ). Понятие  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$  было введено английским физиком Д.К. Максвеллом в 1873 г. (от лат. gradus – шаг, gradientis – шагающий, «градусник»). Два других термина: дивергенция, ротор, и обозначения  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$  (от лат. divergentia – расхожимость, roto – вращаю) были введены в 1878 г. английским математиком У.К. Клиффордом. Похожие понятия «конвергенция, вихрь» и обозначения  $\operatorname{conv}$  и  $\operatorname{curl}$  (от лат. convergo – сходимость, curl – завиток, вихрь) были введены Д.К. Максвеллом в 1873 г. Так, дивергенция и конвергенция связаны соотношением  $\operatorname{conv} \vec{F} = -\operatorname{div} \vec{F}$ , а ротор и вихрь просто совпадают:  $\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{curl} \vec{F}$ . Сейчас обозначение  $\operatorname{conv}$  не используется, а обозначение  $\operatorname{curl}$  используется достаточно редко.

### 22.5. Дивергенция векторного поля

В теореме 21.1 формула Остроградского была записана в двух формах: координатной (21.2) и векторной (21.3), причем последняя, вообще говоря, была приведена в силу ее компактности и удобства использования в приложениях. Оказывается, что векторная форма записи является еще и более удобной для выяснения ее физического смысла.

Действительно, дивергенция поля  $\vec{F}(P, Q, R)$  в виде

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\vec{\nabla}, \vec{F}), \quad (22.16)$$

возникшая автоматически при выводе формулы Остроградского, является, по сути, дифференциальной характеристикой поля  $\vec{F}$ . Чтобы выяснить другую интерпретацию  $\operatorname{div} \vec{F}$ , рассмотрим область  $G$ , в которой задано непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\vec{F}(M)$ . Пусть  $G_\varepsilon(M)$  есть шар радиусом  $\varepsilon$  с центром в точке  $M \in G_\varepsilon \subset G$ , а  $\partial G_\varepsilon(M)$  – его граница – сфера, ориентированная внешней нормалью  $\vec{n}$ . Тогда, согласно формуле Остроградского в векторной форме (21.3), имеем

$$\iiint_{G_\varepsilon(M)} \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \iint_{\partial G_\varepsilon(M)} (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma.$$

Применив к тройному интегралу теорему о среднем, мы перепишем эту формулу так:

$$(\operatorname{div} \vec{F}) \Big|_{\overline{M}} m(G_\varepsilon(M)) = \iint_{\partial G_\varepsilon(M)} (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma,$$

где  $(\operatorname{div} \vec{F}) \Big|_{\overline{M}}$  есть значение дивергенции поля  $\vec{F}$  в некоторой точке  $\overline{M}$  внутри сферы  $G_\varepsilon(M)$ . Следовательно,

$$(\operatorname{div} \vec{F}) \Big|_{\overline{M}} = \frac{\iint_{\partial G_\varepsilon(M)} (\vec{F}, \vec{n}) \, d\sigma}{m(G_\varepsilon(M))}. \quad (22.17)$$

Перейдя в (22.17) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и воспользовавшись непрерывностью функции  $\operatorname{div} \vec{F}$  в точке  $M$ , можем записать:

$$(\operatorname{div} \vec{F}) \Big|_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial G_\varepsilon(M)} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma}{m(G_\varepsilon(M))}. \quad (22.18)$$

Учитывая, что в формуле (22.17) двойной интеграл представляет собой поток векторного поля  $\Pi_\varepsilon(\vec{F})$ , а  $m(G_\varepsilon(m))$  – объем  $V_\varepsilon$  области  $G_\varepsilon(M)$ , то правую часть (22.18) можно представить в виде соотношения

$$(\operatorname{div} \vec{F})_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\vec{F})}{V_\varepsilon}. \quad (22.18a)$$

Нетрудно заметить, что вместо шара  $G_\varepsilon(M)$  можно выбрать любое семейство окрестностей  $G_\varepsilon(M)$  с кусочно-гладкими границами, диаметры которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Это означает, что формула (22.18a) справедлива и в этом случае и из нее следует положение.

◇ Дивергенция векторного поля в данной точке является пределом отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность к объему области, ограниченной этой замкнутой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в данную точку.

Иногда это положение принимается за определение дивергенции. Его отличие от определения (22.16), кроме всего прочего, состоит в очевидной независимости формулы (22.18a) от выбора координатной системы, поскольку ни поток, ни объем в (22.18a) от выбора системы координат не зависят.

Для большей наглядности определение (22.18a) проиллюстрируем классической задачей из гидромеханики. Рассмотрим стационарное течение жидкости и поле скоростей  $\vec{F}$  её частиц. Пусть поток жидкости пронизывает некоторую область  $G$  (рис. 208) с объемом  $V = m(G)$ . Поверхность  $\partial G$ , ориентированную внешними нормальями и ограничивающую эту область, разобьем на часть  $\Sigma_1$ , через которую жидкость втекает в область  $G$ , и часть  $\Sigma_2$ , через которую жидкость вытекает. Тогда поток поля скоростей через замкнутую поверхность  $\partial G$  представляется как сумма потоков через эти части:

$$\iint_{\partial G} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma. \quad (22.19)$$

Первый частичный поток

$$\Pi_1 = \iint_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma$$

будет заведомо отрицательным в силу отрицательности скалярного произведения  $(\vec{F}, \vec{n})$  вектора поля и орта наружной нормали. По абсолютной величине он даст объемное количество жидкости, втекающей в единицу времени в область  $G$ .

Второй частичный поток

$$\Pi_2 = \iint_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma$$

будет, напротив, положительным и даст объемное количество жидкости, вытекающей в единицу времени из области  $G$ .

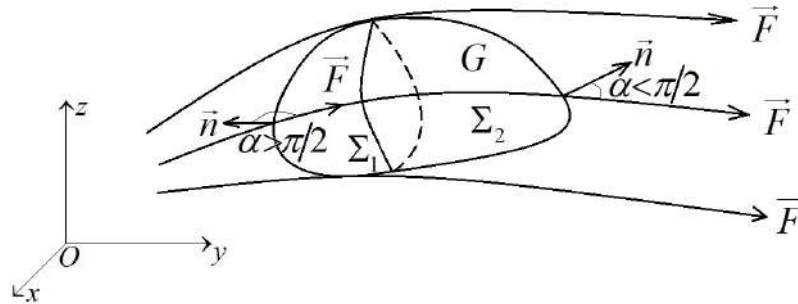


Рис. 208. Поток жидкости, пронизывающий область  $G$

Итак, поток поля скоростей жидкости через замкнутую поверхность  $\partial G$ , ограничивающую некоторую область  $G$ , равен объемному расходу жидкости из области  $G$ , т. е. объемному расширению в области  $G$  за единицу времени.

Представив теперь дивергенцию в виде предела отношения (22.18a):

$$(\operatorname{div} \vec{F})_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_{1\varepsilon}(\vec{F}) + \Pi_{2\varepsilon}(\vec{F})}{V_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\vec{F})}{V_\varepsilon}, \quad (22.20)$$

мы можем сказать, что дивергенция поля скоростей есть расход жидкости в данной точке, отнесенной к единице объема, т. е. является объемной плотностью расхода жидкости аналогично объемной плотности массы, заряда и др.

Для произвольного векторного поля это означает, что его дивергенция, по определению, является объемной плотностью аддитивной функции – потока векторного поля через замкнутую поверхность, являющуюся границей пространственной области. Другими словами, при  $(\operatorname{div} \vec{F})_M > 0$  точка  $M$  является источником жидкости, при  $(\operatorname{div} \vec{F})_M < 0$  – стоком, а при  $(\operatorname{div} \vec{F})_M = 0$  она свободна от источников и стоков (рис. 208).

Исходя из этого, утверждение (21.3) теоремы Остроградского 21.1 можно переформулировать следующим образом.

◇ Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен расходу поля из пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

## 22.6. Ротор векторного поля

При выводе формулы Стокса (21.16) в теореме 21.2 был определен ротор векторного поля  $\vec{F}(P, Q, R)$ ,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

как результат воздействия на вектор поля  $\vec{F}$  линейного дифференциального оператора Гамильтона

$$\operatorname{rot} \vec{F} = [\vec{\nabla}, \vec{F}].$$

Чтобы получить другую интерпретацию этой характеристики в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , ориентированном правой тройкой векторов  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , выделим область  $G$ , в которой задано непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\vec{F}(P, Q, R)$ .

Через произвольную внутреннюю точку  $M \subset G$  проведем плоскость, перпендикулярную некоторому единичному вектору  $\vec{r}$ , исходящему из этой точки. В этой плоскости выделим окружность  $\partial D_\varepsilon(M)$  с центром в точке  $M$  и столь малого радиуса  $\varepsilon$ , что круг  $D_\varepsilon(M)$ , вырезаемый этой окружностью из плоскости, лежит внутри области  $G$ . Сам круг ориентируем единичным вектором  $\vec{n}$ , а его границу  $\partial D_\varepsilon$  по отношению к  $\vec{n}$  ориентируем по правилу правого винта (по правилу согласования ориентации простого контура, лежащего на заданной ориентированной поверхности). Применив к  $D_\varepsilon$  формулу Стокса (21.15), а затем интегральную теорему о среднем, получим

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}, \vec{n}) \Big|_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial D_\varepsilon(M)} (\vec{F}, d\vec{r}) d\sigma}{m(D_\varepsilon(M))} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\vec{F})}{\pi\varepsilon^2}, \quad (22.21)$$

где  $\Pi_\varepsilon(\vec{F})$  – циркуляция вектора  $\vec{F}$  по окружности  $\partial D_\varepsilon$ , а  $\pi\varepsilon^2$  – площадь круга  $D_\varepsilon(M)$ .

Нетрудно заметить, что вместо круга  $D_\varepsilon(M)$  можно выбрать любое семейство окрестностей  $D_\varepsilon(M)$  площадью  $S_\varepsilon$  с кусочно-гладкой границей  $\partial D_\varepsilon(M)$ , диаметр которой стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Это означает, что формула (22.21) справедлива и в этом случае:

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}, \vec{n}) \Big|_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\vec{F})}{S_\varepsilon}. \quad (22.22)$$

Эта формула определяет проекцию ротора поля на любое направление  $\vec{n}$ , а следовательно, она определяет и сам вектор, так как для того, чтобы определить вектор, достаточно знать его проекции на три взаимно перпендикулярных направления. При таком определении координаты вектора не зависят от выбора координатной системы (правой – в силу изначальной ориентации  $\mathbb{R}^3$ ), поскольку от этого выбора не зависит предел отношения в правой части формулы (22.22).

Вместе с этим координаты вектора  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}$ , согласно (22.22), можно рассматривать как поверхностную плотность циркуляции векторного поля по поверхности  $\Sigma$ , натянутой на контур  $\partial\Sigma$ .

Как уже отмечалось, работа силового поля  $\vec{F}(M)$  определяется линейным интегралом (18.95), тогда ясно, что циркуляция этого поля определяет его возможность совершать работу по замкнутому контуру, или, как говорят, вращательную способность поля по заданному контуру. Но интегральной характеристики поля подчас бывает недостаточно, она «расплывчата» и не дает возможности охарактеризовать вращательную способность поля в каждой точке  $M$ . Именно этот недостаток устраняет формула (22.22), характеризующая вращательную способность поля  $\vec{F}(M)$  в каждой его точке.

В дополнение к этому заметим, что представление

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}, \vec{n})_M = |\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}|_M \cos \varphi_M,$$

где  $\varphi_M$  – угол между вектором  $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F})_M$  и вектором  $\vec{n}$  в точке  $M$ , говорит о том, что модуль  $|\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}|_M$  определяет наибольшую вращательную способность поля  $\vec{F}(M)$  в точке  $M$ . Очевидно, что наибольшая вращательная способность поля в точке достигается, когда  $|\cos \varphi| = 1$ , т. е. тогда, когда вектор  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}$  коллинеарен вектору  $\vec{n}$ , а это значит, что вектор  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}$  перпендикулярен к той плоскости, в которой вращательная способность поля в точке наибольшая.



Как и в случае иллюстрации такой характеристики, как  $\operatorname{div} \vec{F}$ , обратимся к задаче из гидромеханики, в которой показано, что движение бесконечно малой жидкой частицы в текущей жидкости с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно разделить на поступательное, вращательное и деформацию. Оказывается, что при таком разделении ротор поля скоростей текущей жидкости дает удвоенную угловую скорость частицы.

Очевидно, что ротор поля скоростей текущей жидкости в каждой точке может иметь свое значение. В тех точках, где значение ротора отлично от нуля, возникает вращательное движение с угловой скоростью  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{F}$ , которое называют *вихрями*. Это и объясняет еще одно обозначение  $\operatorname{rot} \vec{F}$ , такое как  $\operatorname{curl} \vec{F}$  (от лат. *вихрь*).

В физических приложениях большое значение играют векторные поля, для которых тождественно равны нулю либо дивергенция, либо ротор, либо и та и другая величина одновременно. К рассмотрению некоторых свойств таких полей мы и переходим.

## 22.7. Потенциальные векторные поля

◆ Непрерывное векторное поле  $\vec{F}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , заданное в области  $G \subset \mathbb{R}^3$ , называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция  $U(M)$ , называемая *потенциалом поля*, что

$$\vec{F}(M) = \vec{\nabla} U(M) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} U(M) = \vec{i} \cdot P(x, y, z) + \vec{j} \cdot Q(x, y, z) + \vec{k} \cdot R(x, y, z), \quad (22.23)$$

т. е.

$$P(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

Иногда в силу (22.23) потенциальное поле называют *полем градиента*. Очевидно, что потенциал  $U(M)$  заданного поля  $\vec{F}(M)$  определяется с точностью до произвольной постоянной, поскольку

$$\vec{F}(M) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} U(M) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (U(M) + \operatorname{const}).$$

Поверхности уровня потенциала  $U(M) = C$  будем называть *эквипотенциальными*.

◆ Непрерывно дифференцируемое в области  $G$  векторное поле  $\vec{F}(M)$  называется *безвихревым*, если  $\operatorname{rot} \vec{f}(M) = 0$  в  $G$ .

Можно доказать теорему, аналогичную теореме 19.3 для плоского случая.

**Теорема 22.1.** Для векторного поля  $\vec{F}(M)$ , непрерывного в области  $G \subset \mathbb{R}^3$ , следующие три условия эквивалентны:

1) для любой замкнутой ломаной  $L \subset G$

$$I = \oint_L [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz] = 0;$$

2) интеграл

$$I_{AB} = \int_{AB} [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz]$$

не зависит от ломаной  $L_{AB}$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ ;

3) поле  $\vec{F}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  потенциально, т. е. существует потенциал поля  $U(M)$ , такой, что

$$dU(M) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

и

$$\int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_A^B dU = U(A) - U(B).$$

Чтобы сформулировать критерий потенциальности векторного поля, наряду с пространственной связностью, определим поверхностную связность области  $G \subset \mathbb{R}^3$ .

♦ Область  $G$  будем называть *поверхностно односвязной*, если на любой простой кусочно-гладкий контур  $L \subset G$  можно натянуть кусочно-гладкую поверхность  $\Sigma \subset G$ .

Например, пространство, из которого удалена одна точка, – поверхностно односвязная область, но то же пространство, из которого удалена целая прямая, не является поверхностно односвязной областью. В качестве обобщения этого примера можно указать, что область, ограниченная двумя концентрическими сферами, является поверхностно односвязной, а тороидальная область (тор) – нет.

**Теорема 22.2 (критерий потенциальности векторного поля).** Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области  $G$  поле  $\vec{F}$  было потенциальным, необходимо, а в случае поверхностно односвязной области и достаточно, чтобы поле было безвихревым, т. е.  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = 0$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\vec{F} = \vec{\nabla}U$ , тогда

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]U = 0, \quad (22.24)$$

что и требовалось доказать.

**Достаточность.** Пусть  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = 0$  в  $G$ . Возьмем произвольную замкнутую простую ломаную  $L \subset G$ . Так как область поверхностно односвязная, то на эту ломаную можно натянуть кусочно-гладкую поверхность  $\Sigma \subset G$ . Применив формулу Стокса, получим

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) d\sigma = \iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}, \vec{n}) d\sigma = 0.$$

Как и для плоского случая, можно показать, что

$$\oint_L (\vec{F}, f\vec{r}) = 0$$

по любой ломаной, а следовательно, в силу теоремы 22.1 существует потенциал  $U(M)$ .

**Пример 22.6.** Показать, что для непрерывного потенциального в односвязной области  $G$  векторного поля  $\vec{F}(P, Q, R)$  его потенциал  $U(x, y, z)$  можно вычислить по формулам

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y_0, z) dz, \quad (22.25a)$$

$$U(\vec{r}) = \int_0^1 (\vec{F}(t\vec{r}), \vec{r}) dt, \quad \vec{r} = (x, y, z). \quad (22.25б)$$

**Решение.** В силу условия 3 теоремы 22.1 имеем

$$U(A) - U(B) = \int_A^B (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz),$$

Координаты точки  $A$  зафиксируем постоянными значениями  $x_0, y_0, z_0$ :  $(x_0, y_0, z_0)$ , а координаты точки  $B$  будем считать переменными  $x, y, z$ :  $B(x, y, z)$ . Тогда, если пренебречь постоянной  $U(x_0, y_0, z_0)$ , для потенциала  $U(x, y, z)$  получим формулу

$$U(x, y, z) = \int_A^B (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}). \quad (22.26)$$

Если точки  $A$  и  $B$  соединить ломаной  $AA'B'B$  и учесть, что на отрезке  $AA'$   $dy = dz = 0$ , на отрезке  $A'B'$   $dx = dz = 0$ , на отрезке  $B'B$   $dx = dy = 0$  (рис. 209, а), то из (22.26) следует:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_A^B (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}) = \int_A^{A'} (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}) + \int_{A'}^{B'} (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}) + \int_{B'}^B (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}) = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y_0, z) dz, \end{aligned}$$

что и подтверждает справедливость (22.25а).

Для вывода формулы (22.25б) начало системы координат  $xOy$  выберем внутренней точкой  $G$  и будем предполагать, что любой радиус-вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OB} \in G$  (рис. 209, б). В формуле (22.26) координаты точки  $A$  зададим значениями  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , тогда радиус-вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$  имеет координаты  $x, y, z$ . На отрезке  $OB$  выберем переменную точку  $C$  с координатами  $x_C = xt, y_C = yt, z_C = zt$ . Тогда  $\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = \vec{r}t$ , и при изменении параметра  $t$  от 0 до 1 точка  $C(xt, yt, zt)$  пробежит весь отрезок в направлении от  $O$  до  $B$ . Перейдя в (22.26) к переменной интегрирования  $\vec{r}'$  с дифференциалом  $d\vec{r}' = \vec{r} dt$ , получим формулу

$$U(x, y, z) = \int_0^1 (\vec{F}(\vec{r}t), \vec{r}) dt,$$

совпадающую с (22.26).

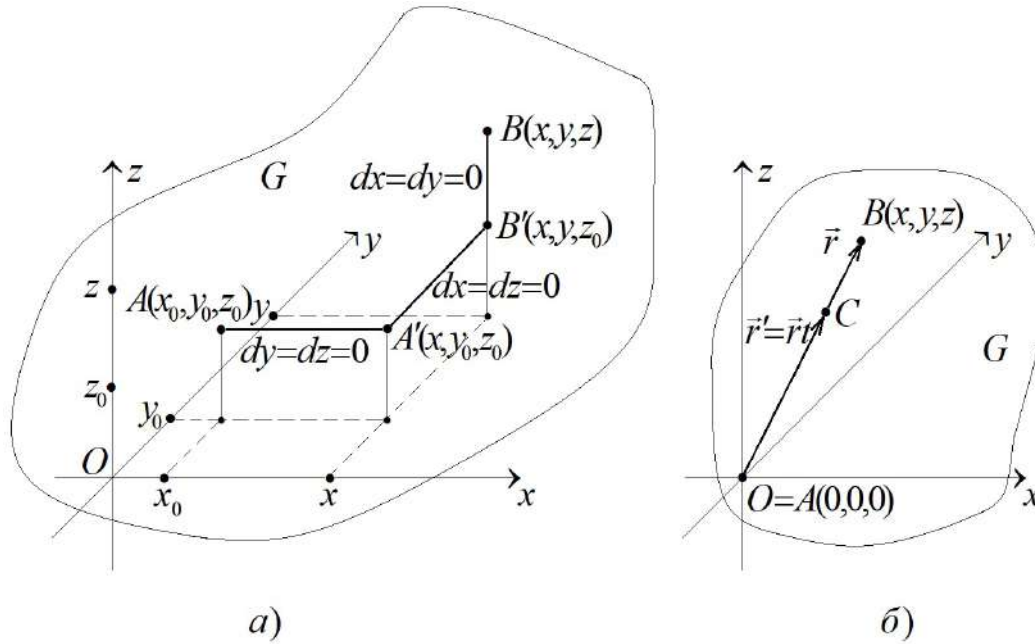


Рис. 209. Два способа соединения точек  $A$  и  $B$ :  
 а) ломаная  $AA'B'B$ ; б) радиус-вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{AB} \in G$

**Пример 22.7.** Показать, что векторное поле

$$\vec{F} = (y + z) \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j} + (x + y) \cdot \vec{k}$$

потенциально, и найти его потенциал.

**Решение.** Координаты вектора  $\vec{F}$

$$P(x, y, z) = y + z, \quad Q(x, y, z) = x + z, \quad R(x, y, z) = x + y \quad (22.27)$$

являются бесконечно дифференцируемыми функциями во всем пространстве, так что  $\vec{F}(P, Q, R)$  есть бесконечно дифференцируемый вектор, определенный во всем трехмерном пространстве. Имеем

$$\text{rot} \vec{F} = [\vec{\nabla}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (1 - 1) - \vec{j} \cdot (1 - 1) + \vec{k} \cdot (1 - 1) = 0.$$

В силу теоремы 22.2 поле  $\vec{f}$  потенциально. Его потенциал  $U(x, y, z)$  найдем несколькими способами.

I. Воспользуемся формулой (22.25а), положив  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ . Тогда с учетом (22.27) получим

$$U(x, y, z) = \int_0^x (0 + 0)dx + \int_0^y (x + 0)dy + \int_0^z (x + y)dz = xy + (x + y)z + \text{const}. \quad (22.28)$$

Прямой проверкой убеждаемся в справедливости (22.28) как выражения для потенциала поля (22.27):

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U = \text{grad } U = \vec{i} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = \vec{i} \cdot (y + z) + \vec{j} \cdot (x + z) + \vec{k} \cdot (x + y).$$

II. Воспользуемся формулой (22.25б). Тогда с учетом (22.27) получим

$$\vec{F}(\vec{r}t) = \vec{F}(xt, yt, zt) = \vec{i} \cdot (y + z)t + \vec{j} \cdot (x + z)t + \vec{k} \cdot (x + y)t,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_0^t (\vec{F}(\vec{r}t), \vec{r}) dt = \int_0^t [(y + z)xt + (x + z)yt + (x + y)zt] dt = \\ &= [(y + z)x + (x + z)y + (x + y)z] \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = xy + xz + yz + \text{const}. \end{aligned}$$

Этот результат совпадает с (22.28).

III. В силу определения (22.23) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P = y + z, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q = x + z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R = x + y. \quad (22.29)$$

Интегрирование первого уравнения в (22.29) дает

$$U(x, y, z) = \int (y + z) dx = (y + z)x + f(y, z),$$

где  $f(y, z)$  – произвольная функция двух переменных  $(y, z)$ . Подставив это выражение во второе уравнение (22.29), получим

$$\frac{\partial}{\partial y} [(y + z)x + f(y, z)] = x + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = x + z,$$

откуда

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = z.$$

В свою очередь, интегрирование этого уравнения дает

$$f(y, z) = \int z dy = zy + g(z),$$

и, следовательно,

$$U(x, y, z) = (y + z)x + zy + g(z),$$

где  $g(z)$  – произвольная функция от  $z$ . Подставив это выражение в третье уравнение (22.29), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} [(y + z)x + zy + g(z)] = x + y + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = x + y,$$

или

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0,$$

откуда  $g(z) = \text{const}$ , и, следовательно,

$$U(x, y, z) = (y + z)x + zy + \text{const} = xy + xz + yz + \text{const}.$$

IV. Будем исходить из условия 3 теоремы 22.1:

$$dU(x, y, z) = P dx + Q dy + R dz,$$

которое с учетом (22.29) запишется как

$$\begin{aligned} dU &= (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = \\ &= (y dx + x dy) + (z dx + x dz) + (y dz + z dy) = \\ &= d(xy) + d(xz) + d(yz) = d(xy + xz + yz). \end{aligned}$$

Отсюда

$$U(x, y, z) = xy + xz + yz + \text{const},$$

что совпадает с результатом, полученным выше.

**Пример 22.8.** Показать, что центральное векторное поле всегда является потенциальным.

**Решение.** Рассмотрим скалярное поле  $U = U(|\vec{r}|)$ , задаваемое дифференцируемой функцией  $U(|\vec{r}|)$ , где  $\vec{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор с модулем  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Если функцию  $U(|\vec{r}|)$  рассматривать как потенциал векторного поля  $\vec{F}$ , то вид поля, согласно определению, описывается равенством

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U(|\vec{r}|) = \vec{\nabla} U(|\vec{r}|). \quad (22.30)$$

Следуя правилам работы с оператором  $\vec{\nabla}$  и следствиям из них, найдем

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U(|\vec{r}|) = \frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial |\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Положив здесь

$$v(|\vec{r}|) = \frac{1}{|\vec{r}|} \frac{\partial U(|\vec{r}|)}{\partial |\vec{r}|},$$

для вектора  $\vec{F}$  придем к определению центрального поля в виде

$$\vec{F} = v(|\vec{r}|)\vec{r}, \quad (22.31)$$

для которого в силу (22.30) и свойств оператора  $\vec{\nabla}$  справедливо равенство:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = [\vec{\nabla}, \vec{F}] = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]U(|\vec{r}|) = 0.$$

Последнее равенство и означает, что центральное поле (22.31) является потенциальным.

В частном случае центрального поля

$$U(|\vec{r}|) = -\frac{1}{|\vec{r}|} \quad (22.32)$$

эту функцию можно рассматривать как потенциал векторного поля

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad (22.33)$$

называемого *полем точечного источника* (22.32). Векторное поле точечного источника (22.33) определено в поверхностно односвязной области  $|\vec{r}| > 0$ , всегда потенциально и для него справедлива формула Стокса. Это означает, что работа векторного поля (22.33) по любому замкнутому контуру равна нулю. К векторным полям вида (22.33) относятся важнейшие физические поля, которыми являются гравитационное, кулоново и др.

**Пример 22.9.** Показать, что векторное поле

$$\vec{F} = \left( -\frac{\alpha y}{x^2 + y^2}, \frac{\alpha x}{x^2 + y^2}, z \right) \quad (22.34)$$

является безвихревым в области  $G$ , которая получается удалением из пространства оси  $Oz$ , однако

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = 2\pi\alpha \neq 0$$

по любой окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ , лежащей в любой плоскости  $z = h$ .

**Решение.** Векторное поле (22.34) определено в области  $G$ , которая получается удалением из пространства оси  $Oz$ :  $x = y = 0$ . Вычислим в этой области ротор:

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\alpha y}{x^2 + y^2} & \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} & z \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\alpha y}{x^2 + y^2} & \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{k} \left[ \alpha \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \alpha \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что в области  $G$  поле (22.34) является безвихревым. Однако область  $G$  не является поверхностно односвязной, поэтому в этой области нельзя использовать формулу Стокса. В подтверждение этого рассмотрим циркуляцию этого поля, т. е. криволинейный интеграл

$$\Pi = \oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \oint_L P dx + Q dy + R dz$$

по контуру  $L$ , представляющему собой окружность  $x^2 + y^2 = R^2$ , лежащую в плоскости  $z = h$ . Для этого воспользуемся параметризацией

$$L = \{\vec{r}(x, y, z): x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = h, \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Учтем, что

$$dx = -R \sin \varphi, \quad dy = R \cos \varphi, \quad dz = 0,$$

и получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \oint_L P dx + Q dy + R dz = \oint_L \left( -\frac{\alpha y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left( \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} \right) dy + z dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\alpha R \sin \varphi}{R^2} (-R \sin \varphi) + \frac{\alpha R \cos \varphi}{R^2} (R \cos \varphi) \right] d\varphi = \alpha \int_0^{2\pi} d\varphi = \alpha \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\alpha\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Как видим, циркуляция вектора  $\vec{F}$  (22.34) по замкнутому контуру  $L$  отлична от нуля, несмотря на равенство нулю его ротора.

## 22.8. Соленоидальное поле

◆ Непрерывное векторное поле  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , заданное в области  $G \subset \mathbb{R}^3$ , называется *соленоидальным*, если существует такое векторное поле  $\vec{\Phi} = (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R})$ , называемое *векторным потенциалом*, что

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Phi} = [\vec{\nabla}, \vec{\Phi}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{P} & \bar{Q} & \bar{R} \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot P + \vec{j} \cdot Q + \vec{k} \cdot R, \quad (22.35a)$$

т. е.

$$\begin{aligned} P &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{Q} & \bar{R} \end{vmatrix} = \bar{R}_y - \bar{Q}_z, & Q &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{P} & \bar{R} \end{vmatrix} = \bar{P}_z - \bar{R}_x, \\ R &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \bar{P} & \bar{Q} \end{vmatrix} = \bar{Q}_x - \bar{P}_y. \end{aligned} \quad (22.35b)$$

Очевидно, что для векторного поля  $\vec{F}$  его векторный потенциал  $\vec{\Phi}$  определен с точностью до градиента некоторой функции  $\overrightarrow{\text{grad}} U(x, y, z)$ , поскольку

$$F = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\Phi} + \overrightarrow{\text{grad}} U) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Phi} + \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} U) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Phi}, \quad (22.35c)$$

так как, согласно правилам работы с оператором  $\vec{\nabla}$ , имеем

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} U) = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]U = 0.$$

Термин *соленоидальное*, или *трубчатое*, поле происходит от греческого  $\sigma\omega\lambda\eta\nu$  – трубка, которую образуют векторные линии поля  $\vec{F}$  (рис. 210, а).

Отметим, что выше мы уже, по сути дела, сталкивались с соленоидальными полями. Исходя из положений этих разделов, сформулируем свойства этих полей.

1. Векторное поле  $\vec{F}$  является соленоидальным в области  $G$  тогда и только тогда, когда равен нулю его поток через всякую замкнутую поверхность  $\Sigma \subset G$ , которую можно стянуть в точку поля, не пересекая границ области.



2. Поток соленоидального поля в пространственно односвязной области через поверхность, натянутую на некоторый замкнутый контур  $L$ , не зависит от формы поверхности.

3. Для того чтобы поле  $\vec{F}$  было соленоидальным в области  $G$ , необходимо, а в случае пространственно односвязной области и достаточно, чтобы  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ :

$$\operatorname{div} \vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{F}) = (\vec{\nabla}, \operatorname{rot} \vec{\Phi}) = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{\Phi}]) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}, \vec{\Phi}) = 0.$$

**Пример 22.10.** Показать, что векторное поле

$$\vec{F} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 2x\vec{k}$$

соленоидально и найти его векторный потенциал.

**Решение.** Координаты вектора  $\vec{F}$ ,

$$P(x, y, z) = 2y, \quad Q(x, y, z) = -z, \quad R(x, y, z) = 2x,$$

являются дифференцируемыми во всем пространстве так, что  $\vec{F} = (P, Q, R)$  есть бесконечно дифференцируемый вектор, определенный во всем трехмерном пространстве. Вычисление дивергенции поля дает

$$\operatorname{div} \vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{F}) = \frac{\partial(2y)}{\partial x} + \frac{\partial(-z)}{\partial y} + \frac{\partial(2x)}{\partial z} = 0.$$

Это означает, что поле  $\vec{F} = (P, Q, R)$  соленоидально. Его векторный потенциал  $\vec{\Phi} = (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R})$  найдем следующим образом.

Будем исходить из системы дифференциальных уравнений (22.35б), найдя какое-либо ее частное решение. Так как векторный потенциал  $\vec{\Phi}(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R})$  определен с точностью до вектора градиента (22.35в), то, пользуясь этим произволом, компоненту  $\bar{P}(x, y, z)$  можно выбрать равной нулю, т. е. исходить из представления

$$\vec{\Phi}(x, y, z) = \vec{j}\bar{Q}(x, y, z) + \vec{k}\bar{R}(x, y, z). \quad (22.36)$$

С учетом этого система (22.35б) примет вид

$$\bar{R}_y - \bar{Q}_z = 2y, \quad \bar{R}_x = z, \quad \bar{Q}_x = 2x. \quad (22.37)$$

Интегрирование второго и третьего уравнений этой системы дает

$$\bar{R}(x, y, z) = \int z dx = zx + \bar{R}_1(y, z), \quad (22.38a)$$

$$\bar{Q}(x, y, z) = \int 2x dx = x^2 + \bar{Q}_1(y, z), \quad (22.38б)$$

где  $\bar{R}_1(y, z)$  и  $\bar{Q}_1(y, z)$  – любые дифференцируемые функции  $y$  и  $z$ . Положим для упрощения  $\bar{Q}_1(y, z) = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \bar{R}(x, y, z) &= zx + \bar{R}_1(y, z), \\ \bar{Q}(x, y, z) &= x^2. \end{aligned} \quad (22.39)$$

Оставшуюся функцию  $\bar{R}_1(y, z)$  выберем так, чтобы удовлетворялось и первое уравнение системы (22.37). Исходя из этого, подставив (22.39) в первое уравнение (22.37), получим

$$\bar{R}_y - \bar{Q}_z = \frac{\partial \bar{R}_1(y, z)}{\partial y} - 0 = 2y,$$

откуда

$$\frac{\partial \bar{R}_1(y, z)}{\partial y} = 2y,$$

и, следовательно,

$$\bar{R}_1(y, z) = \int 2y dy = y^2 + \bar{R}_2(z).$$

Чтобы получить частное решение системы, достаточно выбрать произвольную функцию  $\bar{R}_2(z)$  равной нулю. Тогда

$$\bar{R}_1(y, z) = y^2.$$

С учетом этого (22.39) приводится к виду

$$\bar{R}(x, y, z) = xz + y^2, \quad \bar{Q}(x, y, z) = x^2,$$

и, следовательно, векторный потенциал  $\vec{\Phi}(x, y, z)$ , согласно (22.36), будет определяться выражением

$$\vec{\Phi}(x, y, z) = \vec{j}x^2 + \vec{k}(xz + y^2). \quad (22.40)$$

Исходя из этого, вычислим ротор этого потенциала:

$$\vec{\text{rot}} \vec{\Phi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^2 & xz + y^2 \end{vmatrix} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 2x\vec{k} = \vec{F}.$$

Это подтверждает справедливость (22.40).

**Пример 22.11.** Исследовать на соленоидальность векторное поле

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r}|^3} \vec{r}. \quad (22.41)$$

**Решение.** Центральное векторное поле (22.41), называемое еще *полем точечного источника*, является непрерывно дифференцируемым в области  $|\vec{r}| > 0$  и уже рассматривалось в примере 22.8. В этом примере было показано, что в силу равенства

$$\vec{\text{rot}} \frac{\alpha \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0$$

оно является потенциальным в поверхностно односвязной области  $|\vec{r}| > 0$ . В такой области формула Стокса остается справедливой и, следовательно, работа поля (22.41) по любому замкнутому контуру равна нулю.

Чтобы исследовать заданное поле (22.41) на соленоидальность, следуя правилам работы с оператором Гамильтона  $\vec{\nabla}$ , найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \operatorname{div} \left\{ \frac{\alpha}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \right\} = \alpha \left( \vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \alpha \left\{ \frac{1}{|\vec{r}|^3} (\vec{\nabla}, \vec{r}) + \left( \vec{r}, \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|^3} \right) \right\} = \\ &= \alpha \left\{ \frac{3}{|\vec{r}|^3} + \left( \vec{r}, \frac{-3}{|\vec{r}|^4} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) \right\} = 3\alpha \left\{ \frac{1}{|\vec{r}|^3} + \frac{(\vec{r}, \vec{r})}{|\vec{r}|^5} \right\} = \frac{3\alpha}{|\vec{r}|^3} (1 - 1) = 0. \end{aligned} \quad (22.42)$$

Здесь важно отметить, что область  $|\vec{r}| > 0$ , являясь поверхностно односвязной, не является пространственно односвязной, поэтому равенство (22.42), как критерий соленоидальности, следует рассматривать в областях, которые не содержат точку  $|\vec{r}| = 0$ , т. е. являются пространственно односвязными, и областях, содержащих точку  $|\vec{r}| = 0$ , т. е. не являющихся пространственно односвязными.

В пространственно односвязных областях  $G$  в силу равенства  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  (22.42) поле (22.41) является соленоидальным, и, следовательно, из теоремы Стокса следует, что поток вектора  $\vec{F}$  через замкнутую кусочно-гладкую поверхность  $\Sigma \subset G$  равен нулю:

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = 0.$$

Геометрически (рис. 210, а) это означает, что число векторных (силовых) линий, входящих и выходящих через поверхность  $\Sigma$ , одинаково, т. е. векторные (силовые) линии внутри замкнутой поверхности  $\Sigma$  не могут заканчиваться или начинаться, как на рис. 210, б, в.

В областях же, не являющихся пространственно односвязными, использование равенства  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  (22.42) в формуле Стокса оказывается невозможным.

По этой причине поток вектора  $\vec{F}$  (22.41) приходится вычислять непосредственно, как это было сделано в примере 21.8. В этом примере было показано, что поток векторного поля точечного источника (22.41) не зависит от выбора поверхности, окружающей точку  $|\vec{r}| = 0$ , и является ненулевым:

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = 4\pi\alpha \neq 0.$$

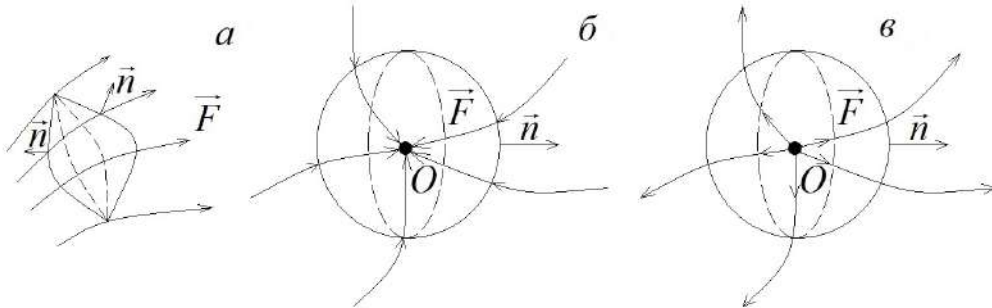


Рис. 210. Силовые линии при различных значениях потока  $\Pi$ :  
а)  $\Pi = 0$ ; б)  $\Pi < 0$ ; в)  $\Pi > 0$

Отметим, что при  $\alpha > 0$  поток вектора  $\vec{F}$  через замкнутую поверхность  $\Sigma$  является положительным, а при  $\alpha < 0$  – отрицательным. Геометрически это означает, что в случае  $\Pi < 0$  точка  $|\vec{r}| = 0$  является точкой, в которой заканчиваются все векторные линии, входящие внутрь замкнутой поверхности  $\Sigma$  (рис. 210, б). Если же  $\Pi > 0$ , то точка  $|\vec{r}| = 0$  является источником, из которого исходят все векторные (силовые) линии, выходящие из замкнутой поверхности  $\Sigma$  (рис. 210, в). Два вида таких точек называют источниками и стоками векторного поля (22.41) соответственно (рис. 210, б, в).

◇ В гидромеханике для поля скоростей потока жидкости понятия «источник» и «сток» имеют буквальный смысл. В электростатике же роль источников и стоков могут играть как положительные и отрицательные точечные заряды, так и заряженные области.

Как следует из примера 21.8, векторное поле

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

в области  $|\vec{r}| > 0$  является одновременно и потенциальным, и соленоидальным. Существуют и другие поля, обладающие этим свойствам.

◆ Векторное поле  $\vec{F}$  называется *лапласовым*, если в любой его точке выполняются равенства  $\text{rot } \vec{F} = 0$  и  $\text{div } \vec{F} = 0$ . Таким образом, лапласово поле является одновременно и потенциальным, и соленоидальным.

Рассмотрение лапласовых полей выходит за рамки нашего курса, поэтому рассмотрение этого раздела мы закончим теоремой о структуре векторного поля общего вида.

**Теорема 22.3 (Гельмгольца).** *Любое векторное поле  $\vec{F}$  можно представить в виде суммы двух полей: потенциального  $\vec{F}_n$  и соленоидального  $\vec{F}_c$ :*

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_c, \quad \text{rot } \vec{F}_n = 0, \quad \text{div } \vec{F}_c = 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $\vec{F}_n = \text{grad } U$ , где  $U$  – некоторая скалярная функция, которую нужно определить. Тогда равенство  $\text{rot } \vec{F}_n = \text{rot } (\text{grad } U) \equiv 0$  выполняется автоматически.

Так как  $\vec{F}_c = \vec{F} - \text{grad } U$ , функцию  $U$  будем выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$\text{div } \vec{F}_c = \text{div}(\vec{F} - \text{grad } U) = \text{div } \vec{F} - \Delta U = 0,$$

т. е. для определения  $U$  получили дифференциальное уравнение Лапласа  $\text{div } \vec{F} = \Delta U$ , которое всегда имеет бесконечное множество решений.

## Заключение

Теория кратных интегралов, рассмотренная в данном пособии, помимо абстрактного обобщения одномерных интегралов является математической основой решений широкого класса геометрических, механических и физических задач как фундаментального, так и прикладного характера.

Действительно, в самом широком смысле кратные интегралы, как было показано, позволяют определять суммарные характеристики скалярных величин, составляющих предмет рассмотрения конкретной задачи, если известна их функция плотности распределения (плотность массы, плотность заряда и др.) в заданных пространственных областях.

Переход от кратных интегралов к криволинейным и поверхностным с физической точки зрения соответствует, вообще говоря, переходу к заданию функции плотности на геометрических объектах размерностей меньших размерностей вмещающих их пространств и, в частности, на пространственных кривых и поверхностях.

Трудности, возникающие в этих случаях, как мы увидели, удалось обойти введением классов простых, измеримых и ориентированных кривых и двусторонних поверхностей. Однако многие объекты, которые мы привыкли называть поверхностями, простыми поверхностями не являются. В силу этого более строгое, чем предложенное в пособии, рассмотрение криволинейных и поверхностных интегралов возможно при обращении к использованию гладких многообразий и, как следствие, интегралов по многообразиям, являющихся обобщением криволинейных и поверхностных интегралов.

# Задания для самоконтроля

## Индивидуальные задания

### Вариант № 1

1.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-1/4}^1 dx \int_{4x^2}^{3x+1} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

1.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

а)  $y = x^5$ ,  $y = ex^5$ ,  $yx = 2$ ,  $yx = 6$ ;

б)  $y^3 = 4x$ ,  $y^3 = 16x$ ,  $x^3 = 25y$ ,  $x^3 = 64y$ .

1.3. Вычислить

$$\iint_S x^6 dx dy,$$

где  $S: y = x^3$ ,  $y = 2x^3$ ,  $yx^7 = 1$ ,  $yx^7 = 3$ .

1.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = xy$  в области  $S: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

1.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

а)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$ ;

б)  $z = 0$ ,  $z = e^{x+y}$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 3$ .

1.6. В конусе  $x^2 + y^2 = (z - 6)^2$  ( $0 \leq z \leq 12$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 1 + z$ . Найти давление конуса на плоскость  $xOy$ .

1.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 72x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями

$$x + 2y + 3z = 1, \quad x + 2y + 3z = 2, \quad 3x + y + 2z = 1,$$

$$3x + y + 2z = 2, \quad 2x + 3y + z = 1, \quad 2x + 3y + z = 2.$$

1.8. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  в объеме тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z \geq 0$ .

1.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y = 6x$ ,  $y = 3x$ ,  $x = 2$ , выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (4x + 1)e^{1-t}$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 2.

1.10. По кривой  $L: x = \cos t$ ,  $y = -\sin t$ ,  $z = t$ ,  $4\pi \leq t \leq 6\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ . Найти полный заряд кривой.

1.11. Вычислить интеграл

$$\int_L y dx + z dy + y dz$$

по контуру  $L: x = 2t \cos t$ ,  $y = 2t \sin t$ ,  $z = 2t$ ,  $2\pi \leq t \leq 4\pi$ .

1.12. Вычислить

$$\int_{(1,0)}^{(1,2)} x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dx + y \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

1.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = xy$ , вырезанной поверхностями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $|x| = |y|$  ( $|x| \leq |y|$ ).

1.14. Вычислить

$$\iint_S (x - y + 2z) dS,$$

где  $S: z^2 + x^2 + y^2 = 4$  ( $z \geq 0$ ).

1.15. Найти

$$\iint_S x dy dz - y dx dz + (z + 1) dy dz,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x + y + z = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma < 0$ ).

1.16. Вычислить

$$\iint_S xy dy dz + (x + y) dx dz + (z - x) dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $z^2 = 2xy$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Нормаль внешняя.

1.17. Вычислить

$$\iint_S 2x dy dz + y^4 dx dz - (z - x) dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ , отсекаемая плоскостью  $x = 0$  ( $x > 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

1.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x^3 + y, -x + y, z\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

1.19. Найти  $\text{rot}[\vec{c}, \vec{r}f(r)]$ .

1.20. Найти циркуляцию  $\vec{r}$  вдоль  $L: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

1.21. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: (x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$ . Нормаль внешняя.

1.22. Равен ли нулю интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

если  $\gamma$ : а)  $x^2 - (y - 5)^2 = 9$ ; б)  $x^2 + y^2 = 25$ ?

1.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (1 + 2xy^3, 3x^2 - y^2)$  вдоль кривой  $L: x = 3 + \cos^7 t, y = \sin^5 t + \cos^3 t, 0 \leq t \leq \pi/2$ .

1.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (xz^2 - xy^2, xy - yz^2, y^2z - xz)$  через поверхность  $S: (x - 1)^2 + y^2 + 5(z - 4)^2 = 25$ .

## Вариант № 2

2.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{|x|}^{1-2x^2} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

2.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } y = x^3, \quad y = e^2 x^3, \quad yx = 5, \quad yx = 17; \\ \text{б) } y^5 = 1296x, \quad y^5 = 625x, \quad x^5 = 2401y, \quad x^5 = 16y. \end{aligned}$$

2.3. Вычислить

$$\iint_S xy \, dx dy,$$

где  $S: y = x^2, y = 2x^2, yx^4 = 1, yx^4 = 10$ .2.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$  в области  $S: x^2 + y^2 = 1, y = 0$ .

2.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}; \\ \text{б) } z = 0, \quad z = e^{-xy}. \end{aligned}$$

2.6. В параболоиде  $z - 12 = x^2/15 + y^2/15$  ( $z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 1 + 2z$ . Найти давление параболоида на плоскость  $xOy$ .

2.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 50x \, dx \, dy \, dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z = 1, \quad x + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 2y + z = 11, \\ 2x + 2y + z = 2, \quad 2x + y + 2z = 1, \quad 2x + y + 2z = 21. \end{aligned}$$

2.8. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = x^2 + y^2 + z^2$  в объеме тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x = 0, y = 0, z = 0$ .2.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2 - y^2 = 4, 3y = x, y = 0$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (2y + 1)(1 - e^{-t})$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 4.2.10. По кривой  $L: x = -t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = z$ . Найти полный заряд кривой.

2.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (y^2 - z^2) dx + 2yz \, dy - x^2 y \, dz$$

по контуру  $L: x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$ .

2.12. Вычислить

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)} x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dx + y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.



2.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = 2(x^2 + y^2)^{1/2}$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 4x$ .

2.14. Вычислить

$$\iint_S \cos z \, dS,$$

где  $S: z^2 + x^2 + y^2 = 4$ .

2.15. Найти

$$\iint_S (2x - 1)dy \, dz - y \, dx \, dz + z \, dy \, dz,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x + y + z = 4$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma < 0$ ).

2.16. Вычислить

$$\iint_S (2x - xy^3)dy \, dz + y^2 \, dx \, dz + (y - z)dy \, dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $z = 4$ ,  $x^2 + y^2 = z$ ,  $x^2 + y^2 = 2z$ . Нормаль внешняя.

2.17. Вычислить

$$\iint_S (x^2 + z^2)dy \, dz + (y^2 - z^2)dx \, dz + (z - x^2)dy \, dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$ , отсекаемая плоскостью  $z = 0$  ( $z < 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

2.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} \, d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{xy, x + y^2, 2\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

2.19. Найти  $\text{rot}(\vec{c}f(r))$ .

2.20. Найти работу силы  $\vec{F} = (1/y, 1/z, 1/x)$  вдоль прямой  $(1, 1, 1) \rightarrow (2, 4, 8)$ .

2.21. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z > 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq ax$ ).

2.22. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 2x + 2)^{-1}(-1 - y, x - 1)$  вдоль кривой  $L: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 6$ .

2.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (3x^2 - y^2, 3y^2 - 2xy)$  вдоль ломаной  $(0, 0) \rightarrow (1, 5) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (4, 7) \rightarrow (5, 0)$ .

2.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (4x^2y^3z^2 - x^2y^4, xy^4z^2, 2xy^4z - 4xy^3z^3)$  через поверхность  $S: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$ . Нормаль внешняя.

### Вариант № 3

3.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{1+\cos x} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

3.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

а)  $y = x^{10}e^{-5}$ ,  $y = e^6x^{10}$ ,  $yx = 5$ ,  $yx = 16$ ;

б)  $y^7 = 729x$ ,  $y^7 = 64x$ ,  $x^7 = 4096y$ ,  $x^7 = 64y$ .

3.3. Вычислить

$$\iint_S (2x - 3y) dx dy,$$

где  $S: 2x + 3y = 1, 2x + 3y = 5, yx = -1, yx = -5, x > 0$ .

3.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 1$  в области  $S: \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} < \sqrt[3]{2}, x > 0, y > 0$ .

3.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{z}{c}, & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= -\frac{z^2}{c^2} + 2; \\ \text{б) } z &= x^2 + y^2, & z &= c. \end{aligned}$$

3.6. В теле, ограниченном поверхностью  $z^2/4 + x^2/49 + y^2/12 = 1$  ( $z > 0$ ), распределена масса с плотностью  $\mu = 2 + 8/3z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

3.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 486x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем тела, ограниченного плоскостями:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= 1, & 3x + 2y + 2z &= 2, & 2x + 2y + 3z &= 1, \\ 2x + 2y + 3z &= 2, & 2x + 3y + 2z &= 1, & 2x + 3y + 2z &= 2. \end{aligned}$$

3.8. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = x^2 + z^2$  в объеме тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x = 3(y^2 + z^2), x = 15$ .

3.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $2y^2 - 8x^2 = 16, x = 0, y = 6x$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (4x + 3y)(t + e^{-2t})$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 3.

3.10. По кривой  $L: (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$  распределена масса с линейной плотностью  $\rho = |y|$ . Найти массу кривой.

3.11. Вычислить интеграл

$$\int_L y dx + z dy + x dz$$

по контуру  $L: x = \cos t, y = -\sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

3.12. Вычислить

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^x [(y \cos xy + \sin xy) dx + x \cos xy dy]$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

3.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = x^2/2 - y^2/2$ , вырезанной поверхностями  $x^2 + y^2 = 1, x = y$  ( $x \leq y$ ),  $x = 0$  ( $\cos \gamma > 0$ ).

3.14. Вычислить

$$\iint_S (x + y)^2 dS,$$

где  $S$  – полная поверхность тела  $z^2 = x^2 + y^2$  ( $1 \geq z \geq 0$ ).

3.15. Найти

$$\iint_S 2x \, dydz - 3y \, dx dz + 2z \, dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $2x + 2y + z = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma < 0$ ).

3.16. Вычислить

$$\iint_S -xy^2 \, dydz + zy^2 \, dx dz - zx^2 \, dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $z = 2$ ,  $x^2 + y^2 = 2z$ . Нормаль внешняя.

3.17. Вычислить

$$\iint_S x^2 \, dydz + y \, dx dz + (z - x) \, dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x^2/4 + y^2 + z^2 = 0$ , отсекаемая плоскостью  $y = 0$  ( $y < 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

3.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} \, d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x + yz, 2xz, xy + z\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

3.19. Найти  $\text{rot}(\vec{r}f(r))$ .

3.20. Найти работу силы  $\vec{F} = (e^{y-z}, e^{z-x}, e^{x-y})$  вдоль прямой  $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 3, 5)$ .

3.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5)^{-1}(-2 - y, x - 1)$  вдоль кривой  $L: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ .

3.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: 7z = x^2 + y^2$  ( $x^2 + y^2 \leq 9$ ).

3.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (y^2 - 2xy, 2xy - x^2)$  вдоль кривой  $L: y = (2x/\pi) \sin(\pi x^2/2)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

3.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (2x^3yz - x^3y, x^2y - 3x^2y^2z, 3x^2yz - x^2z)$  через поверхность  $S: (x - 8)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$ .

#### Вариант № 4

4.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^R dx \int_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - Rx}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

4.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = x^{16}, \quad y = e^2 x^{16}, \quad yx = 100, \quad yx = 117; \\ \text{б) } & \sqrt{y} = 4x, \quad \sqrt{y} = 16x, \quad \sqrt{x} = 25y, \quad \sqrt{x} = 49y. \end{aligned}$$

4.3. Вычислить

$$\iint_S (x^2y + y^2x) \, dx dy,$$

где  $S: x - y = 15$ ,  $x - y = 2$ ,  $yx = 2$ ,  $yx = 5$ ,  $x < 0$ .

4.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 1$  в области  $S: \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

4.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2; \\ \text{б) } & z = xy, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 2x. \end{aligned}$$

4.6. В теле  $x^2/52 + y^2/12 - z^2/9 = 1$  ( $3 \geq z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 1 + 8z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

4.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 512x \, dx \, dy \, dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 2z = 1, \quad 4x + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 2y + 4z = 1, \\ 2x + 2y + 4z = 2, \quad 2x + 4y + 2z = 1, \quad 2x + 4y + 2z = 2. \end{aligned}$$

4.8. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = z$  в объеме тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x + 2y + 3z = 6$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

4.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $4x^2 - y^2 = 12$ ,  $3x + y = 8$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (18 - x)(2 + \cos t)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $2\pi$ .

4.10. По кривой  $L: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x + y + z = 0$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = x^2$ . Найти полный заряд кривой.

4.11. Вычислить интеграл

$$\int_L y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

по контуру  $L: x = \cos t$ ,  $y = -\sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4.12. Вычислить

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} e^{-x} [(\cos xy + y \sin xy) dx + x \sin xy dy]$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

4.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = 3(x^2 + y^2)^{1/2}$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = -6y$ .

4.14. Вычислить

$$\iint_S (x + z) dS,$$

где  $S: z = x^2 + y^2$  ( $1 \geq z \geq 0$ ).

4.15. Найти

$$\iint_S -x \, dy \, dz + (y + 1) dx dz - z \, dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $2x + y + z = 2$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma < 0$ ).

4.16. Вычислить

$$\iint_S x^2 \, dy dz + x \, dx dz + xz \, dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $z = 1$ ,  $x^2 + y^2 = z$ ,  $x = 0$  ( $x \geq 0$ ),  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ). Нормаль внешняя.

4.17. Вычислить

$$\iint_S x^2 dydz + (y - yz) dx dz + z dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , отсекаемая плоскостью  $z = 0$  ( $z > 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

4.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{-xy, x, z^2\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 9. \end{cases}$$

4.19. Найти  $\text{grad}[\ln(1/r)]$ .

4.20. Найти работу силы  $\vec{F} = \vec{r}$  вдоль кривой  $AB$  с началом в точке  $\vec{r}_A$  и концом в  $\vec{r}_B$ .

4.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10)^{-1}(-3 - y, x - 1)$  вдоль кривой  $L: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ .

4.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2xyz$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

4.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (3x + y, x - 5y)$  вдоль кривой  $L: y = \text{arctg } x^3$ ,  $0 \leq x \leq 3^{1/6}$ .

4.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (3x^3y^2z^2 - x^3y^3, 2x^2yz - 3x^2y^3z^2, 3x^2y^3z - x^2z^2)$  через поверхность  $S: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 12$ .

### Вариант № 5

5.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{\ln x}^{x^{-1/2}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

5.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = x^7, \quad y = ex^7, \quad yx = 10, \quad yx = 90; \\ \text{б) } & x\sqrt{y} = 1, \quad x\sqrt{y} = 2, \quad y\sqrt{x} = 2, \quad y\sqrt{x} = 5. \end{aligned}$$

5.3. Вычислить

$$\iint_S e^{3x-2y} dx dy,$$

где  $S: x + 2y = 7, x + 2y = 12, x - 2y = 1, x - 2y = 0$ .

5.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 1$  в области  $S: (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy, x > 0, y > 0$ .

5.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 9; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = xy, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 2. \end{aligned}$$

5.6. В теле  $x^2 + y^2 - z^2 = 9 - 6z$  ( $0 \leq z \leq 6$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 1 + z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

5.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 216x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями

$$\begin{aligned} 4x + y + z = 1, & \quad 4x + y + z = 2, & \quad x + y + 4z = 1, \\ x + y + 4z = 2, & \quad x + 4y + z = 1, & \quad x + 4y + z = 2. \end{aligned}$$

5.8. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = z$  в объеме тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $-3x - 2y + z = 6$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

5.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $2y^2 - 3x^2 = 32$ ,  $x + y = 4$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (x^2 + 10)(2 - \cos t)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $4\pi$ .

5.10. По кривой  $L: x^2/4 + y^2/16 = 1$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = x + |y|$ . Найти полный заряд кривой.

5.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

по контуру  $L: y = x^3$  от  $x = -1$  до  $x = 1$ .

5.12. Вычислить

$$\int_{(0,1)}^{(1,0)} \left( y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx + \left( x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

5.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = x^2 - y^2$ , вырезанной поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $|x| = |y|$  ( $|x| \leq |y|$ ,  $y \leq 0$ ).

5.14. Вычислить

$$\iint_S \frac{1}{1 + x^2} dS,$$

где  $S: z^2 + x^2 + y^2 = 4$ .

5.15. Найти

$$\iint_S x dydz + (y - 1) dx dz + z^2 dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x + 2y + z = 4$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma < 0$ ).

5.16. Вычислить

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dx dz + z^2 dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $(x^2 + y^2)^{1/2} = z$ . Нормаль внешняя.

5.17. Вычислить

$$\iint_S (x + xy^2) dydz + (y - yx^2) dx dz + z dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , отсекаемая плоскостью  $z = 0$  ( $z < 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

5.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x^2 - y, x - y, z\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

5.19. Найти  $\text{grad}(r^5)$ .

5.20. Найти работу силы  $\vec{F} = (r\vec{r})$  вдоль кривой  $AB$  с началом в точке  $\vec{r}_A = (1; 1; 1)$  и концом в  $\vec{r}_B = (-1; 1; -1)$ .

5.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2)^{-1}(1 - y, x + 1)$  вдоль кривой  $L: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ .

5.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: x = 6 \sin u \cos v, y = 6 \sin u \sin v, z = 6 \cos u$  ( $0 \leq u, v \leq \pi$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

5.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (5x^4y, x^5)$  вдоль кривой  $L: x = \sin^5 t, y = \cos^{10} t, 0 \leq t \leq \pi/2$ .

5.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (3x^2y^2z^3 - 2x^2y^3z, 2xy^3z^3, 2xy^3z^2 - 3xy^2z^4)$  через поверхность  $S: (x - 7)^2 + (y - 2)^2 + (z + 5)^2 = 25$ .

### Вариант № 6

6.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-1}^4 dx \int_{x^2}^{3x+4} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

6.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = ex^{1/2}, \quad y = e^2x^{1/2}, \quad yx = 3, \quad yx = 7; \\ \text{б) } & xy^{3/2} = 3, \quad xy^{3/2} = 4, \quad yx^{3/2} = 1, \quad yx^{3/2} = 2. \end{aligned}$$

6.3. Вычислить

$$\iint_S \frac{1}{xy} dx dy,$$

где  $S: y = 24x^6, y = 12x^6, yx^2 = 24, yx^2 = 2$ .

6.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 1$  в области  $S: (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2), x \geq 0$ .

6.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{b}; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = e^{-x^2+y^2}, \quad \frac{x}{3} \leq y \leq \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

6.6. В параболоиде

$$-z + 6 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{72}, \quad (z \geq 0)$$

распределены массы с плотностью  $\mu = 2 + z$ . Найти давление параболоида на плоскость  $xOy$ .

6.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 686x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями

$$\begin{aligned} 4x + y + 2z = 1, \quad 4x + y + 2z = 2, \quad 4x + 4y + 2z = 1, \\ x + 4y + 2z = 2, \quad 2x + 4y + z = 1, \quad 2x + 4y + z = 2. \end{aligned}$$

6.8. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 2x + 3y - z$  в объеме тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $3x + z - 4y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ .

6.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y^2 - x^2 = 7, x + y = 4$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого

$N = (x + 25)(1 + \sin t)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $3\pi$ .

6.10. По кривой  $L: x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 2\pi \leq t \leq 4\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = z$ . Найти полный заряд кривой.

6.11. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{y}{3} dx - x dy + x dz$$

по контуру  $L: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 3 - 2 \cos t - 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

6.12. Вычислить

$$\int_{(0,2)}^{(1,3)} x \left( \frac{2x}{y} - e^x \right) dx + \left( y - \frac{x^2}{y^2} \right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

6.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 2x$ .

6.14. Вычислить

$$\iint_S (x - y + 2z) dS,$$

где  $S: z^2 + x^2 + y^2 = 4$  ( $z \geq 0$ ).

6.15. Найти

$$\iint_S x dy dz - 2y dx dz + (z + 1) dy dz,$$

где  $S$  — часть плоскости  $x + y/z + z = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma < 0$ ).

6.16. Вычислить

$$\iint_S xy dy dz + (x + y) dx dz + (z - x) dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $z^2 = xy, x + y = 4$ . Нормаль внешняя.

6.17. Вычислить

$$\iint_S \frac{dy dz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dy dx}{z},$$

где  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

6.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x + zx, y^2, y - z\}$ ,

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = (z + 1)/5, \\ z = 4. \end{cases}$$

6.19. Найти  $\text{grad } f(r)$ .

6.20. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10)^{-1}(-3 - y, x - 1)$  вдоль кривой  $L: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ .

6.21. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3y$ . Нормаль внешняя.

6.22. Равен ли нулю интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

если  $\gamma$ : а)  $x^2 - (y + 5)^2 = 9$ ; б)  $x^2 + y^2 = 9$ ?



6.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (3x^2y^2 - 2x, 2x^3y - y^2)$  вдоль кривой  $L: x = e^{t^2}$ ,  $y = 3t + 2$ ,  $0 \leq t \leq 2$ .

6.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (3x^3y^2z^4 - 4x^3y^2z^3, x^2y^3 - 3x^2y^3z^4, 3x^2y^3z^4 - 3x^2y^2z)$  через поверхность  $S: (x-1)^2 + y^2 + 5(z-4)^2 = 25$ .

### Вариант № 7

7.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^R dy \int_{\sqrt{Ry}}^{R+\sqrt{R^2-y^2}} dx.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

7.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = x^{7/2}, \quad y = ex^{7/2}, \quad yx = 1, \quad yx = 6; \\ \text{б) } & \sqrt[3]{y^5} = 2x, \quad \sqrt[3]{y^5} = 8x, \quad \sqrt[3]{x^5} = 8y, \quad \sqrt[3]{x^5} = 27y. \end{aligned}$$

7.3. Вычислить

$$\iint_S (25x^2 - 16y^2) dx dy,$$

где  $S: 5x - 4y = 4$ ,  $5x - 4y = 2$ ,  $yx = 1$ ,  $yx = 3$ ,  $x < 0$ .

7.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$  в области  $S: (x^2 + y^2)^2 = 2xy$ .

7.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{y}{b}; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = e^{-x^2-y^2}, \quad x^2 + y^2 = a^2. \end{aligned}$$

7.6. В теле  $z^2/36 + x^2/225 + y^2/17 = 1$  ( $z > 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 1 + z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

7.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 162x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z = 1, \quad 4x + 2y + 3z = 2, \quad 3x + 2y + 4z = 1, \\ 3x + 2y + 4z = 2, \quad 2x + 4y + 3z = 1, \quad 2x + 4y + 3z = 2. \end{aligned}$$

7.8. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = x$  в объеме тела  $V$ , ограниченного поверхностями:

$$\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{16} = 1.$$

7.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y^2 - 4x^2 = 16$ ,  $x = 2$ ,  $y = 4$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = 2x(2e^{-t} - \sin t)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $\pi$ .

7.10. По кривой  $L: x^2 + y^2 = 6x$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Найти полный заряд кривой.

7.11. Вычислить интеграл

$$\int_L x^3 dx - z^2 dy + y dz$$

по контуру  $L: x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, z = -3 + 4 \cos t - 3 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

7.12. Вычислить

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \left( x + \frac{y}{(x+y)^2} \right) dx - \frac{x}{(x+y)^2} dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

7.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = 4 - (x^2 + y^2)^{1/2}$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = -3x$ .

7.14. Вычислить

$$\iint_S (xz + zy + xy) dS,$$

где  $S$  — часть поверхности  $z^2 = x^2 + y^2$  ( $z \geq 0$ ), вырезанная поверхностью  $x^2 + y^2 = -3y$ .

7.15. Найти

$$\iint_S x dy dz + y dx dz + 2z dy dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $x + 2y + 3z = 6$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

7.16. Вычислить

$$\iint_S x^2 dy dz + (y + x^2 y^2) dx dz + (1 + z) dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $(x^2 + y^2/4 + z^2)^2 = x^2 + y^2/4$ . Нормаль внешняя.

7.17. Вычислить

$$\iint_S 2x dy dz + y^4 dx dz - (z - x) dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , отсекаемая плоскостью  $y = 0$  ( $y < 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

7.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x^2, y - yz, z + x\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

7.19. Найти  $\text{grad}(\vec{c}, \vec{r})$ .

7.20. Найти работу поля  $\vec{F} = r^2 \vec{r}$  при движении от точки  $A(1; 0; 0)$  до точки  $B(0; 0; -1)$ .

7.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6)^{-1}(-2 - y, x + 1)$  вдоль кривой  $L: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 49$ .

7.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $z^2 = 4x, x^2 + z^2 \leq 5$ .

7.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (x^2 + y^6, 5xy^2 + 2y)$  вдоль кривой  $L: x = 1 + e^t, y = 2 \cos^5 t + \cos^2 \pi t, 0 \leq t \leq 1$ .

7.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (x^2 z^2 - x^2 y^2, 3xy^2 z^2 - 2xyz^2, 2xy^2 z - 2xy z^2)$  через поверхность  $S: (x - 2)^2/5 + (y + 2)^2/3 + (z - 4)^2/2 = 1$ .

## Вариант № 8

8.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^{-1/3}} dx.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

8.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = x^{1/3}, \quad y = e^2 x^{1/3}, \quad yx = 1, \quad yx = 13; \\ \text{б) } & \sqrt[5]{y^2} = 5x, \quad \sqrt[5]{y^2} = 2x, \quad \sqrt[5]{x^2} = y, \quad \sqrt[5]{x^2} = 27y. \end{aligned}$$

8.3. Вычислить

$$\iint_S (2x + 7y) \sin(6x^2 - 7y^2 + 19xy) dx dy,$$

где  $S: 2x + 7y = \pi, 2x + 7y = 0, 3x - y = \pi/2, 3x - y = 0$ .8.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = y$  в области  $S: (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, x > 0, y > 0$ .

8.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2xy}{ab}; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = e^{xy}, \quad -3x \leq y \leq -x. \end{aligned}$$

8.6. В теле  $x^2/2 + y^2/12 - z^2/36 = 1$  ( $6 \geq z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 1 + 10z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

8.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 1400x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z = 1, \quad 5x + 3y + 2z = 2, \quad 3x + 2y + 5z = 1, \\ 3x + 2y + 5z = 2, \quad 2x + 5y + 3z = 1, \quad 2x + 5y + 3z = 2. \end{aligned}$$

8.8. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = z$  в объеме тела  $V$ , ограниченного поверхностью

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{49} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

8.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $4y^2 - x^2 = 8, 4x = y, x = 4$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (5 + y)(e^{-t} + \cos t)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $\pi$ .8.10. По кривой  $L: x = -\cos t, y = \sin t, z = 2t, 2\pi \leq t \leq 4\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = y + z^2$ . Найти полный заряд кривой.

8.11. Вычислить интеграл

$$\int_L z dx + dy + x dz$$

по контуру  $L: y = e^{-t} \cos t, x = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}$  от  $t = 0$  до  $t = \infty$ .

8.12. Вычислить

$$\int_{(0,1)}^{(2,2)} -\left(x - \frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)dx + \left(y + \frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

8.13. Найти площадь части поверхности  $S: z^2 + 4 = x^2 + y^2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 16$ .

8.14. Вычислить

$$\iint_S (-x + z)dS,$$

где  $S: 2z = x^2 + y^2$  ( $1 \geq z \geq 0$ ).

8.15. Найти

$$\iint_S -x dy dz - 2y dx dz + z dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x + y + z/3 = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

8.16. Вычислить

$$\iint_S xy dy dz + yz dx dz + (xy + z)dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2/9 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2/9 + y^2 = z$ . Нормаль внешняя.

8.17. Вычислить

$$\iint_S xy^3 dy dz + (y^2 + z^2)dx dz + z dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 4x$ , отсекаемая плоскостью  $z = 0$  ( $z < 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.8.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{xy - x, yz - y, zx - z\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

8.19. Найти  $\text{grad}[\vec{c}, \vec{r}]^2$ .8.20. Найти поток поля  $\{yz, xz, xy\}$  через поверхность  $S: x^2 + y^2 = a^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ .8.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5)^{-1}(-2 - y, x + 1)$  вдоль кривой  $L: (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ .8.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = 5v$  ( $2 \leq u \leq 4$ ,  $0 \leq v \leq \pi/2$ ,  $\cos \gamma > 0$ ).8.23. Найти работу поля  $\vec{F} = \{e^{x^2-y}[\cos(x+y) + 2x \sin(x+y)], e^{-x^2-y}[\cos(x+y) - \sin(x+y)]\}$  вдоль кривой  $L: y = e^x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .8.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (4x^3z^4y^3 - 3x^3y^4z^2, 3x^2y^3z^2 - 3x^2z^4y^4, 3x^2y^4z^3 - 3x^2y^2z^3)$  через поверхность  $S: (x + 7)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = 9$ .**Вариант № 9**

9.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^{2R} dx \int_{\sqrt{2Rx-x^2}}^{R+\sqrt{4Rx-x^2}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

9.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = x^{1/5}, \quad y = ex^{1/5}, \quad yx = 2, \quad yx = 12; \\ \text{б) } & \sqrt[3]{y} = 2x, \quad \sqrt[3]{y} = 5x, \quad \sqrt[3]{x} = 8y, \quad \sqrt[3]{x} = y. \end{aligned}$$

9.3. Вычислить

$$\iint_S (2x + y)e^{4x^2 - y^2} dx dy,$$

где  $S: 2x - y = 1, 2x - y = 5, 2x + y = 2, 2x + y = 3$ .

9.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = \sqrt{x} + \sqrt{y}$  в области  $S: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, x = 0, y = 0$ .

9.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z + c}{c} = 0; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = e^{x^2 - y^2}, \quad 3x \leq y \leq 4x. \end{aligned}$$

9.6. В конусе  $x^2 + y^2 = (z - 24)^2$  ( $0 \leq z \leq 48$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 1 + z$ . Найти давление конуса на плоскость  $xOy$ .

9.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 486x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 2z = 1, \quad 5x + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 5y + 2z = 1, \\ 2x + 5y + 2z = 2, \quad 2x + 2y + 5z = 1, \quad 2x + 2y + 5z = 2. \end{aligned}$$

9.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z^2 = x^2 + 4y^2, z = 16$ .

9.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $6y - x = 0, y + 6x = 1, y - 6x = 1$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (4x + 1)e^{1-t}$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.

9.10. По кривой  $L: x = 2t \cos t, y = 2t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = z^3$ . Найти полный заряд кривой.

9.11. Вычислить интеграл

$$\int_L y dx + x dy + x dz$$

по контуру  $L: x = e^{-2t} \cos t, y = e^{-2t} \sin t, z = e^{-t}$ , от  $t = 0$  до  $t = \infty$ .

9.12. Вычислить

$$\int_{(1,1)}^{(0,3)} (2 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (-1 + y\sqrt{x^2 + y^2})dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

9.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = -(9 + x^2 + y^2)^{1/2}$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 16$ .

9.14. Вычислить

$$\iint_S (y - x + z)dS,$$

где  $S: x = (1 - z^2 - y^2)^{1/2}$ .

9.15. Найти

$$\iint_S 3x \, dydz - y \, dx dz - z \, dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x + 3y + 3z = 9$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma < 0$ ).

9.16. Вычислить

$$\iint_S (2 - x) \, dydz + (2y - 2yz) \, dx dz + z^2 \, dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ ,  $x^2 + y^2 \leq z$ . Нормаль внешняя.

9.17. Вычислить

$$\iint_S (yx^2 - x) \, dydz + y \, dx dz + xz \, dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $(x^2 + y^2)^{1/2} = -3z$ , отсекаемая плоскостью  $z = -1$  ( $z > -1$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

9.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} \, d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x^2 + y, -x + y, z^2\}$ ,

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

9.19. Найти  $\text{grad}(\vec{a}\vec{r}\vec{b})$ .

9.20. Найти поток поля  $(x, y, z)$  через поверхность  $S: z = 1 - (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

9.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10)^{-1}(3 - y, x + 1)$  вдоль кривой  $L: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ .

9.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: x = (7 + 2 \sin \theta) \cos \varphi$ ,  $y = (7 + 2 \sin \theta) \sin \varphi$ ,  $z = 2 \cos \theta$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

9.23. Найти работу поля  $\vec{F} = e^{-xy}(1 - xy - y^3, 2y - x^2 - xy^2)$  вдоль кривой  $L: x = \cos^2 t$ ,  $y = \sin^3 t + 1$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

9.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (x^2zy^2, 4xy^2z^3 - 2xzy^3, 2xy^2z^2 - 2xyz^4)$  через поверхность  $S: (x + 2)^2/4 + (y - 3)^2/9 + (z + 6)^2/49 = 1$ .

### Вариант № 10

10.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

10.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

а)  $y = ex^{1/2}$ ,  $y = x^{1/2}$ ,  $yx = 3$ ,  $yx = 13$ ;

б)  $y^{100} = 2^{101}x$ ,  $y^{100} = 5^{101}x$ ,  $x^{100} = y$ ,  $x^{100} = 2^{101}y$ .

10.3. Вычислить

$$\iint_S \frac{y^2}{x^2} \, dx dy,$$

где  $S: y = x^3$ ,  $y = 2x^3$ ,  $yx = 1$ ,  $yx = 2$ .

10.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = x + y$  в области  $S: \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{6^2}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

10.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\text{а) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(z+c)^2}{c^2} = 0;$$

$$\text{б) } z = 0, \quad z = \cos(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = \pi^2/4, \quad y = |x|, \quad y \geq |x|.$$

10.6. В параболоиде  $z - 9 = x^2/9 + y^2/27$  ( $z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 2 + 3z$ . Найти давление параболоида на плоскость  $xOy$ .

10.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 2600x \, dx \, dy \, dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + y + 4z = 1, \quad 5x + y + 4z = 2, \quad 4x + 5y + z = 1, \\ x + y + z = 2, \quad x + 4y + 5z = 1, \quad x + 4y + 5z = 2. \end{aligned}$$

10.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 25$ .

10.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y + 3x = 0$ ,  $3y - x = 0$ ,  $y + 3x = 1$ ,  $y - 3x = 1$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (6x + 2y)e^{2-t}$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 2.

10.10. По кривой  $L$ :  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = xyz$ . Найти полный заряд кривой.

10.11. Вычислить интеграл

$$\int_L 2y \, dx - z \, dy + x \, dz$$

по контуру  $L$ :  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 4 - \cos t - \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

10.12. Вычислить

$$\int_{(1,-1)}^{(4,0)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}\right) dx + \left(y - \frac{1}{\sqrt{x-y}}\right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

10.13. Найти площадь части поверхности  $S$ :  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 2x$ .

10.14. Вычислить

$$\iint_S e^y \, dS,$$

где  $S$ :  $z^2 + x^2 + y^2 = 4$ .

10.15. Найти

$$\iint_S 3x \, dydz - 2y \, dx dz + (2z + 1) \, dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $3x + y + z = 6$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

10.16. Вычислить

$$\iint_S -xy \, dydz + 3xy \, dx dz + (2z + 3) \, dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z = 6$ ,  $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Нормаль внешняя.

10.17. Вычислить

$$\iint_S (y^3 - z) dy dz + (z - x) dx dz - (x - y + 2) dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $(x^2 + y^2)^{1/2} = z$ , отсекаемая плоскостью  $z = 10$  ( $z < 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

10.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{2x + 1, y^2, -xy\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = (z - 1)/2, \\ z = 7. \end{cases}$$

10.19. Найти  $\operatorname{div}[\vec{r}f(r)]$ .10.20. Найти поток поля  $(x^2, y^2, z^2)$  через первый октант сферы единичного радиуса.10.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10)^{-1}(-3 - y, x + 1)$  вдоль кривой  $L: (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ .10.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = h\rho$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq a, \cos \gamma > 0$ ).10.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (1 + x^2 y^2)^{-1}(y; x)$  вдоль кривой  $L: y = e^{x^2}, 0 \leq x \leq 1$ .10.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (2x^4 z^2 y - 2x^4 y z, 3x^2 y^2 z - 4x^3 z^2 y^2, 4x^3 y z^2 - 3x^2 y z^2)$  через поверхность  $S: (x - 2)^2 + (y + 9)^2 + (z - 4)^2 = 28$ .**Вариант № 11**

11.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^R dx \int_{x^2/R}^{\sqrt{2Rx-x^2}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

11.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

а)  $yx = e, \quad yx = 1, \quad y = x^2, \quad y = 2x^2;$

б)  $x\sqrt[3]{y} = 1, \quad x\sqrt[3]{y} = \frac{1}{8}, \quad y\sqrt[3]{x} = 1, \quad y\sqrt[3]{x} = \frac{1}{8}.$

11.3. Вычислить

$$\iint_S x^2 y^2 dx dy,$$

где  $S: y = x^3, 2y = x^3, y^3 = x, y^3 = 2x$ .11.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$  в области  $S: \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16}$ .

11.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

а)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(z - c)^2}{c^2} = 0;$

б)  $z = 0, \quad z = \sin(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = \pi^2, \quad y = \sqrt{3}|x|, \quad y \geq \sqrt{3}|x|.$

11.6. В теле  $z^2/4 + x^2/28 + y^2/64 = 1$  ( $z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 3 + 8z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

11.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 504x dx dy dz,$$



если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + y = 1, & \quad 5x + y = 2, & \quad 5y + z = 1, \\ 5y + z = 2, & \quad 5z + x = 1, & \quad 5z + x = 2. \end{aligned}$$

11.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ .

11.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y + 4x = 0$ ,  $4y - x = 0$ ,  $y + 4x = 1$ ,  $y - 4x = 1$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (x + y) \cos t$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $\pi/2$ .

11.10. По кривой  $L: x = e^{-t} \cos t$ ,  $y = e^{-t} \sin t$ ,  $z = e^{-t}$  ( $0 \leq t$ ) распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = z$ . Найти полный заряд кривой.

11.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (x + y)dx + (x - y)dy,$$

где  $L$  – часть кривой  $x^2 + y^2/9 = 1$  от точки  $(1, 0)$  до точки  $(0, 3)$  ( $y \geq 0$ ).

11.12. Вычислить

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{3x + 2y}{\sqrt{x + y}} dx + \frac{x}{\sqrt{x + y}} dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

11.13. Найти площадь части поверхности  $S: z^2 + 1 = x^2 + y^2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 5$ .

11.14. Вычислить

$$\iint_S (x + y)dS,$$

где  $S: z = x^2/4 + y^2/9$  ( $4 \geq z \geq 0$ ,  $x \geq 0$ ).

11.15. Найти

$$\iint_S (1 - 3x)dydz + y dx dz + z dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x/4 + y + z/2 = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

11.16. Вычислить

$$\iint_S y^x dydz + yz^2 dx dz + x^2 z dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $z \geq 0$ . Нормаль внешняя.

11.17. Вычислить

$$\iint_S (x^2 - z^2)dydz + (y^2 - z^2)dx dz + (y^2 - z^2 + 1)dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $(x^2 + 2y^2)^{1/2} = z$ , отсекаемая плоскостью  $z = \sqrt{2}$  ( $z < \sqrt{2}$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

11.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{6z, y^2, z - 4y\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

11.19. Найти  $\operatorname{div}[\vec{a}f(r)]$ .

11.20. Найти поток поля  $\{y, z, x\}$  через треугольную пирамиду  $x + y + z = a$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ . Нормаль внешняя.

11.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5)^{-1}(-1 - y, x - 2)$  по кривой  $L$ :  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0,16$ .

11.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = y^2 + z^2$ ,  $(x, y, z \geq 0)$ .

11.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (x(3xy^2 - 2), 2y(x^3 + 1))$  вдоль кривой  $L$ :  $x = \sin y$ ,  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ .

11.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (4x^4z^2y^3 - x^4y^4, 2x^2y^4z - 4x^3y^4z^2, 4x^3y^4z - 4x^2y^3z^2)$  через поверхность  $S$ :  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 15$ .

### Вариант № 12

12.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{y^{1/2}}^{y^2} dx.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

12.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

а)  $yx^3 = e$ ,  $yx^3 = 1$ ,  $yx = 1$ ,  $yx = 5$ ;

б)  $y^8 = x$ ,  $y^8 = 512x$ ,  $x^8 = y$ ,  $x^8 = 512y$ .

12.3. Вычислить

$$\iint_S (9x^2 - y^2) dx dy,$$

где  $S$ :  $3x - y = 0$ ,  $3x - y = 2$ ,  $yx = 1$ ,  $yx = 3$ .

12.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = x$  в области  $S$ :  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 2y$ .

12.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

а)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z - c)^2}{c^2}$ ,  $z = c$ ;

б)  $z = 0$ ,  $z = \cos(x^2 + y^2)$ ,  $x^2 + y^2 = \pi^2/4$ .

12.6. В теле  $x^2/71 + y^2/279 - z^2/4 = 1$  ( $2 \geq z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 3 + 24z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

12.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 14x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$5x + 2y = 1, \quad 5x + 2y = 2, \quad 5x + 2z = 1,$$

$$5y + 2z = 2, \quad 2x + 5z = 1, \quad 2x + 5z = 2.$$

12.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .

12.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y = 6x^2 + 7$ ,  $y + 2x = 7$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (x - y)(\operatorname{ch} te^t - 1)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $\ln 2$ .

12.10. По кривой  $L$ :  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = -x + z$ . Найти полный заряд кривой.

12.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy,$$

где  $L$  — часть  $x^2/9 + y^2/4 = 1$  от точки  $(3, 0)$  до точки  $(-3, 0)$  ( $y \geq 0$ ).

12.12. Вычислить

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)} yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

12.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = 2xy$ , вырезанной поверхностями  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $x = 0$  ( $x \geq 0$ ),  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ).

12.14. Вычислить

$$\iint_S (x - y)dS,$$

где  $S: z = -(x^2 + y^2/4)^{1/2}$  ( $0 \geq z \geq -2$ ,  $y \geq 0$ ).

12.15. Найти

$$\iint_S (x - 1)dy dz + (y - 1)dx dz + (z - 1)dy dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $x + y + z = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma < 0$ ).

12.16. Вычислить

$$\iint_S xy dy dz + yz dx dz + zx dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $z^2 + y^2 = 16$ ,  $(x^2 + y^2)^{1/2} - z = 0$  ( $z \leq 0$ ). Нормаль внешняя.

12.17. Вычислить

$$\iint_S xy dy dz + yz dx dz - zx dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $4x^2 + 9y^2 = z^2$ , отсекаемая плоскостями  $z = 1$  и  $z = -1$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

12.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x + 2y, 5z, 3x - 2z\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

12.19. Найти  $\operatorname{div}(\vec{r}/r^2)$ .

12.20. Найти поток поля  $(x^3, y^3, z^3)$  через сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = x$ .

12.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 4x + 8)^{-1}(-2 - y, x - 2)$  по кривой  $L: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0,04$ .

12.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ,  $x^2 + y^2 \leq 6$ ,  $y \geq 0$ .

12.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (2xy^4 - 1, 4x^2y^3 + 2y)$  вдоль кривой  $L: x = 1 + e^t$ ,  $y = \cos t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

12.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (2x^4z^2y - 2x^4yz, 4x^2y^2z^3 - 4x^3y^2z^2, 4x^3yz^2 - 2x^2yz^4)$  через поверхность  $S: (x - 2)^2 + (y + 9)^2 + (z - 4)^2 = 16$ .

## Вариант № 13

13.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_{\sin 2x}^{\sqrt{\pi^2 - 4x^2}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

13.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = ex^{-1/2}, \quad y = e^2x^{-1/2}, \quad yx = 2, \quad yx = 1; \\ \text{б) } & y^{13} = x, \quad y^{13} = 4096x, \quad x^{13} = y, \quad x^{13} = 409y. \end{aligned}$$

13.3. Вычислить

$$\iint_S x^2 dx dy,$$

где  $S: y = 2x^9, y = 8x^9, x^3y = 1, x^3y = 2$ .13.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = x^2 + y^2$  в области  $S: x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 1$ .

13.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{5z}{4c}\right)^2 = 0; \\ \text{б) } & z = xy, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0. \end{aligned}$$

13.6. В теле  $x^2/253 + y^2/725 - z^2 = 1 - 2z$  ( $0 \leq z \leq 2$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 3 + 3z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

13.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 54x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 2z = 1, \quad 5x + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 5y + 2z = 1, \\ 2x + 5y + 2z = 2, \quad 2x + 2y + 5z = 1, \quad 2x + 2y + 5z = 2. \end{aligned}$$

13.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 - z^2 = 1, x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1$ .13.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y = 3x + 1, y = 4x^2$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (3x + 2y)(\sin t - e^{-t})$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $\ln 3$ .13.10. По кривой  $L: x^2 + y^2 = -4x$ , распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Найти полный заряд кривой.

13.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (x^2 + 2y) dx + (2x + y^2) dy,$$

где  $L$  — часть кривой  $x^2 + y = 2$  от точки  $(-4, 0)$  до точки  $(0, 2)$ .

13.12. Вычислить

$$\int_{(0,1)}^{(1,5)} \frac{y - 2x^2}{\sqrt{y - x^2}} dx + \frac{x/2}{\sqrt{y - x^2}} dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

13.13. Найти площадь части поверхности  $S: z^2 - 4 = x^2 + y^2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 4$ .

13.14. Вычислить

$$\iint_S (2x + y) dS,$$

где  $S: z = (x^2 + y^2)^{1/2}$  ( $1 \geq z \geq 0, x \leq 0$ ).

13.15. Найти

$$\iint_S (1 - x) dydz - y^2 dx dz + (y + 2z) dy dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $x + y + z = 3$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

13.16. Вычислить

$$\iint_S (2x + y) dy dz + y^2 dx dz + (y + 2z) dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 4(x^2 + y^2)$ . Нормаль внешняя.

13.17. Вычислить

$$\iint_S yz dy dz + xy dx dz + z dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $x^2 + y^2 = 4z^2$ , отсекаемая плоскостями  $z = 3$  и  $z = -3$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

13.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x^2 + y, -x + y, z - 1\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2, \\ 2z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

13.19. Найти  $\text{grad}(r^3)$ .

13.20. Найти поток  $\vec{a} = m\vec{r}/r^3$  через любую замкнутую поверхность, окружающую начало координат.

13.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5)^{-1}(-1 - y, x - 2)$  по кривой  $L: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0,16$ .

13.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = y^2 + z^2$ . Нормаль внешняя.

13.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (x(3xy^2 - 2), 2y(x^3 + 1))$  вдоль кривой  $L: x = \sin y, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ .

13.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (4x^4z^2y^3 - x^4y^4, 2x^2y^4z - 4x^3y^4z^2, 4x^3y^4z - 4x^2y^3z^2)$  через поверхность  $S: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 15$ .

#### Вариант № 14

14.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^2 dx \int_{|x-1|}^{e^x} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

14.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

- а)  $y = ex^{100}, y = x^{100}, yx = 1, yx = 102;$   
 б)  $y^{5/2} = x, y^{5/2} = 4x, x^{5/2} = y, x^{5/2} = 4y.$

14.3. Вычислить

$$\iint_S (7x - y) \sin(49x^2 - y^2) dx dy,$$

где  $S: 7x - y = 2, 7x - y = 0, 7x + y = 3, 7x + y = 5$ .

14.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 1$  в области  $S: (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2), x \geq 0$ .

14.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\text{а) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

$$\text{б) } z = 0, \quad z = ye^{-xy}, \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = a, \quad y = 3a.$$

14.6. В теле  $z^2/25 + x^2/319 + y^2/485 = 1 (z \geq 0)$  распределены массы с плотностью  $\mu = 3 + 4z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

14.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 2912x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x - 5y + 4z = 1, \quad 5x - 5y + 4z = 2, \quad 4x + 5y - 5z = 1, \\ 4x + 5y - 5z = 2, \quad -5x + 4y + 5z = 1, \quad -5x + 4y + 5z = 2. \end{aligned}$$

14.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 25$ .

14.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2/4 - y^2/25 = 1, x = 2|y|$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (5x - 2y)(\text{ch}^2 t + 1)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $\ln 2$ .

14.10. По кривой  $L: x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = x^2 + y^2$ . Найти полный заряд кривой.

14.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (x^2 + y^2)^{1/2} dx + [y + (x^2 + y^2)^{1/2}] dy,$$

где  $L$  – часть кривой  $x^2 + y^2 = 2x$  от точки  $(0, 0)$  до точки  $(2, 0) (y \geq 0)$ .

14.12. Вычислить

$$\int_{(3,2)}^{(0,1)} \frac{y^2 - 3x}{\sqrt{y^2 - 2x}} dx + \frac{xy}{\sqrt{y^2 - 2x}} dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

14.13. Найти площадь части поверхности  $S: 4z - z^2 = x^2 + y^2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = -2x$ .

14.14. Вычислить

$$\iint_S (x - z) dS,$$

где  $S: x = z^2 + y^2 (2 \geq x \geq 0)$ .

14.15. Найти

$$\iint_S -2x dy dz - 2y dx dz + 3z dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $3x + 2y + z = 6$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

14.16. Вычислить

$$\iint_S xy \, dydz + (3y - xy) \, dx dz + zx \, dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $(x^2/4 + y^2/9 + z^2)^2 = x^2/4 + y^2/9$ . Нормаль внешняя.

14.17. Вычислить

$$\iint_S (x - z^2) \, dy dz + (y + z^2) \, dx dz + (2 + xy - 2z) \, dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $(9x^2 + y^2)^{1/2} = z$ , отсекаемая плоскостью  $z = 1$  ( $z < 1$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

14.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} \, d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{-x + 2y, 2y, -2yz\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = -2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

14.19. Найти  $\text{grad}(\vec{r}, \vec{\rho})$ .

14.20. Найти потенциал поля  $\vec{A} = -m\vec{r}/r^3$ .

14.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8)^{-1}(2 - y, x - 2)$  по кривой  $L$ :  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0,04$ .

14.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ,  $x^2 + z^2 \leq 6$  ( $y \geq 0$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

14.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (2xy^4 - 1, 4x^2y^3 + 2y)$  вдоль кривой  $L$ :  $x = 1 + e^t$ ,  $y = \cos t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

14.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (2xzy - xy, 4x^2y^4z^3 - y^2z, yz - 4x^2y^3z^4)$  через поверхность  $S$ :  $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 2)^2 = 1$ .

### Вариант № 15

15.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^{\pi} dx \int_{x^2 - \pi x}^{\sin x} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

15.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = ex^{12}, \quad y = x^{12}, \quad yx = 1, \quad yx = 13; \\ \text{б) } & y^{7/2} = x, \quad y^{7/2} = 16x, \quad x^{7/2} = y, \quad x^{7/2} = 25y. \end{aligned}$$

15.3. Вычислить

$$\iint_S \frac{y^4}{x^5} \, dx dy,$$

где  $S$ :  $y = 2x^8$ ,  $y = 8x^8$ ,  $yx = 1$ ,  $yx = 6$ .

15.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 1$  в области  $S$ :  $x^2/4 + y^2/9 = 1$ ,  $x^2/4 + y^2/9 = 2$ ,  $2y = 3|x|$ ,  $y \geq 1,5|x|$ .

15.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{3z^2}{c^2} = -1; \\ \text{б) } & z = x^2y, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad y \geq x. \end{aligned}$$

15.6. В теле  $x^2/726 + y^2/152 - z^2/9 = 1$  ( $3 \geq z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 50 - 8z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

15.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 1568x \, dx \, dy \, dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 3z = 1, & \quad 5x + 2y - 3z = 2, & \quad -3x + 5y + 2z = 1, \\ -3x + 5y + 2z = 2, & \quad 2x - 3y + 5z = 1, & \quad 2x - 3y + 5z = 2. \end{aligned}$$

15.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$ .

15.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $x = 5|y|$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = x^2(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.

15.10. По кривой  $L$ :  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = 2t$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = x - z^2$ . Найти полный заряд кривой.

15.11. Вычислить интеграл

$$\int_L x \, dx + \sin(x^2 + y^2) \, dy,$$

где  $L$  – часть кривой  $x^2 + y^2 = -2y$  от точки  $(0, -2)$  до точки  $(0, 0)$  ( $x \geq 0$ ).

15.12. Вычислить

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} \left( \frac{y/2}{\sqrt{x+y}} + x \right) dx + \frac{x + 1,5y}{\sqrt{x+y}} dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

15.13. Найти площадь части поверхности  $S$ :  $z = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$ , вырезанной поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x = 0$  ( $x \geq 0$ ).

15.14. Вычислить

$$\iint_S (2x + y + z) \, dS,$$

где  $S$ :  $y = (9 - x^2 - z^2)^{1/2}$ .

15.15. Найти

$$\iint_S x \, dydz - (y - 1) \, dx dz + 2z \, dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x/2 + y + z/2 = 3$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

15.16. Вычислить

$$\iint_S (2z + y) \, dydz + (x - y) \, dx dz + 3x \, dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $3z = 27 - 2(x^2 + y^2)$ ,  $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Нормаль внешняя.

15.17. Вычислить

$$\iint_S (x - y) \, dydz + (2y - x) \, dx dz + (z - x) \, dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $(x^2 + y^2)^{1/2} = -z$ , отсекаемая плоскостью  $z = -1$  ( $z > -1$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.



15.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{xz, y^2 + 1, y + z\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{(x^2 + y^2)/2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

15.19. Найти  $\partial U / \partial r$ , если

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

15.20. Найти потенциал поля  $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ .

15.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8)^{-1}(-2 - y, x - 2)$  по кривой  $L: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 0,16$ .

15.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $x^2 + y^2 = z^2, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 6 (x, z \geq 0)$ .

15.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (-x^{-2}y, x^{-1})$  вдоль кривой  $L: x = 2 + \sin(\pi t/2), y = e^t, 0 \leq t \leq 1$ .

15.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (3xz^2y^2 - xy^3, x^3y^2 - y^3z^2, y^3z - 2x^3yz)$  через поверхность  $S: (x + 3)^2 + (y - 8)^2 + (z - 3)^2 = 61$ .

### Вариант № 16

16.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-R}^R dy \int_{|y|}^{R + \sqrt{R^2 - y^2}} dx.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

16.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = ex^{-100}, \quad y = x^{-100}, \quad yx = 2, \quad yx = 101; \\ \text{б) } & y^{100}x = 1, \quad y^{100}x = 2, \quad x^{100}y = 1, \quad x^{100}y = 2. \end{aligned}$$

16.3. Вычислить

$$\iint_S (4x + y) dx dy,$$

где  $S: 4x - y = 0, 4x - y = 1, yx = 1, yx = 2$ .

16.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$  в области  $S: (x^2 + y^2)^{3/2} = x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0$ .

16.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3; \\ \text{б) } & z = 0, \quad 2x + 2y + z = 5, \quad x^2 + y^2 = 2x + 2y. \end{aligned}$$

16.6. В теле  $x^2/726 + y^2/152 - (z - 100)^2 = 1 (200 \geq z \geq 0)$  распределены массы с плотностью  $\mu = 600 - 6z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

16.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 288x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + y - 3z = 1, \quad 5x + y - 3z = 2, \quad -3x + 5y + z = 1, \\ -3x + 5y + z = 2, \quad x - 3y + 5z = 1, \quad x - 3y + 5z = 2. \end{aligned}$$

16.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z^2 + x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x^2 + y^2)^{3/2} \leq 2xy$ .

16.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y = 3x$ ,  $y = 6x$ ,  $y + x = 28$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (x + y)(e^{-t} + 1)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.

16.10. По кривой  $L: x^2/9 + y^2 = 4$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = y + |x|$ . Найти полный заряд кривой.

16.11. Вычислить интеграл

$$\int_L xy dx + (x - y)dy$$

по контуру  $L: \triangle ABC$ ,  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ,  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(2, 1)$ .

16.12. Вычислить

$$\int_{(2,2)}^{(1,1)} y \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dx + x \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

16.13. Найти площадь части поверхности  $S: 16 - z^2 = x^2 + y^2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = -4x$ .

16.14. Вычислить

$$\iint_S (z - x) dS,$$

где  $S$  — часть поверхности  $z = x^2 - y^2$  ( $z \geq 0$ ), вырезанная поверхностью  $x^2 + y^2 = 1/5$ .

16.15. Найти

$$\iint_S x dydz + 2 dx dz - z dy dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $x + y/4 + z = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

16.16. Вычислить

$$\iint_S (zx + y) dy dz + (2y - y^2) dx dz - (x^2 + y^2) dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$ . Нормаль внешняя.

16.17. Вычислить

$$\iint_S (x + y) dy dz + yz dx dz + (z + 1) dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $(x^2 + y^2)^{1/2} = -z$ , отсекаемая плоскостью  $z = -2$  ( $z > -2$ ). Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

16.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{4yz - x, 2xz, z - x^2\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

16.19. Найти  $\text{grad}(1/r)$ .

16.20. Найти площадь фигуры  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = b \sin^3 t$  с помощью криволинейного интеграла.

16.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13)^{-1}(3 - y, x - 2)$  по кривой  $L: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0,36$ .

16.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через замкнутую поверхность  $S: x = -y^2 + z^2, z^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0, z \geq 0$ . Нормаль внешняя.

16.23. Найти работу поля  $\vec{F} = [(1 + x^2)^2 + (x + y)^2]^{-1}(1 - x^2 - 2xy, 1 + x^2)$  вдоль кривой  $L: y = 1 + e^{x^2}, 0 \leq x \leq 1$ .

16.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (3xz^4y^2 - 4xy^2z^3, 2zx^3y^2 - y^3z^4, y^2z^4 - 2x^3yz^2)$  через поверхность  $S: (x + 3)^2 + (y - 6)^2 + (z - 1)^2 = 1$ .

### Вариант № 17

17.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{2-x^2} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

17.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = ex^{-11}, \quad y = x^{-11}, \quad yx = 15, \quad yx = 75; \\ \text{б) } & y^{2/3}x = 1, \quad y^{2/3}x = 8, \quad x^{2/3}y = 1, \quad x^{2/3}y = 8. \end{aligned}$$

17.3. Вычислить

$$\iint_S yx^5 dx dy,$$

где  $S: y = 3x^6, y = 2x^3, y = 7x^6, x^{12}y = 1, x^{12}y = 2$ .

17.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = |x|$  в области  $S: x^2 + y^2 = 1, y = |x|, x = 0$ .

17.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = e^{x^2+y^2}, \quad y^2 + x^2 = 1, \quad y^2 + x^2 = 4. \end{aligned}$$

17.6. В параболоиде  $z - 60 - x^2/27 - y^2/727 = 0$  ( $z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 10 + z$ . Найти давление параболоида на плоскость  $xOy$ .

17.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 288x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x - 3y + z = 1, \quad 5x - 3y + z = 2, \quad x + 5y - 3z = 1, \\ x + 5y - 3z = 2, \quad -3x + y + 5z = 1, \quad -3x + y + 5z = 2. \end{aligned}$$

17.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z^2 + 1 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2$ .

17.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2/16 - y^2 = 0, y = \sqrt{2}(x+4), y = 0$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (4x + 1)e^{1-t}$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.

17.10. По кривой  $L: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = y^2$ . Найти полный заряд кривой.

17.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (y+x)dx + xy dy$$

по контуру  $L: \triangle ABC$ ,  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ,  $A(0,0)$ ,  $B(-1,-1)$ ,  $C(-1,0)$ .

17.12. Вычислить

$$\int_{(1,1)}^{(0,1)} x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dx + y \left(-1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

17.13. Найти площадь части поверхности  $S: 2 + z^2 = x^2 + y^2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 3$ .

17.14. Вычислить

$$\iint_S (2z + y) dS,$$

где  $S$  — часть поверхности  $z = -x^2 + y^2$  ( $z \leq 0$ ), вырезанная поверхностью  $x^2 + y^2 = 1$ .

17.15. Найти

$$\iint_S dy dz + y dx dz + 2z dy dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $3x + y + 2z = 12$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

17.16. Вычислить

$$\iint_S (x^2 + xy) dy dz + (yz + y^2) dx dz - (z^2 - xz) dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z = -(x^2 + y^2)^{1/2}$ . Нормаль внешняя.

17.17. Вычислить

$$\iint_S (x + 2yz) dy dz + xy dx dz + (1 - z) dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ , отсекаемая плоскостями  $z = 1$  и  $z = -1$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

17.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x + 2, y - 3x, z - 3xz\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x^2 + y^2 = 3z. \end{cases}$$

17.19. Найти  $\operatorname{div}[\vec{\rho}, \vec{r}]$ .

17.20. Найти площадь фигуры  $(x + y)^2 = ax$ ,  $y = 0$  с помощью криволинейного интеграла.

17.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13)^{-1}(-3 - y, x + 2)$  по кривой  $L: (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 0,49$ .

17.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8xyz$ , нормаль внешняя.

17.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (1 + x^2 + y^2 + xy)^{-1}(2x + y, 2y + x)$  вдоль кривой  $L: x = e^{\operatorname{arctg} y}$ ,  $0 \leq y \leq 3$ .

17.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (2x^2 z^2 y - 2x^2 y z, 2z^2 x y^2 (3x^2 - 2), 2x y z^2 (1 - x^2 z))$  через поверхность  $S: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 7$ .

## Вариант № 18

18.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_{|x|-\pi/2}^{\cos x} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

18.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = ex^{12}, \quad y = x^{12}, \quad yx = 5, \quad yx = 18; \\ \text{б) } & y^{16} = x, \quad y^{16} = 3^{15}x, \quad x^{16} = y, \quad x^{16} = 3^{15}y. \end{aligned}$$

18.3. Вычислить

$$\iint_S (3x - y)e^{9x^2 - y^2} dx dy,$$

где  $S: 3x - y = 1, 3x - y = 0, 3x + y = 1, 3x + y = 2$ .18.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = |x|$  в области  $S: \sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1, \sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 2$ .

18.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}; \\ \text{б) } & z = x^2y^2, \quad z = 0, \quad y = x, \quad y + x = 2, \quad y = 0. \end{aligned}$$

18.6. В конусе  $x^2 + y^2 - z^2 = 49 - 14z$  ( $0 \leq z \leq 14$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 12 + 12z$ . Найти давление конуса на плоскость  $xOy$ .

18.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 486x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 2z = 1, \quad 5x + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 5y + 2z = 1, \\ 2x + 5y + 2z = 2, \quad 2x + 2y + 5z = 1, \quad 2x + 2y + 5z = 2. \end{aligned}$$

18.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z^2 + 1 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 5z^2/4$ .18.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y = 1 - 2x^2, y = |x|$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (7x + 2y) \cos(\pi t/2)e^{-t}$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.18.10. По кривой  $L: x = \sqrt{2}e^{-t} \cos t, y = \sqrt{2}e^{-t} \sin t, z = e^{-t}, 0 \leq t$ , распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = x$ . Найти полный заряд кривой.

18.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (x - y)dx + (x^2 - y^2)dy$$

по контуру  $L: \triangle ABC, A \rightarrow B \rightarrow C, A(0,0), B(2,1), C(2,2)$ .

18.12. Вычислить

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)} \frac{y}{x^3}(yx^3 - 2)dx + \frac{2x^3y + 1}{x^2}dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

18.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = -xy$ , вырезанной поверхностями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $|x| = |y|$  ( $|x| \leq |y|$ ).

18.14. Вычислить

$$\iint_S (z + x) dS,$$

где  $S$  — часть поверхности  $z = x^2 - y^2$ , вырезанная поверхностью  $x^2 + y^2 = 1$ .

18.15. Найти

$$\iint_S 2 dydz - y dx dz + (z + 1) dy dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $2x + y + z = 6$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

18.16. Вычислить

$$\iint_S (-x + xy) dy dz + (y + yx) dx dz + (z - 2) dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 9(x^2 + y^2)^2$ . Нормаль внешняя.

18.17. Вычислить

$$\iint_S (xy - z) dy dz + (z - y) dx dz + (x + z) dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , отсекаемая плоскостями  $z = 1$  и  $z = -\sqrt{3}$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

18.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{yz, -xz, yx\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

18.19. Найти  $\text{rot}[\vec{\rho}, \vec{r}]$ .

18.20. Найти площадь фигуры  $x^3 + y^3 = 3axy$  с помощью криволинейного интеграла.

18.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5)^{-1}(1 - y, x + 2)$  по кривой  $L: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1,44$ .

18.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $y^2 = 2x - z^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 8$ .

18.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (1 + x^2 y^2)^{-1}(2xy^2, 2y(y^2 - x^2)^{-1})$  вдоль кривой  $L: x = \text{tg } y$ ,  $0 \leq y \leq \pi/4$ .

18.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (2x^2 zy(z - 1), z^2 xy^2(3x^2 - 2), 2xyz^2(1 - x^2 z))$  через поверхность  $S: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 125$ .

### Вариант № 19

19.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{1+\ln x}^{x^{-1/2}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

19.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

- а)  $y = e^3 x^{-1/3}$ ,  $y = e^2 x^{-1/3}$ ,  $yx = 2$ ,  $yx = 1$ ;  
 б)  $y^{5/4} = x$ ,  $y^{5/4} = 16x$ ,  $x^{5/4} = y$ ,  $x^{5/4} = 16y$ .

19.3. Вычислить

$$\iint_S x^4 dx dy,$$

где  $S: y = 2x^4, y = x^4, x^5 y = 1, x^5 y = 2$ .

19.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = |x|$  в области  $S: x^2 + (y/3)^2 = 1, x^2 + y^2 = 18, x = 0, 3x = y, x \geq 0, y \leq 3x$ .

19.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\text{а) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 3;$$

$$\text{б) } z = 0, \quad z = xy^2, \quad y = x, \quad y + x = 2, \quad y = 2.$$

19.6. В параболоиде  $z - 10 - x^2/25 - y^2/215 = 0$  ( $z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 2 + 3z$ . Найти давление параболоида на плоскость  $xOy$ .

19.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 136x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 4z = 1, \quad 5x - 3y + 4z = 2, \quad 4x + 5y - 3z = 1, \\ 4x + 5y - 3z = 2, \quad -3x + 4y + 5z = 1, \quad -3x + 4y + 5z = 2. \end{aligned}$$

19.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2x$ .

19.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2/16 + y^2/25 = 1, x = 4|y|$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (x+2) \sin \pi t e^t$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.

19.10. По кривой  $L: x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = |y|$ . Найти полный заряд кривой.

19.11. Вычислить интеграл

$$\int_L xy dx + (x^2 + y^2) dy$$

где  $L$  – часть кривой  $x^2 + y^2 = 16$  от точки  $(4, 0)$  до точки  $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$  ( $y \geq 0$ ).

19.12. Вычислить

$$\int_{(2,2)}^{(0,1)} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx + y \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

19.13. Найти площадь части поверхности  $S: z^2 = 4x^2 + 4y^2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 2x - 2y$ .

19.14. Вычислить

$$\iint_S (z + y + x) dS,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x = zy$ , вырезанная поверхностью  $z^2 + y^2 = 4$ .

19.15. Найти

$$\iint_S (x-1) dy dz - (2y-1) dx dz - (3z+1) dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x + y + z = 5$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

19.16. Вычислить

$$\iint_S xy \, dydz + (x + y^2) \, dx dz - (x^2 - 2z) \, dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z = -(x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $z \leq 0$ . Нормаль внешняя.

19.17. Вычислить

$$\iint_S xz \, dydz + (y^2 + x^2) \, dx dz + (2 + x^2) \, dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x^2 + y^2 - 3z^2 = 1$ , отсекаемая плоскостями  $z = 1$  и  $z = -1$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

19.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} \, d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x + y, y - 2x, z + 1\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

19.19. Найти  $\text{grad}(\vec{\rho}, \vec{r})$ .

19.20. Найти площадь фигуры  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  с помощью криволинейного интеграла.

19.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5)^{-1}(-1 - y, x + 2)$  по кривой  $L$ :  $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

19.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S$ :  $x^2 - y^2 = z^2$ ,  $yz = 1$ ,  $yz = 3$ ,  $z = 1$ ,  $z = 2$ ,  $x \geq 0$ .

19.23. Найти работу поля

$$\vec{F} = \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right)$$

вдоль кривой  $L$ :  $x = e^t$ ,  $y = 2 - \cos t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

19.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (x^2 z^2 y(2z - 3y^2), 2z^3 x y^3(2x^2 y - 1), z y^2 z^3(2y - 3x^2 z))$  через поверхность  $S$ :  $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 + (z - 8)^2 = 12$ .

### Вариант № 20

20.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^{2\pi} dx \int_{x^2 - 2\pi x}^{1 - \cos x} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

20.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

а)  $y = ex^{17}$ ,  $y = x^{17}$ ,  $yx = 1$ ,  $yx = 18$ ;

б)  $y^{7/6} = x$ ,  $y^{7/6} = 2x$ ,  $x^{7/6} = y$ ,  $x^{7/6} = 2y$ .

20.3. Вычислить

$$\iint_S (2x + 5y) \, dx dy,$$

где  $S$ :  $2x - 5y = 0$ ,  $2x - 5y = 1$ ,  $y = 1/x$ ,  $y = 2/x$ .

20.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$  в области  $S$ :  $(x^2 + y^2)^{3/2} = x^2 - y^2$ ,  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ .



20.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2} = \frac{2xy}{ab}; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = e^x, \quad y + x = 1, \quad y + x = 2, \quad y = 0, \quad x = 0. \end{aligned}$$

20.6. В теле  $z^2/100 + x^2/500 + y^2/400 = 1$  ( $z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 3 + 4z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

20.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 122x \, dx \, dy \, dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x - 4y = 1, \quad 5x - 4y = 2, \quad -4x + 5y = 1, \\ -4x + 5y = 2, \quad -4x + 5z = 1, \quad -4x + 5z = 2. \end{aligned}$$

20.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностью  $z^2 + x^2 + y^2 = 1$  внутри  $x^2 + y^2 = z^2$ .

20.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2/4 - y^2 = 1$ ,  $y^2 = 2(x + 2)$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (y + x) \sin \pi t \operatorname{sh} t$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.

20.10. По кривой  $L: x = 2 \cos t, y = -2 \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = x + yz$ . Найти полный заряд кривой.

20.11. Вычислить интеграл

$$\int_L xy \, dx + (4x^2 + y^2) \, dy,$$

где  $L$  – часть кривой  $x^2 + y^2/4 = 1$  от точки  $(1, 0)$  до точки  $(1/\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  ( $x \geq 0$ ).

20.12. Вычислить

$$\int_{(3,0)}^{(0,2)} (y + x\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx + y(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

20.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = 2 + (9 - x^2 - y^2)^{1/2}$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 3x$ .

20.14. Вычислить

$$\iint_S \cos \pi z \, dS,$$

где  $S$  – часть поверхности  $z^2 + x^2 + y^2 = 1$ , вырезанная поверхностью  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $z^2 \geq x^2 + y^2$ ).

20.15. Найти

$$\iint_S 2 \, dy \, dz + 2y \, dx \, dz - (2z - 1) \, dy \, dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x/4 + y + z = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

20.16. Вычислить

$$\iint_S 7x \, dy \, dz + (2z - 1) \, dx \, dz + (y^2 - 5z) \, dy \, dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z = 2, x^2 + y^2 = z$ . Нормаль внешняя.

20.17. Вычислить

$$\iint_S (2 - x^2) dy dz + zy dx dz + xz dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $4x^2 + y^2 - z^2 = 4$ , отсекаемая плоскостями  $z = 0$  и  $z = 1$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

20.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{y - x, x - y, z^2\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

20.19. Найти  $\text{grad}(f(\rho))$ .

20.20. Найти площадь фигуры  $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  с помощью криволинейного интеграла.

20.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8)^{-1}(2 - y, x + 2)$  по кривой  $L: (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$ .

20.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: x = 3yz, y = 1, z = 0, z = y$ .

20.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (1 + x^2y^2)^{-2}(y - x^2y^3, x - y^2x^3)$  вдоль кривой  $L: x = 2 + \sin t, y = 2 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

20.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (4x^2zy^3(1 - z^2y), 2zxy^4(x^2 - 1), 2xy^3z^2(yz^2 - 2x^2))$  через поверхность  $S: (x + 5)^2 + (y - 9)^2 + (z - 3)^2 = 1$ .

### Вариант № 21

21.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{\ln x}^{\sin \pi x} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

21.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = e^3x^{-5}, \quad y = x^{-5}, \quad yx = 5, \quad yx = 17; \\ \text{б) } & y^{5/3} = x, \quad y^{5/3} = 8x, \quad x^{5/3} = y, \quad x^{5/3} = 8y. \end{aligned}$$

21.3. Вычислить

$$\iint_S (5x - y) \sin(25x^2 - y^2) dx dy,$$

где  $S: 5x - y = \pi/2, 5x - y = \pi/6, 5x + y = 1, 5x + y = 2$ .

21.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = e^{x+y}$  в области  $S: y = x, y = x + 1, y + x = 1, y + x = 2$ .

21.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = e^{y^2 - x^2}, \quad x \leq 2y \leq x. \end{aligned}$$

21.6. В теле  $x^2/300 + y^2/200 - z^2/100 = 1$  ( $10 \geq z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 3 + 24z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

21.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} -8x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} x + y - z = 1, \quad x + y - z = 2, \quad -x + y + z = 1, \\ -x + y + z = 2, \quad x - y + z = 1, \quad x - y + z = 2. \end{aligned}$$

21.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  внутри  $x^2 + y^2 - 3/2z^2 = -1$ .

21.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x = 2y^2 + 3$ ,  $2y + x = 3$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (y + x)(e^t \operatorname{sh} t + 2)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежутки времени от 0 до 1.

21.10. По кривой  $L$ :  $x = -t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = z$ . Найти полный заряд кривой.

21.11. Вычислить интеграл

$$\int_L x^2 dy + (x^2 + 4y^2) dx$$

где  $L$  – часть кривой  $x^2/16 + y^2 = 1$  от точки  $(-4, 0)$  до точки  $(2\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  ( $y \geq 0$ ).

21.12. Вычислить

$$\int_{(2,2)}^{(1,0)} \left( xy^2 + \frac{1}{\sqrt{x+y}} \right) dx + \left( yx^2 + \frac{1}{\sqrt{x+y}} \right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

21.13. Найти площадь части поверхности  $S$ :  $-2z - z^2 = x^2 + y^2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = x$ .

21.14. Вычислить

$$\iint_S z^2 dS,$$

где  $S$  – часть поверхности  $z^2 + x^2 + y^2 = 1$ , вырезанная поверхностью  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $z^2 \leq x^2 + y^2$ ).

21.15. Найти

$$\iint_S -2x dy dz + y dx dz + (z + 1) dy dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x/3 + y/2 + z/2 = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

21.16. Вычислить

$$\iint_S (3x - xz) dy dz + y^2 dx dz + yz dy dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z = 6$ ,  $x^2 + y^2 \geq z^2$ . Нормаль внешняя.

21.17. Вычислить

$$\iint_S (x^2 - z^2) dy dz + (y - x) dx dz - z dy dx,$$

где  $S$  – часть поверхности  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ , отсекаемая плоскостями  $z = 0$  и  $z = 2$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

21.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{2yz, y^2 + xz, y^2\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

21.19. Найти  $\text{grad}(r^2 - \rho^2)$ .

21.20. Найти площадь фигуры  $x^2 + y^2 = ax$ , ограниченной поверхностью  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

21.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8)^{-1}(-2 - y, x + 2)$  по кривой  $L: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 0,01$ .

21.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: x^2 - y^2 = 2z, 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ .

21.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (4x^3y - y^3, x^4 - 3xy^2 + 2y)$  вдоль кривой  $L: y = e^{1+\sin x}, 0 \leq x \leq \pi/2$ .

21.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (x^3z - 4x^2y^4z^3, zx^2y(4xy^3z^2 - 3), 2xy^3z^4(y - 2x^2))$  через поверхность  $S: (x - 5)^2 + (y - 7)^2 + 5(z + 2)^2 = 2$ .

### Вариант № 22

22.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{1+\ln x}^{x^{1/2}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

22.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = ex^{-13}, \quad y = x^{-13}, \quad yx = 8, \quad yx = 102; \\ \text{б) } & y^{62}x = 1, \quad y^{62}x = 1, \quad x^{62}y = 1, \quad x^{62}y = 2. \end{aligned}$$

22.3. Вычислить

$$\iint_S x^9 dx dy,$$

где  $S: y = 10x^{12}, y = 100x^{12}, x^1y = 1, x^{10}y = 2$ .

22.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = |y|$  в области  $S: x^2 + y^2 = 1, y = |x| (y \leq |x|)$ .

22.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{(y-b)^2}{b^2} \geq 0; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = \ln(x+y), \quad y = x, \quad y+x = 2, \quad y = 2. \end{aligned}$$

22.6. В конусе  $x^2/5 + y^2/4 - z^2 = 9 - 6z (0 \leq z \leq 6)$  распределены массы с плотностью  $\mu = 2 + 2z$ . Найти давление конуса на плоскость  $xOy$ .

22.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 26x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 2z = 1, \quad 5x + 2y - 2z = 2, \quad -2x + 5y + 2z = 1, \\ -2x + 5y + 2z = 2, \quad 2x - 2y + 5z = 1, \quad 2x - 2y + 5z = 2. \end{aligned}$$

22.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  внутри  $x^2 + y^2 = x$ .

22.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2/4 - y^2 = 1, y = \sqrt{3}(x+2), y \geq 0$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (2y + 3x)(e^{-t} + 1)$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.

22.10. По кривой  $L: x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 2t, 2\pi \leq t \leq 4\pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = x^2$ . Найти полный заряд кривой.

22.11. Вычислить интеграл

$$\int_L x dx + z^2 dy + y dz$$

по контуру  $L$ :  $y = 2 \cos t$ ,  $x = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

22.12. Вычислить

$$\int_{(1,-1)}^{(4,0)} \left( y - \frac{1}{\sqrt{x-y}} \right) dx + \left( x + \frac{1}{\sqrt{x-y}} \right) dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

22.13. Найти площадь части поверхности  $S$ :  $z = x^2/2 + x + y^2/2$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = -2x$ .

22.14. Вычислить

$$\iint_S \frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dS,$$

где  $S$  — поверхность, образованная вращением линии  $z = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) вокруг оси  $Oz$ .

22.15. Найти

$$\iint_S x dy dz - y dx dz + 4 dy dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $4x + y + z = 4$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

22.16. Вычислить

$$\iint_S y dy dz + 2zy dx dz + 2z^2 dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z = 1$ ,  $z = 0$ . Нормаль внешняя.

22.17. Вычислить

$$\iint_S (y + x^2) dy dz + (x - y^2) dx dz + z dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $x^2 - y^2 + z^2 = 2$ , отсекаемая плоскостями  $y = 1$  и  $y = -1$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

22.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{-x, yz, -z^2\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} z = \sqrt{15(x^2 + y^2)}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25. \end{cases}$$

22.19. Найти  $\Delta f(r)$ .

22.20. Найти площадь фигуры  $S$ :

$$\left( \frac{x}{a} \right)^{2n+1} + \left( \frac{y}{b} \right)^{2n+1} = c \left( \frac{x}{a} \right)^n \left( \frac{y}{b} \right)^n$$

с помощью криволинейного интеграла.

22.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13)^{-1}(3 - y, x + 2)$  по кривой  $L$ :  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0,04$ .

22.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S$ :  $x^2 - y^2 = 2z$ ,  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

22.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (2xy + 3x^2 - y^2, x^2 - 2xy + 5)$  вдоль кривой  $L$ :  $x = \ln(1 + t^2)$ ,  $y = \operatorname{arctg} t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

22.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (3x^3y^2z^3 - 2x^3y^3z, 2zx^4y - 3x^2y^3z^3, 3x^2y^3z^2 - z^2x^4)$  через поверхность  $S$ :  $(x + 2)^2 + (y - 9)^2 + (z + 4)^2 = 125$ .

### Вариант № 23

23.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{\ln(1-x)}^{\sqrt{x-x^2}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

23.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & yx^{7/5} = 2, \quad yx^{7/5} = 1, \quad yx = 1, \quad yx = 12; \\ \text{б) } & y^{23} = x, \quad y^{23} = 7x, \quad x^{23} = y, \quad x^{23} = 7y. \end{aligned}$$

23.3. Вычислить

$$\iint_S \frac{x^{22}}{y} dx dy,$$

где  $S$ :  $y = 5x^{23}$ ,  $y = 10x^{23}$ ,  $y = 1/x^2$ ,  $y = 2/x^2$ .

23.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 1$  в области  $S$ :  $\sqrt[4]{y} + \sqrt[4]{x} = 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

23.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{y}{b}; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = y \cos(\pi x/4), \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad y = 4. \end{aligned}$$

23.6. В параболоиде  $z - 1/2 = x^2/25 + y^2/5$  ( $z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 12 + 24z$ . Найти давление параболоида на плоскость  $xOy$ .

23.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 486x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 2z = 1, \quad 5x + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 5y + 2z = 1, \\ 2x + 5y + 2z = 2, \quad 2x + 2y + 5z = 1, \quad 2x + 2y + 5z = 2. \end{aligned}$$

23.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 3$ .

23.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2/25 + y^2/36 = 1$ ,  $y \geq 6|x|$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (2y + 3x)e^{-t} \sin \pi t$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 1.

23.10. По кривой  $L$ :  $x = e^{-t} \cos t$ ,  $y = e^{-t} \sin t$ ,  $z = e^{-t}$ ,  $0 \leq t$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = y$ . Найти полный заряд кривой.

23.11. Вычислить интеграл

$$\int_L y dx + z dy + y dz$$

по контуру  $L$ :  $z = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $x = t$ ,  $3\pi \geq t \geq \pi$ .

23.12. Вычислить

$$\int_{(1,3)}^{(0,4)} \frac{x+2y}{\sqrt{(x+y)^3}} dx - \frac{x}{\sqrt{(x+y)^3}} dy$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

23.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = 2xy$ , вырезанной поверхностями  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $x = 0$  ( $x \geq 0$ ),  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ).

23.14. Вычислить

$$\iint_S \frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dS,$$

где  $S$  — поверхность, образованная вращением линии  $z = \cos x$  ( $0 \leq x \leq \pi/2$ ) вокруг оси  $Oz$ .

23.15. Найти

$$\iint_S dy dz - y dx dz + (z+1) dy dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $x/3 + y/2 + z/4 = 1$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

23.16. Вычислить

$$\iint_S (3x - y) dy dz + (2y - y^2) dx dz + (zx - 4z) dy dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $(x^2 + y^2 + z^2/9)^2 = x^2 + y^2$ . Нормаль внешняя.

23.17. Вычислить

$$\iint_S xy dy dz + xy dx dz + xz dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $4x^2 - y^2 + z^2 = 1$ , отсекаемая плоскостями  $y = 0$  и  $y = -1$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

23.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x - y, y + x, z + 4\}$ ,

$$\Gamma: \begin{cases} z = \sqrt{-2 + x^2 + y^2}, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

23.19. Найти  $\operatorname{div}(\vec{r}f(\rho))$ .

23.20. Найти площадь, ограниченную кривой  $x^6 + y^6 = x^2y^2$ , с помощью криволинейного интеграла.

23.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10)^{-1}(1 - y, x - 3)$  по кривой  $L: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ .

23.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: z^2 + x^2 = y^2$ ,  $z^2 + y^2 \leq 3$ ,  $y \geq 0$ . Нормаль внешняя.

23.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (1 + x^2 + y^2)^{-3/2}(x[2 + x^2 + 3y^2], -y[2 + 3x^2 + y^2])$  вдоль кривой  $L: y = e^{x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

23.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (2x^3yz^2 - 3x^3y^2z^2, 2zx^4y^2 - 3x^2y^2z^2, 3x^2y^2z^3 - 2z^2yx^4)$  через поверхность  $S: (x - 7)^2 + (y - 2)^2 + 5(z + 11)^2 = 17$ .

### Вариант № 24

24.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{1-\sqrt{3/4}}^{1+\sqrt{3/4}} dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

24.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = xe^{3/2}, \quad y = x^{3/2}, \quad yx = 10, \quad yx = 4; \\ \text{б) } & y^{48} = x, \quad y^{48} = 2x, \quad x^{48} = y, \quad x^{48} = 2y. \end{aligned}$$

24.3. Вычислить

$$\iint_S (3x + 2y) dx dy,$$

где  $S: 3x - 2y = 1, 3x - 2y = 2, yx = 50, yx = 150$ .

24.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = 1$  в области  $S: (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1, xb = \sqrt{3}ya, \sqrt{3}xb = ya, x \geq 0$ .

24.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 9; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = y^2 \ln x, \quad y + x = 1, \quad y = x + 1, \quad y = 1/2. \end{aligned}$$

24.6. В теле  $z^2/144 + x^2/7 + y^2/15 = 1 (z \geq 0)$  распределены массы с плотностью  $\mu = 100 - 5z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

24.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 54x dx dy dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} -x + 2y + 2z = 1, \quad -x + 2y + 2z = 2, \quad 2x - y + 2z = 1, \\ 2x - y + 2z = 2, \quad 2x + 2y - z = 1, \quad 2x + 2y - z = 2. \end{aligned}$$

24.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{3}, z = -\sqrt{3}$ .

24.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $x^2 - y^2 = 1, y^2 = 5(x + 5)^2$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (y + 3x) \cos t$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до  $\pi/2$ .

24.10. По кривой  $L: \rho = e^\varphi, \varphi \geq 0$ , распределены заряды с линейной плотностью  $\mu = x$ . Найти полный заряд кривой.

24.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (4 - y + x) dx + x dy + y dz$$

по контуру  $L: x = (4t - \sin t), y = 2 - 2t \cos t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

24.12. Вычислить

$$\int_{(2,0)}^{(1,1)} e^{y/x} \left( \frac{x-y}{x} dx + dy \right)$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

24.13. Найти площадь части поверхности  $S: z = -2(x^2 + y^2)^{1/2}$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = -6x$ .

24.14. Вычислить

$$\iint_S \frac{y^2}{(x^2 + z^2)^{1/2}} dS,$$



где  $S$  — поверхность, образованная вращением линии  $y = e^{-|x|}$  вокруг оси  $Oy$ .

24.15. Найти

$$\iint_S 3x \, dy \, dz - yz \, dx \, dz + 3z \, dy \, dx,$$

где  $S$  — часть плоскости  $x + y/3 + z = 2$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

24.16. Вычислить

$$\iint_S (xy + x^3) \, dy \, dz + (y^3 + y^2) \, dx \, dz + yz \, dy \, dx,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $z = 2$ . Нормаль внешняя.

24.17. Вычислить

$$\iint_S (xy + x^2) \, dy \, dz + xz \, dx \, dz - zy \, dy \, dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ , отсекаемая плоскостями  $y = 0$  и  $y = \sqrt{5}$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

24.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} \, d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x + y, 3x + y, 3z\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z + 1, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

24.19. Найти  $\operatorname{rot}[\vec{\rho}f(r)]$ .

24.20. Найти площадь, ограниченную кривой  $x^4 + y^4 = xy$ , с помощью криволинейного интеграла.

24.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13)^{-1}(4 + y, x - 1)$  по кривой  $L: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0,16$ .

24.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $S: x^2 - y = z$ ,  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

24.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (x^3 - y^3, xy)$  вдоль кривой  $L: y = 16x^3$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

24.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (x^4z - 4x^3y^4z^3, 3zx^4y^2 - 4x^3yz, 3x^2y^4z^4 - 2x^4yz^3)$  через поверхность  $S: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 16$ .

### Вариант № 25

25.1. Поменять порядок интегрирования

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{1 - \cos x}^{3 - (x/\pi)^2} dy.$$

Найти площадь области. Сделать рисунок.

25.2. Найти площадь области, ограниченной линиями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y = ex^{\pi}, \quad y = x^{\pi}, \quad yx = 1, \quad yx = \pi + 2; \\ \text{б) } & y^{2/5}x = 1, \quad y^{2/5}x = 2, \quad x^{2/5}y = 1, \quad x^{2/5}y = 16. \end{aligned}$$

25.3. Вычислить

$$\iint_S (5x + 2y)e^{25x^2 - 4y^2} \, dx \, dy,$$

где  $S: 5x - 2y = 1$ ,  $5x - 2y = 2$ ,  $5x + 2y = 1$ ,  $5x + 2y = 2$ .

25.4. Найти координаты центра масс, распределённых с плотностью  $\mu = e^{x-y}$  в области  $S: x - y = 1$ ,  $y = x + 2$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 1 - x$ .

25.5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{3z^2}{2c^2} = -1; \\ \text{б) } & z = 0, \quad z = e^{x-y}, \quad y = x, \quad y = x + 2, \quad y = 10, \quad y = 0. \end{aligned}$$

25.6. В теле  $x^2/72 + y^2/825 - z^2/576 = 1$  ( $24 \geq z \geq 0$ ) распределены массы с плотностью  $\mu = 10 + 5z$ . Найти давление тела на плоскость  $xOy$ .

25.7. Вычислить

$$\iiint_{(V)} 486x \, dx \, dy \, dz,$$

если  $V$  – объем, ограниченный плоскостями:

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 2z = 1, \quad 5x + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 5y + 2z = 1, \\ 2x + 5y + 2z = 2, \quad 2x + 2y + 5z = 1, \quad 2x + 2y + 5z = 2. \end{aligned}$$

25.8. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  однородного тела  $V$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $x^2 + y^2 = 2y$ .

25.9. В плоской области  $D$ , ограниченной линиями  $y = 2x$ ,  $y = x$ ,  $x + y = 6$ , в результате химической реакции выделяется газ, плотность мощности источников которого  $N = (2y + x)e^{-t}$ . Найти количество газа, выделенного источниками области  $D$  за промежуток времени от 0 до 2.

25.10. По кривой  $L$ :  $x = 2t \cos t$ ,  $y = 2t \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  распределены заряды с линейной плотностью  $\rho = z^3$ . Найти полный заряд кривой.

25.11. Вычислить интеграл

$$\int_L (5 + x - y)dx + (x + y)dy + x \, dz$$

по контуру  $L$ :  $x = 2 \cos t$ ,  $y = -3 \sin t$ ,  $z = t$ ,  $2\pi \geq t \geq 0$ .

25.12. Вычислить

$$\int_{(0,-1)}^{(2,1)} \frac{dx}{(1+x-y)\sqrt{x-y}} - \frac{dy}{(1+x-y)\sqrt{x-y}}$$

вдоль кривых, для которых интеграл не зависит от пути интегрирования.

25.13. Найти площадь части поверхности  $S$ :  $z = -(9 - x^2 - y^2)^{1/2}$ , вырезанной поверхностью  $x^2 + y^2 = 3x$ .

25.14. Вычислить

$$\iint_S (x + y + z) dS,$$

где  $S$  – часть поверхности  $z^2 = x^2 + y^2$  ( $z \leq 0$ ), вырезанная поверхностью  $x^2 + y^2 = 9$ .

25.15. Найти

$$\iint_S (x + 1)dy \, dz + (y + 1)dx \, dz - (2z - 1)dy \, dx,$$

где  $S$  – часть плоскости  $x + y + 4z = 4$ , лежащая в первом октанте ( $\cos \gamma > 0$ ).

25.16. Вычислить

$$\iint_S (x^3 + 2)dy \, dz + y^3 dx \, dz + z^3 dy \, dx,$$

где  $S$  – замкнутая поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ . Нормаль внешняя.

25.17. Вычислить

$$\iint_S x^2 dydz + (xy^2 - z) dx dz + xz dy dx,$$

где  $S$  — часть поверхности  $x^2 + 4y^2 - z = 0$ , отсекаемая плоскостью  $z = 4$ . Нормаль внешняя к замкнутой поверхности.

25.18. Вычислить  $\left| \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right|$ , где  $\vec{A} = \{x, y + yz, z - x\}$ ,

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

25.19. Найти  $\Delta[\vec{\rho}, \vec{r}]^2$ .

25.20. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $x^3 + y^3 = 2xy$ , с помощью криволинейного интеграла.

25.21. Найти циркуляцию  $\vec{a} = (x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13)^{-1}(4 - y, x + 5)$  по кривой  $L$ :  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ .

25.22. Найти поток поля  $\vec{r}$  через поверхность  $2x = -y^2, z^2 + y^2 \leq 5$ .

25.23. Найти работу поля  $\vec{F} = (2xy + 3x^2 - y^2, x^2 - 2xy + 5)$  вдоль кривой  $L$ :  $x = \ln(1 + t^2), y = \operatorname{arctg} t, 0 \leq t \leq 1$ .

25.24. Найти поток поля  $\vec{F} = (x^3 z^2 - x^3 y^2, x^4 y - 3x^2 y z^2, 3x^2 y^2 z - z x^4)$  через поверхность  $S$ :  $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + (z + 3)^2 = 1024$ .

**Список литературы**

1. Методы математической физики. В 2 томах. Том 1. Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций / В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный и др. – Томск : Изд-во НТЛ, 2002. – 672 с.
2. Методы математической физики. В 2 томах. Том 2. Часть 1. Специальные функции / В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный и др. – Томск : Изд-во НТЛ, 2002. – 352 с.
3. Методы математической физики. В 2 томах. Том 2. Часть 2. Уравнения математической физики / В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный и др. – Томск : Изд-во НТЛ, 2002. – 646 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – Москва : Наука, 1985. – 416 с.
5. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – Москва : Наука, 1971. – 736 с.
6. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Теория функций комплексного переменного / Я.С. Бермант, С.М. Никольский. – Москва : Наука, 1981. – 448 с.
7. Бугров Я.С. Задачник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – Москва : Наука, 1987. – 193 с.
8. Будаков Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будаков, С.В. Фомин. – Москва : Наука, 1965. – 608 с.
9. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 томах. Том 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Москва : Наука, 1980. – 366 с.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – Москва : Наука, 1977. – 544 с.
11. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). В 2 частях. Часть I / А.В. Ефимов. – Москва : Высшая школа, 1980. – 280 с.
12. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). В 2 частях. Часть II / А.В. Ефимов, Ю.Г. Золотарев, В.М. Терпигорева. – Москва : Высшая школа, 1980. – 296 с.
13. Высшая математика для технических университетов. В 5 частях. Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление. 1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов и др. – Томск : Изд-во Томского политехнического ун-та, 2013. – 325 с.
14. Высшая математика для технических университетов. В 5 частях. Часть V. Дифференциальные уравнения / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов и др. – Томск : Изд-во Томского политехнического ун-та, 2014. – 392 с.
15. Высшая математика для технических университетов. В 5 частях. Часть I. Линейная алгебра / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов и др. – Томск : Изд-во Томского политехнического ун-та, 2009. – 310 с.
16. Высшая математика для технических университетов. В 5 частях. Часть II. Аналитическая геометрия / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов и др. – Томск : Изд-во Томского политехнического ун-та, 2014. – 398 с.
17. Высшая математика для технических университетов. В 5 частях. Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление. 2. Дифференциальное ис-

- числение функций нескольких переменных / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов и др. – Томск : Изд-во Томского политехнического ун-та, 2013. – 183 с.
18. Высшая математика для технических университетов. В 5 частях. Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление. 3. Интегральное исчисление функций одной переменной / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов и др. – Томск : Изд-во Томского политехнического ун-та, 2017. – 494 с.
  19. Зельдович Я.В. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я.В. Зельдович, И.М. Яглом. – Москва : Наука, 1982. – 512 с.
  20. Ильин В.А. Основы математического анализа. В 2 томах. Том 2 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – Москва : Наука, 1973. – 464 с.
  21. Кальницкий Л.А. Специальный курс высшей математики / Л.А. Кальницкий, Д.А. Добротин, В.Ф. Жевержев. – Москва : Высшая школа, 1976. – 400 с.
  22. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. В 3 томах. Том 3 / И.А. Каплан. – Харьков : Издательство ХГУ, 1972. – 498 с.
  23. Клементьев З.И. Лекции по математическому анализу / И.А. Клементьев. – Томск : Изд-во ТГУ, 1987. – 281 с.
  24. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2 томах. Том 2 / Л.Д. Кудрявцев. – Москва : Наука, 1982. – 720 с.
  25. Кудрявцев В.А. Курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – Москва : Наука, 1971. – 656 с.
  26. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – Москва : Наука, 1986. – 624 с.
  27. Кузнецов Л.А. Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики / Л.А. Кузнецов. – Москва : Наука, 1984. – 173 с.
  28. Математический анализ в примерах и задачах. В 2 томах. Том 2. Математический анализ в примерах и задачах / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай и др. – Киев : Вища школа, 1977. – 671 с.
  29. Мышкис А.Д. Математика для ВТУЗов. В 2 томах. Том 2 / А.Д. Мышкис. – Москва : Наука, 1973 – 632 с.
  30. Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2 томах. Том 2. Курс математического анализа / С.М. Никольский. – Москва : Наука, 1973. – 391 с.
  31. Сборник задач по математике для втузов. В 3 томах. Том 2. Специальные разделы математического анализа / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович, В.А. Болгов и др. – Москва : Наука, 1986. – 368 с.
  32. Справочник по специальным функциям / под редакцией М. Абрамовица, Н. Стигана. – Москва : Наука, 1979. – 830 с.
  33. Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. – Москва : Физматлит, 2003. – 672 с.
  34. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2 томах. Том 2 / Г.М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1968. – 464 с.
  35. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. Том 3 / Г.М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1966. – 656 с.

Учебное издание

ЗАДОРЖНЫЙ Валерий Николаевич  
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич  
ШАПОВАЛОВ Александр Васильевич

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА  
ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ**

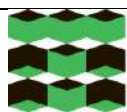
Часть III. Дифференциальное и интегральное  
исчисление

Часть III. 4. Интегральное исчисление функций  
нескольких переменных

Учебное пособие

Корректурa *Д.В. Заремба*  
Компьютерная верстка *И.В. Мастеров*  
Дизайн обложки *А.И. Сидоренко*

Подписано к печати 01.08.2024. Формат 60x84/8. Бумага «Снегурочка».  
Печать CANON. Усл. печ. л. 60,14. Уч.-изд. л. 54,39.  
Заказ 271-24. Тираж 100 экз.



**Издательство**

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов,  
А.В. Шаповалов**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА  
ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ  
УНИВЕРСИТЕТОВ**

**Часть III.**

**Дифференциальное и интегральное исчисление**

**Часть III. 4.**

**Интегральное исчисление функций нескольких переменных**

ISBN 978-5-4387-1200-8



9 785438 712008