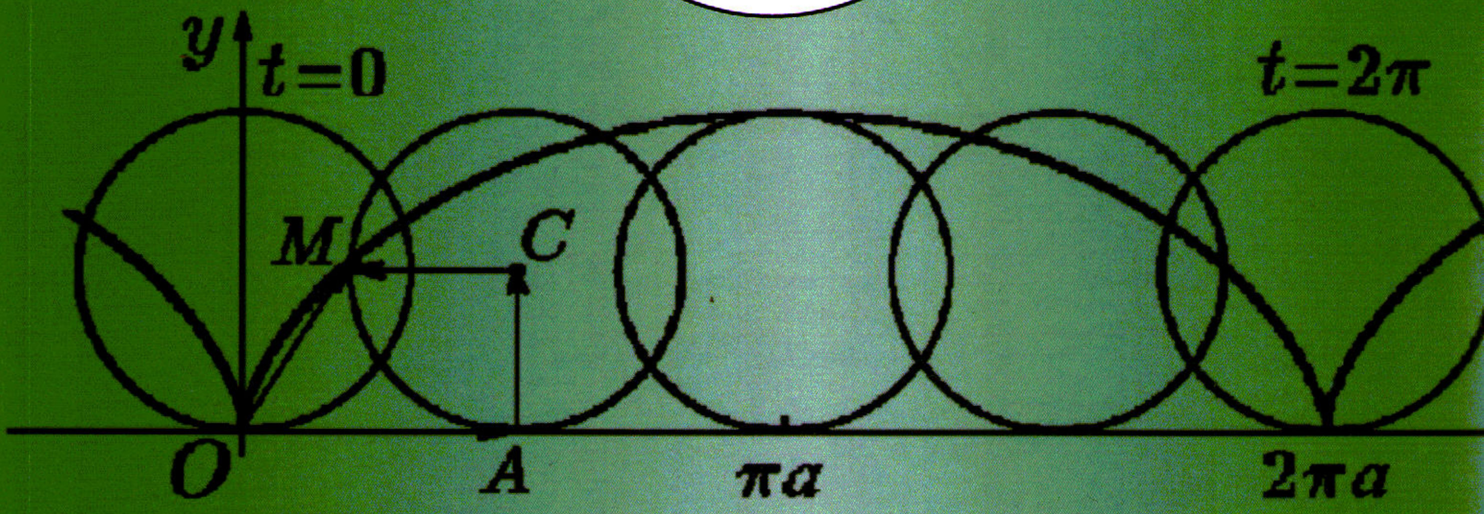


В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

часть IV

Ряды

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ

Министерство образования и науки
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж,
А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
для технических университетов

Часть IV. Ряды

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправленное

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
В937

Задорожный В.Н.

В937 Высшая математика для технических университетов. Часть IV. Ряды: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов; Томский политехнический университет. – 3-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 344 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение четвёртой части курса «Высшая математика» и содержит материал по разделу этого курса: «Ряды». Оно содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу.

Предлагаемое пособие может быть полезно студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов физических, инженерно-физических специальностей и студентов, обучающихся в системе элитного технического образования.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Работа частично поддержана Государственным заданием ВУЗам «Наука», регистрационный номер 1.676.2014/К.

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Осетрин К.Е.
Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
Багров В.Г.

Содержание

ГЛАВА 1

Числовые ряды

Общая теория бесконечных рядов является замечательным математическим инструментом для исследовательской работы. Так, например, с помощью рядов вычисляются значения важнейших элементарных функций: показательной, тригонометрических, логарифмической и др. С другой стороны, теория степенных рядов существенно упрощает как постановку, так и решение конкретных инженерных задач. Она позволяет получить удобные приближенные формулы, широко используемые в приложениях. В частности, определенные интегралы от функций, первообразные для которых неэлементарны, например

$$\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\sin x}{x} dx,$$

с помощью рядов могут быть вычислены с любой степенью точности. Кроме того, решение широких и весьма важных для физики и техники классов дифференциальных уравнений также можно представить с помощью рядов.

Теория рядов, перенесенная в область комплексной переменной, позволяет обнаружить связи, существующие между элементарными функциями, и их свойства, особенно важные для приложений (например, электро-, радио-, оптоэлектронная техника и др.). Все это оказывается возможным, поскольку теория рядов исследует глубокие и принципиальные вопросы, возникающие при перенесении свойств элементарных алгебраических операций (сложения и умножения) на случай бесконечного множества слагаемых.

В этой главе при изучении теории рядов и ее приложений мы ограничимся областью вещественных чисел (обобщение для комплексных чисел см., например, [2]), и первоначальным объектом нашего рассмотрения будут числовые ряды.

1. Определение бесконечного числового ряда и его суммы. Сходимость ряда

Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \tag{1.1}$$

♦ Выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.2}$$

называется *бесконечным числовым рядом* (или просто рядом), а u_n (1.1) — *членами* (или *слагаемыми*) ряда.

♢ Если u_n представляют собой некоторые функции $u_n = u_n(x)$, то ряд (1.2) называется функциональным.

♦ Величину u_n (т.е. выражение для n-ого члена ряда при произвольном номере n) называют *общим членом ряда.*

♢ Ряд считается заданным, если известен общий его член, выраженный как функция номера n.

Например, если $u_n = 1/(n!)$, то ряд имеет вид

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

♦ Сумму n первых членов ряда (1.2) называют *частной* (или n-частичной) *суммой ряда* и обозначают S_n:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{1.3}$$

В теории рядов основным является понятие сходимости.

♦ Если при $n \to \infty$ существует (конечный) предел последовательности частичных сумм членов данного ряда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{1.4}$$

то ряд называется *сходящимся*, а число S – его *суммой*.

Записывается это следующим образом:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если же частичная сумма S_n не имеет конечного предела, то говорят, что данный ряд расходится.

Отметим, что ряд может расходиться в двух случаях:

1) если $S_n \to \infty$;

2) если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела.

В обоих случаях говорят, что ряд не имеет суммы.

♦ Разность двух частичных сумм S_m и S_n называется *отрезком ряда* и обозначается

$$\sigma_{nm} = S_n - S_m = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{m} u_k = u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n. \tag{1.5}$$

Очевидно, что отрезок σ_{n0} совпадает с n-частичной суммой ряда: $\sigma_{n0} = S_n$.

♦ Бесконечный отрезок ряда $\sigma_{\infty n}$ называется n-ым *остатком ряда* и обозначается r_n:

$$r_n = \sigma_{\infty n} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Остаток ряда есть, в свою очередь, сумма бесконечного ряда.

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S_n + r_n,$$

то для сходящегося ряда должно выполняться соотношение

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} [S - S_n] = 0,$$

которое непосредственно следует из (1.4).

Вопрос о сходимости ряда (1.2) по определению равносилен вопросу о существовании конечного предела последовательности частичных сумм

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_m,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots \tag{1.6}$$

Применив к этой последовательности критерий сходимости Коши, получим критерий сходимости ряда (1.2) или

Критерий Коши для ряда: Для того чтобы ряд (1.2) был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало N_ε такое, что для всех $m > N_\varepsilon$ и $n > m$ для отрезка ряда σ_{nm} выполнялось неравенство

$$|\sigma_{nm}| = |S_n - S_m| = |u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Основные задачи теории числовых рядов:

1) Дан ряд. Определить, сходится этот ряд или расходится.
2) Дан сходящийся ряд. Найти его сумму (заметим, что точное вычисление суммы ряда удается провести в сравнительно немногих случаях).

Пример 1.1. Исследовать сходимость ряда, известного под названием геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n. \tag{1.8}$$

Решение. Из школьного курса алгебры известно, что сумма первых n членов прогрессии при $q \neq 1$ выражается формулой

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}\Big[1 - \lim_{n\to\infty} q^n\Big].$$

1. Пусть $|q| < 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Согласно определению, это означает, что при $|q| < 1$ ряд $1 + q + q^2 + \ldots$ сходится, и его сумма равна

$$S = \frac{1}{1 - q}.$$

2. Пусть $|q| > 1$. Тогда, очевидно, ряд расходится, так как в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

3. Пусть $q = 1$. Тогда получим ряд

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots,$$

частичная сумма которого $S_n = n$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

т. е. в этом случае ряд тоже расходится.

4. Пусть $q = -1$. Тогда получим ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

частичная сумма которого при $n \to \infty$ попеременно становится равной то нулю, то единице, в зависимости от четности n. В этом случае последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ не имеет конечного предела — ряд расходится.

Итак, ряд (1.8) сходится при $|q| < 1$ и расходится во всех остальных случаях. Этот ряд можно принять за некоторый эталон.

Пример 1.2. Найти суммы или установить расходимость рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}.$$

Решение. Воспользуемся известной тригонометрической формулой

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \varepsilon\pi, \tag{1.9}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad xy < 1, \\ -1, & \text{если} \quad xy > 1 \text{ и } x < 0, \\ 1, & \text{если} \quad xy > 1 \text{ и } x > 0. \end{cases}$$

Тогда для n-ой частичной суммы в случае а) найдем

$$\begin{aligned}
&S_2 = u_1 + u_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \operatorname{arctg}\frac{2}{2+1};\\
&S_3 = S_2 + u_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \operatorname{arctg}\frac{3}{3+1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n = S_{n-1} + u_n = \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} =\\
&\qquad = \operatorname{arctg}\frac{n(2n^2-2n+1)}{2n^3-n+1} = \operatorname{arctg}\frac{n(2n^2-2n+1)}{(2n^2-2n+1)(n+1)} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, ряд а) сходится к сумме $S = \pi/4$.

Аналогично можно найти и сумму ряда б). Приведем, однако, более простой способ его суммирования, основанный на том, что общий член ряда б), согласно (1.9), можно представить в виде

$$u_n = \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2} = \operatorname{arctg}\frac{1+1-n+n}{1-1+n^2} = \operatorname{arctg}\frac{(1+n)+(1-n)}{1-(1-n^2)} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{(1+n)+(1-n)}{1-(1+n)(1-n)} = \operatorname{arctg}(1+n) + \operatorname{arctg}(1-n),$$

поскольку $(1+n)(1-n) = 1-n^2 < 1$, и, следовательно,

$$u_n = -\operatorname{arctg}(n-1) + \operatorname{arctg}(n+1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
S_2 &= u_1 + u_2 = -\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 3 = \\
&\quad = -\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3; \\
S_3 &= S_2 + u_3 = -\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 4 = \\
&\quad = -\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 4; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
S_n &= S_{n-1} + u_n = -\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(n-1) + \operatorname{arctg} n - \\
&\quad - \operatorname{arctg}(n-1) + \operatorname{arctg}(n+1) = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg}(n+1),
\end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \Big(-\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg}(n+1) \Big) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, ряд б) также сходится, причем к сумме $S = 3\pi/4$.

Пример 1.3. Показать,что если общий член ряда представим в виде $u_n = v_n - v_{n+1}$, то его сумму можно вычислить по формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_1 - \lim_{n\to\infty} v_{n+1}. \tag{1.10}$$

Воспользовавшись этим свойством, найти сумму рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Решение. n-частичная сумма ряда в левой части (1.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \\
&\qquad = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + v_3 - v_4 + \ldots - v_n + v_n - v_{n+1} = \\
&\qquad\qquad = v_1 - v_{n+1}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

В силу этого

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (v_1 - v_{n+1}) = v_1 - \lim_{n\to\infty} v_{n+1}.$$

Перейдем к конкретным рядам.

а) Общий член ряда может быть разложен на простейшие дроби:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$v_n = \frac{1}{n}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

и, согласно (1.11), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = S = v_1 - \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

б) Разложим общий член ряда на простейшие дроби:

$$\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Отсюда находим, что

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3},$$

и, согласно (1.11), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = S =$$
$$= v_1 - \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{4}{3}.$$

в) Запишем общий член ряда как

$$u_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}.$$

Это означает, что

$$v_n = \frac{1/2}{2n-1}, \quad v_{n+1} = \frac{1/2}{2n+1},$$

но тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = S = v_1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1/2}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Пример 1.4. Показать, что если общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} \quad n = \overline{1,\infty},$$

в которой числа a_i образуют арифметическую прогрессию со знаменателем d, то сумму этого ряда при условии $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ можно найти по формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d a_1}. \tag{1.12}$$

С помощью этой формулы найти суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(6n+1)(12n+14)}$.

Решение. Поскольку числа a_i образуют арифметическую прогрессию с разностью d, то справедливо равенство

$$a_{n+1} - a_n = d,$$

с учетом которого общий член u_n можно представить в виде

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{d}$$

или

$$u_n = v_n - v_{n+1},$$

где

$$v_n = \frac{1}{a_n d}.$$

Из примера 1.3 следует, что сумму ряда можно найти по формуле (1.10):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n+1}) = v_1 - \lim_{n\to\infty} v_{n+1}.$$

Приняв во внимание, что

$$v_n = \frac{1}{da_n}, \quad \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = 0,$$

придем к формуле (1.12), которую можно рассматривать как обобщение (1.10).

Перейдем к конкретным рядам. Для ряда а), который уже рассматривался в примере 1.3, $d = 1$, $a_n = n$. Отсюда $a_1 = 1$ и, согласно формуле (1.12),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1,$$

что совпадает с результатом примера 1.3.

Для ряда б) $d = 1$, $a_n = n+2$. Тогда $a_1 = 3$ и в силу (1.12) запишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Для ряда в) предварительно проведем следующие тождественные преобразования:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(6n+1)(12n+14)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(6n+1)(6n+7)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[7+6(n-1)](7+6n)}.$$

Отсюда найдем $d = 6$, $a_n = 6n+1$. Тогда $a_1 = 7$ и с учетом (1.12) запишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(6n+1)(12n+14)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n+1)(6n+7)} = \frac{1}{7\cdot 6} = \frac{1}{42}.$$

Пример 1.5. Воспользовавшись схемой, приведенной в примере 1.3, вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2}\right).$$

Решение. Нетрудно заметить, что общий член ряда можно записать в виде

$$u_n = \sqrt[3]{n} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} = v_n - 2v_{n+1} + v_{n+2},$$

где $v_n = \sqrt[3]{n}$.

Тогда суммирование строк

$$\begin{array}{lllllllll}
u_1 = & v_1 - 2v_2 + v_3, & & & & & & & \\
u_2 = & & v_2 - 2v_3 + v_4, & & & & & & \\
u_3 = & & & v_3 - 2v_4 + v_5, & & & & & \\
u_4 = & & & & v_4 - 2v_5 + v_6, & & & & \\
\multicolumn{9}{l}{\dotfill ,} \\
u_{n-2} = & & & & & v_{n-2} - 2v_{n-1} + v_n, & & & \\
u_{n-1} = & & & & & & v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}, & & \\
u_n = & & & & & & & v_n - 2v_{n+1} + v_{n+2}, &
\end{array}$$

дает

$$\begin{aligned}
S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = v_1 - v_2 - v_{n+1} + v_{n+2} = \\
= \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{2} - \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+2}\right),
\end{aligned}$$

откуда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt[3]{2} - \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+2}\right) =$$

$$= 1 - \sqrt[3]{2} - \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+2}\right)\frac{\left(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n+2)} + \sqrt[3]{(n+2)^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n+2)} + \sqrt[3]{(n+2)^2}} =$$

$$= 1 - \sqrt[3]{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)-(n+2)}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n+2)} + \sqrt[3]{(n+2)^2}} = 1 - \sqrt[3]{2}.$$

Пример 1.6. Вычислить сумму ряда

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2 - 14n - 48}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n+1}{n(n+1)(n-1)}.$$

Решение. а) Представим ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{(7n+6)(7n-8)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+8+7n-7n}{(7n+6)(7n-8)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7n+6)-(7n-8)}{(7n+6)(7n-8)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7n-8} - \frac{1}{7n+6}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7(n-1)-1} - \frac{1}{7(n+1)-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n+2}}\right),$$

где $v_n = 7(n-1) - 1$,

$$S = \left(\frac{1}{v_1} - \cancel{\frac{1}{v_3}}\right) + \left(\frac{1}{v_2} - \cancel{\frac{1}{v_4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{v_3}} - \cancel{\frac{1}{v_5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{v_4}} - \frac{1}{v_6}\right) + \ldots$$

Окончательно имеем

$$S = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{-1} + \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}.$$

б) Аналогично запишем

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n+1}{n(n+1)(n-1)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n(n+1)-(n^2-1)-n(n-1)}{n(n+1)(n-1)}=$$
$$=\sum_{n=3}^{\infty}\Big(\frac{2}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=\sum_{n=3}^{\infty}(2v_n-v_{n+1}-v_{n+2}),$$

где $v_n=1/(n-1)$,

$$\begin{aligned}S=2v_3-v_4-\cancel{v}_5=&\\ &+2v_4-\cancel{v}_5-\cancel{v}_6+\\ &\quad+2\cancel{v}_5-\cancel{v}_6-v_7+\\ &\qquad+2\cancel{v}_6-v_7-v_8+\\ &\qquad\quad+\ldots=2v_3+v_4=2\frac{1}{3-1}+\frac{1}{4-1}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$S=\frac{4}{3}.$$

Пример 1.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big),\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}},\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Решение. а) Общий член ряда можно представить в виде

$$u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)=$$
$$=\ln\frac{n+3}{n+2}=\ln(n+3)-\ln(n+2)=v_n-v_{n+1},$$

где

$$v_n=-\ln(n+2),\quad v_{n+1}=-\ln(n+3).$$

Теперь можно воспользоваться формулой (1.10) из примера 1.3. Тогда

$$S_n=v_1-v_{n+1}=-\ln 3+\ln(n+3),$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[-\ln 3+\ln(n+3)]=\infty.$$

Последнее означает, что ряд является расходящимся.

б) Выпишем значение n-частичной суммы

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+2}},$$

оценка которой дает

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+2}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+2}}=\frac{n}{\sqrt{n+2}}.$$

Таким образом,

$$S_n \geqslant \frac{n}{\sqrt{n+2}},$$

а поскольку

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+2}} = \infty,$$

то ряд б) также является расходящимся.

в) Выпишем значение n-частичной суммы

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

и воспользуемся известным представлением конечной суммы

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \tag{1.13}$$

где $C = 0{,}57215$ – постоянная Эйлера, а ε_n – бесконечно малая величина, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\ln n + C + \varepsilon_n) = \infty,$$

откуда следует расходимость ряда в).

Пример 1.8. Согласно определению, исследовать на сходимость ряды

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}; \quad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n; \quad \text{в)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

где $|q| < 1$.

Решение. а) *Первый способ.* Выражение для n-частичной суммы

$$S_n = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots + nq^{n-1} \tag{1.14}$$

представим следующей суммой n строк:

$$\begin{aligned} S_n = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots + nq^{n-1} = \\ = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \\ + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \\ + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \\ + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + q^{n-2} + q^{n-1} + \\ + q^{n-1}. \end{aligned}$$

Поскольку каждая строка представляет собой сумму геометрической прогрессии, то, воспользовавшись формулой для этой суммы, можно записать

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} + q\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^2\frac{1-q^{n-2}}{1-q} + \ldots + q^{n-2}\frac{1-q^2}{1-q} + q^{n-1}\frac{1-q}{1-q} =$$

$$= \frac{1}{1-q}\big[1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} - nq^n\big].$$

Воспользовавшись еще раз формулой для суммы геометрической прогрессии, найдем

$$S_n = \frac{1}{1-q}\Big[\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n\Big] = \frac{1}{(1-q)^2}\big[1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}\big]. \tag{1.15}$$

Учтем, что для $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0. \tag{1.16}$$

Тогда, согласно определению сходимости ряда (1.4), имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-q)^2}\big[1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}\big] = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Это означает, что ряд а) сходится.

Равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad |q| < 1 \tag{1.17}$$

оказывается полезным при нахождении сумм некоторых конкретных числовых рядов.

Второй способ. Умножим n-частичную сумму (1.14) на $1 = (1-q)/(1-q)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1-q}[(1-q)(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots + nq^{n-1})] = \\ &= \frac{1}{1-q}[1 - q + 2q - 2q^2 + 3q^2 + \ldots - nq^n] = \\ &= \frac{1}{1-q}[1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} - nq^n] = \frac{1}{1-q}\Big[\frac{1-q^{q-1}}{1-q} - nq^n\Big]. \end{aligned}$$

В результате для S_n получается выражение, совпадающее с (1.15).

б) Выражение для n-частичной суммы имеет вид

$$S_n = q + 2^2q^2 + 3^2q^3 + 4^2q^4 + \ldots + n^2q^n.$$

Приняв во внимание соотношения

$$\begin{aligned} &2^2 = 1 + 3, \\ &3^2 = 1 + 3 + 5, \\ &4^2 = 1 + 3 + 5 + 7, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-3) + (2n-1), \end{aligned} \tag{1.18}$$

представим выражение для S_n следующей суммой n строк:

$$\begin{aligned} S_n = q + 2^2q^2 + 3^2q^3 + 4^2q^4 + \ldots + n^2q^n &= \\ = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n &+ \\ +3q^2 + 3q^3 + 3q^4 + \ldots + 3q^n &+ \\ +5q^3 + 5q^4 + \ldots + 5q^n &+ \end{aligned}$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+$$
$$+(2n-3)q^{n-1}+(2n-3)q^n+$$
$$+(2n-1)q^n.$$

Поскольку каждая строка представляет собой сумму геометрической прогрессии, то, воспользовавшись формулой для этой суммы, можно записать

$$S_n = q\frac{1-q^n}{1-q} + 3q^2\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + 5q^3\frac{1-q^{n-2}}{1-q} + \ldots + (2n-1)q^n\frac{1-q}{1-q} =$$
$$= \frac{1}{1-q}\Big\{q + 3q^2 + 5q^3 + \ldots + (2n-1)q^n - \big[1+3+5+\ldots+(2n-1)\big]q^{n+1}\Big\} =$$
$$= \frac{1}{1-q}\big[qQ_{n-1} - n^2q^{n+1}\big]. \tag{1.19}$$

Здесь снова использовано равенство (1.18) и введено обозначение

$$Q_{n-1} = 1 + 3q + 5q^2 + 7q^3 + \ldots + (2n-1)q^{n-1} =$$
$$= 1 + (2\cdot1+1)q + (2\cdot2+1)q^2 + (2\cdot3+1)q^3 + \ldots + [(2\cdot(2n-1)+1)]q^{n-1} =$$
$$= 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + 2q\big[1 + 2q + 3q^2 + \ldots + (n-1)q^{n-2}\big], \tag{1.20}$$

которое можно упростить с учетом равенства (1.15):

$$Q_{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2}\big[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\big].$$

Тогда выражение (1.18) примет вид

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}\Big\{q\Big[\frac{1-q^n}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2}\big[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\big]\Big] - n^2q^{n+1}\Big\}. \tag{1.21}$$

Отсюда, согласно определению сходимости ряда (1.4) и с учетом (1.16), получим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}\Big\{q\Big[\frac{1-q^n}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2}\big[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\big]\Big] - n^2q^{n+1}\Big\} =$$
$$= \frac{q}{1-q}\Big[\frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2}\Big] = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}.$$

Это означает, что ряд б) сходится к сумме $S = q(1+q)/(1-q)^3$, т.е. справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}, \quad |q| < 1. \tag{1.22}$$

◊ Заметим, что в дальнейшем такого громоздкого решения можно будет избежать, поскольку сходимость этих рядов достаточно просто определяется, например, с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши, а их суммы – с помощью дифференцирования соответствующих степенных рядов.

в) Для этого ряда n-частичные суммы записываются в виде

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

и образуют монотонно возрастающую последовательность. Из неравенства

$$\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

следуют оценки для S_n:

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 2\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)$$

и предела

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} 2\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big) = 2.$$

Таким образом, монотонно возрастающая последовательность частичных сумм S_n ограничена при $n \to \infty$. Следовательно, она имеет предел, и ряд в) сходится. Сумму этого ряда мы вычислим позже.

Пример 1.9. С помощью критерия Коши исследовать ряды

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{2^n}, \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad \text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \tag{1.23}$$

на сходимость.

Решение. а) Согласно критерию Коши, выпишем произвольный отрезок ряда, положив для удобства $n = m + k$:

$$|\sigma_{nm}| = |\sigma_{m+k,m}| = |u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k}|.$$

Выясним, существует ли для произвольного $\varepsilon > 0$ такое N_ε, чтобы для всех $m > N_\varepsilon$ и произвольных k выполнялось неравенство (1.7), т.е.

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k}| < \varepsilon. \tag{1.24}$$

Подставив слагаемые ряда (1.23,а) в (1.24), можно записать цепочку неравенств

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k}| = \Big|\frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}} + \frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}} + \ldots + \frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\Big| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m+k}} = \frac{1}{2^{m+1}}\Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\Big) = \\ = \frac{1}{2^{m+1}} \frac{1 - 1/2^k +}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^m}\Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big) < \frac{1}{2^m} < \varepsilon, \tag{1.25}$$

из которой вытекает оценка

$$\frac{1}{2^m} < \varepsilon, \tag{1.26}$$

справедливая при любых k. Неравенство (1.26) равносильно неравенству

$$m > \log_2(1/\varepsilon). \tag{1.27}$$

Если, исходя из (1.27), положить

$$N_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geqslant 1/2; \\ \log_2(1/\varepsilon), & 0 < \varepsilon < 1/2, \end{cases} \tag{1.28}$$

то из выполнения неравенства $m > N_\varepsilon$ следует выполнение неравенства (1.25).

Таким образом, формула (1.28) по заданному значению ε определяет число N_ε такое, что для всех $m > N_\varepsilon$ при любых k выполняется основное условие критерия Коши (1.24), откуда и следует сходимость ряда а).

б) В этом случае, подставив слагаемые ряда (1.23,б) в (1.24), получим

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k}| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+k} < \varepsilon.$$

Несложное исследование показывает, что можно указать такие ε и k, при которых это неравенство выполняться не будет. Действительно, для $\varepsilon = 1/5$ и $k = m$ имеем

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k}|\Big|_{k=m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} >$$
$$> \underbrace{\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m}}_{m \text{ слагаемых}} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2} > \varepsilon = \frac{1}{5}.$$

Наличие хотя бы одного значения k, при котором основное условие критерия Коши не выполняется, говорит о том, что ряд б) расходится.

в) Сходимость этого ряда уже установлена в примере 1.8,в) где была получена оценка n-частичной суммы S_n. Воспользуемся теперь критерием Коши. Для этого оценим отрезок ряда

$$|\sigma_{nm}| = |\sigma_{m+k,m}| = \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \ldots + \frac{1}{(m+k)!} =$$
$$= \frac{1}{(m+1)!}\Big[1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \ldots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots(m+k)}\Big] <$$
$$< \frac{1}{(m+1)!}\Big[1 + \frac{1}{(m+2)} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+2)^{k-1}}\Big].$$

Выражение в квадратной скобке представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/(m+2)$:

$$\Big[1 - \frac{1}{(m+2)^k}\Big] \Big/ \Big[1 - \frac{1}{m+2}\Big] = \frac{m+2}{m+1}\Big[1 - \frac{1}{(m+2)^k}\Big].$$

Теперь для отрезка получим оценку

$$\sigma_{m+k,m}| < \frac{m+2}{(m+1)(m+1)!}\Big[1 - \frac{1}{(m+2)^k}\Big] < \frac{m+2}{(m+1)(m+1)!} < \varepsilon_m,$$

где ε_m – бесконечно малая величина, существование которой вытекает из существования предела

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m+2}{(m+1)(m+1)!} = 0$$

для любых k.

г) В этом случае, подставив слагаемые ряда (1.23,г) в (1.24), получим

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k}| = \frac{1}{(m+1)\ln(m+1)} + \ldots + \frac{1}{(m+k)\ln(m+k)} < \varepsilon.$$

В силу неравенства (см. часть II)

$$\frac{1}{(m+1)\ln(m+1)} + \ldots + \frac{1}{(m+k)\ln(m+k)} > \ln\frac{\ln(m+k)}{\ln m}, \qquad k \geqslant 1,$$

убеждаемся, что для любого $\varepsilon > 0$ и $m > N$ существует такое k, что

$$\ln\Big(\frac{\ln(m+k)}{\ln m}\Big) > \varepsilon,$$

и, следовательно, $|\sigma_{nm}| > \varepsilon$, т.е. ряд г) расходится.

Пример 1.10. Показать, что ряд, полученный из гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$, следующим чередованием знаков:

а) один плюс, один минус и т.д., т.е.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

сходится;

б) два плюса, один минус и т.д., т.е.

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \ldots,$$

расходится;

в) два плюса, два минуса и т.д., т.е.

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

сходится.

Решение. В примере 1.9 было показано, что гармонический ряд расходится. Рассмотрим, как влияет на сходимость ряда изменение знаков его слагаемых.

а) В этом случае исходный ряд можно записать как

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

1 способ. Воспользуемся критерием Коши для отрезка $\sigma_{n+k,n}$ этого ряда:

$$\begin{gathered}|\sigma_{n+k,n}| = \Big|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} + (-1)^{n+3}\frac{1}{n+2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n+k}\frac{1}{n-1+k} + (-1)^{n+k+1}\frac{1}{n+k}\Big| = \\ = \Big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \ldots + (-1)^{k-2}\frac{1}{n-1+k} + (-1)^{k-1}\frac{1}{n+k}\Big|. \qquad (1.29)\end{gathered}$$

Оценку отрезка (1.29) удобнее провести отдельно для четных и нечетных k.

Если $k = 2l$, $l = \overline{0, \infty}$, то

$$|\sigma_{n+2l,n}| = \Big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n-1+2l} - \frac{1}{n+2l}\Big| <$$
$$< \Big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n-1+2l} - \frac{1}{n-1+2l}\Big| = \frac{1}{n+1}.$$

Если $k = 2l+1$, то

$$|\sigma_{n+2l+1,n}| = \Big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n-1+2l} - \frac{1}{n+2l} + \frac{1}{n+2l+1}\Big| <$$
$$< \Big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n-1+2l} - \frac{1}{n-1+2l} + \frac{1}{n+1}\Big| = \frac{2}{n+1}.$$

Таким образом, для любых k справедлива оценка

$$|\sigma_{n+k,n}| < \frac{2}{n+1} < \varepsilon. \tag{1.30}$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1.$$

Если, исходя из этого, положить $N_\varepsilon = 1/(2\varepsilon) - 1$, то из выполнения неравенства $n > N_\varepsilon$ следует выполнение неравенства (1.30). Последнее и доказывает сходимость ряда с чередованием знаков вида а), т.е. ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

2 способ. Выпишем частичную сумму S_{2n+1} и проведем следующие тождественные преобразования:

$$S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\Big) =$$
$$= \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\Big) - \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\Big).$$

Для полученной конечной суммы воспользуемся формулой (1.13). Тогда

$$S_{2n+1} = [\ln(2n+1) + C + \varepsilon_{2n+1}] - [\ln n + C + \varepsilon_n] = \ln\frac{2n+1}{n} + \varepsilon_{2n+1} - \varepsilon_n.$$

Предельный переход в этом равенстве даст

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\Big(S_{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\Big) = \ln 2.$$

Таким образом, воспользовавшись вторым способом, мы не только подтвердили сходимость исследуемого ряда, но и нашли его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2. \tag{1.31}$$

б) Воспользуемся также критерием Коши. Для наглядности записи оценки (1.24) при произвольных m и k предварительно оценим, например, отрезок

$$\sigma_{13,4} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13}.$$

Заметим для начала, что слагаемые со знаменателем, кратным трем, имеют знак минус. Поэтому слагаемые, стоящие между ними, заменим меньшими и в результате получим оценку

$$\begin{aligned} |\sigma_{13,4}| &= \Big|\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13}\Big| > \\ &> \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} = \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} > \frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{3}{13}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Рассмотрим теперь произвольный отрезок ряда

$$\begin{aligned} \sigma_{3k+1+3l,3k-2} = \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3(k+1)+1} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{3k+3l-1} - \frac{1}{3(k+l)} + \frac{1}{3(k+l)+1}, \quad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Как и в примере 1.9,б), покажем, что для отрезка (1.33) можно указать такие ε и l, при которых основное неравенство критерия Коши (1.24) при любых k выполняться не будет.

Действительно, действуя так же, как при получении оценки (1.32), вначале получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |\sigma_{3k+1+3l,3k-2}| &= \Big|\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3(k+1)+1} + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{3k+3l-1} - \frac{1}{3(k+l)} + \frac{1}{3(k+l)+1}\Big| > \\ &> \Big|\frac{1}{3k} - \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3(k+1)+1} + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{3(k+l)} - \frac{1}{3(k+l)} + \frac{1}{3(k+l)+1}\Big| = \\ &= \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3(k+1)+1} + \ldots + \frac{1}{3(k+l)+1}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Если теперь выбрать $l = k-1$, то в последней сумме выражения (1.34) будет ровно k слагаемых, и тогда можно продолжить оценку следующим образом:

$$\begin{aligned} |\sigma_{6k-2,3k-2}| > \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3(k+1)+1} + \ldots + \frac{1}{3(2k-1)+1} = \\ = \underbrace{\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3(k+1)+1} + \ldots + \frac{1}{3(2k-1)+1}}_{k \text{ слагаемых}} > \frac{k}{6k-2} = \frac{1}{6-2/k}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Отсюда следует, что даже при очень больших $k \gg 1$ отрезок $|\sigma_{6k-2,3k-2}|$ нельзя сделать меньше $1/6$ (при $k = 1$ – меньше $1/4$). Это и означает, что при, например, $\varepsilon = 0{,}1$ основное неравенство критерия Коши (1.24) не будет выполняться при любых k.

Таким образом, гармонический ряд с чередованием знаков по типу б) расходится.

Теперь рассмотрим гармонический ряд с чередованием знаков по типу в), обратившись, как и ранее, к критерию Коши. Сразу отметим, что в этом ряду изменение знака с минуса на плюс происходит после слагаемых со знаменателями, кратными четырем. Для наглядности записи оценки (1.24) при произвольных m и k предварительно оценим, например, отрезок

$$|\sigma_{16,4}| = \left|\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right| <$$
$$< \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} <$$
$$< \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} < \frac{1}{5} + \frac{1}{6} < \frac{2}{5}.$$

Отсюда следует, что, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть оценку, например, отрезков $\sigma_{4m+l,4k}$ для $m \geqslant k$ и $l = 0, 1, 2, 3$, поскольку дальнейшее увеличение индекса l будет соответствовать простому изменению индекса m.

Итак,

$$|\sigma_{4(m+k)+l,4k}| = \left|\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4(k+1)} +\right.$$
$$+ \frac{1}{4(k+1)+1} + \frac{1}{4(k+1)+2} + \frac{1}{4(k+1)+3} - \frac{1}{4(k+2)} + \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{4(k+m-2)+3} - \frac{1}{4(k+m-1)} + \frac{1}{4(k+m-1)+1} +$$
$$\left. + \frac{1}{4(k+m-1)+2} - \frac{1}{4(k+m-1)+3} - \frac{1}{4(k+m)}\right| <$$
$$< \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4(k+1)} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4(k+1)+2} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{4(k+m-2)+3} - \frac{1}{4(k+m-1)} + \frac{1}{4(k+m-2)+3} +$$
$$+ \frac{1}{4(k+m-1)} - \frac{1}{4(k+m-1)+3} - \frac{1}{4(k+m)} <$$
$$< \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4(k+m-1)+3} - \frac{1}{4(k+m)} <$$
$$< \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+2} < \frac{2}{4k+1}.$$

Далее,

$$|\sigma_{4(m+k)+1,4k}| = \left|\sigma_{4m,4k} + \frac{1}{4(k+m)+1}\right| <$$
$$< \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4(k+m-1)+3} - \frac{1}{4(k+m)} + \frac{1}{4(k+m)+1} <$$
$$< \frac{2}{4k+1} - \frac{1}{4(k+m-1)+3} - \frac{1}{4(k+m)} + \frac{1}{4(k+m-1)+3} < \frac{2}{4k+1};$$

$$|\sigma_{4(m+k)+2,4k}| = \left|\sigma_{4(m+k)+1,4k} + \frac{1}{4(k+m)+2}\right| <$$
$$< \frac{2}{4k+1} - \frac{1}{4(k+m)} + \frac{1}{4(k+m)+2} < \frac{2}{4k+1} - \frac{1}{4(k+m)} + \frac{1}{4(k+m)} = \frac{2}{4k+1};$$

$$|\sigma_{4(m+k)+3,4k}| = \left|\sigma_{4(m+k)+2,4k} - \frac{1}{4(k+m)+3}\right| < \sigma_{4m+2,4k} < \frac{2}{4k+1}.$$

Таким образом, при любых k, m, l справедлива оценка

$$|\sigma_{4m+2,4k}| < \frac{2}{4k+1} < \varepsilon. \tag{1.36}$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$k < \frac{1}{4}\Big(\frac{2}{\varepsilon} - 1\Big).$$

Если положить $N_\varepsilon = (2/\varepsilon - 1)/4$, то из неравенства $k > N_\varepsilon$ следует выполнение неравенства (1.36). Последнее и доказывает сходимость знакочередующегося ряда вида в).

В заключение отметим, что аналогично можно показать сходимость гармонического ряда с чередованием равного количества плюсов и минусов и его расходимость в противном случае.

Исследование указанных рядов на сходимость достаточно громоздко. Это объясняется тем, что пока нам известны только определение и критерий Коши. Эти же примеры мы позднее решим более простым способом.

В заключение рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий возможности изменения гармонического ряда, делающего этот ряд сходящимся.

Пример 1.11. Из гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ выброшены слагаемые, в знаменателе которых содержится цифра 9. Показать, что полученный ряд сходится, а его сумма меньше 80.

Решение. Частичную сумму S_n вновь образованного ряда разобьем на отрезки, состоящие из слагаемых, знаменатели которых представляют собой однозначные, двузначные и т.д. числа, вплоть до слагаемых с n-значными знаменателями включительно, т.е.

$$S_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n, \tag{1.37}$$

где

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{8};\\
&\sigma_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{88};\\
&\sigma_3 = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \ldots + \frac{1}{108} + \frac{1}{110} + \ldots + \frac{1}{888};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&\sigma_n = \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{88\ldots8}_{n}}.
\end{aligned}$$

Отрезок σ_1 состоит из 8 слагаемых, поскольку слагаемые $1/0$ и $1/9$ отсутствуют. Следовательно, для него справедлива оценка

$$\sigma_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} < \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{8\ \text{слагаемых}} = 8.$$

Отрезок σ_2 состоит из 72 слагаемых. Это число определяется следующим образом. Запишем двузначное число n в виде $n = \beta\alpha$, где α – цифра 1-го разряда, а β – цифра

2-го разряда. Цифра 2-го разряда β может принимать 8 значений: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Цифры 0 и 9 отсутствуют по той причине, что числа 0α – однозначные, а числа 9α – по условию задачи. Цифра первого разряда α принимает уже 9 значений: от 0 до 8 включительно (по условию задачи цифра 9 отсутствует). Отсюда следует, что каждой из 8 цифр 2-го разряда соответствуют 9 цифр 1-го разряда, т.е. всего двузначных чисел $8 \cdot 9 = 72$. С учетом этого оценка отрезка σ_2 дает

$$\sigma_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{88} < \frac{1}{10} 8 \cdot 9 = 8 \cdot \frac{9}{10}.$$

Аналогично для отрезка σ_3:

$$\sigma_3 = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \ldots + \frac{1}{108} + \frac{1}{110} + \ldots + \frac{1}{888} < \frac{1}{100} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

И, соответственно,

$$\sigma_n = \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{n-1} + 1} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{88\ldots8}_{n}} < \frac{1}{10^{n-1}} 8 \cdot 9^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}.$$

Теперь с учетом этих оценок можно оценить и частичные суммы S_n. Действительно, из (1.37) имеем

$$S_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n < 8 + 8 \cdot \frac{9}{10} + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \ldots + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}.$$

Тогда для монотонно возрастающей последовательности частичных сумм S_n можно получить оценку сверху с помощью предельного перехода

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}.$$

Поскольку выражение в правой части представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = 9/10 < 1$, то эта сумма легко вычисляется:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - 9/10} = 10.$$

Это означает, что предел S_n при $n \to \infty$ существует и определяется неравенством

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S < 8 \cdot 10 = 80.$$

Таким образом, если гармонический ряд видоизменить, согласно условию задачи, то полученный ряд сходится и его сумма меньше 80, что и требовалось показать.

$\Diamond$ Примеры 1.1–1.10 наглядно иллюстрируют трудности, которые возникают при определении сходимости ряда с помощью его частичной суммы или его отрезка. Действительно, определение сходимости ряда путем вычисления его суммы является зачастую громоздким и трудоемким, а в тех случаях, когда требуется лишь установление самого факта сходимости, – еще и просто нерациональным способом. Казалось бы, выходом из такого положения является использование критерия Коши, не связанного с вычислением суммы ряда, однако многообразие технических сложностей, возникающих в этом случае при работе с конкретными рядами, также затрудняет его широкое применение.

Аналогичная ситуация имеет место в задаче о дифференцировании функций. Хотя для вычисления производной функции всегда можно воспользоваться ее определением, однако, во избежание возникающих на этом пути технических трудностей, на практике, как известно, реализуется более эффективная схема, основанная на правилах дифференцирования и таблице производных. Оказывается, аналогичную схему, основанную на так называемых признаках сходимости и эталонных рядах, можно реализовать и в теории рядов. Именно ее построением мы и займемся ниже. Что же касается суммы сходящегося ряда, то в рамках этой схемы можно поступить следующим образом.

Пусть

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

– сходящийся ряд. Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то абсолютная величина остатка

$$|r_n| = |S - S_n| \tag{1.38}$$

будет сколь угодно мала, если число слагаемых n взято достаточно большим. Это дает возможность приближенно подсчитать сумму сходящегося ряда.

Далее будет показано, как иногда можно оценить величину ошибки и тем самым установить, сколько слагаемых нужно учесть, чтобы вычислить сумму ряда с требуемой точностью.

2. Простейшие свойства числовых рядов и действия над ними

Пусть

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{2.1}$$

— сходящийся числовой ряд.

Теорема 2.1. *Если сходится ряд, полученный из ряда* (2.1) *путем отбрасывания нескольких слагаемых, то сходится и сам данный ряд. Наоборот, если сходится данный ряд, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания нескольких слагаемых.*

♢ *Иными словами, на сходимость ряда не влияет отбрасывание конечного числа его слагаемых.*

Доказательство. Пусть S_n – n-я, а S_k – k-я частичные суммы ряда (2.1). Тогда если $n > k$, то

$$S_n = S_k + \sigma_{nk},$$

где σ_{nk} — соответствующий отрезок ряда. Так как конечная величина S_k не зависит от n, то его предел при $n \to \infty$ равен S_k. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_k + \sigma_{nk}) = S_k + \lim_{n\to\infty} \sigma_{nk}.$$

Из последнего соотношения следует, что если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{nk}$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$; если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{nk}$, а это и доказывает справедливость теоремы.

♦ Ряд

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 + \ldots + \lambda u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n \tag{2.2}$$

называется *произведением ряда* (2.1) *на число* λ.

Теорема 2.2. *Если ряд* (2.1) *сходится и имеет сумму* S*, то ряд* (2.2) *тоже сходится и имеет сумму* λS.

Доказательство. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (2.1) через S_n, а ряда (2.2) – через S_n^u. Имеем

$$S_n^u = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n = \lambda S_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n^u = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda S,$$

что и требовалось доказать.

♦ Ряды

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) \tag{2.3}$$

называются *суммой* и *разностью* рядов

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2.4}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{2.5}$$

Теорема 2.3. *Если ряды* (2.4) *и* (2.5) *сходятся к суммам* S^u *и* S^v*, то ряды* (2.3) *тоже сходятся и их суммы равны* $S^u \pm S^v$*, соответственно.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на теорему о пределе суммы. Пусть S_n^u – n-я частичная сумма ряда (2.4), а S_n^v – ряда (2.5), и пусть S_n – n-я частичная сумма ряда (2.3), отвечающая знаку «+». Тогда

$$S_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) = S_n^u + S_n^v.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^u + S_n^v) = \lim_{n\to\infty} S_n^u + \lim_{n\to\infty} S_n^v = S^u + S^v.$$

Умножив ряд (2.5) на (-1) и сложив его с рядом (2.4), получим

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_n - v_n) = S_n^u - S_n^v.$$

Предельный переход при $n \to \infty$ приводит к соотношению (2.3), и теорема доказана.

◊ Если ряды (2.4) и (2.5) расходятся, то ряд (2.3), вообще говоря, не обязательно расходится. Напротив, если один из рядов сходится, а другой расходится, то их сумма всегда представляет собой расходящийся ряд, что и иллюстрируют следующие примеры.

Пример 2.1. Убедиться в сходимости ряда, представляющего собой разность двух расходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Решение. Согласно определению (2.3), составим разность этих рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

но сходимость этого ряда установлена в примере 1.3,а), что и требовалось показать.

Таким образом, не все операции с расходящимися рядами лишены смысла. Впрочем, нетрудно убедиться, что сумма этих рядов, естественно, является расходящимся рядом.

Пример 2.2. Показать, что сумма сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n}$ и расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n$ представляет собой расходящийся ряд.

Решение. Пусть S_n – n-частичная сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\Big],$$

т.е.

$$S_n=(-1+1)+\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\Big)+\ldots+\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\Big).$$

Эту сумму можно представить в виде частичных сумм S'_n и S''_n, где S'_n – частичная сумма сходящегося ряда, а S''_n – частичная сумма расходящегося гармонического ряда:

$$S_n=S'_n+S''_n.$$

Поскольку для сходящегося ряда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S'_n=S'$, то предельный переход в сумме $S_n=S'_n+S''_n$ с учетом формулы (1.12) даст

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(S'_n+\ln n+C+\varepsilon_n)=\infty.$$

Из неограниченности предела S_n следует расходимость ряда, представляющего собой сумму сходящегося и расходящегося рядов.

♦ Ряд

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot\sum_{k=1}^{\infty}v_k&=(u_1+u_2+\ldots)(v_1+v_2+\ldots)=\\&=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\ldots=\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}u_{m-l+1}v_l=\sum_{m=1}^{\infty}w_m\end{aligned}\qquad(2.6)$$

называется *произведением* рядов (2.4) и (2.5) по Коши.

Графически определение (2.6) можно проиллюстрировать таблицей на рис. 1,a, из которой следует, что члены ряда (2.6) получаются суммированием произведений u_iv_j по диагонали таблицы.

$$\begin{array}{cccc} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \ldots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \ldots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \quad a \qquad \begin{array}{cccc} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \ldots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \ldots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \quad б$$

Рис. 1

◊ Произведение рядов в виде (2.6) по Коши не является единственным. Его можно определить, например, суммируя произведения u_iv_j по углам квадратов, как это показано на рис. 1,*б*, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} v_k = u_1v_1 + (u_2v_1 + u_2v_2 + u_1v_2) + \ldots \tag{2.7}$$

Однако произведение рядов по Коши более эффективно и предпочтительно (особенно для функциональных рядов), поскольку переводит произведение двух степенных рядов снова в степенной ряд. В дальнейшем, если не оговорено другое, мы будем пользоваться произведением рядов в виде (2.6) (по Коши).

♦ Ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} w_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \Big/ \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ называется *частным* от деления ряда (2.4) на ряд (2.5), если

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m \cdot \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{2.8}$$

Если воспользоваться определением (2.6), то для нахождения w_n имеем рекуррентную систему

$$\begin{array}{l} u_1 = w_1v_1, \\ u_2 = w_1v_2 + w_2v_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = w_1v_m + w_2v_{m-2} + \ldots + w_{m-1}v_2 + w_mv_1, \end{array} \tag{2.9}$$

из которой каждое слагаемое w_m можно выразить через предыдущие w_{m-1}, w_{m-2}, ..., w_1 по формуле

$$w_m = \frac{u_m - w_1v_m - w_2v_{m-1} - \ldots - w_{m-1}v_2}{v_1}. \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что практически ряд на ряд можно делить «углом», как это делается для многочленов.

♦ Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots \tag{2.11}$$

называется *рядом парных произведений.*

Следует различать ряды (2.11) и (2.6). Сходимость этих рядов, а также ряда (2.8) мы рассмотрим ниже. Сейчас же мы рассмотрим несколько простых примеров, иллюстрирующих введенные операции над рядами и их отличие от аналогичных операций над конечными суммами.

Пример 2.3. Найти произведение рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + 2 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

по определению (2.6) и определению (2.7), сравнить суммы полученных рядов.

Решение. Для заданных рядов составим таблицу, согласно рис. 1:

$$\begin{array}{ccccccc}
1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & \ldots & 1\cdot 0 & \ldots \\
1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & \ldots & 1\cdot 0 & \ldots \\
0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & \ldots & 0\cdot 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & \ldots & 0\cdot 0 & \ldots
\end{array}$$

Тогда ряд, являющийся произведением в соответствии с определением (2.6), получится суммированием элементов этой таблицы по ее диагоналям (как на рис. 1,*а*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = (1 + 1 + 0 + 0 + \ldots)(1 + 2 + 0 + 0 + \ldots) =$$
$$= 1 + 3 + 2 + 0 + 0 + \ldots$$

Ряд, являющийся произведением в соответствии с определением (2.7), получится суммированием элементов этой же таблицы по углам квадратов (как на рис. 1,*б*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = (1 + 1 + 0 + 0 + \ldots)(1 + 2 + 0 + 0 + \ldots) =$$
$$= 1 + 5 + 0 + 0 + \ldots$$

Таким образом, два определения дают два различных ряда, правда, с одной суммой, равной 6.

Отметим, что если в произведении рядов один просуммировать, а оставшийся ряд умножить на полученную сумму, то получим два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = 2(1 + 2 + 0 + 0 + \ldots) = 2 + 4 + 0 + 0 + \ldots,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = 3(1 + 1 + 0 + 0 + \ldots) = 3 + 3 + 0 + 0 + \ldots,$$

соответствующих операции умножения ряда на число, но не имеющих отношения к операции умножения рядов ни по определению (2.6), ни по определению (2.7). Тем не менее, суммы этих рядов будут совпадать как между собой, так и с суммой ряда, являющегося произведением рядов. В нашем примере эта сумма равна шести.

Пример 2.4. Возвести в квадрат ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad |q| < 1. \tag{2.12}$$

Решение. Исходный ряд представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии и при условии $|q| < 1$ является сходящимся (см. также пример 1.1). Так как требуется вычислить произведение ряда (2.12) на самого себя, то обозначив через w_n элементы результирующего ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

и следуя определению (2.6), имеем

$$\begin{aligned} &w_1 = 1 \cdot 1 = 1; \\ &w_2 = 1 \cdot q + q \cdot 1 = 2q; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ &w_n = 1 \cdot q^{n-1} + qq^{n-2} + \ldots + q^{n-2}q + q^{n-1} \cdot 1 = nq^{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}. \tag{2.13}$$

Полученный ряд (2.13), как это показано в примере 1.7,а, также является сходящимся.

◊ Забегая вперед, отметим, что для сходимости произведения (2.6) требуются более жесткие условия, чем простая сходимость сомножителей (2.4) и (2.5). Эти условия будут сформулированы ниже, при рассмотрении абсолютной и условной сходимости рядов. Там же будет приведен пример, когда возведение в квадрат сходящегося ряда делает его расходящимся.

Следующий пример, как и пример 2.1, показывает, что не только разность, но и произведение рядов может иметь смысл, даже если один из них является расходящимся.

Пример 2.5. Найти произведение рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \tag{2.14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{2.15}$$

Решение. Сходимость первого ряда очевидна, а расходимость второго показана в примере 1.1. Несмотря на это, найдем их произведение

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} v_l\right). \tag{2.16}$$

Согласно определению (2.6), имеем

$$\begin{aligned} &w_1 = u_1v_1 = 1 \cdot 1 = 1, \\ &w_2 = u_1v_2 + u_2v_1 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0, \\ &w_3 = u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &w_n = u_1v_n + u_2v_{n-1} + u_3v_{n-2} + \ldots + u_nv_1 = \end{aligned}$$

$$= 1\cdot(-1)^{n-1} + 1\cdot(-1)^{n-2} + 0 + \ldots + 0 = 0,$$

и, стало быть, произведение (2.16) дает сходящийся ряд

$$(1+1+0+0+0+0+\ldots)(1-1+1-1+1-1+\ldots) =$$
$$= \sum_{n-1}^{\infty} w_n = 1+0+0+0+0+0+\ldots$$

Пример 2.6. Найти пять первых членов произведения и частного рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Решение. Как следует из примеров 1.1 и 1.7, оба ряда являются сходящимися. Положив

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty} v_l\Big), \tag{2.17}$$

где

$$u_k = \frac{1}{2^k}, \qquad v_l = \frac{1}{l!}. \tag{2.18}$$

Согласно определению (2.6), с учетом (2.18) имеем

$$\begin{aligned}
&w_1 = u_1v_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2},\\
&w_2 = u_1v_2 + u_2v_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{1!} = \frac{2+2}{2^2 2!} = \frac{4}{2^2 2!},\\
&w_3 = u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{3!} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{2^3}\frac{1}{1!} = \frac{2^2+2\cdot 3+2\cdot 3}{2^3 3!} = \frac{16}{2^3 3!},\\
&w_4 = u_1v_4 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{4!} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3}\frac{1}{2!} + \frac{1}{2^4}\frac{1}{1!} =\\
&\quad = \frac{2^3+2^2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 3+4\cdot 3\cdot 2}{2^4 4!} = \frac{72}{2^4 4!},\\
&w_5 = u_1v_5 + u_2v_4 + u_3v_3 + u_4v_2 + u_5v_1 = \frac{1}{2\cdot 5!} + \frac{1}{2^2 4!} + \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^4 2!} + \frac{1}{2^5 1!} =\\
&\quad = \frac{1}{2^5 5!}\frac{5!}{2}\Big[\frac{2^5}{5!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2}{1!}\Big] = \frac{376}{2^5 5!},
\end{aligned}$$

т.е.

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2 2!} + \frac{16}{2^3 3!} + \frac{72}{2^4 4!} + \frac{376}{2^5 5!} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{16} + \frac{47}{480} + \ldots \tag{2.19}$$

Положив теперь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\Big)\Big/\Big(\sum_{l=1}^{\infty} v_l\Big), \tag{2.20}$$

согласно определению (2.8), найдем

$$\vartheta_1 = \frac{u_1}{v_1} = \frac{1/2}{1/1!} = \frac{1}{2},$$

$$\vartheta_2 = \frac{u_2 - \vartheta_1 v_2}{v_2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2!} = 0,$$
$$\vartheta_3 = \frac{u_3 - \vartheta_1 v_3 - \vartheta_2 v_2}{v_1} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{3!} - 0 = \frac{1}{24},$$
$$\vartheta_4 = \frac{u_4 - \vartheta_1 v_4 - \vartheta_2 v_3 - \vartheta_3 v_2}{v_1} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2}\frac{1}{4!} - 0 - \frac{1}{24}\frac{1}{2!} = \frac{1}{48},$$
$$\vartheta_5 = \frac{u_5 - \vartheta_1 v_5 - \vartheta_2 v_4 - \vartheta_3 v_3 - \vartheta_4 v_2}{v_1} = \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2}\frac{1}{5!} - 0 - \frac{1}{24}\frac{1}{3!} - \frac{1}{48}\frac{1}{2!} = \frac{7}{720},$$

откуда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{7}{720} + \ldots \tag{2.21}$$

Этот же результат можно получить, если делить ряды «углом».

Вопрос о сходимости рядов (2.19) и (2.21) оставляем пока открытым, а в справедливости (2.19) и (2.21) можно убедиться обратными действиями. Можно, однако, поступить по-другому. Перемножим равенства (2.19) и (2.21):

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{l=1}^{\infty} v_l \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \Big/ \sum_{l=1}^{\infty} v_l \Big) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \Big)^2. \tag{2.22}$$

Правую часть (2.22) с учетом формулы (2.13) можно записать как

$$\begin{aligned}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^k \bigg)^2 &= \bigg(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1} \bigg)^2 = \frac{1}{4} \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1} \bigg)^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \\ &= \frac{1}{4} \Big(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{5}{16} + \ldots \Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{5}{64} + \ldots \end{aligned} \tag{2.23}$$

Тогда, если ряды в левой части (2.23), а именно ряды (2.20) и (2.22), найдены правильно, то их произведение должно давать ряд (2.23). Положив

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k$$

и следуя (2.6), с учетом (2.19) и (2.21) найдем

$$p_1 = w_1 \vartheta_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$p_2 = w_1 \vartheta_2 + w_2 \vartheta_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$p_3 = w_1 \vartheta_3 + w_2 \vartheta_2 + w_3 \vartheta_1 = \frac{1}{4}\frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{3}{16},$$
$$p_4 = w_1 \vartheta_4 + w_2 \vartheta_3 + w_3 \vartheta_2 + w_4 \vartheta_1 = \frac{1}{4}\frac{1}{48} + \frac{1}{2}\frac{1}{24} + 0 + \frac{3}{16}\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$
$$p_5 = w_1 \vartheta_5 + w_2 \vartheta_4 + w_3 \vartheta_3 + w_4 \vartheta_2 + w_5 \vartheta_1 = \frac{1}{2}\frac{7}{720} + \frac{1}{2}\frac{1}{48} + \frac{1}{3}\frac{1}{24} + 0 + \frac{47}{480}\frac{1}{2} = \frac{5}{64}.$$

Таким образом,
$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{5}{64} + \ldots \tag{2.24}$$

Сравнив (2.24) с (2.23), убеждаемся в справедливости (2.19) с (2.21).

Пример 2.7. Разделить ряд

$$1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots \tag{2.25}$$

на ряд

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \ 2 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots, \\ &\text{б)}\ \ 1 + 1 + 0 + \ldots + 0 + \ldots \end{aligned} \tag{2.26}$$

Решение. Очевидно, что все три ряда являются сходящимися. Более того, ряды (2.26) имеют одинаковые суммы. Деление будем производить «углом», как для обычных многочленов.

$$\text{а)}\quad \begin{array}{r|l}
-\ \ 1+0+0+0+0+\ldots & 2+0+0+0+0+\ldots \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ 1+0+0+0+0+\ldots} & \dfrac{1}{2}+0+0+0+\ldots \\
-\ \ 0+0+0+0+0+\ldots & \\
\underline{\ \ 0+0+0+0+0+\ldots} & \\
0+0+0+0+0+\ldots & \\
\text{и т.д.} &
\end{array}$$

В результате получим сходящийся ряд

$$\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \ldots,$$

и, следовательно,

$$\frac{1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots}{2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots} = \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$\text{б)}\quad \begin{array}{r|l}
-\ \ 1+0+0+0+0+0+\ldots & 1+1+0+0+0+0+\ldots \\ \cline{2-2}
\underline{1+1+0+0+0+0+\ldots} & 1-1+1-1+1-\ldots \\
-\ \ -1+0+0+0+0+\ldots & \\
\underline{-1-1+0+0+0+\ldots} & \\
-\ \ 1+0+0+0+\ldots & \\
\underline{1+1+0+0+\ldots} & \\
-\ \ -1+0+0+\ldots & \\
\underline{-1-1+0+\ldots} & \\
-\ \ 1+0+\ldots & \\
\underline{1+1+\ldots} & \\
-1+\ldots & \\
\text{и т.д.} &
\end{array}$$

В результате получим расходящийся ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

и, следовательно,

$$\frac{1 + 0 + 0 + 0 + \ldots}{1 + 1 + 0 + 0 + \ldots} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n. \tag{2.27}$$

Выражение (2.27) как нельзя лучше иллюстрирует природу бесконечных рядов и их отличие от конечных сумм.

3. Необходимый признак сходимости ряда

Как уже отмечалось, в большинстве случаев трудно найти компактную формулу для n-й частичной суммы S_n или отрезка σ_{nm}, а следовательно, и их пределы. Поэтому естественно возникает вопрос об исследовании ряда на сходимость без вычисления его суммы по некоторым признакам, называемым признаками сходимости. К обоснованию признаков, при помощи которых судить о сходимости или расходимости ряда можно по общему его члену, мы и переходим.

Теорема 3.1 (необходимый признак сходимости). *Если ряд сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n (его номера):*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство. Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, по условию, сходится. Тогда его частичная сумма S_n имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Но

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n,$$

откуда

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Так как ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать.

◊ Утверждение теоремы естественным образом следует из неравенства (1.7) критерия Коши, если положить $m = n - 1$.

◊ Очевидно, что если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится, так как если бы он сходился, то, по доказанному, его общий член стремился бы к нулю.

С другой стороны, из необходимости условия

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

еще не следует, что ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится. В качестве примера рассмотрим так называемый гармонический ряд.

Пример 3.1. Показать, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

Решение. Очевидно, что общий член ряда

$$u_n = \frac{1}{n}$$

стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Убедимся, что гармонический ряд расходится. Для частичной суммы имеем

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} >$$
$$> \ln(1+1) + \ln\Big(1 + \frac{1}{2}\Big) + \ln\Big(1 + \frac{1}{3}\Big) + \ldots + \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) =$$
$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) = \ln\Big(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\Big) = \ln(n+1).$$

Итак, имеем оценку снизу

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1),$$

а так как $\ln(n+1) \to +\infty$ при $n \to \infty$, то неограниченно возрастает и частичная сумма S_n гармонического ряда. Поэтому гармонический ряд расходится (сравни с примером 1.9,б).

4. Знакоположительные ряды

♦ Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

называют *знакоположительным*, или положительным, если все его слагаемые положительны, т.е. $u_n \geqslant 0$ $(n = \overline{1,\infty})$.

Укажем достаточные признаки сходимости рядов с положительными слагаемыми, наиболее часто употребляемые на практике.

4.1. Признаки сравнения

Теорема 4.1 (первый признак сравнения). *Пусть даны два знакоположительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{4.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{4.2}$$

Если, начиная с некоторого номера $n = N$, каждый член ряда (4.1) *не больше соответствующего члена ряда* (4.2), *т.е. $u_n \leqslant v_n$, то*

1) *если сходится ряд* (4.2), *то сходится и ряд* (4.1);
2) *если расходится ряд* (4.1), *то расходится и ряд* (4.2).

Доказательство. Пусть

$$S_n^u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
$$S_n^v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

По условию, члены ряда (4.1) положительны. Следовательно, его частичная сумма S_n^u монотонно возрастает с увеличением n, так как растет число положительных слагаемых. При этом возможны два случая: либо сумма S_n^u ограничена сверху и тогда имеет конечный предел, либо S_n^u возрастает неограниченно.

Пусть ряд (4.2) сходится, т.е. существует конечный предел n-ой частичной суммы ряда

$$\lim_{n\to\infty} S_n^v = A.$$

Так как $v_n \geqslant 0$ при $n = \overline{1,\infty}$, то $S_n^v \leqslant A$ при любых n. Пусть теперь $u_n \leqslant v_n$ для всех n, начиная с $n = 1$ (если неравенство выполняется с $n = N$, то первые N слагаемых можно отбросить по первому свойству). Тогда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

т.е. $S_n^u \leqslant S_n^v$. Учитывая сказанное выше, получаем $S_n^u \leqslant A$.

Итак, последовательность $\{S_n^u\}$ монотонно возрастает, так как представляет собой сумму положительных слагаемых, и ограничена сверху. Следовательно, существует конечный предел последовательности частичных сумм $\{S_n^u\}$, т.е. ряд (4.1) сходится.

Докажем теперь вторую часть теоремы.

Если ряд (4.1) расходится, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n^u = \infty,$$

и если при этом $u_n \leqslant v_n$, то частичная сумма $S_n^u \leqslant S_n^v$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n^v = \infty.$$

А это значит, что ряд (4.2) также расходится, и теорема доказана.

Еще более простое доказательство следует из критерия Коши (самостоятельно).

На практике в некоторых случаях признак сравнения удобнее применять в следующем предельном виде:

Теорема 4.2 (второй признак сравнения). *Пусть даны два знакоположительных ряда* (4.1) *и* (4.2). *Если конечный и не равный нулю предел отношения* u_n *к* v_n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad \Big(\text{или} \ \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{A}\Big) \tag{4.3}$$

существует, то оба ряда или сходятся, или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть ряд (4.2) сходится. Тогда, согласно определению предела, можно указать такое число $\varepsilon > 0$, что для всех n, начиная с некоторого N, будет выполняться неравенство

$$\frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon, \qquad n > N,$$

или

$$u_n < (A + \varepsilon) v_n. \tag{4.4}$$

Из сходимости ряда (4.2) и ограниченности числа $A+\varepsilon$ в силу теоремы 2.2 сходится ряд

$$(A+\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_n,$$

одновременно с которым в силу неравенства (4.4) и первого признака сравнения будет сходиться и ряд (4.1).

Пусть теперь ряд (4.2) расходится. Поскольку обратное отношение v_n/u_n также имеет конечный и отличный от нуля предел $1/A$, то ряд (4.1) должен быть расходящимся, ибо в противном случае, согласно доказанному выше, ряд (4.2) был бы сходящимся вопреки сделанному предположению.

$\Diamond$ Второй признак сравнения иногда называют предельным признаком сравнения.

Часто для сравнения пользуются рядами, которые называют эталонными:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} aq^n, \quad a \neq 0, \quad \begin{cases} \text{при } |q|<1 \text{ – сходящийся ряд,} \\ \text{при } |q| \geqslant 1 \text{ – расходящийся ряд;} \end{cases}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический (расходящийся) ряд;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{при } \alpha>1 \text{ – сходящийся ряд,} \\ \text{при } \alpha<1 \text{ – расходящийся ряд} \end{cases}$

– обобщенный гармонический (общегармонический) ряд, или ряд Дирихле.

Пример 4.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^5+5n}. \tag{4.5}$$

Решение. Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

сходится, а

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{n^5+5n} : \frac{1}{n^3} = 3 \neq 0,$$

то исходный ряд (4.5) сходится в соответствии со вторым признаком сравнения.

Пример 4.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}. \tag{4.6}$$

Решение. Для сравнения выбираем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{3},$$

а гармонический ряд расходится, то и ряд (4.6), согласно второму признаку сравнения, также расходится.

Пример 4.3. Исследовать на сходимость ряды из примеров 1.2 и 1.3.

Решение. Выберем в качестве эталонного сходящийся обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Тогда последовательное применение предельного признака сравнения к эталонному ряду и рядам из примеров 1.2 и 1.3 позволяет достаточно просто установить их сходимость. Действительно, имеем

для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/2n^2)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2n^2}{1/n^2} = \frac{1}{2}, \quad 0 < \frac{1}{2} < \infty;$$

для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{2}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2/n^2)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2}{1/n^2} = 2, \quad 0 < 2 < \infty;$$

для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n(n+1)}{1/n^2} = 1, \quad 0 < 1 < \infty;$$

для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \Big/ \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2}{1/n^2} = 2, \quad 0 < 2 < \infty;$$

для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(4n^2-1)}{1/n^2} = \frac{1}{4}, \quad 0 < \frac{1}{4} < \infty.$$

Пример 4.4. С помощью признака сравнения исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{6\cdot 2} + \frac{1}{7\cdot 2^2} + \frac{1}{8\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{(5+n)2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5+n)2^n}.$$

Решение. Сравним данный ряд с рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \tag{4.7}$$

Ряд (4.7) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1/2$. Предельный признак сравнения в данном случае неприменим, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(5+n)2^n}{2^n} = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(5+n)2^n} = 0.$$

Очевидно, что каждое слагаемое

$$u_n = \frac{1}{(5+n)2^n}$$

исследуемого ряда меньше соответствующего слагаемого

$$v_n = \frac{1}{2^n}$$

ряда (4.7). Поэтому, согласно первому признаку сравнения, данный ряд сходится.

Пример 4.5. С помощью признака сравнения исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{4.8}$$

Каждое слагаемое исследуемого ряда, начиная с $n = 3$, больше соответствующего слагаемого ряда (4.8)

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} = \frac{1}{e^{\ln^2(\ln n)}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}, \quad n > 3.$$

Так как гармонический ряд расходится, то, согласно первому признаку сравнения, расходится и данный ряд.

Пример 4.6. Исследовать на сходимость ряды

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\varphi}{5^n}, \qquad \text{в)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Решение. а) В силу неравенства

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!!(2n-1)!!} = \frac{(n!)^2}{2^n n!(2n-1)!!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} < \frac{1}{2^n}$$

и сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

заключаем, что ряд а) сходится.

б) В силу неравенства

$$2^n \sin \frac{\varphi}{5^n} < \varphi \left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

справедливого при $n \gg 1$, и сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

заключаем, что ряд б) сходится.

в) В силу неравенства

$$\frac{1}{(\ln n)^\alpha} > \frac{1}{n}$$

и расходимости гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

заключаем, что ряд в) расходится.

В заключение рассмотрим несколько примеров, расширяющих возможности методов сравнения.

Пример 4.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt[5]{n^6+4}}.$$

Решение. Убедимся, что данный ряд в смысле сходимости ведет себя так же, как и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{6/5}}.$$

Для этого воспользуемся предельным признаком сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt[5]{n^6+4}} \Big/ \frac{\ln^2 n}{n^{6/5}} \right) = 1 \neq 0.$$

Отсюда следует, что оба ряда одновременно либо сходятся, либо расходятся. Исследуем теперь второй ряд. Представим его общий член в виде

$$\frac{\ln^2 n}{n^{6/5}} = \frac{\ln^2 n}{n^{12/10}} = \frac{\ln^2 n}{n^{1/10}} \frac{1}{n^{11/10}}$$

и вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{1/10}},$$

дважды воспользовавшись правилом Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{1/10}} = 20 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-9/10}} = 20 \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/10}} = 200 \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{n^{-9/10}} = 200 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/10}} = 0.$$

Равенство предела нулю означает, что, начиная с некоторого номера $n > N$, справедливо неравенство

$$\frac{\ln^2 n}{n^{1/10}} < 1.$$

Умножив это неравенство на $1/n^{11/10}$, получим

$$\frac{\ln^2 n}{n^{1/10}}\frac{1}{n^{11/10}} < \frac{1}{n^{11/10}}$$

или

$$\frac{\ln^2 n}{n^{6/5}} < \frac{1}{n^{11/10}}.$$

Ряд с общим членом $1/n^{11/10}$ сходится как обобщенный гармонический ряд со степенью $\alpha = 11/10 > 1$. Следовательно, согласно первому признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln^2 n)/n^{6/5}$, а его сходимость влечет за собой сходимость исходного ряда.

Пример 4.8. Показать, что если

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = A, \quad 0 < A < \infty, \tag{4.9}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geqslant 0)$ расходится.

Решение. Для исследуемого ряда воспользуемся предельным признаком сравнения, выбрав в качестве эталонного ряда расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} nu_n.$$

В силу условия (4.9) этот предел существует и равен конечному, отличному от нуля значению A. Но тогда исследуемый ряд, как и гармонический ряд, расходится, что и требовалось доказать.

Пример 4.9. Известно, что для знакоположительного сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ в силу необходимого признака сходимости справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Показать, что в этом случае справедливо и более общее равенство

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = 0. \tag{4.10}$$

Решение. В дополнение к сходящемуся ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$.

В силу предельного признака сравнения существует конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}n^2u_n=\lim_{n\to\infty}n(nu_n)=A,\quad 0<A<\infty.$$

Это соотношение выполняется при условии, что

$$nu_n\sim\frac{A}{n}\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

откуда и следует (4.10).

Пример 4.10. Показать, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2\quad\text{и}\quad\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$$

сходятся, то сходятся и ряды

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|,\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|u_n|}{n},\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2.$$

Решение. а) Будем исходить из очевидного неравенства $(|u_n|-|v_n|)^2\geqslant 0$. Отсюда $|u_n|^2+|v_n|^2\geqslant 2|u_n||v_n|$ или $u_n^2+v_n^2\geqslant 2|u_nv_n|$. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ и признака сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ сходится.

б) Сходимость этого ряда следует их сходимости ряда а), если положить в нем $v_n=1/n$.

в) Из признака сравнения и неравенства

$$\begin{aligned}(u_n+v_n)^2&=|u_n+v_n|^2\leqslant(|u_n|+|v_n|)^2=\\&=|u_n|^2+2|u_nv_n|+|v_n|^2=u_n^2+v_n^2+2|u_nv_n|\end{aligned}$$

вытекает сходимость ряда в).

◊ При исследовании рядов на сходимость бывает полезно использование формулы Стирлинга

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n,\quad n\gg 1,$$

вывод которой приведен в разд. «Метод Лапласа» [2]. Напомним также, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Пример 4.11. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n!)^2}},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)},$$

$$\text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n^2]{n!}}{n},\qquad \text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой Стирлинга, вычислим вспомогательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{2\pi n(n/e)^{2n}}=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{e^2}{n}\Big)^n=0.$$

Равенство нулю этого предела означает, что, начиная с некоторого $n>N$, справедливо неравенство

$$\frac{n^n}{(n!)^2}<1\quad\text{или}\quad\frac{1}{(n!)^2}<\frac{1}{n^n},$$

которое равносильно неравенству

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^2}}<\frac{1}{n},$$

а, следовательно, и неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n!)^2}}<\frac{1}{\sqrt{n}n}.$$

Ряд с общим членом $1/(n\sqrt{n})=1/n^{3/2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд со степенью $\alpha=3/2>1$. Следовательно, в соответствии с первым признаком сравнения и исследуемый ряд а).

б) Воспользовавшись формулой Стирлинга, вычислим вспомогательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{n^n}=\sqrt{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{e^n}=0.$$

Равенство нулю этого предела означает, что, начиная с некоторого $n>N$, справедливо неравенство $n!<n^n$, которое равносильно неравенству

$$\ln(n!)<n\ln n,$$

а, следовательно, и неравенству

$$\frac{1}{\ln(n!)}>\frac{1}{n\ln n}.$$

Так как ряд с общим членом $u_n=1/(n\ln n)$ расходится (см. пример 1.9,в), то в силу первого признака сравнения расходится и ряд б).

в) В этом случае воспользуемся эталонным рядом, которым будет расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$. Согласно предельному признаку сравнения, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n^2]{n!}/n}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=\lim_{n\to\infty}\Big[\sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big]^{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2\pi n}\,\sqrt[n]{\frac{n}{e}}=1\neq 0.$$

Отсюда следует, что ряд в), как и эталонный гармонический ряд, расходится.

г) Как и в предыдущем случае, воспользуемся эталонным гармоническим рядом. Согласно предельному признаку сравнения, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt[n]{n!}}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}(n/e)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{\sqrt[2n]{2\pi n}}=e\neq 0.$$

Это означает, что ряд г), как и эталонный гармонический ряд, расходится.

Пример 4.12. Показать, что если знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Следовательно, в силу необходимого признака $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Тогда существует такое N, что $u_n < 1$ для всех $n > N$, и $u_n^2 < u_n$ для всех $n > N$. Согласно первому признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится.

4.2. Признаки Даламбера

Теорема 4.3 (признак Даламбера). *Если для знакоположительного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{4.11}$$

начиная с некоторого номера $n = N$, выполняется неравенство $u_{n+1}/u_n \leqslant q < 1$, то этот ряд сходится, если же $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Рассмотрим слагаемые с $n \geqslant N$ (отбрасывание первых $N-1$ слагаемых не влияет на его сходимость).

В первом случае ($u_{n+1}/u_n \leqslant q < 1$) имеем

$$\begin{aligned}
&u_{N+1} \leqslant q u_N,\\
&u_{N+2} \leqslant q u_{N+1} < q^2 u_N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Отсюда по признаку сравнения со сходящимся рядом ($q < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n u_N = u_N \sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

следует сходимость ряда (4.11).

Во втором случае ($u_{n+1}/u_n \geqslant q > 1$) имеем

$$\begin{aligned}
&u_{N+1} \geqslant q u_N,\\
&u_{N+2} \geqslant q u_{N+1} \geqslant q^2 u_N,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Отсюда по признаку сравнения с расходящимся рядом ($q \geqslant 1$)

$$\sum_{n=N}^{\infty} q^n u_n = u_N \sum_{n=N}^{\infty} q^n$$

следует расходимость ряда (4.11).

Чаще, однако, этот признак применяют в другой (предельной) форме, более удобной в практике.

Теорема 4.4 (предельный признак Даламбера). *Если для знакоположительного ряда* (4.11) *существует предел отношения последующего члена ряда к предыдущему при* $n \to \infty$, *равный* l, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

то при $l < 1$ *ряд сходится, а при* $l > 1$ *расходится.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Следовательно, начиная с некоторого номера $n > N$, мы при любом $\varepsilon > 0$ получим

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon$$

или

$$-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l < \varepsilon,$$

откуда

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon,$$

что можно записать следующим образом:

$$(l - \varepsilon)u_n < u_{n+1} < (l + \varepsilon)u_n. \tag{4.12}$$

1. Пусть $l < 1$. Число ε можно выбрать настолько малым, чтобы было

$$l + \varepsilon = q < 1.$$

Тогда в предположении, что неравенство (4.12) выполняется, начиная с $n = N = 1$ (в противном случае мы отбрасываем несколько слагаемых), будем иметь из правой части (4.12) систему неравенств

$$\begin{aligned}
&u_2 < qu_1,\\
&u_3 < qu_2 < q^2u_1,\\
&u_4 < qu_3 < q^3u_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&u_{n+1} < qu_n < q^nu_1,
\end{aligned}$$

т.е. слагаемые ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ оказались меньше соответствующих слагаемых геометрической прогрессии

$$u_1 + qu_1 + q^2u_1 + q^3u_1 + \ldots + q^nu_1 + \ldots$$

со знаменателем $q < 1$. Следовательно, ряд сходится.

2. Пусть теперь $l > 1$. Тогда, пользуясь левой частью (4.12) и учитывая, что $l - \varepsilon = q \geqslant 1$ при достаточно малом ε, имеем $u_{n+1} > u_n$, т.е. при возрастании номера n члены ряда не убывают. Следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости ряда, а, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Теорема доказана.

◊ Если же

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 4.13. Исследовать на сходимость по признаку Даламбера ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots$$

Решение. Необходимый признак выполняется: $u_n \to 0$ при $n \to \infty$. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)'}{(2^n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \ln 2} = 0.$$

Далее

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2\cdot 2^n}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2\cdot 2^n n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится.

Пример 4.14. Исследовать на сходимость ряды

$$\text{а)}\ \ 1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \dots,$$

$$\text{б)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Решение. а) В силу неравенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\frac{(2n-1)!!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

заключаем, что исходный ряд сходится.

б) В силу признака Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^n}{(n+1)^n n!} = 2\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{2}{e}.$$

Поскольку $2/e < 1$, ряд б) сходится (см. также пример 4.17).

Пример 4.15. Исследовать на сходимость ряды

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

где $0 < q < 1$ (см. пример 1.8).

Решение. Для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$$

применение признака Даламбера дает

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q < 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 q^{n+1}}{n^2 q^n} = q < 1,$$

а для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Поскольку все пределы меньше единицы, то исследуемые ряды сходятся.

4.3. Признаки Коши

Теорема 4.5 (радикальный признак Коши). *Если для знакоположительного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{4.13}$$

начиная с некоторого номера $n = N$, выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1$, то этот ряд сходится, если же $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3.

$\Diamond$ Сформулированный выше признак Коши называют также радикальным признаком Коши в конечной форме.

Теорема 4.6 (предельный признак Коши). *Если для знакоположительного ряда* (4.13) *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

то ряд сходится для $l < 1$ и расходится для $l > 1$.

Доказательство. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

то при любом $\varepsilon > 0$ существует число N, такое что для всех $n > N$ справедливо неравенство

$$|\sqrt[n]{u_n} - l| < \varepsilon$$

или

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon. \tag{4.14}$$

1. Пусть $l < 1$. Тогда, выбрав ε достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство $q = l + \varepsilon < 1$, получим из правой части соотношения (4.14)

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

или

$$u_n < q^n, \qquad q < 1.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Следовательно, по первому признаку сравнения сходится и исходный ряд.

2. Пусть $l > 1$, тогда, выбрав ε таким малым, чтобы выполнялось неравенство $q = l - \varepsilon > 1$, из левой части соотношения (4.14) получим

$$q < \sqrt[n]{u_n} \qquad \text{или} \qquad q^n < u_n, \quad q > 1.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ расходится, то расходится и исходный ряд.

◊ Сформулированный выше признак Коши иногда называют также радикальным признаком Коши в предельной форме.

◊ Если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1,$$

то ряд (4.13) может сходиться или расходиться, и предельный признак Коши не дает ответа на вопрос о его сходимости.

Пример 4.16. С помощью признака Коши доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

сходится.

Решение. Общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{n^n}.$$

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 4.17. Исследовать на сходимость ряды

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \qquad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sin^2 n\varphi, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Решение. а) Применив радикальный признак Коши, с учетом формулы Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n} =$$
$$= \frac{2}{e} \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2\pi n} = \frac{2}{e} < 1$$

заключаем, что исходный ряд сходится.

Сходимость этого ряда мы установили ранее, использовав признак Даламбера (см. пример 4.14).

б) Признак Даламбера в этом случае не дает результата, ибо предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}[\sin(n+1)\varphi]^2}{\alpha^n[\sin n\varphi]^2} = \alpha \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}\right]^2$$

не существует, поскольку выражение, стоящее под знаком предела, при изменении n не остается все время больше или меньше единицы. Применив признак Коши, получим неравенство

$$\sqrt[n]{\alpha^n \sin^2 n\varphi} = \alpha \sqrt[n]{\sin^2 n\varphi} \leqslant \alpha < 1,$$

из которого заключаем, что ряд б) сходится.

Пример 4.18. Исследовать на сходимость ряды

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}; \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n; \qquad \text{в)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(см примеры 1.8, 4.15), где $0 < q < 1$.

Решение. Указанные ряды, кроме примера 1.8, исследовались с помощью признака Даламбера в примере 4.15. Для исследования этих рядов с помощью радикального признака Коши имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nq^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\, q^{1-1/n} = q < 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 q^n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 q = q < 1.$$

Для третьего ряда воспользуемся приведенной выше формулой Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{n}\right) \frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi n}} = 0 < 1.$$

Поскольку все пределы меньше единицы, то исследуемые ряды сходятся.

$\Diamond$ Из математического анализа известно, что для последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1}/u_n)$ следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, причем оба предела равны. Обратное утверждение неверно. Это позволяет утверждать, что признак Коши как в предельной, так и в конечной форме более чувствителен, чем признак Даламбера. Проиллюстрируем это еще одним примером.

Пример 4.19. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^n}, & n \text{ – четное;} \\[2mm] \dfrac{1}{2^n}, & n \text{ – нечетное.} \end{cases}$$

Решение. Согласно признаку Коши, имеем

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{3} < 1, & n \text{ – четное;} \\[2mm] \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2} < 1, & n \text{ – нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что исследуемый ряд сходится, поскольку $\sqrt[n]{u_n} < 1$ для всех n. Отметим, что предельный признак Коши не применим для данного ряда.

Применим к исследуемому ряду признак Даламбера:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n > 1, & n \text{ – четное;} \\[2mm] \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 1, & n \text{ – нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда видно, что признак Даламбера ответа на вопрос о сходимости ряда не дает, поскольку невозможно указать число N, начиная с которого отношение u_{n+1}/u_n было бы меньше единицы.

Таким образом, можно утверждать, что если радикальный признак Коши не устанавливает сходимость исследуемого ряда, то и признак Даламбера эту задачу не решит, и следует сразу переходить к другим признакам сходимости, рассмотрение которых мы и продолжим.

Укажем еще один, полезный в некоторых случаях, признак Коши.

Теорема 4.7 (специальный признак Коши, или признак сравнения Коши). *Ряд* (4.13) *сходится или расходится вместе с рядом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k u_{2^k}. \tag{4.15}$$

Доказательство. Для n-частичной суммы $S_n = u_1+u_2+\ldots+u_n$ ряда (4.13) выберем число k так, что $2^k > n$. Тогда

$$\begin{gathered} S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_{2^k-1} = \\ = u_1 + (u_2+u_3) + (u_4+u_5+u_6+u_7) + \ldots + (u_{2^{k-1}} + \ldots + u_{2^k-1}) \leqslant \\ \leqslant u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \ldots + 2^{k-1}u_{2^{k-1}}. \end{gathered}$$

Из полученного неравенства следует, что если ряд (4.15) сходится, то сходится и ряд (4.13).

Выберем теперь число k так, что $2^k < n$. Тогда

$$\begin{gathered} S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \geqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_{2^k} = \\ = u_1 + u_2 + (u_3+u_4) + \ldots + (u_{2^{k-1}+1} + \ldots + u_{2^k}) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}u_1 + u_2 + 2u_4 + \ldots + 2^{k-1}u_{2^k} = \\ = \frac{1}{2}\big(u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \ldots + 2^k u_{2^k}\big). \end{gathered}$$

Из полученного неравенства следует, что если ряд (4.15) расходится, то расходится и ряд (4.13).

Пример 4.20. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Решение. Так как для данного ряда $u_n = n^{-\alpha}$, то общий член ряда (4.15) будет иметь вид $2^k(2^k)^{-\alpha} = 2^{k(1-\alpha)}$. Тогда имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-\alpha)k}$$

из примера 1.1 с $q = 2^{1-\alpha}$. Этот ряд сходится для $2^{1-\alpha} < 1$, т.е. для $\alpha > 1$, и расходится для $2^{1-\alpha} \geqslant 1$, т.е. для $\alpha \leqslant 1$ (см. также пример 4.24).

Пример 4.21. Исследовать на сходимость ряды

$$\text{а)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\alpha}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Решение. Для ряда а) вспомогательный ряд (4.15) имеет вид

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{(\ln 2^k)^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k^\alpha}.$$

Этот ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости, и, следовательно, ряд а) расходится.

Аналогично вспомогательный ряд (4.15) в случае б) имеет вид

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{2^k(\ln 2^k)^\alpha} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k\ln 2)^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Этот ряд сходится для $\alpha > 1$ и расходится для $\alpha \leqslant 1$. В силу этого для ряда б) имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \text{при } \alpha > 1 \text{ сходится,} \\ \text{при } \alpha \leqslant 1 \text{ расходится.} \end{cases}$$

В заключение отметим, что использование достаточных признаков в предельной форме в конечном итоге сводится к вычислению соответствующих пределов. Оказывается, задачу можно свести к обратной, а именно: в некоторых затруднительных случаях значение предела можно определить с помощью некоторого числового ряда.

Пример 4.22. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad a > 1.$$

Решение. Рассмотрим знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Согласно признаку Даламбера, этот ряд сходится. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}n!}{(n+1)!a_n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Но тогда в силу необходимого признака сходимости искомый предел равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

4.4. Интегральный признак Коши

Теорема 4.8. *Пусть члены ряда*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4.16}$$

положительны и не возрастают, т.е.

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots, \tag{4.17}$$

и пусть $f(x)$ *— такая непрерывная невозрастающая функция, что*

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \quad \ldots \quad f(n) = u_n, \quad \ldots \tag{4.18}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если несобственный интеграл*

$$J = \int\limits_1^\infty f(x)dx$$

сходится, то сходится и ряд (4.16)*;*

2) *если указанный интеграл расходится, то расходится и ряд* (4.16).

Доказательство. Очевидно, что в силу (4.17) и (4.18) для $x \in [n-1, n]$ справедливо неравенство

$$u_n \leqslant f(x) \leqslant u_{n-1}, \tag{4.19}$$

интегрирование которого на отрезке $x \in [n-1, n]$ дает

$$u_n \int\limits_{n-1}^n dx \leqslant \int\limits_{n-1}^n f(x)dx \leqslant u_{n-1} \int\limits_{n-1}^n dx$$

или

$$u_n \leqslant \int\limits_{n-1}^n f(x)dx \leqslant u_{n-1}. \tag{4.20}$$

Из (4.20) для конкретных n имеем цепочку неравенств

$$\begin{gathered} u_2 \leqslant \int\limits_1^2 f(x)dx \leqslant u_1, \\ u_3 \leqslant \int\limits_2^3 f(x)dx \leqslant u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n \leqslant \int\limits_{n-1}^n f(x)dx \leqslant u_{n-1}, \end{gathered} \tag{4.21}$$

сумма которых дает

$$S_n - u_1 \leqslant J_n \leqslant S_n - u_n, \tag{4.22}$$

где S_n – n-я частичная сумма ряда (4.16), а

$$J_n = \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \ldots + \int\limits_{n-1}^n f(x)dx = \int\limits_1^n f(x)dx.$$

Из (4.22) имеем два неравенства

$$\begin{aligned} &S_n \leqslant J_n + u_1; \\ &S_n > J_n. \end{aligned} \tag{4.23}$$

1. Пусть предел

$$J = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)dx = \int\limits_1^\infty f(x)dx$$

существует. Тогда $J_n < J$, и из первого неравенства (4.23) для всех n справедливо

$$S_n \leqslant J + u_1.$$

Тогда S_n как возрастающая и ограниченная функция имеет предел, но это и означает, что ряд (4.16) сходится.

2. Пусть теперь

$$J = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)dx = \int\limits_1^\infty f(x)dx \to \infty,$$

т.е. $J_n \to \infty$ при $n \to \infty$. В этом случае на основании второго неравенства (4.23) заключаем, что S_n также неограниченно возрастает, а это означает расходимость ряда (4.16), что и требовалось доказать.

◊ Эта теорема зачастую существенно упрощает исследование сходимости рядов, так как сводит изучение сходимости ряда к изучению сходимости интеграла, что дает возможность применить развитый ранее аппарат интегрального исчисления.

Кроме того, из неравенств (4.21) вытекает полезное в практике приближенных вычислений

Следствие 4.8.1. *Для сходящегося знакоположительного ряда* (4.16) *справедлива следующая оценка остатка ряда:*

$$r_n \leqslant \int\limits_n^\infty f(x)dx, \tag{4.24}$$

в которой функция $f(x)$ определена условиями (4.18).

Замечательно и другое: сходимость несобственных интегралов (первого рода), в свою очередь, можно исследовать с помощью методов, определяющих сходимость числовых рядов: признака Даламбера, радикального признака Коши и др.

Пример 4.23. С помощью интегрального признака Коши доказать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}.$$

Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой его первых десяти слагаемых.

Решение. Применив интегральный признак Коши, исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{L\to\infty} \int\limits_1^L \frac{dx}{x(x+1)}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{1+x-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$\int_1^L \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\Big) dx = (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^L = \ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^L$$

и

$$\lim_{L\to\infty} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^L = \lim_{L\to\infty}\Big[\ln\frac{L}{L+1} - \ln\frac{1}{2}\Big] = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Таким образом, несобственный интеграл

$$I = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \ln 2$$

сходится. Следовательно, сходится и данный числовой ряд.

Ошибка, допускаемая при замене суммы этого ряда суммой его первых десяти слагаемых, задается неравенством (4.24), т.е.

$$r_{10} \leqslant \int\limits_{10}^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{L\to\infty}\int\limits_{10}^L \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{L\to\infty}\ln\frac{x}{x+1}\Big|_{10}^L =$$
$$= \lim_{L\to\infty}\left(\ln\frac{L}{L+1} - \ln\frac{10}{11}\right) = -\ln\frac{10}{11} = \ln\frac{11}{10} \sim 0{,}1$$

(см. пример 1.3).

Пример 4.24. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}.$$

Решение. Применим интегральный признак сходимости Коши

$$I = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

1. Пусть $\alpha = 1$:

$$I = \ln x\Big|_1^\infty = \infty.$$

Следовательно, ряд расходится.

2. Пусть $\alpha \neq 1$:

$$\frac{1}{(1+\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^\infty = \begin{cases} \infty, & \alpha < 1; \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд расходится при $\alpha \leqslant 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

Как и в случае с достаточными признаками в предельной форме, интегральный признак сходимости также можно обратить для исследования сходимости несобственных интегралов (первого рода).

Пример 4.25. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx. \tag{4.25}$$

Решение. Точка $x = 1$ является единственной точкой максимума функции $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ на промежутке $]0, \infty[$, поскольку

$$f'(x)\Big|_{x=1} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}e^{-x}\Big|_{x=1} = 0, \quad f'(x)\Big|_{x>1} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}e^{-x}\Big|_{x>1} < 0.$$

Таким образом, на промежутке $]1, \infty[$ функция $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ положительна и монотонно убывает от значения e^{-1} до нуля. Разобьем интеграл (4.25) на два

$$\int\limits_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx + \int\limits_1^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx.$$

Очевидно, что сходимость интеграла (4.25) определяется сходимостью несобственного интеграла

$$\int\limits_1^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx. \tag{4.26}$$

Но этому интегралу можно поставить в соответствие числовой ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{e^n}. \tag{4.27}$$

Исследование этого ряда по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}}\frac{e^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{e} < 1$$

говорит о том, что ряд сходится. Но ряд (4.27) и интеграл (4.26) сходятся или расходятся одновременно. Поэтому из сходимости ряда (4.27) следует сходимость интеграла (4.26) и, следовательно, исходного несобственного интеграла (4.25).

Возвращаясь к следствию 4.8.1, отметим, что в тех случаях, когда оценка (4.24) (для знакоположительных рядов) затруднительна или не применима вообще, приходится оценивать остаток ряда непосредственно, как в следующем примере.

Пример 4.26. Для ряда

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}$$

из примера 1.8 оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой его первых пяти членов.

Решение. Кроме примера 1.8 в других примерах иными способами было показано, что этот ряд сходится. Для нахождения ошибки, возникающей при замене суммы ряда конечным числом слагаемых, запишем его в виде n-й частичной суммы S_n и n-го остатка r_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=S_n+r_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

и оценим остаток

$$\begin{aligned} r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\frac{1}{(n+4)!}+\ldots= \\ &=\frac{1}{(n+1)!}\Big[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots\Big]\leqslant \\ &\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\Big[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+\ldots\Big]. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $1/(n+2)<1$, и, следовательно,

$$1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots=\frac{1}{1-1/(n+2)}=\frac{n+2}{n+1}.$$

С учетом этого оценку (4.28) можно записать

$$r_n\leqslant\frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}. \tag{4.29}$$

Таким образом, если в рассматриваемом ряду ограничиться пятью слагаемыми, то погрешность суммирования не будет превышать

$$r_5\leqslant\frac{7}{6\cdot 6!}=\frac{7}{4320}\approx 0{,}002.$$

$\lozenge$ Если в (4.28) для получения оценки использовать неравенство

$$r_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\Big[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\Big]=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-1/(n+1)}=\frac{1}{nn!},$$

то вместо (4.29) можно использовать оценку, незначительно отличающуюся от нее, но имеющую более компактную форму

$$r_n\leqslant\frac{1}{nn!}. \tag{4.30}$$

$\lozenge$ Заметим, что формула (4.24) все же может быть использована для оценки r_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n!)$, если принять во внимание, что $n!$ посредством гамма-функции $\Gamma(x)$ (см. [2]) может быть записана как $n!=\Gamma(n+1)$. Тогда, согласно (4.24),

$$r_n\leqslant\int\limits_{n}^{\infty}\frac{dx}{\Gamma(x+1)}.$$

4.5. Признаки Абеля и Дирихле

Кроме рассмотренных выше, существуют и другие признаки сходимости: Раабе, Куммера, Гаусса, Ермакова и др. Смысл этих признаков принципиально не отличается от уже изученных и состоит в получении некоторой оценки (в обычной или предельной форме), на основании которой делается вывод о сходимости исследуемого ряда (1.2).

Другой подход состоит в представлении исходного ряда (если это возможно) в виде ряда парных произведений (2.11), т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n w_n, \tag{4.31}$$

где $u_n = v_n w_n$.

В этом случае о сходимости ряда (4.31) можно судить по оценкам каждой в отдельности величины v_n и w_n, что в некоторых случаях существенно упрощает задачу.

Обратимся сначала к конечной сумме

$$\sum_{n=1}^{m} u_n = \sum_{n=1}^{m} v_n w_n. \tag{4.32}$$

Нетрудно заметить, что сумма (4.32) представляет собой скалярное произведение двух m-мерных векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$ с координатами v_n и w_n, $n = \overline{1, m}$. Из векторной алгебры известна следующая

Лемма 4.1. *Скалярное произведение* (4.32) *может быть представлено в виде*

$$\sum_{n=1}^{m} u_n = v_m \vartheta_m - \sum_{n=1}^{m-1} (v_{n+1} - v_n)\vartheta_n, \tag{4.33}$$

где

$$\vartheta_1 = w_1, \quad \vartheta_2 = w_1 + w_2, \quad \ldots, \quad \vartheta_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n, \tag{4.34}$$

и удовлетворяет оценке

$$\left|\sum_{n=1}^{m} v_n w_n\right| < L v_1, \tag{4.35}$$

если $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots \geqslant v_m \geqslant 0$ *и* $|\vartheta_n| \leqslant L$ *для* $n = \overline{1, m}$.

Доказательство. В справедливости первой части утверждения леммы можно убедиться непосредственной проверкой. Для доказательства второй части имеем очевидное неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{m} v_n w_n\right| \leqslant \left(|v_m| + \sum_{n=1}^{m-1} |v_{n+1} - v_n|\right) L = \left(v_m + \sum_{n=1}^{m-1} |v_n - v_{n+1}|\right) L,$$

которое с учетом того, что $v_n - v_{n+1} \geqslant 0$ можно записать

$$\left|\sum_{n=1}^{m} v_n w_n\right| \leqslant \big[v_m + (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \ldots + (v_{m-1} - v_m)\big] L = L v_1,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению бесконечного ряда (4.31), введя вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + \ldots + w_n + \ldots \tag{4.36}$$

Теорема 4.9 (признак Дирихле). *Если частичные суммы ряда* (4.36) *ограничены для всех n, а числа v_n образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю, то ряд* (4.31) *сходится.*

Доказательство. По условиям теоремы $\lim\limits_{l\to\infty} v_l = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $l > N$ справедливо

$$v_l < \varepsilon. \tag{4.37}$$

Теперь к отрезку ряда (4.31) σ_{ml} применим оценку (4.35), тогда

$$|\sigma_{ml}| = |u_{l+1} + u_{l+2} + \ldots + u_m| = \left|\sum_{n=l+1}^{m} v_n w_n\right| \leqslant 2Lv_{l+1}, \tag{4.38}$$

поскольку

$$|w_{l+1} + w_{l+2} + \ldots + w_m| = |\vartheta_m - \vartheta_l| \leqslant |\vartheta_m| + |\vartheta_l| \leqslant 2L.$$

Неравенство (4.38) с учетом (4.37) можно записать

$$\left|\sum_{n=1}^{m} v_n w_n\right| < 2L\varepsilon. \tag{4.39}$$

Это означает, что при всех $l > N$ и любом $m > l$, для отрезка σ_{ml} ряда (4.31) выполняется критерий Коши и, следовательно, ряд (4.31) сходится, что и требовалось доказать.

Если на частичные суммы ϑ_l наложить более строгое требование, то справедлива следующая

Теорема 4.10 (признак Абеля). *Если ряд* (4.36) *сходится, а числа v_n образуют монотонную и ограниченную последовательность, то ряд* (4.31) *сходится.*

Доказательство. По условиям теоремы $v_m \leqslant L$ для всех m. К отрезку σ_{ml} ряда (4.31) применим оценку (4.35). Тогда

$$|\sigma_{ml}| = |u_{l+1} + u_{l+2} + \ldots + u_m| = \left|\sum_{n=l}^{m} v_n w_n\right| \leqslant L\varepsilon, \tag{4.40}$$

поскольку для сходящегося ряда (4.36) в силу критерия Коши по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $l > N$, $m > l$ будет выполняться неравенство

$$|\vartheta_{ml}| = |w_{l+1} + w_{l+2} + \ldots + w_m| < \varepsilon. \tag{4.41}$$

Таким образом, при $l > N$ и любом $m > l$ для отрезка σ_{ml} ряда (4.31) выполняется критерий Коши и, следовательно, ряд (4.31) сходится, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Заметим, что в доказательстве этих теорем для вспомогательного ряда (4.36) не требовалось условие знакоположительности его слагаемых. Это означает, что признаки Абеля и Дирихле могут быть использованы для выяснения сходимости любых рядов вообще, в том числе и знакочередующихся, к рассмотрению которых мы и переходим.

5. Знакопеременные ряды

♦ Если среди слагаемых ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{5.1}$$

имеются как положительные, так и отрицательные, то такие ряды называются *знакопеременными.*

♦ Ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{5.2}$$

называется *знакочередующимся* ($u_n > 0$).

Установим простой и удобный достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов. Сформулируем его в виде теоремы.

5.1. Теорема Лейбница

Теорема 5.1 (теорема Лейбница). *Если слагаемые знакочередующегося ряда* (5.2) *монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда u_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится.*

Доказательство. Пусть для ряда (5.2) выполняются условия теоремы, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0, \qquad u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots$$

Составим частичную сумму ряда, содержащую четное число слагаемых $2n$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

Из условия теоремы следует, что все разности в скобках неотрицательны. Поэтому S_{2n} возрастает при возрастающем n. Перегруппируем S_{2n}

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Видим, что и сейчас разности в скобках неотрицательны, т.е. $S_{2n} \leqslant u_1$. Таким образом, частичная сумма S_{2n} монотонно возрастает, но ограничена сверху, а потому имеет предел

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = S.$$

Очевидно, что $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} &= \lim_{n \to \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \\ &= \lim_{n \to \infty} S_{2n} + \lim_{n \to \infty} u_{2n+1} = S + 0 = S. \end{aligned}$$

Таким образом, частичная сумма ряда, содержащая нечетное число слагаемых, имеет при $n \to \infty$ тот же предел, что и частичная сумма, содержащая их четное число. Следовательно, ряд сходится. Теорема доказана.

Следствие 5.1.1. *Если ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, то его остаток имеет знак своего первого члена (или равен нулю) и по модулю не превосходит своего первого члена.*

Доказательство. Действительно,

$$r_n = (-1)^n u_{n+1} - (-1)^n u_{n+2} + (-1)^n u_{n+3} - \ldots =$$
$$= (-1)^n [(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots].$$

Число в квадратных скобках положительно, и знак r_n определяется множителем $(-1)^n$, а это и есть знак первого члена остатка.

Далее

$$|r_n| = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \ldots \leqslant u_{n+1}.$$

Таким образом, из теоремы Лейбница вытекает оценка ряда.

$\Diamond$ Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле, если положить $v_n = u_n$, а $w_n = (-1)^n$ и учесть, что n-частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ограничены, а $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Пример 5.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$$

исследовать на сходимость. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой его первых четырех слагаемых.

Решение. Рассматриваемый ряд сходится, поскольку удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница: последовательность $1/(2n)^2$ монотонно убывает и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)^2} = 0.$$

По определению, сумму ряда можно записать в виде $S = S_n + r_n$. В частности, для $n = 4$

$$S = S_4 + r_4 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} + r_4.$$

Согласно теореме Лейбница, $|r_4| < |u_5|$, т.е.

$$|r_4| < \left|\frac{1}{(2\cdot 5)^2}\right|$$

или

$$|r_4| < \frac{1}{100} = 0{,}01$$

(нетрудно заметить, что $r_4 > 0$). Следовательно, найденная сумма ряда

$$S \approx S_4 = 0{,}2$$

меньше истинной с ошибкой $|r_n| < 0{,}01$.

Пример 5.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}.$$

Решение. В данном случае признак Лейбница неприменим, поэтому воспользуемся признаком Дирихле. Положим $v_n = 1/n$, $w_n = \sin n\varphi$ и учтем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

а все частичные суммы вспомогательного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi \tag{5.3}$$

ограничены. Это означает, что исходный ряд сходится.

Ограниченность частичных сумм ряда (5.3) наиболее просто доказывается с использованием комплексных чисел. Действительно, комплексное число $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ при возведении в степень дает $z^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{m} z^k = \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z} = \sum_{k=0}^{m} (\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Отсюда получим следующую оценку:

$$\left|\sum_{k=0}^{m} (\cos k\varphi + i\sin k\varphi)\right| = \frac{|1 - z^{m+1}|}{|1 - z|} \leqslant \frac{2}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - \cos\varphi - i\sin\varphi|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}. \tag{5.4}$$

Таким образом, левая часть (5.4) остается ограниченной при $m \to \infty$, если $\varphi \neq \pm 2\pi n$, $n = \overline{0, \infty}$. Из оценки (5.4) следуют оценки, очень часто используемые при применении признаков Абеля и Дирихле для вещественных рядов

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\varphi\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}, \qquad \left|\sum_{k=0}^{\infty} \sin k\varphi\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}. \tag{5.5}$$

Отметим, что оценку, аналогичную (5.5), можно получить, и не обращаясь к комплексным числам. Действительно, вычислим сумму S_m с учетом результатов примера 1.3:

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} \sin k\varphi = \frac{1}{2\sin(\varphi/2)} \sum_{k=1}^{m} 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin k\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\sin(\varphi/2)} \sum_{k=1}^{m} \left[\cos\Big(k - \frac{1}{2}\Big)\varphi - \cos\Big(k + \frac{1}{2}\Big)\varphi\right] = \frac{1}{2\sin(\varphi/2)} \left[\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\Big(m + \frac{1}{2}\Big)\varphi\right].$$

Отсюда для всех $x \neq 2m\pi$, $m = \overline{0, \infty}$, имеем

$$|S_m| = \left|\sum_{k=1}^{m} \sin k\varphi\right| \leqslant \frac{2}{2|\sin(\varphi/2)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}.$$

5.2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Для знакопеременного ряда (5.1) составим ряд из абсолютных величин его слагаемых

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{5.6}$$

♦ Если ряд (5.6) сходится, то ряд (5.1) называют *абсолютно*, или *безусловно, сходящимся*. Если же ряд (5.1) сходится, а ряд (5.6) расходится, то ряд (5.1) называют *условно*, или неабсолютно, *сходящимся*.

Деление сходящихся рядов на абсолютно и условно сходящиеся очень существенно. Основные свойства конечных сумм переносятся только на абсолютно сходящиеся ряды, тогда как условно сходящиеся некоторыми из этих свойств не обладают.

Пример 5.3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$\text{а)}\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n};$$

$$\text{б)}\ 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n};$$

$$\text{в)}\ \sqrt{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\sqrt{\Big(\frac{4}{3}\Big)^3}+\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{4}\Big)^2+\frac{1}{5}\sqrt{\Big(\frac{6}{5}\Big)^5}-\frac{1}{6}\Big(\frac{7}{6}\Big)^3-$$
$$-\frac{1}{7}\sqrt{\Big(\frac{8}{7}\Big)^7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n/2}.$$

Решение. а) Исследуемый ряд по признаку Лейбница сходится, однако ряд из модулей, т.е. гармонический ряд расходится. Следовательно, ряд а) является условно сходящимся.

б) В этом случае признак Лейбница неприменим, так как ряд является знакопеременным, но не знакочередующимся. Воспользуемся признаком Дирихле, положив

$$v_n=\frac{1}{n},\qquad w_n=(-1)^{n(n-1)/2}.$$

Учтем при этом, что

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

а частичные суммы вспомогательного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}w_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}=1-1-1+1+1-1-1+\ldots$$

ограничены:

$$\begin{aligned}
&S_1=w_1=1,\\
&S_2=w_1+w_2=1-1=0,\\
&S_3=w_1+w_2+w_3=1-1-1=-1,\\
&S_4=w_1+w_2+w_3+w_4=1-1-1+1=0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что ряд б) сходится, однако условно, поскольку соответствующий ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$, как и в случае а), расходится.

в) В этом случае признак Лейбница также неприменим. Воспользуемся признаком Абеля. Для этого запишем вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n},$$

совпадающий с рядом б), и последовательность

$$v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}.$$

Так как вспомогательный ряд является сходящимся, а последовательность v_n – монотонной и ограниченной:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2} = \sqrt{e},$$

то ряд в) в соответствии с признаком Абеля является сходящимся. Ряд, составленный из модулей слагаемых этого ряда, записывается в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}.$$

Сравнивая этот ряд по предельному признаку сравнения с расходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}\Big/\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2} = \sqrt{e},$$

заключаем, что ряд, составленный из модулей слагаемых ряда в), расходится. Таким образом, ряд в), как и ряды а) и б), сходится условно.

5.3. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Исследование одного из важнейших вопросов — о различии и сходстве бесконечных рядов и конечных сумм — начнем с теоремы, устанавливающей принципиальное различие между абсолютно и условно сходящимися рядами.

Теорема 5.2. *Абсолютно сходящийся ряд всегда можно представить в виде суммы двух сходящихся рядов, один из которых состоит только из его положительных слагаемых, а другой — только из отрицательных.*

Для условно сходящегося ряда такое представление принципиально невозможно.

Доказательство. Пусть ряд (5.1) сходится абсолютно, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = T.$$

Обозначим по порядку положительные слагаемые этого ряда

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots,$$

а отрицательные

$$-w_1, -w_2, \ldots, -w_n, \ldots$$

Если S_m — m-я частичная сумма ряда (5.1), то ее можно представить в виде

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}u_n = \sum_{n=1}^{l}v_n - \sum_{n=1}^{k}w_n, \tag{5.7}$$

где $l + k = m$. Причем при неограниченном возрастании числá m чи́сла l и k также неограниченно возрастают (если ряд содержит конечное число слагаемых одного знака, то ситуация существенно упрощается). В силу абсолютной сходимости ряда (5.1) монотонно возрастающие последовательности частичных сумм

$$\sum_{n=1}^{l} v_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{k} w_n$$

ограничены сверху числом T. Это означает, что оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

сходятся и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n. \tag{5.8}$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Будем теперь считать, что ряд (5.1) сходится условно. В этом случае мы приходим к утверждению, что оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

должны быть расходящимися. Действительно, во-первых, если бы эти ряды сходились, то ряд (5.1) был бы абсолютно сходящимся, что противоречит условию. Во-вторых, если бы только один ряд, например $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, расходился, а другой сходился, то ряд (5.1), как мы увидим ниже, был бы расходящимся. В самом деле, при неограниченном возрастании чисел l и k сумма $\sum\limits_{n=1}^{l} v_n$ неограниченно возрастает, в то время как сумма $\sum\limits_{n=1}^{k} w_n$ стремится к конечному пределу. В результате частичная сумма (5.7) неограниченно возрастает и ряд (5.1) расходится, что снова противоречит условию. Остается третий вариант, когда оба ряда расходятся, хотя их разность может быть конечной (см. пример 2.1).

Таким образом, условно сходящийся ряд принципиально нельзя рассматривать как сумму двух сходящихся рядов, один из которых состоит из положительных слагаемых данного ряда, а другой — из отрицательных.

Из теоремы 5.2 вытекает очевидное

Следствие 5.2.1. Если сходится ряд, составленный из абсолютных величин слагаемых ряда (5.1), т.е. ряд (5.6), то сходится знакопеременный ряд (5.1).

Другими словами, абсолютно сходящийся ряд сходится.

Рассмотрим теперь, к чему приводят перестановки слагаемых (т.е. изменение их порядка) бесконечного ряда.

Теорема 5.3. *В абсолютно сходящемся ряде любые перестановки слагаемых не нарушают его сходимости и не меняют его суммы, тогда как в условно сходящемся ряде всегда существуют перестановки, позволяющие придать сумме ряда любое произвольное наперед заданное значение и даже сделать его расходящимся.*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы предположим сначала, что абсолютно сходящийся ряд (5.1) имеет только положительные слагаемые. Обозначим через S_m m-частичную сумму исходного ряда, а через T_k k-частичную сумму ряда, полученного из первоначального произвольной перестановкой его слагаемых. Число k всегда можно выбрать настолько больше m, чтобы частичная сумма S_m содержалась в T_k, т.е. выполнялось неравенство $S_m \leqslant T_k$. С другой стороны, по числу k можно выбрать настолько большое число l, чтобы частичные суммы T_k содержались в S_l, т.е. выполнялось неравенство $T_k \leqslant S_l$. Тогда

$$T_k \leqslant S_l < S, \qquad S_m \leqslant T_k < S. \tag{5.9}$$

где

$$\lim_{m\to\infty} S_m = S. \tag{5.10}$$

Из (5.9) и существования предела (5.10) следует существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = S$, т.е. ряд с произвольно измененным порядком суммирования тоже сходится и его сумма равна сумме первоначального ряда.

Рассмотрим теперь общий случай, когда абсолютно сходящийся ряд (5.1) содержит как положительные, так и отрицательные слагаемые. Согласно теореме 5.2, его можно представить в виде (5.8). Перестановке слагаемых u_n будет соответствовать некоторая перестановка слагаемых v_n и w_n. Но поскольку каждый ряд в правой части (5.8) положителен, то перестановка слагаемых v_n и w_n не нарушает их сходимости и не меняет их сумм. Следовательно, перестановка слагаемых u_n ряда (5.1) и в этом случае не нарушает его сходимости и не меняет его суммы.

Таким образом, абсолютно сходящийся ряд в отношении переместительного свойства ведет себя вполне как конечная сумма.

Перейдем ко второй части теоремы. Положительным числом A обозначим сумму, к которой с помощью некоторой перестановки слагаемых ряда мы хотим свести исходную сумму S условно сходящегося ряда (5.1). Пусть, как и в доказательстве теоремы 5.2, v_n — положительные члены ряда, а $-w_n$ — отрицательные. В силу условной сходимости ряда (5.1) имеем

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 0. \tag{5.11}$$

Кроме того, как следует из теоремы 5.2, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{5.12}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \tag{5.13}$$

являются расходящимися. Далее через σ_{nm} и δ_{mn} обозначим отрезки рядов (5.12) и (5.13), соответственно.

Выберем первоначальный отрезок σ_{n_10} так, чтобы $\sigma_{n_10} > A$. Это всегда можно сделать в силу расходимости ряда (5.12). Выберем затем отрезок δ_{m_10} так, чтобы разность $\sigma_{n_10}-\delta_{m_10}$ стала меньше A. Это также возможно в силу расходимости ряда (5.13). Добавим теперь «положительный» отрезок $\sigma_{n_1n_2}$ так, чтобы $\sigma_{n_10} - \delta_{m_10} + \sigma_{n_1n_2} > A$, а затем «отрицательный» отрезок $\delta_{m_1m_2}$ так, чтобы

$\sigma_{n_1 0} - \delta_{m_1 0} + \sigma_{n_1 n_2} - \delta_{m_1 m_2} < A$ и так далее. После достаточно большого числа шагов колебания частичных сумм около числа A будут совершаться в сколь угодно малом интервале. Поскольку в силу (5.11) v_n и w_n стремятся к нулю при неограниченном возрастании индексов n и m, то и размах колебаний тоже будет стремиться к нулю. Но это и означает, что сумма построенного таким образом ряда равна A, что и требовалось доказать.

Пример 5.4. Для условно сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \tag{5.14}$$

найти перестановку: а) увеличивающую сумму ряда в 1,5 раза, б) уменьшающую сумму ряда в 2 раза.

Решение. Условная сходимость ряда (5.14) очевидна: сам ряд (5.14), согласно принципу Лейбница, сходится, а гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ расходится. Обозначим через S сумму ряда (5.14) и запишем его в развернутом виде

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots \tag{5.15}$$

Умножим (5.15) на $1/2$. В результате в силу сходимости (5.15) можем записать еще один сходящийся ряд

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots$$

Запишем полученный ряд под исходным (5.15) следующим образом:

$$\begin{array}{rcccccccccccccl} S = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{9} & -\frac{1}{10} & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{12} & + \ldots \\ \frac{1}{2}S = & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & & +\frac{1}{10} & & -\frac{1}{12} & + \ldots \end{array}$$

Сложим теперь оба сходящиеся ряда почленно, соединяя вместе слагаемые, стоящие друг под другом. В результате получим сходящийся ряд с суммой $1{,}5S$:

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{5.16}$$

Но ряд (5.16) получился из (5.15) и указывает искомую перестановку: отрицательные слагаемые передвигаются так, чтобы после двух положительных следовало одно отрицательное.

Теперь, напротив, передвинем отрицательные слагаемые так, чтобы за одним положительным следовали два отрицательных, т.е.

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots \tag{5.17}$$

Преобразуем этот ряд следующим образом:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{4} + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\Big) - \frac{1}{8} + \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\Big) - \frac{1}{12} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\Big) = \frac{1}{2}S.$$

Таким образом, перестановка (5.17) уменьшает сумму ряда в два раза.

Пример 5.5. Показать, что если в условно сходящемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ слагаемые переставить так, чтобы группу p последовательных положительных слагаемых сменяла группа q последовательных отрицательных слагаемых, то сумма ряда будет равна $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.

Решение. Запишем $S_{k(p+q)}$ – частичную сумму, состоящую из k групп с p последовательными положительными слагаемыми и k групп с q последовательными отрицательными слагаемыми, т.е. содержащую $k(p+q)$ слагаемых:

$$S_{k(p+q)} = \frac{1}{1+2\cdot 0} + \frac{1}{1+2\cdot 1} + \frac{1}{1+2\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1+2(pk-1)} -$$
$$- \frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \ldots + \frac{1}{2kq}.$$

Мы сгруппировали их по знакам, что в конечной сумме можно сделать. Введем обозначения $L = kp-1$, $l = kq$. Добавим и вычтем слагаемые с отрицательными знаками. В результате частичную сумму можно представить в виде

$$S_{k(p+q)} = \frac{1}{1+2\cdot 0} + \frac{1}{1+2\cdot 1} + \ldots + \frac{1}{1+2L} -$$
$$-\frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2} - \ldots - \frac{1}{2l} - \frac{1}{2(l+1)} - \ldots - \frac{1}{2L} + \frac{1}{2(l+1)} + \ldots + \frac{1}{2L} =$$
$$= \frac{1}{1+2\cdot 0} - \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{1+2\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{1+2\cdot 2} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{2L} + \frac{1}{1+2L} + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{l+1} + \ldots + \frac{1}{L}\Big].$$

Последнее слагаемое преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{l+1} + \ldots + \frac{1}{L} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} + \ldots + \frac{1}{L} - \Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{l}\Big).$$

В результате частичная сумма примет вид

$$S_{k(p+q)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{2L} + \frac{1}{1+2L} +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{l+1} + \ldots + \frac{1}{L} - \Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{l}\Big)\Big].$$

Если теперь в полученном выражении перейти к пределу при $k \to \infty$ и воспользоваться формулами (1.13) и (1.31), получим

$$S = \lim_{k\to\infty} S_{k(p+q)} = \ln 2 + \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\big[\ln(kp-1) + C + \varepsilon_{kp} - \ln kq - C - \varepsilon_{kq}\big] =$$
$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\ln\frac{kp-1}{kq} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q},$$

что и требовалось показать.

Пример 5.6. Указать такую перестановку положительных и отрицательных слагаемых условно сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

чтобы его сумма изменялась в 3 раза.

Решение. Сумма исходного ряда известна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 = S'.$$

Из предыдущего примера известно, что ряд можно изменить так, чтобы его сумма стала равной

$$S'' = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} = \ln 2\Big(1 + \frac{\ln \sqrt{p/q}}{\ln 2}\Big) = \ln 2\Big(\log_2 2 + \log_2 \sqrt{\frac{p}{q}}\Big) =$$
$$= \ln 2 \log_2 2\sqrt{\frac{p}{q}} = S' \log_2 2\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Тогда

$$\frac{S''}{S'} = n = \log_2 2\sqrt{\frac{p}{q}} = 3.$$

Отсюда получим, что $p/q = 16$. Это означает, что за шестнадцатью положительными слагаемыми должно следовать одно отрицательное. Заметим, что пример 5.4 является частным случаем настоящего примера.

Рассмотрим теперь возможность перенесения сочетательного свойства на бесконечные ряды. Для этого введем следующее определение

♦ Ряд

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n, \tag{5.18}$$

у которого

$$\begin{array}{l} \vartheta_1 = u_1 + \ldots + u_{m_1}, \\ \vartheta_2 = u_{m_1+1} + \ldots + u_{m_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \vartheta_n = u_{m_{n-1}+1} + \ldots + u_{m_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \tag{5.19}$$

называется *сгруппированным рядом* ряда (5.1).

Теорема 5.4. *Если ряд* (5.1) *сходится к сумме* S*, то и сгруппированный ряд* (5.18) *сходится к той же сумме.*

Доказательство очевидно, поскольку при любом n

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{m_n}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n) = \lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_{m_n}) = S.$$

Таким образом, для любого сходящегося ряда (в том числе и условно сходящегося) произвольно выбранные группы соседних слагаемых можно заключать в скобки, не изменяя их порядка. Полученный таким образом ряд будет сходиться и иметь ту же сумму, что и исходный ряд. В этом смысле сочетательное свойство конечных сумм распространяется на все сходящиеся ряды.

Сложнее обстоит дело с обратным переходом. Иллюстрацией возникающих здесь трудностей может служить сходящийся сгруппированный ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots$, раскрытие скобок в котором приводит к расходящемуся ряду $1-1+1-1+\ldots$.

Кроме того, если учесть известное из математического анализа утверждение о том, что из сходимости какой-либо подпоследовательности заданной последовательности не следует сходимость последней, то можно отметить, что из сходимости сгруппированного ряда (5.18), вообще говоря, не следует сходимость исходного ряда (5.1).

Пример 5.7. В гармоническом ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

не переставляя его слагаемых, изменили их знаки так, чтобы за p положительными слагаемыми следовали p отрицательных. Доказать, что полученный ряд будет сходящимся.

Решение. Будем суммировать ряд группами по p подряд идущих слагаемых в каждой. Получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}A_n, \qquad A_n=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{(n-1)p+i}. \tag{5.20}$$

Ряд (5.20) является сходящимся, поскольку он удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница: 1) $A_n>0$; 2) $A_n>A_{n+1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$.

Пусть A – сумма ряда (5.20), а S_n – частичная сумма n слагаемых исходного несгруппированного ряда. Разделим n на p с остатком r: $n=kp+r$, $0\leqslant r\leqslant p-l$. В сумму S_n войдут ровно k слагаемых из ряда (5.20) и r первых слагаемых из следующей группы A_{k+1}, сумму которых обозначим через A^*_{k+1}. Получим равенство

$$S_n-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}A_i=(-1)^kA^*_{k+1}. \tag{5.21}$$

Перейдя в (5.21) к абсолютным величинам и увеличив A^*_{k+1} до полной суммы A_{k+1}, получим неравенство

$$\left|S_n-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}A_i\right|\leqslant A_{k+1}. \tag{5.22}$$

Ранее было показано, что $A_k\to 0$ при $k\to\infty$. Из (5.22) следует

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}A_i=A,$$

что означает сходимость исходного несгруппированного ряда.

Заметим, что при другом выборе количества чередующихся положительных и отрицательных слагаемых, например по $2p$ идущих подряд, ряд будет знакоположительным и его сумма (если она существует) может и не совпадать с суммой исходного ряда.

Пример 5.8. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6}+\ldots+1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}+\ldots$$

и его сгруппированный ряд

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{5}{6}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}\right)+\ldots$$

Решение. Очевидно, что сгруппированный ряд сходится, поскольку после выполнения операций в круглых скобках его можно записать в виде

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{5}{6}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}\right)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

сходимость которого ранее была неоднократно установлена (разными методами).

Что касается исходного ряда, то он расходится, поскольку для него не выполняется необходимый признак сходимости. Действительно, члены ряда с нечетными индексами равны единице ($u_{2k+1}=1$), и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}u_{2k+1}=1\neq 0.$$

Этот пример ещё раз подтверждает, что теорема 5.4 в общем случае необратима. Однако, если на исходный ряд наложить более жесткое требование, то для указанной теоремы существует обратная.

Теорема 5.5. *Если ряд* (5.1) *знакоположителен, а его сгруппированный ряд* (5.18) *сходится, то и ряд* (5.1) *сходится.*

Доказательство. При любом n частичная сумма ряда (5.1) S_n удовлетворяет неравенству

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n\leqslant u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots+u_{m_n}=$$
$$=\vartheta_1+\ldots+\vartheta_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n.$$

Таким образом, монотонно возрастающая последовательность n-х частичных сумм S_n ряда (5.1) ограничена сверху суммой сходящегося ряда (5.18). Но это и означает, что ряд (5.1) сходится.

В заключение рассмотрим вопрос о сходимости ряда, представляющего собой произведение двух рядов.

Теорема 5.6. *Если ряды* (2.4) *и* (2.5) *сходятся, причем один из них абсолютно, то ряд* (2.6) *сходится к сумме, равной произведению сумм рядов* (2.4) *и* (2.5).

Доказательство. Согласно утверждению теоремы, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}w_n=\sum_{l=1}^{\infty}u_l\cdot\sum_{m=1}^{\infty}v_m=R=S^uS^v, \tag{5.23}$$

где, согласно определению,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1}.$$

Обозначим через S_n^u, S_n^v и S_n^w n-частичные суммы соответствующих рядов. Для определенности предположим, что ряд (2.5) сходится абсолютно, а ряд (2.4) — условно. Тогда, во-первых,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = P < \infty, \tag{5.24}$$

а, во-вторых, все модули n-частичных сумм S_n^u ограничены некоторым числом L так, что $|S_n^u - S_m^u| \leqslant |S_n^u| + |S_m^u| \leqslant 2L$.

Задавшись числом ε, определим номер N так, чтобы для всех $m > N$ и любых $n > m$ выполнялись неравенства

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} u_k\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2P}, \qquad \sum_{k=N}^{\infty} |v_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{4L}. \tag{5.25}$$

Но тогда для всех $n > N$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}|S_n^u S_n^v - R_n| = \Big|\sum_{l=1}^{n} u_l \sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} u_l v_{m-l+1}\Big| = \\ = |(u_2 + \ldots + u_n)v_n + (u_3 + \ldots + u_n)v_{n-1} + \ldots + u_n v_2| \leqslant \\ \leqslant |u_2 + \ldots + u_n|\,|v_n| + |u_3 + \ldots + u_n||v_{n-1}| + \ldots + |u_n||v_2| \leqslant \\ \leqslant 2L(|v_n| + \ldots + |v_{N+1}|) + \frac{\varepsilon}{2P}(|v_2| + \ldots + |v_N|),\end{gathered}$$

которая с учетом (5.24) примет вид

$$|S_n^u S_n^v - R_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n^u S_n^v = \lim_{n\to\infty} R_n = R = S^u S^v,$$

что и требовалось доказать.

◊ Эта теорема перестает быть справедливой, если оба ряда (2.4) и (2.5) сходятся условно.

Пример 5.9. Найти произведение рядов

$$1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \ldots + \frac{b^n}{n!} + \ldots \tag{5.26}$$

$$1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots \tag{5.27}$$

Решение. Легко убедиться, например, при помощи признака Даламбера, что ряды (5.26) и (5.27) сходятся, причем при $a < 0$ ряд (5.27) сходится абсолютно. Таким образом, произведение рядов существует и для любых a является сходящимся рядом. Согласно определению (2.6), имеем

$$\Big(1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \ldots + \frac{b^n}{n!} + \ldots\Big)\Big(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots\Big) =$$

$$= 1 + (b + a) + \left(\frac{b^2}{2!} + ba + \frac{a^2}{2!}\right) + \ldots +$$
$$+ \left[\frac{b^n}{n!} + \frac{b^{n-1}a}{(n-1)!} + \frac{b^{n-2}a^2}{(n-2)2!} + \ldots + \frac{b^2a^{n-2}}{2!(n-2)!} + \frac{ba^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a^n}{n!}\right] + \ldots \quad (5.28)$$

Рассмотрим общий член ряда в правой части (5.28). Если записать его в виде

$$\frac{1}{n!}\left[b^n + nb^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}b^{n-2}a^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2!}b^2a^{n-2} + nba^{n-1} + a^n\right],$$

то нетрудно увидеть, что выражение, стоящее в квадратной скобке, представляет собой бином Ньютона вида $(b + a)^n$. С учетом этого произведение (5.28) можно записать как

$$\left(1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \ldots + \frac{b^n}{n!} + \ldots\right)\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + (b + a) + \frac{(b+a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(b+a)^n}{n!} + \ldots \quad (5.29)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ряд в правой части (5.29) сходится абсолютно, причем при $a = -b$ лишь одно его слагаемое отлично от нуля:

$$1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

Пример 5.10. Показать, что при возведении в квадрат условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

переходит в расходящийся.

Решение. Согласно определению произведения рядов (2.6), имеем

$$\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right] =$$
$$= 1 + \left[1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1\right] + \left[1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1\right] + \ldots +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}(-1)^{n-k}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}} + \ldots =$$
$$= 1 - \sqrt{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k(n-k+1)}} + \ldots$$

Полученный ряд расходится, поскольку не выполняется необходимый признак сходимости.

Действительно, для $n > 1$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{(n-k+1)k}} \geqslant \frac{1}{n}, \quad (5.30)$$

в справедливости которого можно убедиться, возведя его в квадрат:

$$\frac{1}{(n-k+1)k} \geqslant \frac{1}{n^2}$$

или

$$\frac{n^2-(n-k+1)k}{(n-k+1)kn^2} \geqslant 0.$$

Так как знаменатель этой дроби положителен, то необходимо убедиться, что

$$n^2-(n-k+1)k \geqslant 0. \tag{5.31}$$

При помощи перегруппировки слагаемых приходим к очевидному неравенству

$$(n-k)^2+k(n-1) \geqslant 0,$$

подтверждающему (5.31) и, соответственно, (5.30).

В силу (5.30) n-й член ряда можно оценить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 1.$$

Именно поэтому необходимый признак сходимости не выполняется.

В заключение рассмотрим пример, продолжающий иллюстрацию операцию деления одного ряда на другой, введенную ранее. Основываясь на результатах примера 2.7, отметим, что при делении даже абсолютно сходящихся рядов результирующий ряд может оказаться расходящимся. Более подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки нашего курса.

Пример 5.11. Разделить ряд

$$1-\frac{4}{3!}+\frac{16}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots \tag{5.32}$$

на ряд

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}+\ldots \tag{5.33}$$

Решение. *Первый способ.* Для удобства использования определения (2.6) выпишем явный вид нескольких первых слагаемых обоих рядов

$$u_1=1,\ u_2=-\frac{4}{3!},\ u_3=\frac{16}{5!},\ u_4=-\frac{64}{7!},\ \ldots,\ u_n=(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!};$$
$$v_1=1,\ v_2=-\frac{1}{2!},\ v_3=\frac{1}{4!},\ v_4=-\frac{1}{6!},\ \ldots,\ v_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!},$$

тогда коэффициенты искомого ряда можно записать в виде

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{u_1}{v_1}=1;\\
w_2 &= \frac{u_2-w_1v_2}{v_1}=-\frac{4}{3!}-1\Big(-\frac{1}{2!}\Big)=-\frac{1}{3!};\\
w_3 &= \frac{u_3-w_1v_3-w_2v_2}{v_1}=\frac{16}{5!}-1\frac{1}{4!}-\Big(-\frac{1}{3!}\Big)\Big(-\frac{1}{2!}\Big)=\frac{1}{5!};\\
w_4 &= \frac{u_4-w_1v_4-w_2v_3-w_3v_2}{v_1}=\\
&= -\frac{64}{7!}-1\Big(-\frac{1}{6!}\Big)-\Big(-\frac{1}{3!}\Big)\Big(\frac{1}{4!}\Big)-\frac{1}{5!}\Big(-\frac{1}{2!}\Big)=-\frac{1}{7!};
\end{aligned}$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
$$

$$
w_n = \frac{u_n - w_1 v_n - w_2 v_{n-1} - \ldots - w_{n-1} v_2}{v_1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}.
$$

Таким образом,

$$
\frac{1 - \dfrac{4}{3!} + \dfrac{16}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots}{1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-2)!} + \ldots} =
$$

$$
= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + \ldots \tag{5.34}
$$

Отметим, что все три ряда в (5.34) сходятся абсолютно, а справедливость результата (5.34) можно проверить перемножением соответствующих рядов.

Второй способ. Разделим ряд (5.32) на (5.33), как это делают при делении обычных многочленов:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 1 - \dfrac{4}{3!} + \dfrac{16}{5!} - \dfrac{64}{7!} + \ldots & 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{6!} + \ldots \\
- & & \\
 & 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{6!} + \ldots & 1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \dfrac{1}{7!} + \ldots \\
\hline
 & - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{11}{5!} - \dfrac{57}{7!} + \ldots & \\
- & & \\
 & -\dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{2!3!} - \dfrac{1}{4!3!} + \ldots & \\
\hline
 & \dfrac{1}{5!} - \dfrac{22}{7!} + \ldots & \\
- & & \\
 & \dfrac{1}{5!} - \dfrac{1}{2!5!} + \ldots & \\
\hline
 & - \dfrac{1}{7!} + \ldots & \\
- & & \\
 & -\dfrac{1}{7!} + \ldots & \\
\hline
 & \text{и т.д.} &
\end{array}
$$

Продолжив, получим ряд, совпадающий с (5.34).

ГЛАВА 2

Функциональные ряды

6. Функциональный ряд. Область сходимости

Пусть дана бесконечная последовательность функций

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x), \ldots,$$

определенных на одном и том же интервале.

♦ Выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{6.1}$$

называется *функциональным рядом.*

При одних значениях x ряд может быть сходящимся, при других — расходящимся.

♦ Если сходится числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots + u_k(x_0) + \ldots,$$

то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в точке $x = x_0$.

♦ Совокупность всех значений переменной x, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости* данного функционального ряда.

Например, ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

сходится в интервале $]-1, 1[$, так как при любом значении x из этого интервала соответствующий числовой ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. При $|x| \geqslant 1$ этот ряд расходится, как было показано в предыдущем разделе.

Областью сходимости D функционального ряда может оказаться числовое множество самого произвольного строения — интервал, полуинтервал, отрезок и т.д., а также их совокупности.

◊ При необходимости область сходимости подразделяют на области абсолютной и условной сходимости.

В области сходимости ряда его основные характеристики: n-ая частичная сумма S_n, отрезок σ_{mn}, n-ый остаток r_n и сумма S – будут функциями от x. В области сходимости сумма $S(x)$ функционального ряда (6.1) (как и числового) представляет собой предел последовательности частичных сумм $\{S_n(x)\}$, $n = \overline{1, \infty}$, т.е.

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x). \tag{6.2}$$

Это означает, что для остатка ряда

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [S(x) - S_n(x)] = 0. \tag{6.3}$$

В рассмотренном выше примере область сходимости D — интервал $]-1, 1[$,

$$S_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}, \qquad x \in D$$

или
$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x} = 0.$$

Существование пределов (6.2) и (6.3) означает, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N_\varepsilon(x)$, что для любого $n > N_\varepsilon(x)$ выполняются неравенства
$$|S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon, \qquad x \in D. \tag{6.4}$$

С другой стороны, поскольку задача о сходимости ряда (6.1) эквивалентна задаче о сходимости последовательности его частичных сумм $\{S_n(x)\}$, то, исходя из общего критерия Коши для функциональных последовательностей, имеем

Критерий Коши для функционального ряда: Для того чтобы ряд (6.1) сходился в области D, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in D$ существовало такое $N_\varepsilon(x)$, что для всех $m > N_\varepsilon(x)$, $n > m$ для отрезка ряда $\sigma_{nm}(x)$ выполнялось неравенство
$$|\sigma_{nm}(x)| = |S_n(x) - S_m(x)| = |u_{m+1} + \ldots + u_n| < \varepsilon. \tag{6.5}$$

Преимущество критерия Коши состоит в том, что сходимость ряда можно охарактеризовать, совершенно не зная и даже не упоминая о существовании $S(x)$.

К сказанному выше следует добавить, что числа $N_\varepsilon(x)$, для которых выполняются неравенства (6.4) и (6.5), вообще говоря, различны для разных точек $x \in D$. Эту особенность функциональных рядов мы рассмотрим в следующем разделе. Пока же заметим, что для определения области сходимости функционального ряда можно использовать все признаки, полученные ранее для числовых рядов. Проиллюстрируем это несколькими примерами.

Пример 6.1. Найти область сходимости функционального ряда
$$\text{а)}\ \sum_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n\sqrt{(x-1)^n}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+2)^{2n}}.$$

Решение. а) Слагаемые ряда определены при $x > 1$, а так как
$$|u_n(x)| = \frac{1}{n2^n(\sqrt{x-1})^n},$$
то, применив признак Коши, имеем
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n2^n(\sqrt{x-1})^n}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Следовательно, исходный ряд будет сходиться абсолютно, если
$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 1,$$
т.е. при $\sqrt{x-1} > 1/2$ (или $x > 5/4$). Ряд расходится при $\sqrt{x-1} < 1/2$ (или $1 < x < 5/4$). При $x = 5/4$ получим знакочередующийся ряд
$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости ряда – полуинтервал $D = [5/4, \infty[$.

б) Слагаемые ряда определены при $x \neq -2$, а так как

$$|u_n(x)| = \frac{1}{|x+2|^{2n}},$$

то, применив признак Даламбера (можно Коши), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|^{2n}}{|x+2|^{2n+2}} = \frac{1}{|x+2|^2}.$$

Исходный ряд будет сходиться абсолютно, если

$$\frac{1}{|x+2|^2} < 1,$$

т.е. при $|x+2| > 1$ или $x > -1$ и $x < -3$, и расходится при $|x+2| < 1$. Проверим сходимость исходного ряда на концах интервалов. При $x = -1$ получаем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

аналогично при $x = -3$ получаем тот же самый расходящийся ряд. Если учесть, что условная сходимость ряда также определена неравенством $|x+2| > 1$, приходим к заключению, что исходный ряд сходится абсолютно на множестве $D =]-\infty, -3[\bigcup]-1, \infty[$.

Пример 6.2. Найти область сходимости ряда

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}, \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} n!x^n, \qquad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}.$$

Решение. а) Для всех x справедливо неравенство

$$\left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ сходится, то на основании признака сравнения заключаем, что ряд исходный сходится абсолютно на всей числовой оси: $D =]-\infty, \infty[$.

б) Применив признак Даламбера, найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{|x|^n n!} = \lim_{n\to\infty} |x|(n+1) = \infty > 1$$

при $x \neq 0$. Отсюда следует, что ряд расходится для всех $|x| > 0$ и сходится при $x = 0$.

в) Запишем вспомогательные ряды: условно сходящийся при $0 < \alpha \leqslant 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$$

и абсолютно сходящийся при $\alpha > 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Из вида исходного ряда заключаем, что он сходится условно для $x > 0$ и абсолютно для $x > 1$. Таким образом, ряд сходится на интервале $D =]0, \infty[$.

Пример 6.3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\sin x^2}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+|x|}), \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\cos\sqrt{\frac{x}{n}}\Big)^{2n^2},$$

выделив области абсолютной и условной сходимости.

Решение. а) Записав исходный ряд в виде знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-\alpha n}$, сходящегося при $\alpha > 0$, можно заключить, что он сходится при $\sin(x^2) > 0$, т.е. для $2k\pi < x^2 < (2k+1)\pi$, $k = \overline{0, \infty}$. Разрешив это неравенство относительно x, найдем область абсолютной сходимости ряда в виде объединения множеств

$$\sqrt{2k\pi} < x < \sqrt{(2k+1)\pi}, \qquad -\sqrt{2k\pi} > x > -\sqrt{(2k+1)\pi}.$$

б) Воспользовавшись свойствами тригонометрических функций, общий член ряда преобразуем к виду

$$\begin{gathered}\sin(\pi\sqrt{n^2+|x|} - \pi n + \pi n) = \\ = \sin\pi(\sqrt{n^2+|x|} - n)\cos\pi n + \cos\pi(\sqrt{n^2+|x|} - n)\sin\pi n = \\ = (-1)^n \sin\pi(\sqrt{n^2+|x|} - n) = (-1)^n \sin\frac{\pi|x|}{\sqrt{n^2+|x|}+n}.\end{gathered}$$

Это позволяет записать исходный ряд как знакочередующийся:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+|x|}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi|x|}{\sqrt{n^2+|x|}+n},$$

который, согласно признаку Лейбница, является сходящимся, причем, как нетрудно заметить, сходящимся условно, для всех $|x| < \infty$.

в) Очевидно, что этот ряд расходится при $x = 0$. Зафиксировав x положительным ($x > 0$), с учетом того, что $\cos\sqrt{x/n} > 0$ для $n \gg 1$ и, более того,

$$\cos\sqrt{\frac{x}{n}} \sim 1 - \frac{x}{2n},$$

воспользуемся радикальным признаком Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Big(\cos\sqrt{\frac{x}{n}}\Big)^{2n^2}} = \lim_{n\to\infty} \Big(\cos\sqrt{\frac{x}{n}}\Big)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x}{2n}\Big)^{2n} = e^{-x} < 1.$$

Таким образом, область $0 < x < \infty$ является областью абсолютной сходимости ряда.

Пример 6.4. Исследовать на сходимость функциональный ряд при $x > 0$

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}, \quad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{\ln^2 x + n}, \quad \text{в)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^x (\ln\ln n)^p}.$$

Решение. а) С помощью элементарных преобразований ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \frac{1}{n^x},$$

для которого справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \frac{1}{n^x} < \sum_{n=1}^{\infty} e^x \frac{1}{n^x}, \quad x > 0.$$

Из этой оценки следует, что ряд сходится при условии $x > 1$.

б) Воспользуемся признаком Дирихле. Для этого рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \sin n^2$$

и последовательность $(\ln^2 x + n)^{-1}$. Последовательность S_k k-частичных сумм вспомогательного ряда является ограниченной, поскольку (см. пример 5.2)

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \sin n \sin n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} [\cos(n-1)n - \cos n(n+1)] = \frac{1}{2}[1 - \cos k(k+1)],$$

и, стало быть,

$$|S_k| = \frac{1}{2}|1 - \cos k(k+1)| \leqslant 1.$$

Кроме того, последовательность $\{(\ln^2 x + n)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ для всех $x > 0$ является монотонной, стремящейся к нулю. Таким образом, выполняются оба условия признака Дирихле. Следовательно, ряд условно сходится в области $x > 0$.

в) Воспользуемся специальным признаком Коши (см. теорему 4.7). Для этого введем вспомогательный ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{2^k (\ln 2^k)^x [\ln(\ln 2^k)]^p},$$

который можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{(\ln 2)^x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^x [\ln k + \ln(\ln 2)]^p}.$$

Сравнив полученный ряд с рядом б) из примера 4.21, заключаем, что для $p \leqslant 1$ ряд абсолютно сходится при $x > 1$, а для $p > 1$ – при $x \geqslant 1$.

Пример 6.5. Найти область сходимости и сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

Решение. Исследуемый ряд представляет собой действительную часть некоторого комплексного ряда, а именно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{n!} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} =$$
$$= \operatorname{Re} e^{e^{ix}} = \operatorname{Re} e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} \operatorname{Re}[\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)] = e^{\cos x} \cos(\sin x).$$

Таким образом, исходный ряд сходится к функции $e^{\cos x} \cos(\sin x)$ для всех $|x| < \infty$. С другой стороны, $|\cos nx| < 1$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/(n!)$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно на всей числовой оси.

При рассмотрении функционального ряда, сходящегося в некотором промежутке, выясним вопрос: сохраняются ли для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (представляющего собой, если говорить формально, «сумму бесконечного числа функций») основные свойства суммы конечного числа функций, а именно:

1) сумма непрерывных функций есть функция непрерывная;
2) производная суммы (дифференцируемых) функций равна сумме производных от каждой из этих функций;
3) интеграл от суммы (непрерывных) функций равен сумме интегралов от каждой из этих функций.

В общем случае ответ на эти вопросы отрицателен.

Естественно попытаться определить, каким дополнительным условиям должен удовлетворять ряд (или каким должен быть характер сходимости ряда), чтобы для него были справедливы перечисленные выше свойства конечных сумм. Выяснение этих условий приводит к понятию «равномерно сходящегося ряда».

7. Равномерно сходящиеся функциональные ряды

7.1. Основные понятия и определения

Как уже упоминалось, число $N = N_\varepsilon(x)$, определяющее неравенства (6.4) или (6.5), в общем случае является функцией величин ε и x.

♦ Функциональный ряд (6.1) называется *равномерно сходящимся* в области D, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε, такое, что для всех $x \in D$ и для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Другими словами, для равномерно сходящегося в области D ряда неравенства (6.4) или (6.5) удовлетворяются одним числом $N = N_\varepsilon$ сразу для всех x из области D.

Для того чтобы более наглядно пояснить разницу между равномерной и неравномерной сходимостью, рассмотрим следующие примеры.

Пример 7.1. Исследовать характер сходимости частичных сумм

$$\text{а)}\ \ S_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \qquad \text{б)}\ \ S_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

на отрезке $D = [0, 1]$.

Решение. а) Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0,$$

то с учетом соотношения

$$(1-nx)^2 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad 1+n^2x^2 \geqslant 2nx,$$

имеем оценку

$$|0 - S_n(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{2n}, \quad x \in D.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы неравенство $|0 - S_n(x)| \leqslant 1/(2n) < \varepsilon$ выполнялось одновременно для всех x из D, достаточно взять любое целое число, удовлетворяющее неравенству $N_\varepsilon > 1/(2\varepsilon)$. Так, например, для $\varepsilon = 1/2$ получим $N_{1/2} = 2$, а для $\varepsilon = 1/4$ – соответственно $N_{1/4} = 3$ и т.д. Таким образом, в случае а) n-частичная сумма сходится к своему пределу $S(x) = 0$ равномерно. Эта равномерная сходимость хорошо иллюстрируется графически (рис. 2,a). Простейшее исследование показывает, что функции $S_n(x)$ в точке $x = 1/n$ имеют максимум, равный $S_n(1/n) = 1/(2n)$, который с ростом числа n смещается влево, одновременно уменьшаясь в своем максимальном значении. Для $\varepsilon = 1/2$ все графики частичных сумм $S_n(x)$, начиная с $n = 2$, для всех $x \in D$ располагаются под прямой $\varepsilon = 1/2$. С уменьшением ε все графики n-частичных сумм, начиная с $N_\varepsilon > 1/(2\varepsilon)$, также будут располагаться ниже прямой, соответствующей заданному ε, наглядно иллюстрируя равномерную сходимость с ростом N_ε к своему пределу $S(x) = 0$.

б) Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0,$$

то

$$|0 - S_n(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{nx}\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{nx}.$$

Отсюда следует, что для любого заданного ε и фиксированного $x > 0$ для осуществления неравенства $|0 - S_n(x)| \leqslant 1/(nx) < 1/\varepsilon$ достаточно взять любое целое число, удовлетворяющее неравенству $N_\varepsilon > 1/(x\varepsilon)$. К этому, однако, следует добавить, что сколь бы большим мы не взяли число N, в области D всегда найдется точка $x = 1/N$, в которой $S_N(1/N) = 1/2$. Таким образом, за счет увеличения числа N принципиально невозможно сделать $S_N(x) < 1/2$ для всех значений x из D одновременно. Например, уже для $\varepsilon = 1/2$ невозможно указать номер N, при котором приведенное выше неравенство выполнялось бы для всех

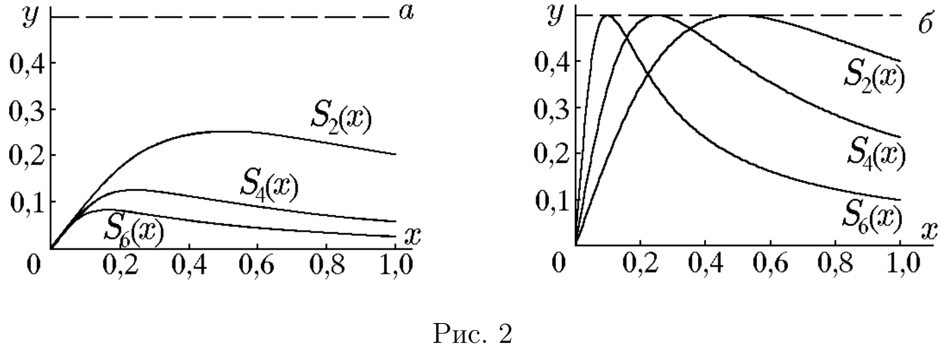


Рис. 2

$x \in D$ сразу, и т.д. Как и в случае а), простейшее исследование показывает, что функции $S_n(x)$ по-прежнему в точке $x = 1/n$ имеют максимум, равный, однако, $S_n(1/n) = 1/2$ (рис. 2,*б*). Этот максимум с ростом числа n смещается влево, не изменяя своего максимального значения, равного $1/2$. Как видно из рис. 2,*б*, хотя по каждой вертикали, взятой в отдельности, точки графиков $S_n(x)$ бесконечно близко приближаются к оси Ox с ростом n, но ни одна кривая целиком (как на рис. 2,*а*) не примыкает к этой оси на всем протяжении отрезка $[0, 1]$. Такое поведение наглядно иллюстрирует неравномерную сходимость частичной суммы S_n.

Пример 7.2. Исследовать характер сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$$

в области $D = [0, 1]$.

Решение. В развернутой записи исходный ряд имеет вид

$$1 + (x - 1) + (x^2 - x) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) + \ldots,$$

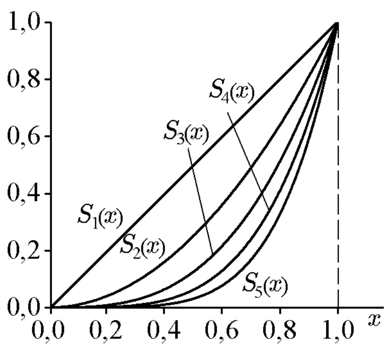


Рис. 3

откуда легко получается выражение для n-частичной суммы ряда: $S_n(x) = x^n$, $n = \overline{1, \infty}$. Все эти функции непрерывны, однако $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ для $x \neq 1$ и $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$ для $x = 1$. Отсюда сразу следует невозможность выполнения неравенства $|S_n(x)| = x^n < \varepsilon < 1$ одновременно для всех $x \in D$, означающая неравномерную сходимость ряда. Рис. 3 дает представление о своеобразном характере нарушения равномерной сходимости: сумма ряда $S(x)$ уже не является непрерывной функцией, а изменяется скачком ($S(x) = 0$ для $0 < x < 1$ и $S(x) = 1$ для $x = 1$).

Таким образом, сумма неравномерно сходящегося ряда, состоящего из непрерывных функций, не является обязательно непрерывной функцией, а может быть разрывной. Представление разрывных функций с помощью рядов непрерывных функций как раз основано на применении неравномерно сходящихся рядов.

Наряду со способами выяснения характера сходимости функционального ряда, использованными в примерах, можно использовать критерий Коши. Его формулировка полностью совпадает с формулировкой общего критерия Коши с единственной оговоркой, что число N, определяющее неравенство (6.5), не зависит от $x \in D$, т.е. является функцией только ε: $N = N_\varepsilon$. Признаки Абеля и Дирихле также можно переформулировать соответствующим образом. Ниже мы сформулируем один из наиболее простых и чаще всего используемых признаков – признак Вейерштрасса. Однако сначала дадим определение мажоранты функционального ряда (6.1).

♦ Знакоположительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{7.1}$$

называется *мажорирующим* для функционального ряда (6.1) на отрезке $[a,b]$, если

$$|u_k(x)| \leqslant c_k \tag{7.2}$$

для всех $x \in [a,b]$, $k = \overline{1,\infty}$.

Ряд (7.1) называют также мажорантой функционального ряда (6.1) в области D.

Теорема 7.1 (признак Вейерштрасса). *Если для всех x, принадлежащих области D,*

1) $|u(x) - u_n(x)| \leqslant a_n$, $n = \overline{1,\infty}$ и числовая последовательность $\{a_n\}$ сходится к нулю, то последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно в области D;

2) $|u_n(x)| \leqslant c_n$, $n = \overline{1,\infty}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots$$

сходится равномерно в области D.

Доказательство. Докажем сначала утверждение 2).

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ является сходящейся мажорантой ряда (6.1), тогда в силу (7.2) имеем неравенство

$$\begin{aligned} |\sigma_{nm}(x)| = |u_{m+1}(x) + \ldots + u_n(x)| \leqslant \\ \leqslant |u_{m+1}(x)| + \ldots + |u_n(x)| \leqslant c_{m+1} + \ldots + c_n, \end{aligned} \tag{7.3}$$

справедливое для всех $x \in D$. Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы, так как, согласно критерию Коши, правую часть неравенства (7.3) можно сделать сколь угодно малой, что для суммы в левой части является условием равномерной сходимости, причем абсолютной, что и требовалось доказать.

Утверждение 1) доказывается аналогично.

Пример 7.3. Доказать, что ряды

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \qquad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

равномерно сходятся на всей числовой оси ($x \in \mathbb{R}$).

Решение. Так как для всех x выполняются неравенства

$$\left|\frac{\sin x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \qquad \frac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = \overline{1,\infty},$$

т.е. каждое слагаемое обоих функциональных рядов не превышает соответствующего слагаемого сходящегося числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

то в соответствии с признаком Вейерштрасса заключаем, что эти ряды равномерно сходятся на всей числовой оси.

$\lozenge$ Очевидно, что равномерно сходящимися будут и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p+x^2},$$

если только $p>1$.

Рассмотрим несколько примеров, когда признак Вейерштрасса неприменим.

Пример 7.4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+x^2}.$$

Решение. Исходный ряд является знакочередующимся и, согласно признаку Лейбница, сходится на всей числовой оси, причем условно, поскольку ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+x^2}$$

на всей числовой оси является расходящимся. В силу условной сходимости ряда признак Вейерштрасса неприменим. Воспользуемся известной оценкой n-го остатка знакочередующегося ряда

$$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+x^2}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+x^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}+x^2}+\ldots,$$

согласно которой,

$$|r_n(x)|\leqslant\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+x^2}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+x^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда найдется такое число $N_\varepsilon=(\varepsilon^{-2}-1)$, что для всех $n>N_\varepsilon$ будет справедливо неравенство $|r_n(x)|<\varepsilon$ для всех x на числовой оси одновременно. Отсюда и следует равномерная сходимость условно сходящегося ряда на всей числовой оси.

Пример 7.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}. \tag{7.4}$$

Решение. Ряд сходится на всей числовой оси. Действительно, для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} \tag{7.5}$$

при $x=0$ его сходимость очевидна, а при $x\neq0$ признак Даламбера приводит к неравенству

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\Big/\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^2}<1,$$

из которого следует, что и для всех $x \neq 0$ ряд (7.4) сходится. Таким образом, этот ряд сходится абсолютно на всей числовой оси.

Покажем теперь, что несмотря на абсолютную сходимость ряда (7.4) характеры сходимости этого знакочередующегося ряда и знакоположительного (7.5) существенно различаются, а именно: на всей числовой оси ряд (7.4) сходится равномерно, а ряд (7.5) – неравномерно.

Обратимся сначала к знакочередующемуся ряду (7.4), для которого n-й остаток имеет вид

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k} = \frac{(-1)^{n+1} x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+2} x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \ldots$$

Этот ряд можно рассматривать как сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом, равным $(-1)^{n+1}x^2/(1+x^2)^{n+1}$, и знаменателем $q = -(1+x^2)^{-1}$. Тогда

$$|r_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k} \Big| = \Big| \frac{(-1)^{n+1} x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \Big/ \Big(1 + \frac{1}{1+x^2}\Big) \Big| =$$

$$= \frac{x^2}{(1+x^2)^n (2+x^2)} < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\ldots+x^{2n}} < \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое число $N_\varepsilon = \varepsilon^{-1}$, что для всех $n > N_\varepsilon$ будет справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \neq 0$ одновременно. Последнее с учетом того, что $r_n(0) = 0$, означает равномерную сходимость ряда (7.4) на всей числовой оси.

Перейдем теперь к знакоположительному ряду (7.5), для которого n-й остаток имеет вид

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \ldots$$

Этот ряд можно рассматривать как сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом, равным $x^2/(1+x^2)^{n+1}$, и знаменателем $q = 1/(1+x^2)$. Тогда

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \Big/ \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Отсюда следует, что при $x \to 0$ (но не равном нулю!) $\lim\limits_{x\to 0} r_n(x) = 1$, а $r_n(0) = 0$, и, следовательно, остаток ряда $r_n(x)$ не может быть меньше произвольного положительного ε для всех x одновременно. Это означает, что ряд (7.5), в отличие от ряда (7.4), сходится на всей числовой оси неравномерно. Очевидно, однако, что ряд (7.5) будет сходиться равномерно на любом отрезке, не содержащем точку $x = 0$.

В заключение вычислим суммы S_1, S_2 рядов (7.4) и (7.5) соответственно и сравним их поведение в окрестности точки $x = 0$.

Очевидно, что оба ряда в точке $x = 0$ сходятся к суммам, равным нулю: $S_1(0) = S_2(0) = 0$. Вне этой точки сумма знакопеременного ряда (7.4) как сумма бесконечной геометрической прогрессии равна

$$S_1(x) = x^2 \Big/ \Big(1 + \frac{1}{1+x^2}\Big) = \frac{x^2(1+x^2)}{2+x^2},$$

а знакоположительного ряда (7.5) соответственно

$$S_2(x) = x^2 \Big/ \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) = 1 + x^2.$$

Сравнив пределы

$$\lim_{x\to 0} S_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+x^2)}{2+x^2} = 0,$$
$$\lim_{x\to \pm 0} S_2(x) = \lim_{x\to \pm 0} (1+x^2) = 1$$

со значениями $S_1(0) = S_2(0) = 0$, заключаем, что сумма равномерно сходящегося ряда (7.4), состоящего из непрерывных функций, также является непрерывной функцией, а сумма неравномерно сходящегося ряда (7.5), состоящего из непрерывных функций, является разрывной функцией, поскольку

$$\lim_{x\to \pm 0} S_2(x) = 1 \neq S_2(0) = 0.$$

Отметим, однако, что сумма S_2 ряда (7.5) будет непрерывной функцией на любом отрезке, не содержащем точку $x = 0$, поскольку на таком множестве ряд будет сходиться равномерно.

Приведем свойства равномерно сходящихся рядов, из которых станет ясной ценность понятия равномерной сходимости ряда.

7.2. Свойства равномерно сходящихся рядов

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{7.6}$$

является равномерно сходящимся в области D.

Для равномерно сходящегося в D ряда справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Если ряд (7.6) умножить на функцию $\vartheta(x)$, ограниченную в D: $|\vartheta(x)| < L$, $x \in D$, то полученный ряд также будет сходиться равномерно.

Действительно, справедливость свойства вытекает из цепочки неравенств

$$\big|\vartheta(x)[u_{m+1}(x) + \ldots + u_n(x)]\big| \leqslant |\vartheta(x)|(|u_{m+1}| + \ldots + |u_n(x)|) \leqslant L\varepsilon,$$

которая имеет место для всех $x \in D$ одновременно.

Свойство 2. Если члены ряда (7.6) – непрерывные в D функции, то и сумма этого ряда

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

непрерывна в D.

Действительно, сумму ряда (7.6) $S(x)$ представим n-частичной суммой $S_n(x)$ и n-м остатком ряда $r_n(x)$:

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x). \tag{7.7}$$

В силу равномерной сходимости ряда при заданном ε можно выбрать настолько большое число n, чтобы остаток ряда удовлетворял неравенству $|r_n(x)| < \varepsilon/4$

для всех $x \in D$ одновременно. Но тогда для остатка ряда в любых двух точках x и $x_1 = x + \Delta x$ из D справедлива оценка

$$|r_n(x+\Delta x) - r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, сумма $S_n(x)$ в отличие от $r_n(x)$ состоит из конечного числа слагаемых и, следовательно, является непрерывной в D. Благодаря этому для произвольной точки x из D можно выбрать такое $\delta > 0$, что $|S_n(x+\Delta x) - S_n(x)| < \varepsilon/2$, как только $|\Delta x| < \delta$. В результате получаем цепочку неравенств

$$|S(x+\Delta x) - S(x)| = |S_n(x+\Delta x) + r_n(x+\Delta x) - S_n(x) - r_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |S_n(x+\Delta x) - S_n(x)| + |r_n(x+\Delta x) - r_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

которая и выражает непрерывность функции $S(x)$.

◊ Доказанное свойство эквивалентно соотношению

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

или коротко

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x). \tag{7.8}$$

Это означает, что для равномерно сходящегося ряда (7.6) возможен почленный предельный переход, что зачастую удобно в практических приложениях.

Заметим, что условие равномерной сходимости для данного свойства является достаточным, но не необходимым. Сумма неравномерно сходящегося ряда также может быть непрерывной. Однако если сумма сходящегося ряда непрерывных в D функций претерпевает разрыв в некоторой точке этой области, то в любой окрестности этой точки ряд не может сходиться равномерно (см. примеры 7.2 и 7.5).

Условие равномерной сходимости становится необходимым при дополнительном требовании положительности функции $u_n(x)$ в D, что позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 7.2 (признак Дини). *Если членами ряда* (6.1) *являются положительные и непрерывные на отрезке* $[a, b]$ *функции* $u_n(x)$ *и если этот ряд имеет непрерывную на этом отрезке сумму, то он сходится равномерно на отрезке* $[a, b]$.

Пример 7.6. Исследовать на непрерывность сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2x^2}.$$

Решение. Каждый член данного ряда есть функция, непрерывная для всех x (на всей числовой оси). Ряд равномерно сходится для всех x, поскольку

$$\frac{1}{n^4 + n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^4},$$

и, следовательно, для данного ряда существует мажорирующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

который является обобщенным гармоническим рядом с $\alpha = 4 > 1$. Согласно свойству 2, сумма данного ряда есть функция, непрерывная при всех x.

Свойство 3. Если члены ряда (7.6) непрерывны в ограниченной области D, а x_0 и x – любые два числа из D и $[x_0, x] \subset D$, то этот ряд можно почленно интегрировать на отрезке $[x_0, x]$, т.е.

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(x')dx' = \int\limits_{x_0}^{x}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x')\Big\}dx' = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x} u_n(x')dx', \tag{7.9}$$

при этом полученный ряд сходится равномерно относительно x при фиксированном x_0.

Действительно, исходя из условия непрерывности функций $u_n(x)$ в силу предыдущего свойства можно утверждать, что сумма ряда (7.6) $S(x)$ является непрерывной в D функцией. Как и при доказательстве свойства 2, представим $S(x)$ в виде (7.7). Задавшись числом $\varepsilon > 0$, в силу равномерной сходимости (7.6) всегда можно выбрать n настолько большим, чтобы для всех $x \in D$ выполнялось неравенство (см. пример 7.5)

$$|S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon. \tag{7.10}$$

По теореме о среднем, известной из интегрального исчисления, с учетом (7.10) найдем

$$\Big|\int\limits_{x_0}^{x}[S(x') - S_n(x')]dx'\Big| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x}|S(x') - S_n(x')|dx' \leqslant \varepsilon\int\limits_{x_0}^{x}dx' = \varepsilon(x - x_0). \tag{7.11}$$

С другой стороны, интегрирование конечной суммы $S_n(x)$ можно выполнить почленно. Тогда левую часть неравенства (7.11) можно записать

$$\Big|\int\limits_{x_0}^{x}[S(x') - S_n(x')]dx'\Big| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x}S(x')dx' - \int\limits_{x_0}^{x}S_n(x')dx'\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{x_0}^{x}S(x')dx' - \int\limits_{x_0}^{x}\Big\{\sum_{k=1}^{n}u_k(x')\Big\}dx'\Big| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x}S(x')dx' - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}u_k(x')dx'\Big|. \tag{7.12}$$

Подставив (7.12) в (7.11), получим

$$\Big|\int\limits_{x_0}^{x}S(x')dx' - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}u_k(x')dx'\Big| < \varepsilon(x - x_0) < \varepsilon(b - a).$$

Устремив ε к нулю ($\varepsilon \to 0$) [и тем самым n к бесконечности ($n \to \infty$)], получим формулу (7.9). Последнее неравенство выполняется для всех x из D одновременно, а это означает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}u_k(x)dx$$

при фиксированном x_0 в указанной области сходится равномерно относительно x, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Для рассмотренного свойства, как и для свойства 2, требование равномерной сходимости не является необходимым. Существуют неравномерно сходящиеся ряды, допускающие почленное интегрирование. Более того, такое интегрирование допускают и некоторые расходящиеся ряды. Так, например, ряд

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

представляющий сумму геометрической прогрессии, сходится для $|x| < 1$ и расходится в точке $x = 1$. Однако почленное интегрирование дает правильный результат

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 = \int_0^1 \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\Big]dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

В справедливости разложения

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

мы убедимся несколько позже (см. разд. «Разложение функций в ряд Тейлора»).

Пример 7.7. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$$

можно почленно интегрировать.

Решение. Каждый член данного ряда — непрерывная функция для всех x, и ряд сходится равномерно на всей числовой оси, так как для всех x выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Согласно свойству 3, данный ряд можно почленно интегрировать в любых пределах из области сходимости, например и в $[0, x]$. Проинтегрировав, получим

$$\int_0^x \Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}\Big\}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{1}{x^2+n^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}.$$

Свойство 4. Если при почленном дифференцировании ряда (7.6) получается равномерно сходящийся ряд непрерывных функций

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x) = T(x), \tag{7.13}$$

то сумма этого ряда представляет собой производную от суммы ряда (7.6): $T(x) = S'(x)$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big\}'.$$

Действительно, ряд (7.13) является равномерно сходящимся и, следовательно, его можно почленно интегрировать на любом интервале $]x_0, x[\in D$. Тогда

$$\int\limits_{x_0}^{x} T(x')dx' = \int\limits_{x_0}^{x} \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x')dx'\Big\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_n'(x')dx' = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)] = S(x) - S(x_0).$$

Поскольку это равенство справедливо для всех $x \in D$, то его дифференцирование дает $T(x) = S'(x)$, что и требовалось доказать.

Пример 7.8. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 x}{n^2}.$$

Определить 1) сходится ли этот ряд равномерно; 2) можно ли его почленно дифференцировать.

Решение. 1) Согласно признаку Вейерштрасса, данный ряд сходится равномерно, так как он мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2) Дифференцировать почленно данный ряд нельзя, так как ряд из производных

$$\cos x + \frac{2^3 \cos 2^3 x}{2^2} + \frac{3^3 \cos 3^3 x}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cos n^3 x}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cos n^3 x$$

расходится.

Пример 7.9. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

можно почленно дифференцировать.

Решение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2},$$

как отмечалось выше, равномерно сходится на всей числовой оси и представляет собой сумму непрерывных функций. Следовательно, почленное дифференцирование правомерно.

8. Степенные ряды. Теорема Абеля

Теория степенных рядов имеет обширное применение: вычисление элементарных функций с заданной точностью; построение приближенных формул; вычисление определенных интегралов; интегрирование дифференциальных уравнений и др.

♦ Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{8.1}$$

где a_n и x_0 — величины, не зависящие от x, называется *степенным.*

◇ Положив $x_0 = 0$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{8.2}$$

Ряды (8.1) и (8.2) связывает формальная замена $x - x_0 \to x$ или $x \to x - x_0$.

◇ Степенной ряд (8.1) всегда сходится при $x = x_0$, а ряд (8.2) – при $x = 0$.

Структуру области сходимости степенных рядов показывает следующая теорема:

Теорема 8.1 (Абеля). *Если степенной ряд* (8.1) *сходится в точке* $x = x_1$, *то он сходится абсолютно в интервале*

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|$$

и равномерно на отрезке $|x - x_0| \leqslant r < |x_1 - x_0|$, *где* r *– некоторое положительное число.*

Наоборот, если ряд (8.1) *расходится в точке* $x = x_1$, *то он расходится при всех значениях* x, *для которых* $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ сходится. Тогда его общий член стремится к нулю ($a_n(x_1 - x_0)^n \to 0$) при $n \to \infty$. Следовательно, он ограничен и $|a_n(x_1 - x_0)^n| < k$ ($k = \text{const}$). Рассмотрим x, удовлетворяющие условию $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ (тем самым полагаем, что $x_1 - x_0 \neq 0$).

Поделив на $|x_1 - x_0|$ обе части неравенства, получим

$$\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right| = q < 1.$$

Преобразуем общий член ряда:

$$|a_n(x - x_0)^n| = \left|a_n(x_1 - x_0)^n \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n}\right| =$$
$$= |a_n(x_1 - x_0)^n| \left|\frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n}\right| = |a_n(x_1 - x_0)^n| q^n < kq^n.$$

Из этого неравенства заключаем, что при $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)|^n$, начиная с некоторого номера, становятся меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$k + kq + kq^2 + \ldots + kq^n,$$

знаменатель которой $q < 1$. Из сходимости геометрической прогрессии при $q < 1$ заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится абсолютно, что и доказывает первую часть утверждения. Сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ является мажорантой ряда (8.1) для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| \leqslant r < |x_1 - x_0|$. Следовательно, на этом отрезке ряд (8.1) сходится равномерно.

Доказательство второй части теоремы проводится методом «от противного». Предположим, что при $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится, но тогда, как доказано выше, сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ расходится. Таким образом, теорема доказана.

Для степенного ряда существует положительное число R такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < R$, ряд сходится, при $|x - x_0| > R$ расходится.

♦ *Радиусом сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ называется такое число R, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < R$, ряд сходится, а для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| > R$, расходится.

Интервал $]x_0 - R, x_0 + R[$ называется интервалом сходимости.

Укажем способ вычисления радиуса сходимости. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|,$$

так как его интервал сходимости совпадает с интервалом сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Применим к знакоположительному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$ признак Даламбера и получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n a_n}\right| = |x - x_0| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Если последний предел существует, то для сходимости ряда должно быть выполнено условие

$$|x - x_0| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Тогда

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Воспользовавшись признаком Коши, для радиуса сходимости при условии, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ существует, получим

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

При этом следует выяснить поведение степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ при $x = x_0 \pm R$.

Пример 8.1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Решение. 1. Составим ряд из абсолютных величин

$$|x| + \left|\frac{x^2}{2}\right| + \ldots + \left|\frac{x^n}{n}\right| + \ldots$$

и применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}|x|\frac{n}{n+1} = |x|.$$

Если этот предел меньше единицы, ряд сходится. Отсюда $|x| < 1$ или $-1 < x < 1$. Ряд расходится, когда $|x| > 1$.

2. При $x = R = 1$ ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

сходится по признаку Лейбница и при $x = -R = -1$ ряд

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots = -\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\Big)$$

расходится. Итак, $R = 1$ и область сходимости исследуемого ряда есть $]-1, 1]$ или $-1 < x \leqslant 1$.

Пример 8.2. Найти радиус сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}x^n, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^2}(x-1)^n.$$

Решение. а) Как и в предыдущем примере, применение признака Даламбера дает

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4|x|^{n+1}n!}{(n+1)!n^4|x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 < 1.$$

Отсюда следует, что ряд сходится на всей числовой оси. Это означает, что ряд имеет бесконечный радиус сходимости $R = \infty$.

б) Применив радикальный признак Коши, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{(n+1)^2}|x-1|^n} = \lim_{n\to\infty} n|x-1| = \begin{cases} 0, & x = 1,\\ \infty, & x \neq 1.\end{cases}$$

Отсюда следует, что ряд сходится в единственной точке $x = 1$. Это означает, что радиус сходимости равен нулю.

Таким образом, радиус сходимости степенного ряда может принимать как конечное (включая нуль), так и бесконечное значения.

Пример 8.3. Найти радиус сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n},\qquad \text{в)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой для определения радиуса сходимости в виде

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

найдем

$$\text{а)}\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}=2;$$
$$\text{б)}\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n}{2^n(n+1)}=2;$$
$$\text{в)}\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2.$$

Радиусы сходимости всех трех рядов совпадают. Отметим, что ряд б) получается из ряда а) почленным дифференцированием, а ряд в) – почленным интегрированием. Оказалось, что эти операции не изменили радиусов сходимости рядов б) и в). Ниже мы остановимся на этом вопросе более подробно.

Исходя из равномерной сходимости степенных рядов на любом отрезке их интервала сходимости, вытекающей из теоремы Абеля, сформулируем некоторые наиболее важные свойства степенных рядов. Ограничимся степенными рядами вида (8.2), поскольку ряды более общего вида (8.1) приводятся к (8.2) простой заменой переменной.

Свойство 1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (8.2) с радиусом сходимости R в любом замкнутом промежутке $|x|\leqslant r<R$ является непрерывной функцией.

Доказательство очевидно и следует из свойства 1 для равномерно сходящихся рядов.

♢ Число r может быть взято сколь угодно близким к числу R, но из этого все же не следует непрерывность суммы $S(x)$ в точках $x=\pm R$. Это объясняется тем, что теорема Абеля не гарантирует равномерной сходимости в замкнутом промежутке $[-R,R]$. Если дополнительное исследование устанавливает сходимость ряда (8.1) в замкнутом промежутке $[-R,R]$, то сумма ряда $S(x)$ будет непрерывна в точках $x=\pm R$, поскольку ряд будет равномерно сходящимся в указанном промежутке.

Если $S(x)$ непрерывна на отрезке $|x|\leqslant r<R$, из свойства 1 следует очевидное

Свойство 2. Если сумма $S(x)$ степенного ряда (8.2) с радиусом сходимости R в окрестности точки $x=0$ совпадает с суммой другого ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, то эти ряды тождественны.

Действительно, из тождества

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

при $x=0$ следует, что $a_0=b_0$. Отбросив равные слагаемые в обеих частях исходного тождества, мы приходим к новому:

$$a_1x+a_2x^2+\ldots=b_1x+b_2x^2+\ldots,$$

которое можно записать как

$$x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots) = x(b_1 + b_2x + b_3x^2 + \ldots).$$

Не имея права полагать здесь $x = 0$, мы, однако, можем устремить x к нулю. Тогда, воспользовавшись непрерывностью, вытекающей из свойства 1, в пределе $x \to 0$ мы все же получим равенство $a_1 = b_1$. Отбросив эти слагаемые, в следующем предельном переходе мы получим равенство $a_2 = b_2$ и т.д.

Свойство 3. Почленное дифференцирование или интегрирование по любому отрезку из интервала сходимости $]-R, R[$ степенного ряда (8.2) не меняет его радиус сходимости.

Доказательство. Почленное дифференцирование ряда (8.2) приводит к ряду вида

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Применив к полученному ряду формулу Даламбера для определения радиуса сходимости, приходим к равенству

$$R_{\text{диф}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n|a_n|}{(n+1)|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R.$$

Если последний предел не существует, доказательство можно провести по схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы Абеля.

Таким образом, радиус сходимости R степенного ряда, полученного из (8.2) почленным дифференцированием, совпадает с радиусом сходимости R исходного ряда (8.2). Отсюда следуют равномерная сходимость полученного ряда и возможность почленного дифференцирования исходного, т.е.

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x). \tag{8.3}$$

Для доказательства второй части свойства проинтегрируем почленно ряд (8.2) на отрезке $[0, x]$, $x < R$ и получим следующий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Вычислив для него радиус сходимости по формуле Даламбера, приходим к равенству

$$R_{\text{инт}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|a_n|}{n|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R.$$

Если последний предел не существует, доказательство можно провести по схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы Абеля.

Таким образом, радиус сходимости $R_{\text{инт}}$ степенного ряда, полученного из (8.2) почленным интегрированием, совпадает с радиусом сходимости R исходного ряда (8.2). Отсюда вытекают равномерная сходимость полученного ряда и возможность соответствующего почленного интегрирования исходного, т.е.

$$\int\limits_0^x S(x')dx' = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x')\right)dx' = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x u_n(x')dx', \quad |x| < R. \tag{8.4}$$

Заметим, что формула (8.4) справедлива и на границах промежутка сходимости $x = R$ или $x = -R$, если только полученный ряд в этих точках сходится. Иллюстрацией свойства 3 для конкретного ряда служит пример 8.3. К этому следует добавить, что это замечание позволяет устранить кажущееся противоречие, возникающее при интегрировании степенного ряда

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n :$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^1 x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},$$

поскольку последний ряд для $x = 1$ является сходящимся по признаку Лейбница (см. свойство 3 равномерно сходящихся рядов).

Свойство 4. Сумма $S(x)$ степенного ряда (8.2) внутри интервала сходимости $]-R, R[$ имеет непрерывные производные всех порядков.

Действительно, для ряда (8.2) выберем замкнутую δ-окрестность произвольной точки x из интервала сходимости. В этой окрестности ряд сходится равномерно к непрерывной функции $S(x)$. В силу равномерной сходимости ряда (8.2) (или свойства 3) его можно почленно дифференцировать, причем

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} a_n.$$

Поскольку полученный степенной ряд, согласно свойству 1, равномерно сходится в указанной окрестности к непрерывной функции $S'(x)$, то операцию почленного дифференцирования можно повторять неоднократно, откуда и следует справедливость свойства 4.

Степенной ряд (8.2) с перечисленными выше свойствами допускает обобщение, приводящее к понятию обобщенного степенного ряда.

♦ Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n [u(x)]^n, \tag{8.5}$$

где $u(x)$ – некоторая функция от x, называется *обобщенным степенным рядом.*

◊ Постановка $u(x) = y$ в предположении непрерывности $u(x)$ на некотором множестве приводит обобщенный степенной ряд (8.5) к обычному степенному ряду вида (8.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n. \tag{8.6}$$

Если $|y| < R$ – область сходимости степенного ряда (8.6), то в этой области на него распространяются все свойства обычного степенного ряда. Для нахождения области сходимости обобщенного степенного ряда на оси Ox необходимо решить неравенство $|u(x)| < R$ относительно x.

Пример 8.4. Дан ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}.$$

Определить область его сходимости и вычислить его сумму.

Решение. Рассмотрим сначала случай а).

1. Составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|$$

и применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}||n|}{|n+1||x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x|<1.$$

Отсюда $-1<x<1$ и радиус сходимости $R=1$.

Исследуем ряд на сходимость: при $x=-1$ ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$$

сходится условно; при $x=1$ ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

расходится (гармонический ряд). Итак, область сходимости ряда $[-1,1[$ или $-1\leqslant x<1$.

2. Ряд

$$S(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

в $-1<x<1$ можно почленно дифференцировать. Тогда ряд

$$S'(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots$$

есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой легко вычисляется:

$$S'(x)=\frac{1}{1-x}. \tag{8.7}$$

Ряд, составленных из производных, имеет тот же самый интервал сходимости $]-1,1[$. Проинтегрировав (8.7) в области сходимости, получим

$$\int S'(x)dx=\int\frac{dx}{1-x}+C$$

или

$$S(x)=-\ln(1-x)+C.$$

Определим постоянную C. Пусть $x=0$ (точка из области сходимости). Тогда $S(0)=0=-\ln(1-0)+C$ или $C=0$. Сумма ряда

$$S(x)=-\ln(1-x)=\ln\frac{1}{1-x}.$$

Для случая б) будем исходить из ряда с известной суммой

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n-4}=\frac{1}{1-x^4}.$$

Этот степенной ряд равномерно сходится в любом интервале, лежащем в области сходимости $|x| < 1$, поэтому допускает почленное интегрирование на промежутке $(0, x)$, $x < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{4n-4} dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \frac{1}{2}\Big[\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}\Big] = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x+1}{x-1}\Big|\Big).$$

Пример 8.5. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}.$$

Решение. *1-й способ.* Рассмотрим вспомогательный степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n} x^n$$

с радиусом сходимости $R = e$ и суммой $S(x)$. Поскольку исходный ряд получается из вспомогательного при $x = 1$ и эта точка принадлежит области сходимости, то сумма исходного ряда определится как $S(1)$. Для нахождения суммы $S(x)$ продифференцируем равенство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ne^n}.$$

Тогда в силу свойства 3 степенных рядов получим

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ne^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{ne^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^n} = \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^{n-1}.$$

Поскольку в области сходимости $|x/e| < 1$, то последнюю сумму можно вычислить как сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы. Следовательно,

$$S'(x) = \frac{1}{e}\frac{1}{1-\frac{x}{e}} = \frac{1}{e-x}.$$

Последнее равенство проинтегрируем на отрезке $[0, x]$, целиком лежащем в интервале сходимости $|x| < e$, учитывая, что $S(0) = 0$. Тогда

$$S(x)\Big|_0^x = S(x) - S(0) = S(x) = \int_0^x \frac{dx}{e-x} = -\ln(e-x)\Big|_0^x =$$

$$= -\ln(e-x) + \ln e = \ln\frac{e}{e-x},$$

и, соответственно, сумма исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ne^n}=S(x)\big|_{x=1}=\ln\frac{e}{e-1}.$$

2-й способ. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}},$$

который заменой $y=1/x$ сводится к обычному степенному ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}y^{n+1}$$

с радиусом сходимости $R=1$ и областью сходимости $|y|<1$. Отсюда следует, что обобщенный степенной ряд сходится равномерно в области $|x|>1$. Это позволяет воспользоваться для него свойством 3. Тогда на интервале (e,∞), целиком принадлежащем области равномерной сходимости, имеем

$$\int\limits_e^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}\Big)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{A\to\infty}\int\limits_e^{A}\frac{dx}{x^{n+1}}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{A\to\infty}\frac{1}{nx^n}\Big|_e^A=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A^n}-\frac{1}{e^n}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ne^n}.$$

Приняв во внимание, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n-1}}=\frac{1}{x^2}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

найдем

$$\int\limits_e^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}\Big)dx=\int\limits_e^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)dx=\lim_{A\to\infty}\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\Big|_e^{\infty}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\ln\Big(1-\frac{1}{A}\Big)-\ln\Big(1-\frac{1}{e}\Big)=\ln 1+\ln\frac{e}{e-1}=\ln\frac{e}{e-1},$$

и, следовательно,

$$\ln\frac{e}{e-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ne^n}.$$

Пример 8.6. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^n$$

и с ее помощью просуммировать числовые ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2^n},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}.$$

Решение. Исходный обобщенный степенной ряд заменой $(1+x)/(1-x) = y$ сводится к обычному степенному ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n,$$

который, как можно убедиться, например, с помощью признака Даламбера, сходится в области $|y| < 1$. Рассмотрим вспомогательный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n$, также сходящийся в области $|y| < 1$ к сумме

$$S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}.$$

Продифференцировав это равенство в точках интервала сходимости, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} ny^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n = \frac{1}{(1-y)^2}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^n = 1\Big/\Big(1 - \frac{1+x}{1-x}\Big)^2 = \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big)^2. \tag{8.8}$$

Как уже отмечалось, это равенство справедливо для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big| < 1,$$

которое соответствует двум другим

$$-1 < \frac{1+x}{1-x} < 1.$$

Решением первого неравенства

$$\frac{1+x}{1-x} > -1$$

или

$$\frac{2}{1-x} > 0$$

является множество $E_1 :] - \infty, 1[$; решением второго

$$\frac{1+x}{1-x} < 1$$

или

$$\frac{2x}{1-x} < 0$$

– множество $E_2 :] - \infty, 0[\cup]1, \infty[$. Объединив оба решения, получим интервал сходимости обобщенного степенного ряда $E :] - \infty, 0[$.

Чтобы просуммировать числовые ряды, рассмотрим оба уравнения

$$\frac{1+x}{1-x}=\pm\frac{1}{2},$$

решениями которых являются $x_1=-1/3$ и $x_2=-3$.

Так как $x_1, x_2 \in E$, то, положив в (8.8) $x=x_1=-1/3$, найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Big(\frac{1-1/3}{1+1/3}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{2^n}=\frac{1}{4}(1+3)^2=4.$$

Соответственно, положив в (8.8) $x=x_2=-3$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Big(\frac{1-3}{1+3}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{3}\Big)^2=\frac{4}{9}.$$

Пример 8.7. Найти сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{8.9}$$

Решение. Согласно признаку Даламбера, ряд сходится на всей числовой оси, причем $S(0)=0$. В области сходимости степенного ряда (8.9) возможно его почленное дифференцирование:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\big(x^{2n+1}\big)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

причем $S'(0)=1$. Еще одно дифференцирование полученного ряда приводит к соотношению

$$\begin{aligned}S''(x)&=\Bigg(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\Bigg)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x^{2n})'=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=-S(x).\end{aligned}$$

Таким образом, величину $S(x)$ можно найти как решение задачи Коши

$$S''(x)+S(x)=0,\qquad S(0)=0,\qquad S'(0)=1.$$

Так как общее решение уравнения имеет вид

$$S(x)=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

то его подстановка в начальные условия приводит к следующим значениям постоянных: $C_1=0$, $C_2=1$. Следовательно, ряд (8.9) сходится к сумме $S(x)=\sin x$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x.$$

Это равенство справедливо на всей числовой оси.

Пример 8.8. Найти суммы следующих рядов:

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-x_0)^n}{n!},$$
$$\text{в)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!},\qquad \text{г)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Решение. а) Согласно, например, признаку Даламбера, ряд сходится на всей числовой оси. Положив

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}, \tag{8.10}$$

причем $S(x_0)=1$, воспользуемся возможностью почленного дифференцирования степенного ряда в области сходимости. Тогда из (8.10) найдем

$$S'(x)=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}=S(x).$$

Таким образом, величину $S(x)$ можно найти как решение задачи Коши

$$S'(x)=S(x),\qquad S(x_0)=1.$$

Общее решение этого уравнения как уравнения с разделяющимися переменными легко находится и имеет вид

$$S(x)=Ce^x.$$

Подставив его в начальное условие, приходим к следующему уравнению постоянной: $C=e^{-x_0}$.

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}=e^{x-x_0}. \tag{8.11}$$

Аналогично находим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-x_0)^n}{n!}=e^{-(x-x_0)}. \tag{8.12}$$

Это равенство также справедливо на всей числовой оси.

Сложив равенства (8.11) и (8.12), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[1+(-1)^n](x-x_0)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}=e^{x-x_0}+e^{-(x-x_0)},$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^{x-x_0}+e^{-(x-x_0)}}{2}=\operatorname{ch}(x-x_0). \tag{8.13}$$

Вычтя из равенства (8.11) равенство (8.12), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[1-(-1)^n](x-x_0)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}=e^{x-x_0}-e^{-(x-x_0)},$$

откуда
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e^{x-x_0}-e^{-(x-x_0)}}{2}=\operatorname{sh}(x-x_0). \tag{8.14}$$
В заключение отметим, что при $x_0=0$ можно получить представление элементарных функций e^x, $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$ степенными рядами на всей числовой оси:
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \operatorname{ch}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \operatorname{sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

9. Операции над степенными рядами

В этом разделе мы кратко остановимся на некоторых операциях над степенными рядами.

Понятно, что умножение степенного ряда на постоянный множитель производится, как для всякого сходящегося ряда, путем умножения каждого слагаемого на этот множитель:
$$\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)x^n. \tag{9.1}$$
Предположим, что радиусы сходимости рядов
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{9.2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \tag{9.3}$$
отличны от нуля. Тогда на интервале $|x|<R$, где R – меньший из этих радиусов, ряды (9.2), (9.3) можно складывать, вычитать и умножать по правилам, принятым для алгебраических полиномов:
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n; \tag{9.4}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, \tag{9.5}$$
где
$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}. \tag{9.6}$$
$\Diamond$ Напомним, что именно (и только) произведение рядов по Коши (2.6) переводит произведение степенных рядов снова в степенной ряд, обеспечивая равенство (9.5).

Отметим, что частное при делении степенных рядов также можно представить в виде степенного ряда
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big/\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, \tag{9.7}$$

если только коэффициент b_0 отличен от нуля. В противном случае ряд (9.3) в точке $x = 0$ обращается в нуль.

Коэффициенты c_k степенного ряда (9.7) можно получить из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

порождающего, согласно (9.6), следующую рекуррентную систему равенств:

$$\begin{aligned}
&a_0 = c_0 b_0;\\
&a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (9.8)$$

Из первого уравнения найдем $c_0 = a_0/b_0$, из второго – $c_1 = (a_1 - c_0 b_1)/b_0$ и т.д. Теперь, зная коэффициенты c_n, можно исследовать на сходимость формально записанный степенной ряд (9.7) и определить область его сходимости. Мы не приводим общую формулировку теоремы об интервале сходимости ряда (9.7). В дальнейшем нам достаточно знать, что ряд (9.7) сходится, если только x изменяется в некотором малом интервале, где делитель не обращается в нуль. При этом делимое и делитель должны быть сходящимися рядами.

Пример 9.1. Найти произведение рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (x-2)^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n (x-2)^n}{n!}.$$

Решение. Положив

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (x-2)^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n (x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-2)^n,$$

а

$$a_n = \frac{4^n}{n!}, \qquad b_n = \frac{(-5)^n}{n!},$$

согласно определению (9.6), найдем

$$\begin{aligned}
C_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 =\\
&= 1 \cdot \frac{(-5)^n}{n!} + \frac{4}{1!} \frac{(-5)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{4^2}{2!} \frac{(-5)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots +\\
&+ \frac{4^{n-2}}{(n-2)!} \frac{(-5)^2}{2!} + \frac{4^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(-5)}{1!} + \frac{4^n}{n!} \cdot 1 =\\
= \frac{1}{n!} \Big[1 \cdot (-5)^n &+ \frac{n!}{1!(n-1)!} 4(-5)^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!} 4^2 (-5)^{n-2} + \ldots +\\
+ \frac{n!}{(n-2)!2!} 4^{n-2} (-5)^2 &+ \frac{n!}{(n-1)!1!} 4^{n-1} (-5) + 4^n \cdot 1 \Big] = \frac{1}{n!} (4-5)^n = \frac{(-1)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Отсюда для произведения рядов получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n(x-2)^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n (x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n!}.$$

Пример 9.2. Для целых положительных m вычислить

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^m.$$

Решение. При $m = 2$, согласно определению (9.6), для $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{n!} + \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-2)!2!} + \frac{1}{(n-1)!1!} + \frac{1}{n!} \Big] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}.$$

При $m = 3$ соответственно

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^3 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{2!(n-2)!} + \ldots + \frac{2^2}{(n-2)!2!} + \frac{2}{(n-1)!1!} + \frac{1}{n!} \Big] x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}.$$

В общем случае будем иметь

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Пример 9.3. Вычислить

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!}.$$

Решение. Здесь делимое и делитель являются степенными рядами, сходящимися на всей числовой оси, причем делитель в точке $x = 0$ отличен от нуля. Поэтому, положив

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

и

$$a_n = \frac{5^n}{n!}, \qquad b_n = \frac{(-2)^n}{n!},$$

согласно определению (9.8), имеем систему уравнений для определения коэффициентов C_n:

$$\begin{aligned}
&1 = c_0 \cdot 1,\\
&\frac{5}{1!} = \frac{7+(-2)}{1!} = c_0\frac{-2}{1!} + c_1 \cdot 1,\\
&\frac{5^2}{2!} = \frac{1}{2!}\Big[7^2 + \frac{2!}{1!1!}7(-2) + (-2)^2\Big] = c_0\frac{(-2)^2}{2!} + c_1\frac{-2}{1!} + c_2 \cdot 1,\\
&\frac{5^3}{3!} = \frac{1}{3!}\Big[7^3 + \frac{3!}{2!1!}7^2(-2) + \frac{3!}{1!2!}7(-2)^2 + (-2)^3\Big] =\\
&\qquad = c_0\frac{(-2)^3}{3!} + c_1\frac{(-2)^2}{2!} + c_2\frac{-2}{1!} + c_3 \cdot 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{5^n}{n!} = \frac{1}{n!}\Big[7^n + \frac{n!}{(n-1)!1!}7^{n-1}(-2) + \frac{n!}{(n-2)!2!}7^{n-2}(-2)^2 + \ldots +\\
&\qquad + \frac{n!}{1!(n-1)!}7(-2)^{n-1} + (-2)^n\Big] =\\
&\qquad = c_0\frac{(-2)^n}{n!} + c_1\frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} + c_2\frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_{n-1}\frac{-2}{1!} + c_n \cdot 1.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что $c_0 = 1$. Подставив это значение во второе уравнение, получим

$$\frac{7+(-2)}{1!} = \frac{(-2)}{1!} + c_1,$$

откуда $c_1 = 7/(1!)$. Подставив это значение в третье уравнение, найдем

$$\frac{7^2}{2!} + \frac{1}{1!1!}7(-2) + \frac{(-2)^2}{2!} = \frac{(-2)^2}{2!} + \frac{1}{1!1!}7(-2) + c_2,$$

откуда $c_2 = 7/(2!)$. Продолжив подобным образом, для произвольного c_n получим

$$\begin{aligned}
&\frac{7^n}{n!} + \frac{1}{(n-1)!1!}7^{n-1}(-2) + \frac{1}{(n-2)!2!}7^{n-2}(-2)^2 + \ldots +\\
&\qquad + \frac{1}{1!(n-1)!}7(-2)^{n-1} + \frac{(-2)^n}{n!} =\\
&= \frac{(-2)^n}{n!} + \frac{1}{1!(n-1)!}7(-2)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!2!}7^2(-2)^{n-2} + \ldots +\\
&\qquad + \frac{1}{(n-1)!1!}7^{n-1}(-2) + c_n,
\end{aligned}$$

т.е. $c_n = 7^n/(n!)$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n!}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n x^n}{n!}.$$

Полученный ряд также сходится на всей числовой оси.

Тот же результат можно получить, если деление произвести «углом», как для многочленов.

Пример 9.4. Вычислить

$$\frac{1}{1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\ldots}$$

Решение. Здесь делимое и делитель являются степенными рядами, сходящимися на всей числовой оси, причем делитель в точке $x = 0$ отличен от нуля. Поэтому, положив

$$1\Big/\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

и

$$a_0=1,\quad a_n=0,\quad n=\overline{1,\infty};\qquad b_n=\frac{1}{n!},\quad n=\overline{0,\infty},$$

согласно определению (9.8), имеем систему уравнений для определения коэффициентов c_n:

$$\begin{aligned}
&1=c_0\cdot 1,\\
&0=\frac{0}{1!}=\frac{1+(-1)}{1!}=c_0\frac{1}{1!}+c_1\cdot 1,\\
&0=\frac{0}{2!}=\frac{[1+(-1)]^2}{2!}=\frac{1}{2!}\Big[1^2+\frac{2!}{1!1!}1(-1)+(-1)^2\Big]=c_0\frac{1}{2!}+c_1\frac{1}{1!}+c_2\cdot 1,\\
&0=\frac{0}{3!}=\frac{[1+(-1)]^3}{3!}=\frac{1}{3!}\Big[1^3+\frac{3!}{2!1!}1^2(-1)+\frac{3!}{1!2!}1(-1)^2+(-1)^3\Big]=\\
&\qquad=c_0\frac{1}{3!}+c_1\frac{1}{2!}+c_2\frac{1}{1!}+c_3\cdot 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&0=\frac{0}{n!}=\frac{[1+(-1)]^n}{n!}=\frac{1}{n!}\Big[1^n+\frac{n!}{(n-1)!1!}1^{n-1}(-1)+\frac{n!}{(n-2)!2!}1^{n-2}(-1)^2+\ldots+\\
&\qquad+\frac{n!}{1!(n-1)!}1(-1)^{n-1}+(-1)^n\Big]=\\
&\qquad=c_0\frac{1}{n!}+c_1\frac{1}{(n-1)!}+c_2\frac{1}{(n-2)!}+\ldots+c_{n-1}\frac{1}{1!}+c_n\cdot 1.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что $c_0 = 1$. Подставив это значение во второе уравнение, получим

$$\frac{1}{1!}+\frac{(-1)}{1!}=\frac{1}{1!}+c_1,$$

откуда $c_1 = (-1)/(1!)$. Подставив это значение в третье уравнение, найдем

$$\frac{1}{2!}+\frac{(-1)}{1!1!}+\frac{(-1)^2}{2!}=\frac{1}{2!}+\frac{(-1)}{1!1!}+c_2,$$

откуда $c_2 = (-1)^2/(2!)$. Продолжив подобным образом, для произвольного c_n найдём

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}+\frac{(-1)}{(n-1)!1!}+\frac{1}{(n-2)!2!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}=\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{n!}+\frac{(-1)^n}{1!(n-1)!}+\frac{1}{2!(n-2)!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!1!}+c_n
\end{aligned}$$

или $c_n = (-1)^n/(n!)$. Следовательно,

$$1\Big/\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Полученный ряд также сходится на всей числовой оси.

Этот же результат можно получить, если деление произвести <углом>, как для многочленов.

Пример 9.5. Найти первые пять членов частного

$$a\Big/\Big[1 - \frac{b}{2a}x + \Big(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{c}{2a}\Big)x^2 + \Big(\frac{3bc}{4a^2} - \frac{d}{2a} - \frac{5b^3}{16a^2}\Big)x^3 + \\ + \Big(\frac{3bd}{4a^2} + \frac{3c^2}{8a^2} - \frac{e}{2a} - \frac{15b^2c}{16a^3} + \frac{35b^4}{128a^4}\Big)x^4 + \ldots\Big]^2.$$

Решение. Обозначив через A_n $(n = \overline{0,\infty})$ коэффициенты степенного ряда, стоящего в знаменателе, найдем прежде всего его квадрат, коэффициенты которого, в свою очередь, обозначим через b_n $(n = \overline{0,\infty})$, т.е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

Тогда, согласно определению (9.6), имеем пять первых членов:

$$\begin{aligned}
&b_0 = A_1A_1 = 1,\\
&b_1 = A_0A_1 + A_1A_0 = -\frac{b}{a},\\
&b_2 = A_0A_2 + A_1A_1 + A_2A_0 = 2A_0A_1 + A_1^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a},\\
&b_3 = A_0A_3 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_3A_0 = 2(A_0A_3 + A_1A_2) = 2\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3},\\
&b_4 = A_0A_4 + A_1A_3 + A_2A_2 + A_3A_1 + A_4A_0 =\\
&\quad = 2A_0A_4 + 2A_1A_3 + A_2^2 = 2\frac{bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3\frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}.
\end{aligned}$$

Теперь найдём частное, коэффициенты которого обозначим через c_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big/\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

Воспользовавшись определением (9.8) и приняв во внимание, что $a_0 = a$, $a_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$, можем записать рекуррентную систему уравнений для нахождения первых пяти коэффициентов c_n:

$$\begin{aligned}
&a = c_0,\\
&0 = c_0\Big(-\frac{b}{a}\Big) + c_1,\\
&0 = c_0\Big(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\Big) + c_1\Big(-\frac{b}{a}\Big) + c_2,
\end{aligned}$$

$$0 = c_0\Big(2\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3}\Big) + c_1\Big(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\Big) + c_2\Big(-\frac{b}{a}\Big) + C_3,$$

$$0 = c_0\Big(2\frac{bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3\frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}\Big) + c_1\Big(2\frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3}\Big) +$$

$$+ c_2\Big(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\Big)c_3\Big(-\frac{b}{a}\Big) + c_4.$$

Из первого уравнения следует, что $c_0 = a$. Подставив это значение во второе уравнение, получим $0 = -b + C_1$, откуда $c_1 = b$. Подставив найденные коэффициенты в третье уравнение, найдем

$$0 = \frac{b^2}{a} - c - \frac{b^2}{a} + c_2.$$

Отсюда $c_2 = c$. Продолжив подобным образом, получим $c_3 = d$, $c_4 = e$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots,$$

что и требовалось найти.

10. Разложение функций в ряд Тейлора

Выше мы установили, что всякий степенной ряд внутри своего интервала сходимости сходится к непрерывной бесконечно дифференцируемой функции. Другими словами, заданный степенной ряд представляет некоторую функцию. Естественно рассмотреть обратной задачу: о разложении заданной функции в степенной ряд. Такая задача эквивалентна вычислению коэффициентов степенного ряда и определению области его сходимости. При этом ряд должен сходиться к заданной функции, которую изначально можно рассматривать как сумму искомого степенного ряда.

10.1. Формула Тейлора

Обычно формулу Тейлора рассматривают в разделе математического анализа, посвященном исследованию функций с помощью формул Коши, Лагранжа и других, или в разделе, посвященном производным высших порядков. Однако, поскольку понятие ряда Тейлора опирается на формулу Тейлора, ниже мы выведем эту формулу в удобном для нас виде.

Напомним, что для непрерывно дифференцируемой на отрезке $[x_0, x]$ функции $f(x)$ справедлива формула Лагранжа, или формула конечного приращения

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0), \tag{10.1}$$

связывающая значения функции на границах отрезка $[x_0, x]$ посредством производной этой функции в некоторой точке $\xi \in]x_0, x[$.

Обобщение формулы Лагранжа приводит к формуле Тейлора, для вывода которой нам потребуется следующая лемма.

Лемма 10.1. *Если функции $F(x)$ и $X(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а на интервале $]a, b[$ обладают производными до $n + 1$ порядка включительно, для которых $X^{(k)}(x) \neq 0$ во всех точках $x \in]a, b[$ и*

$$\lim_{x\to a} X^{(k)}(x) = \lim_{x\to a} F^{(k)}(x) = 0$$

для всех $k = \overline{0, n}$, *то существует такая точка* ξ, *что*

$$\frac{F(b)}{X(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{X^{(n+1)}(\xi)}. \tag{10.2}$$

Доказательство очевидно и следует из цепочки равенств, порождаемых теоремой Коши:

$$\frac{F(b)-F(a)}{X(b)-X(a)} = \frac{F(b)}{X(b)} = \frac{F'(\xi_n)}{X'(\xi_n)} = \frac{F'(\xi_n)-F'(a)}{X'(\xi_n)-X'(a)} =$$
$$= \frac{F''(\xi_{n-1})}{X''(\xi_{n-1})} = \ldots = \frac{F^{(n)}(\xi_1)}{X^{(n)}(\xi_1)} = \frac{F^{(n)}(\xi_1)-F^{(n)}(a)}{X^{(n)}(\xi_1)-X^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{X^{(n+1)}(\xi)},$$

где $a < \xi < \xi_1 < \ldots < \xi_n < b$.

Теорема 10.1. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *а на интервале* $]a, b[$ *обладает производными до* $n+1$ *порядка включительно, для которых существуют пределы*

$$f^{(k)}(a) = \lim_{x\to a} f^{(k)}(x)$$

для всех $k = \overline{0, n}$, *то существует такая точка* $\xi \in]a, b[$, *что*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{10.3}$$

(*Здесь, по определению,* $f^{(0)}(x) = f(x)$, *а* $0! = 1! = 1$).

Доказательство. Построим вспомогательные функции

$$F(x) = f(x) - \sum_{l=0}^{n} f^{(l)}(a)\frac{(x-a)^l}{l!},$$
$$X(x) = (x-a)^{n+1}, \tag{10.4}$$

удовлетворяющие всем условиям леммы 10.1. Действительно, во-первых, для всех $k = \overline{1, n}$

$$X^{(k)}(x) = (n+1)n\cdots(n+1-k)(x-a)^{n+1-k} = \begin{cases} \neq 0, & \text{если } x \in]a, b[; \\ = 0, & \text{если } x = a, \end{cases}$$

причем

$$X^{(n+1)}(x) = (n+1)!. \tag{10.5}$$

Во-вторых, поскольку для всех $k = \overline{1, n}$

$$F^{(k)}(x) = \left[f(x) - \sum_{l=0}^{n} f^{(l)}(a)\frac{(x-a)^l}{l!}\right]^{(k)} =$$
$$= f^{(k)}(x) - \left[f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + \ldots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}\right]^{(k)} =$$
$$= f^{(k)}(x) - \left[f^{(k)}(a)\frac{k!}{k!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{k!}{n!}(x-a)^{n-k}\right],$$

то при $x = a$

$$F^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - f^{(k)}(a) = 0,$$

причем

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x). \tag{10.6}$$

Применив к функциям (10.4) формулу (10.2) леммы 10.1, с учетом (10.5) и (10.6) найдем

$$\frac{f(b) - \sum\limits_{l=0}^{n} f^{(l)}(a)(b-a)^l/(l!)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

откуда и следует формула (10.3).

Заметим, что мы рассмотрели интервал $]a, b[$, аналогично рассматривается интервал $]b, a[$. В общем случае, если зафиксировать одну из границ интервала в точке x_0, а другую считать переменной x, то формулу (10.3) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{10.7}$$

Легко увидеть, что при $n = 0$ из (10.7) следует формула Лагранжа (10.1).

♦ Соотношение (10.7) называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$, полином

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{10.8}$$

– *полиномом Тейлора*, а слагаемое

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{10.9}$$

– *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа.*

Именно в такой форме в силу ее простоты наиболее часто записывают остаточный член $r_n(x, x_0)$. Однако в отдельных случаях эта форма оказывается непригодной для его оценки, и приходится прибегать к другим, менее простым формам, а именно интегральной форме и форме Коши. Заметим, что величину $r_n(x, x_0)$, определяемую формулой (10.9), можно записать в виде

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)^n dt, \tag{10.10}$$

который можно рассматривать как представление интеграла

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt \tag{10.11}$$

с помощью обобщенной теоремы о среднем.

♦ Остаточный член $r_n(x, x_0)$ (10.11) называется *остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме.*

Если теперь к интегралу (10.11) применить обычную теорему о среднем, то остаточный член $r_n(x, x_0)$ можно записать как

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0), \tag{10.12}$$

где ξ – некоторая точка, расположенная между x_0 и x.

♦ Остаточный член $r_n(x, x_0)$ (10.12) называется *остаточным членом формулы Тейлора в форме Коши.*

Если координату точки ξ, расположенной между x_0 и x, представить в виде $\xi = x_0 + (x - x_0)\theta$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, то остаточный член формулы Тейлора $r_n(x, x_0)$ в формах Лагранжа и Коши можно, согласно (10.11) и (10.12), записать как

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + [x - x_0]\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{10.13}$$

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + [x - x_0]\theta)}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}. \tag{10.14}$$

Во избежание недоразумения подчеркнем, что в этих формулах о множителе θ известно лишь только то, что он принимает значения между нулем и единицей и в этих пределах может меняться при изменении x, n и даже просто при переходе от одной формы остаточного члена (10.13) к другой (10.14).

Проще всего формула Тейлора, $P_n(x, x_0)$ и $r_n(x, x_0)$ выглядят, если $x_0 = 0$:

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x), \tag{10.15}$$

где $r_n(x)$ можно записать в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{10.16}$$

или в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^{n+1} x = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1 - \theta)^n x^{n+1}. \tag{10.17}$$

♢ Как уже отмечалось, замена $x = x - x_0$ сводит формулу (10.7) к формуле (10.15), впервые полученной Маклореном и носящей его имя. Очевидно, что обратный переход от (10.15) к (10.7) осуществляется обратной заменой. Поэтому ниже, в зависимости от задачи, мы будем пользоваться как (10.7), так и (10.15). Все сказанное относительно одного разложения легко переносится на другое. Это замечание распространяется также на формулы (10.13), (10.14) и (10.16), (10.17).

♢ Особую ценность формула Тейлора представляет для приближенных вычислений. Она позволяет любую функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 10.1, заменять полиномом Тейлора с ошибкой, определяемой остаточным членом формулы Тейлора.

Для широкого класса функций, например тех, у которых $(n+1)$-я производная (по крайней мере, при изменении аргумента между нулем и x) ограничена по абсолютной величине числом M, погрешность, определяемая остаточным членом, удовлетворяет оценке

$$|r_n(x)| < \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{10.18}$$

Следует отметить, что достаточно громоздкий вывод формулы Тейлора (10.7) можно существенно упростить, если на функцию $f(x)$ наложить более жесткое ограничение – потребовать не только существования $(n + 1)$-й производной $f^{(n+1)}(x)$, но и ее непрерывности. Тогда справедлива теорема

Теорема 10.2. *Если функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для нее справедлива формула Тейлора*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x,x_0) \tag{10.19}$$

с остаточным членом в интегральной форме

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \tag{10.20}$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$f(x) - f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt,$$

которое можно записать как

$$f(x) = f(x_0) + r_0(x,x_0), \tag{10.21}$$

где

$$r_0(x,x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt. \tag{10.22}$$

Правую часть этого равенства проинтегрируем по частям, зафиксировав x и положив $U = f'(t)$, $dV = dt = -d(x-t)$, тогда $dU = f''(t)dt$, $V = -(x-t)$ и, следовательно,

$$r_0(x,x_0) = -f'(x)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = f'(x_0)(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt.$$

Подставив это выражение в (10.21), найдем, что

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r_1(x,x_0), \tag{10.23}$$

где

$$r_1(x,x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt. \tag{10.24}$$

Интеграл в правой части (10.24) также вычислим по частям, зафиксировав x и положив $U = f''(t)$, $dV = (x-t)dt$, тогда $dU = f'''(t)dt$, $V = -(x-t)^2/2$ и, следовательно,

$$r_1(x,x_0) = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2dt =$$

$$= -f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2dt.$$

Подставив это равенство в (10.23), получим формулу

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + r_2(x, x_0),$$

где

$$r_2(x, x_0) = \frac{1}{2!}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt. \tag{10.25}$$

Продолжив интегрирование по частям, мы приходим к формуле Тейлора (10.19)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x, x_0)$$

с остаточным членом в виде (10.20)

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt,$$

что и требовалось доказать.

♢ Применив к этому интегралу теорему о среднем, сразу приходим к (10.12) – остаточному члену в форме Коши. Если же к этому интегралу применить обобщенную теорему о среднем, то получим

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{x_0}^{x} = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

откуда и следует (10.9) – формула остаточного члена в форме Лагранжа.

Пример 10.1. Получить оценку остаточного члена формулы Тейлора (10.18) для элементарных функций $f(x) = e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\mu$ и $\ln(1+x)$.

Решение. 1. $f(x) = e^x$.

Поскольку $(e^x)^{(k)}\big|_{x=0} = 1$, имеем

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + r_n(x). \tag{10.26}$$

Так как остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

то, например, при $x > 0$ погрешность оценивается как

$$|r_n(x)| < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{10.27}$$

В частности, при $|x| \leqslant 1$

$$|r_n(x)| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

2. $f(x) = \sin x$

Поскольку $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + k\pi/2)$, то

$$\begin{gathered} \sin 0 = 0, \qquad \sin^{(2m)} 0 = \sin m\pi = 0, \\ \sin^{(2m-1)} 0 = \sin(m\pi - \pi/2) = (-1)^{m-1}, \quad m = \overline{1, \infty}, \end{gathered} \tag{10.28}$$

и, следовательно,

$$\sin x = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_{2m}(x). \tag{10.29}$$

В этом случае остаточный член равен

$$r_{2m}(x) = \frac{\sin(\theta x + (2m+1)\pi/2)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

с оценкой

$$|r_{2m}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{10.30}$$

3. $f(x) = \cos x$.

Аналогично предыдущему случаю

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2m+1}(x); \tag{10.31}$$

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!};$$

$$|r_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}. \tag{10.32}$$

4. $f(x) = (1+x)^\mu$ (степень $\mu \neq 0, 1, 2, \ldots$, поскольку в этом случае разложение имеет вид бинома Ньютона).

$$\begin{gathered} [(1+x)^\mu]^{(k)} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)(1+x)^{\mu-k}; \\ f(0) = 1, \qquad f^{(k)}(0) = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1); \\ (1+x)^\mu = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!} x^k + r_n(x), \end{gathered} \tag{10.33}$$

где

$$r_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\mu-(n+1)} x^{n+1},$$

$$r_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{n!} (1+\theta x)^{\mu-n-1} (1-\theta)^n x^{n+1}$$

в форме Лагранжа и Коши, соответственно. Как уже отмечалось, для $n = \mu$ остаточный член формулы Тейлора равен нулю, т.е. $r_\mu(x) = 0$.

5. $f(x) = \ln(1+x)$.

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{(1+x)^k},$$

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!;$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + r_n(x). \tag{10.34}$$

Запишем сначала остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

тогда для $0 \leqslant x \leqslant 1$ справедлива оценка

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+n},$$

так как множитель $x/(1+\theta x)$ не превосходит единицы. При $x < 0$ поведение этого множителя не ясно, и можно воспользоваться формой Коши

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n.$$

Тогда

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\Big|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\Big|^n,$$

причем для $-1 < x < 0$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{1-|x|},$$

так как множитель $|1-\theta|/|1+\theta x|$ не будет превосходить единицы, поскольку в этом случае $1+\theta x > 1-\theta$.

Таким образом, для $|x| < 1$ справедлива оценка

$$|r_n(x)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & x > 0; \\ \dfrac{|x|^n}{1-|x|}, & x < 0. \end{cases}$$

$\Diamond$ Помимо рассмотренной выше задачи можно рассмотреть задачу об определении области D, в которой полином Тейлора заменяет исходную функцию при заданном числе слагаемых n с погрешностью r_n.

Например, при $n = 1$ для того, чтобы $\sin x \approx x$ с погрешностью меньше 0,001, согласно (10.30), должно выполняться условие $|x^3/6| < 0,001$ или $|x| < 0,1817$ (что соответствует примерно $10°$). При использовании двучленной формулы ($n = 2$) для того, чтобы $\sin x \approx x - x^3/6$ с той же точностью, необходимо выполнение условия $|x^5|/(120) < 0{,}001$ или $|x| < 0{,}6544$ (что соответствует примерно $37°$) и т.д.

Итак, формула Тейлора допускает аппроксимацию функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с погрешностью, определяемой остаточным членом $r_n(x, x_0)$, который можно представить в различных формах. В тех случаях, когда требуется аппроксимация функции $f(x)$ непосредственно в точке x_0 (так называемая «локальная аппроксимация», когда $x - x_0 \to 0$), то используется еще одна форма остаточного члена – форма Пеано. Если $(n+1)$-я производная $f^{(n+1)}(x)$ ограничена при $x \to x_0$, то остаточный член $r_n(x, x_0)$ при $x \to x_0$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $(x - x_0)^n$ и его можно записать в виде

$$r_n(x, x_0) = o((x - x_0)^n). \tag{10.35}$$

Соответственно,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n). \tag{10.36}$$

Например, для $f(x)=(1+x)^{-1}$ при $n=2$ и $x_0=0$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2),$$

где

$$r_2(x)=o(x^2)=\frac{x^3}{1+x},$$

так как

$$o(x^2)=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2=-\frac{x^3}{1+x}.$$

Для элементарных функций с учетом (10.26)–(10.34) формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеют вид

$$\begin{aligned}
&e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);\\
&\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2});\\
&\cos x=x-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1});\\
&(1+x)^\mu=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),\\
&\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).
\end{aligned} \tag{10.37}$$

10.2. Ряд Тейлора

♦ Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{10.38}$$

вне зависимости от его сходимости и суммы называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

При $x_0=0$ ряд (10.38) называется *рядом Маклорена.*

Для выяснения условий, при которых ряд Тейлора (10.38) сходится, как степенной ряд, и имеет суммой саму функцию $f(x)$, обратимся к формуле Тейлора в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x,x_0). \tag{10.39}$$

Предположим, что для x из интервала $]x_0-R,x_0+R[$ величина остаточного члена $r_n(x,x_0)$ с ростом n стремится к нулю. Это означает, что бесконечный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

сходится и имеет своей суммой число $f(x)$.

Таким образом, значение функции $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{10.40}$$

с коэффициентами

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \tag{10.41}$$

т.е. суммой ряда Тейлора (10.38).

Условия, при которых остаточный член $r_n(x, x_0)$ стремится к нулю с возрастанием номера n, определяет

Теорема 10.3 (достаточное условие). *Если для бесконечно дифференцируемой на интервале $D = \{x,\ |x - x_0| < R\}$ функции $f(x)$ последовательность*

$$\frac{R^n}{n!} \max_{x \in D} |f^{(n)}(x)|, \qquad n = \overline{0, \infty}, \tag{10.42}$$

является ограниченной, то остаточный член формулы Тейлора (10.39) *стремится к нулю во всех $x \in D$.*

Доказательство. По условию теоремы имеем

$$\frac{R^n}{n!} \max_{x \in D} |f^{(n)}(x)| \leqslant M. \tag{10.43}$$

Выпишем остаточный член $r_n(x, x_0)$ в форме Лагранжа

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

и воспользуемся (10.43). Тогда справедлива оценка

$$|r_n(x, x_0)| \leqslant \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} M \frac{(n+1)!}{R^{n+1}} = M \Big(\frac{|x - x_0|}{R} \Big)^{n+1},$$

из которой и следует

$$\lim_{n \to \infty} |r_n(x, x_0)| = M \lim_{n \to \infty} \Big(\frac{|x - x_0|}{R} \Big)^{n+1} = 0,$$

если $x \in |x - x_0| < R$, что и требовалось доказать.

Таким образом, условие (10.43) является достаточным для разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора. Обратим внимание на то, что это разложение является единственным в силу свойства 2 степенных рядов.

10.3. Разложение функций в ряд Тейлора

Для начала получим разложения основных элементарных функций в ряд Тейлора. Для этого удобно пользоваться полученными ранее формулами Тейлора (10.26)–(10.34) и условием (10.43).

а) Показательная функция $f(x) = e^x$

При любом $R > 0$ для всех $x \in]-R, R[$ последовательность (10.42) является ограниченной, так как справедливо неравенство

$$\frac{R^n}{n!}\max_{x\in]-R,R[}|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{R^n e^R}{n!}, \qquad n = \overline{0,\infty},$$

правая часть которого стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Таким образом, условия теоремы о достаточном признаке выполнены. Поэтому функция e^x разлагается в ряд Маклорена на любом конечном интервале, а значит, на всей вещественной оси:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{10.44}$$

б) Гиперболические функции $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f(x) = \operatorname{ch} x$

Из (10.44) получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Отсюда

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{10.45}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{10.46}$$

В силу единственности разложения функции в степенные ряды получим разложение $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ в ряд Тейлора на всей вещественной оси.

в) Тригонометрические функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ Аналогично случаю а) для функции $\sin x$ получим следующее разложение в степенной ряд:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{10.47}$$

Так как последовательность

$$\frac{R^n}{n!}\max_{x\in]-R,R[}|\sin^{(n)} x| \leqslant \frac{R^n}{n!}$$

ограничена для любого R, то остаточный член ряда Тейлора $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и полученный ряд сходится на всей числовой оси ($R = \infty$, $-\infty < x < \infty$).

Воспользовавшись свойством дифференцируемости степенных рядов и единственностью разложения в ряд Тейлора, легко получить разложение функции $\cos x$ в степенной ряд

$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \tag{10.48}$$

не обращаясь к оценке остаточного члена. Область сходимости та же — вся числовая ось.

г) Бином $f(x) = (1+x)^\mu$, где μ — любое действительное число.

Оценка остаточного члена в формуле Тейлора (10.31) приводит к ряду

$$(1+x)^\mu = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^n}{n!}. \qquad (10.49)$$

который сходится при $|x| < 1$. Этот ряд называется *биномиальным*.

Разложение (10.49) получим с помощью так называемого метода неопределенных коэффициентов.

Идея метода состоит в том, что функцию $f(x)$ записывают в виде формального степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

с неизвестными пока коэффициентами c_n. Затем коэффициенты c_n определяются на основании некоторых известных свойств этой функции. После этого доказывается сходимость ряда и определяется его радиус сходимости. В силу единственности разложения степенного ряда полученный ряд и является рядом Тейлора.

Итак, для функции $f(x) = (1+x)^\mu$ полагаем

$$f(x) = (1+x)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad (10.50)$$

Отметим, что эта функция обладает следующим свойством:

$$(1+x)f'(x) = (1+x)[(1+x)^\mu]' = \\ = (1+x)\mu(1+x)^{\mu-1} = \mu(1+x)^\mu = \mu f(x). \qquad (10.51)$$

Подставив (10.50) в правую и левую части этого соотношения, получим их разложения

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [n c_n + (n+1)c_{n+1}] x^n$$

и

$$\mu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu c_n x^n.$$

Из этих разложений в силу (10.51) получим равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n c_n + (n+1)c_{n+1}] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mu c_n x^n.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, придем к системе рекуррентных уравнений

$$c_1 = \mu c_0,$$

$$
\begin{aligned}
&c_1 + 2c_2 = \mu c_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&nc_n + (n+1)c_{n+1} = \mu c_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&c_1 = \mu c_0,\\
&c_2 = \frac{(\mu-1)c_1}{2} = \frac{\mu(\mu-1)c_0}{2!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&c_{n+1} = \frac{(\mu-n)c_n}{n+1} = \frac{(\mu-n)(\mu-n+1)\cdots\mu c_0}{(n+1)!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Но из (10.50) при $x = 0$ находим $c_0 = 1$. Тогда общий член биномиального ряда имеет вид

$$
c_n = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!},
$$

и мы приходим к формуле (10.49).

Признак сходимости Даламбера показывает, что ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. На границах интервала $x = \pm 1$ сходимость определяется значением показателя μ:

1. если $\mu > 0$, то	при $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно;
2. если $-1 < \mu < 0$, то	при $x = 1$ ряд сходится условно, при $x = -1$ ряд расходится,
3. если $\mu \leqslant -1$, то	при $x = \pm 1$ ряд расходится.

Для положительных целых $\mu = m$ разложение (10.49) представляет собой полином порядка m.

Выпишем наиболее употребимые частные формы биномиального ряда:

1. геометрический ряд ($\mu = -1$)

$$
\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n; \tag{10.52}
$$

2. ряд

$$
\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \tag{10.53}
$$

полученный дифференцированием геометрического ($\mu = -2$);

3. ряд ($\mu = -1/2$)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots =\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n;
\end{aligned} \tag{10.54}
$$

4. ряд ($\mu = 1/2$)

$$
\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot x^3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \ldots =
$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1}. \tag{10.55}$$

Последнее разложение получено интегрированием ряда (10.54) в интервале $]0, x[$ ($\mu = -1/2$). Действительно,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\Big(\sqrt{1+x} - 1\Big) = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(x')^n} x^n\right] dx' =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

откуда и следует (10.55).

$\Diamond$ Первые два или три слагаемых этих рядов дают наиболее часто используемые приближенные формулы.

$\Diamond$ Для целых μ ($\mu = n \geqslant 0$) ряд (10.49) вырождается в конечную сумму $n+1$-го слагаемого – бином Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots + x^n.$$

$\Diamond$ Для рационального μ сумма биномиального ряда всегда дает арифметическое значение радикала.

д) Логарифмическая функция $f(x) = \ln(1+x)$, $|x| < 1$

Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

справедливой при $|x| < 1$. Проинтегрировав ее от нуля до x, найдем

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

При $x = -1$ ряд расходится, а при $x = 1$ сходится. В самом деле, при $x = 1$ знакопеременный ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$$

удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Итак, если $-1 < x \leqslant 1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

т.е.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{10.56}$$

е) Обратные тригонометрические функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = \arcsin x$

Вновь применим формулу суммы геометрической прогрессии при $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

Тогда

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots, \qquad |x| < 1.$$

Проинтегрировав от нуля до x, найдем

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Этот ряд сходится при всех значениях x из интервала $-1 < x < 1$. Согласно признаку Лейбница, при $x = \pm 1$ ряд тоже сходится. При $x = 1$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

т.е. сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}. \tag{10.57}$$

Разложив $1/\sqrt{1-x^2}$ по формуле (10.54) и проинтегрировав левую и правую части этого разложения на интервале $[0, x[$, как и в предыдущих случаях, получим

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}. \tag{10.58}$$

♢ Ряды Тейлора (10.44)–(10.58) нередко позволяют получить разложения более сложных функций, не обращаясь к формуле Тейлора для вычисления коэффициентов c_n и оценке остатка r_n. Это мы и проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 10.2. Найти разложение в ряд Тейлора функций

а) $f(x) = \ln(2 - 3x)$ по степеням $(x + 3)$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 7}{(2x+3)(x-2)^2}$ по степеням x;

в) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ по степеням x.

Решение. а) С помощью тождественных преобразований находим

$$\ln(2-3x) = \ln(2 - 3[x+3-3]) = \ln(11 - 3[x+3]) =$$
$$= \ln 11\Big[1 - \frac{3}{11}(x+3)\Big] = \ln 11 + \ln\Big[1 - \frac{3}{11}(x+3)\Big].$$

Воспользуемся разложением (10.56) для $\ln(1+t)$, положив $t = -3(x+3)/11$. Так как разложение (10.56) справедливо на интервале $-1 < t \leqslant 1$, то разложение

$$\ln(2-3x) = \ln 11 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big[-\frac{3}{11}(x+3)\Big]^n = \ln 11 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{3}{11}\Big)^n(x+3)^n$$

справедливо на интервале

$$-1 \leqslant \frac{3}{11}(x+3) < 1,$$

т.е. на интервале $-20/3 \leqslant x < 2/3$.

б) Разложение функции на простейшие дроби дает

$$\frac{x^2-2x+7}{(2x+3)(x-2)^2} = \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Тогда, согласно (10.49),

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+2x/3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{2x}{3}\Big)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{2}{3}\Big)^n x^n$$

для $|2x/3| < 1$ или $|x| < 3/2$ и

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n \tag{10.59}$$

для $|x/2| < 1$ или $|x| < 2$.

Продифференцировав (10.59) или воспользовавшись готовым разложением (10.54), имеем

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}x^n.$$

Таким образом,

$$\frac{x^2-2x+7}{(2x-3)(x-2)^2} = \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{2}{3}\Big)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}}\Big]x^n.$$

Это разложение представляет собой сумму двух рядов с областями сходимости $|x| < 3/2$ и $|x| < 2$, соответственно, и справедливо в области их пересечения, т.е. для $|x| < 3/2$.

в) Для разложения

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

воспользуемся правилом умножения степенных рядов (9.5) и (9.6). Тогда умножение логарифмического ряда

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

на геометрический

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

дает

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \Big(1+\frac{1}{2}\Big)x^2 + \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)x^3 - \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)x^4 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Пример 10.3. Функцию

$$\text{а)}\ \ f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{б)}\ \ f(x)=e^x\sin x$$

разложить в ряд Маклорена.

Решение. Для функции $f(x)$ полагаем

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n, \tag{10.60}$$

где C_n – неизвестные пока коэффициенты ряда Маклорена этой функции. Далее, приняв во внимание, что

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} \tag{10.61}$$

и $f(0)=0$, можем утверждать, что исходная функция является решением задачи Коши

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)-1=0, \qquad f(0)=0. \tag{10.62}$$

Подставив теперь в уравнение (10.62) функцию $f(x)$ в виде степенного ряда (10.60), получим

$$(1-x^2)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\Big)'-x\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n-1=0$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}nC_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}nC_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}-1=0. \tag{10.63}$$

Поскольку каждую сумму из (10.63) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}nC_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}=C_1+2C_2x+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)C_{n+2}x^{n+1},\\
&\sum_{n=0}^{\infty}nC_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n+1},\\
&\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}=C_0x+\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^{n+1},
\end{aligned}$$

то их подстановка в (10.63) дает

$$(C_1-1)+(2C_2-C_0)x+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)C_{n+2}-(n+1)C_n]x^n=0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned}
&C_1-1=0,\\
&2C_2-C_0=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(n+2)C_{n+2}-(n+1)C_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

которая распадается на две независимые системы: для четных $n=2k$, $k=\overline{0,\infty}$

$$\begin{aligned}
&2C_2=C_0,\\
&4C_4=3C_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2(k+1)C_{2(k+1)}=(2k+1)C_{2k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\tag{10.64}$$

и для нечетных $n=2k+1$, $k=\overline{0,\infty}$,

$$\begin{aligned}
&C_1=1,\\
&3C_3=2C_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(2k+1)C_{2k+1}=2kC_{2k-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\tag{10.65}$$

Так как, согласно (10.60), $f(0)=C_0=0$, то все коэффициенты с четными индексами будут равны нулю: $C_{2k}=0$, $k=\overline{0,\infty}$. Для коэффициентов с нечетными индексами из (10.65) найдем

$$C_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}C_{2k-1}=\frac{2k(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)}C_{2k-3}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.\tag{10.66}$$

Подставив (10.66) в (10.60), получим искомое разложение функции в ряд Маклорена

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}x^{2k+1},\tag{10.67}$$

сходимость которого при $|x|<1$ вытекает непосредственно из признака Даламбера (или условий непрерывной дифференцируемости функций).

Для ряда б) воспользуемся формулой Эйлера, а именно

$$e^x\sin x=\operatorname{Im}[e^x(\cos x+i\sin x)]=\operatorname{Im}e^xe^{ix}=\operatorname{Im}e^{(1+i)x}=\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1+i)x]^n}{n!}.$$

Учтя, что по формуле Муавра

$$(1+i)^n=\sqrt{2}^n\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\Big),$$

для разложения будем иметь

$$e^x\sin x=\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^n(\cos n\pi/4+i\sin n\pi/4)x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^n\sin(n\pi/4)x^n}{n!}.$$

Воспользовавшись тригонометрическими соотношениями

$$\sin l\pi=0,\quad \sin\Big(l\pi-\frac{\pi}{2}\Big)=(-1)^{l+1},$$

$$\sin\Big(l\pi-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{l+1},\quad \sin\Big(l\pi-\frac{3\pi}{4}\Big)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{l+1},$$

искомое разложение можно записать в виде

$$e^x\sin x=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2^{2l-1/2}(-1)^{l+1}}{(4l-1)!}x^{4l-1}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2^{2l-1}(-1)^{l+1}}{(4l-2)!}x^{4l-2}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2^{2l-3/2}(-1)^{l+1}}{(4l-3)!}x^{4l-3}.$$

Пример 10.4. Найти суммы рядов из примера 1.8.

Решение. Как уже отмечалось ранее, решения, приведенные в примере 1.7, отличаются некоторой громоздкостью, поскольку они основываются только на определении суммы ряда как предела последовательности частичных сумм. Приведем простые решения, основанные на свойствах степенных рядов.

Для первого ряда, продифференцировав известное разложение, найдем

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)'=\Big(\frac{1}{1-x}\Big)',\quad |x|<1,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Положив $x=q$, придем к полученному в примере 4.15 равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2},\qquad |q|<1.$$

В свою очередь, двукратное дифференцирование того же исходного ряда дает

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big)'=\Big(\frac{1}{(1-x)^2}\Big)'$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Несложное преобразование левой части приведет к следующему равенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-2}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Воспользовавшись суммой, вычисленной для предыдущего ряда, найдем

$$\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n-\frac{1}{x}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^3},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x^2\Big[\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{1}{x(1-x)^2}\Big]=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Положив $x=q$, придем к формуле, найденной в примере 1.8.

Наконец, для третьего ряда воспользуемся разложением экспоненты в ряд Маклорена, т.е.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Положив $x = 1$, имеем

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1,$$

что и следовало получить.

$\Diamond$ Если ни один из указанных способов разложения не применим, то для вычисления коэффициентов c_n необходимо воспользоваться непосредственно формулой Тейлора (10.41). При этом следует помнить, что разложение функции $f(x)$ возможно лишь при бесконечной дифференцируемости этой функции в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Поэтому не существует разложения функций $\ln x$ или $\sqrt[3]{x}$ в ряд по степеням x, поскольку их производные обращаются в бесконечность при $x = 0$.

$\Diamond$ Существуют функции, которые имеют все производные в некоторой точке x_0, но не могут быть разложены в ряд Тейлора в этой точке. Например, для функции $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ в точке $x = 0$ существуют производные любого порядка. Однако, поскольку все $f^{(k)}(x)\big|_{x=0} = 0$ и, соответственно, все $c_k = 0$ для $k = \overline{0, n}$, то остаточный член всегда равен самой функции и, следовательно, нигде (за исключением самой точки $x = 0$) не стремится к нулю с ростом n. Это и означает, что заданная функция не имеет тейлоровского разложения в окрестности точки $x = 0$.

10.4. Некоторые приложения рядов Тейлора

Ряды широко применяются в приближенных вычислениях, в частности для вычисления с заданной точностью значений различных функций и определенных интегралов, для решения обыкновенных и дифференциальных уравнений и т.д.

Использование формулы Тейлора для вычисления значений функции было проиллюстрировано выше. Обычно для этой цели оказывается более удобным использование частичных сумм ряда Тейлора. Это объясняется тем, что ряд, представляющий данную функцию, может быть достаточно просто преобразован в иной, быстрее сходящийся, ряд.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10.5. Вычислить значение числа e с погрешностью $\delta = 0{,}01$.

Решение. Чтобы найти значение числа e, можно воспользоваться как формулой, так и рядом Тейлора. Формула Тейлора (10.26) при $x = 1$ дает следующее представление:

$$e \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

с оценкой остаточного члена $|r_n| = 3/(n+1)! < \delta$, что для $\delta = 0{,}01$ дает $n = 5$.

Если для вычисления e иметь в виду весь ряд Тейлора

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

то ошибка приближенного значения e будет равна остатку ряда

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

оценку которого можно провести следующим образом:

$$\begin{aligned} r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-1/(n+2)} = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда для $\delta = 0{,}01$ находим $n = 4$, поскольку

$$r_4 = \frac{6}{5!\cdot 5} = \frac{6}{120\cdot 5} = \frac{1}{100}.$$

Таким образом, можно утверждать, что сумма

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \approx 2{,}71$$

отличается от числа e не более чем на $\delta = 0{,}01$. С помощью же формулы Тейлора мы можем поручиться за ту же точность только тогда, когда возьмем $n = 5$.

Пример 10.6. Вычислить значение числа $\ln 2$ с погрешностью $\delta = 10^{-5}$.

Решение. Воспользуемся рядом (10.56)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad -1 < x \leqslant 1.$$

При $x = 1$ он дает

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Этот ряд сходится очень медленно. И, как следует из свойств знакочередующихся рядов, для вычисления $\ln 2$ с точностью $\delta = 10^{-5}$ нужно взять $n \geqslant 10^5$, поскольку $|r_n| \leqslant n^{-1} = 10^{-5}$. Другими словами, следует просуммировать не менее 10^5 начальных слагаемых ряда. Такое суммирование «вручную» практически невозможно. Такой же результат дает и формула Тейлора.

Однако для ряда Тейлора существует прием, позволяющий существенно уменьшить число слагаемых путем ускорения сходимости ряда, представляющего число $\ln 2$. Для этого в разложении (10.56) заменим x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

и вычтем полученное разложение из (10.56). Тогда

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1. \tag{10.68}$$

При $x = 1/3$ формула (10.68) дает

$$\ln 2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^{2n+1}}.$$

Оценка k-частичного остатка ряда для k-частичной суммы

$$\ln 2 \approx 2\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^{2n+1}}$$

даёт

$$|r_k| = 2\Big[\frac{1}{2k+3}\frac{1}{3^{2k+3}} + \frac{1}{2k+5}\frac{1}{3^{2k+5}} + \ldots\Big] < \frac{2}{(2k+3)3^{2k+3}}\Big(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots\Big) =$$
$$= \frac{2}{(2k+3)3^{2k+3}}\frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{4(2k+3)3^{2k+1}}.$$

Отсюда можем найти количество слагаемых, при котором ошибка не превзойдет 10^{-5}. Для этого должно быть $4(2k+3)3^{2k+1} \geqslant 10^5$. Легко увидеть, что неравенство будет выполняться уже при $k = 4$, поскольку $4(8+3)3^{8+1} = 8{,}6\cdot 10^5 > 10^5$. Следовательно,

$$\ln 2 \approx 2\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^{2k+1}} = 2\Big[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\Big] \approx 0{,}693144.$$

Таким образом, вместо 10^5 слагаемых ряда (10.56) достаточно взять пять слагаемых ряда (10.68), чтобы найти значение $\ln 2$ с той же точностью $\delta = 10^{-5}$. Другими словами, нам удалось в 20000 раз ускорить сходимость ряда. В силу важности этой процедуры для приближенных вычислений ниже мы опишем ее более строго.

♦ Один ряд называется *быстрее сходящимся*, чем другой, если для достижения одной и той же точности можно ограничиться в первом ряде меньшим числом начальных слагаемых, чем во втором. Само преобразование ряда в более быстро сходящийся называется убыстрением (или улучшением) сходимости ряда.

Мы не рассматриваем общие методы улучшения сходимости (это выходит за рамки данного курса), однако в дополнение к примеру 10.6 рассмотрим еще один.

Пример 10.7. Вычислить $\sqrt{3}$ с точностью до $\delta = 10^{-3}$.

Решение. Воспользуемся биномиальным рядом (10.49). Как следует из (10.49), скорость его сходимости уменьшается с приближением значений $|x|$ к единице. Поэтому преобразование, приводящее к убыстрению сходимости, заключается в выборе $|x|$ таким, чтобы он был как можно меньше единицы, например

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{48}{16}\frac{49}{49}} = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{7}{4}\frac{1}{\sqrt{1+1/48}} = 1{,}75\Big(1+\frac{1}{48}\Big)^{-1/2}.$$

Тогда, согласно (10.54), имеем

$$\sqrt{3} = 1{,}75\frac{1}{\sqrt{1+1/48}} = 1{,}75\Big[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{48} + \frac{3}{8}\frac{1}{48^2} - \ldots\Big].$$

Отсюда видно, что уже третье слагаемое, равное 0,00028, меньше 0,001. Учитывая, что ряд знакочередующийся, можно утверждать, что остаток ряда не будет превышать этого значения. Но тогда достаточно взять два слагаемых ряда, что дает

$$\sqrt{3} \approx 1{,}75\Big(1 - \frac{1}{96}\Big) = 1{,}732.$$

Пример 10.8. Найти разложение функции $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$, если

$$xy - e^x + e^y = 0. \tag{10.69}$$

Решение. При $x = 0$ из уравнения следует, что $y = 0$. Поэтому, используя метод неопределенных коэффициентов, функцию $y(x)$ ищем в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

подстановка которого в уравнение даёт

$$(a_1 - 1)x + \Big(a_2 + \frac{a_1^2}{2!} + a_1 - \frac{1}{2!}\Big)x^2 + \Big(a_3 + a_2 + a_1 a_2 + \frac{a_1^3}{3!} - \frac{1}{3!}\Big)x^3 + \ldots = 0.$$

Этот ряд как степенной сходится абсолютно и равномерно в некоторой окрестности точки $x = 0$ к сумме $y(0) = 0$. Поэтому коэффициенты при всех степенях x должны быть равны нулю:

$$a_1 - 1 = 0;$$
$$a_2 + a_1\Big(1 + \frac{a_1}{2}\Big) - \frac{1}{2} = 0;$$
$$a_3 + a_2(1 + a_1) + \frac{1}{6}(a_1^3 - 1) = 0.$$

Отсюда $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$ и, следовательно, представление

$$y = x - x^2 + 2x^3 + \ldots$$

дает начальный отрезок ряда Тейлора рассматриваемой функции. Это представление в малой окрестности точки $x = 0$ может дать вполне удовлетворительную по точности оценку функции $y = f(x)$, неявно заданную уравнением (10.69).

Пример 10.9. Вычислить с точностью до 0,01

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Решение. Из разложения

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

получим

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

Отсюда

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left\{1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\right\} dx =$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \dots\right)\Big|_0^1 =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} - \dots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \dots$$

Последнее (пятое) слагаемое $1/216 < 0{,}01$. Поскольку ряд — знакочередующийся, то остаток не превосходит первого отброшенного члена. Следовательно, для вычисления данного интеграла с точностью до 0,01 достаточно взять четыре первых слагаемых

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 0{,}74.$$

♢ Как мы знаем, первообразная функции e^{-x^2} не выражается через элементарные функции и непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ невозможно.

Пример 10.10. Решить задачу Коши

$$y'' - xy' + y = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. Решение уравнения ищем в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Согласно начальным условиям, найдем, что $a_0 = a_1 = 0$. Тогда

$$y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k.$$

Подстановка этого разложения в дифференциальное уравнение дает

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)a_k x^{k-2} - k a_k x^k + a_k x^k\right] = 1.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$a_2 = 1/2;$$
$$(k+1)(k+2)a_{n+2} = (k-1)a_n, \qquad n = \overline{1,\infty}.$$

Так как $a_1 = 0$, то $a_{2l-1} = 0$, где $l = \overline{1,\infty}$. Для $n = 2l$ имеем рекуррентную формулу

$$a_{2(l+1)} = \frac{2l-1}{(2l+1)(2l+2)}a_{2l},$$

из которой выводим выражение для коэффициента общего члена ряда. Таким образом, искомое решение имеет вид

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(2l-1)!!}{(2l+2)!}x^{2l+2}.$$

ГЛАВА 3

Ряды Фурье

11. Ряды Фурье

Ряд Тейлора, как было отмечено выше, является мощным инструментом при решении широкого класса задач. Однако, чтобы разложить функцию в ряд Тейлора, требуется ее бесконечная дифференцируемость на некотором промежутке. Более того, для определения коэффициентов ряда Тейлора необходимо знать все производные этой функции в некоторой точке. Это требование затрудняет использование ряда Тейлора в задачах, где эти условия не выполняются. В приложениях часто приходится иметь дело с функциями, имеющими на заданном интервале точки, в которых нарушается непрерывность или непрерывная дифференцируемость функции. Такие функции можно разложить в ряд, принципиально отличающийся от ряда Тейлора. Этот ряд называется рядом Фурье, и к его рассмотрению мы переходим.

11.1. Понятие ряда Фурье

Для лучшего понимания смысла ряда Фурье обратимся к ситуации, возникающей в векторной алгебре. Там вводится понятие координатного базиса, по векторам которого можно разложить любой наперед заданный вектор. Такое разложение позволяет всю информацию об этом векторе свести к набору двух, трех или более чисел, а действия над векторами – к действиям над наборами этих чисел. Другими словами, устанавливается взаимно однозначное соответствие вектора и набора некоторых чисел, называемых его координатами и определяемых проще всего как скалярное произведение рассматриваемого вектора и векторов ортонормированного координатного базиса.

Эта же идея разложения по базису лежит в основе ряда Фурье, где в роли векторов выступают функции, а конечные наборы чисел (координат) заменяются бесконечными. Следуя этой идее, некоторую функцию, заданную на промежутке $[a, b]$, можно представить как разложение по некоторой заданной на этом промежутке системе функций, представляющих собой «функциональный» базис – аналог координатного базиса. Для нахождения «координат» заданной функции в этом базисе следует ввести понятие скалярного произведения функций, с помощью которого можно ввести понятия нормы (аналога модуля вектора) и ортогональности функций. Полное и последовательное рассмотрение ряда Фурье приведено в разделах, посвященных обобщенным и специальным функциям [2, 3]. Здесь мы ограничимся некоторым набором понятий и определений, допускающих изучение теории тригонометрического ряда Фурье в объеме, необходимом для классического гармонического анализа.

♦ Функция $f(x)$ называется *гладкой в промежутке* $[a, b]$, если она в этом промежутке непрерывно дифференцируема. Под значениями $f(a)$ и $f(b)$, $f'(a)$ и $f'(b)$ понимаются односторонние пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$, $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$.

♦ Функция $f(x)$ называется *кусочно-гладкой в промежутке* $[a, b]$, если промежуток можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых $f(x)$ – гладкая функция.

♦ Точка x_0, в которой функция $f(x)$ является гладкой, называется *правильной точкой этой функции*, в противном случае она называется особой.

◊ Очевидно, что, во-первых, если $f(x)$ – кусочно-гладкая, то и $f^2(x)$ – кусочно-гладкая. Во-вторых, кусочно-гладкая в промежутке функция может быть интегрируема в этом промежутке.

♦ Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой в промежутке* $[a, b]$, если существует (в собственном или несобственном смысле) интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

♦ Функция $f(x)$ называется *квадратично интегрируемой в промежутке* $[a, b]$, если существует (в собственном или несобственном смысле) интеграл

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

♦ *Скалярным произведением* двух квадратично интегрируемых в промежутке $[a, b]$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называется число

$$\langle f_1(x)|f_2(x)\rangle = \int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx. \tag{11.1}$$

Из определения (11.1) следует свойство линейности скалярного произведения, т.е.

$$\langle\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)|f_3(x)\rangle = \alpha\langle f_1(x)|f_3(x)\rangle + \beta\langle f_2(x)|f_3(x)\rangle, \tag{11.2}$$

где α и β – некоторые постоянные. Следуя линейной алгебре, с помощью скалярного произведения можно ввести и другие «геометрические» понятия.

♦ Две квадратично интегрируемые на промежутке $[a, b]$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются *ортогональными на этом промежутке*, если

$$\langle f_1(x)|f_2(x)\rangle = \int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx = 0. \tag{11.3}$$

♦ *Нормой* квадратично интегрируемой на промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ называется число

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x)|f(x)\rangle} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx} > 0. \tag{11.4}$$

Норма функции $f(x)$ равна нулю ($\|f(x)\| = 0$), только если $f(x) \equiv 0$ для $x \in [a, b]$.

Пример 11.1. Показать, что функции вида $f_k(x) = x^{2k}$ и $f_n(x) = x^{2n+1}$ при любых целых положительных k и n ортогональны на промежутке $[-1, 1]$ и неортогональны на его половине – промежутке $[0, 1]$. На промежутке ортогональности вычислить нормы этих функций.

Решение. Согласно определению (11.1), вычислим произведение этих функций на промежутке $[-1, 1]$:

$$\langle x^{2k}|x^{2n+1}\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x^{2k}x^{2n+1}dx = \int\limits_{-1}^{1} x^{2(k+n)+1}dx =$$

$$= \frac{x^{2(k+n+1)}}{2(k+n+1)}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2(k+n+1)}(1-1) = 0.$$

Результат очевиден, поскольку вычисляется определенный интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. Из равенства нулю скалярного произведения заданных функций и следует их ортогональность.

Теперь скалярное произведение, согласно определению (11.1), вычислим на промежутке $[0,1]$:

$$\langle x^{2k}|x^{2n+1}\rangle = \int\limits_0^1 x^{2k}x^{2n+1}dx = \int\limits_0^1 x^{2(k+n)+1}dx =$$
$$= \frac{x^{2(k+n+1)}}{2(k+n+1)}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2(k+n+1)} \neq 0.$$

В этом случае скалярное произведение ни при каких k и n не обращается в нуль, что и означает отсутствие ортогональности этих функций в указанном промежутке.

Для вычисления нормы воспользуемся формулой (11.4):

$$\|x^{2k}\| = \sqrt{\langle x^{2k}|x^{2k}\rangle} = \left[\int\limits_{-1}^{1}(x^{2k})^2dx\right]^{1/2} = \left[\frac{x^{4k+1}}{4k+1}\bigg|_{-1}^{1}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{4k+1}},$$
$$\|x^{2n+1}\| = \sqrt{\langle x^{2n+1}|x^{2n+1}\rangle} = \left[\int\limits_{-1}^{1}(x^{2n+1})^2dx\right]^{1/2} = \left[\frac{x^{4k+3}}{4k+3}\bigg|_{-1}^{1}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{4k+3}}.$$

♦ Система функций $\{f_i(x)\}$, $i=\overline{1,\infty}$ (или $i=\overline{1,n}$), называется *ортогональной* на $[a,b]$, если все ее функции попарно ортогональны, т.е.

$$\langle f_i(x)|f_j(x)\rangle = \int\limits_a^b f_i(x)f_j(x)\,dx = \|f_i(x)\|^2\delta_{ij}, \tag{11.5}$$

♦ Ортогональная на $[a,b]$ система функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ортонормированной*, если

$$\|f_n(x)\| = 1. \tag{11.6}$$

Если условие (11.6) не выполнено, то можно перейти к системе функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$v_n(x) = \frac{f_n(x)}{\|f_n(x)\|},$$

заведомо являющейся ортонормированной, согласно (11.5).

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогональная на промежутке $[a,b]$ система функций. Выберем эту систему в качестве ортогонального на $[a,b]$ базиса. Тогда разложение некоторой функции $\varphi(x)$, заданной на $[a,b]$, в этом базисе имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x). \tag{11.7}$$

«Коэффициенты» функции $\varphi(x)$ в базисе $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, т.е. коэффициенты C_n разложения (11.7) можно легко найти, если правую и левую части (11.7) скалярно умножить на $f_m(x)$. Тогда при условии равномерной сходимости ряда (11.7) можно поменять порядок суммирования и интегрирования и получить

$$\langle\varphi(x)|f_m(x)\rangle = \sum_{n=1}^\infty C_n\langle f_n(x)|f_m(x)\rangle = \sum_{n=1}^\infty C_n\|f_m(x)\|^2\delta_{nm} = C_m\|f_m(x)\|^2,$$

откуда

$$C_n = \frac{\langle\varphi(x)|f_n(x)\rangle}{\|f_n(x)\|^2} = \frac{\int\limits_a^b \varphi(x)f_n(x)\,dx}{\int\limits_a^b f_n^2(x)\,dx}. \tag{11.8}$$

♦ Ряд (11.7) с коэффициентами C_n, определяемыми по формулам (11.8), независимо от того, сходится он или нет, называется *рядом* (или *абстрактным рядом*) *Фурье*.

◊ Ниже нам предстоит выяснить, при каких условиях ряд Фурье сходится, причем именно к функции $f(x)$. При исследовании этого вопроса возможны две постановки задачи. Во-первых, для заданного ортогонального базиса $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ описать классы функций $\varphi(x)$, которые могут быть разложены в ряд Фурье в этом базисе. Во-вторых, для заданного класса функций $\varphi(x)$ построить ортогональный базис $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$. Вторая задача чаще всего возникает в математической физике и в силу этого рассматривается в разделах, посвященных специальным функциям и уравнениям математической физики (см. [3]). В этом случае вместо (11.1) вводится более общее определение скалярного произведения:

$$\langle f_1(x)|f_2(x)\rangle_\rho = \int\limits_a^b \rho(x)f_1(x)f_2(x)\,dx$$

с весовой функцией $\rho(x) > 0$ для $x \in]a, b[$ и все остальные величины переопределяются через это скалярное произведение.

Здесь мы рассмотрим первую задачу, выбрав в качестве ортогонального базиса основную тригонометрическую систему функций.

11.2. Тригонометрический ряд Фурье

♦ Система функций

$$\Big\{\cos\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \quad \Big\{\sin\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \qquad n = \overline{0,\infty}, \tag{11.9}$$

называется *основной тригонометрической системой* функций на промежутке $[-l, l]$. Первая в (11.9) подсистема называется *четной*, вторая – *нечетной*.

Учитывая, что $\sin 0 = 0$, а $\cos 0 = 1$, систему (11.9) удобно записывать в виде

$$1, \quad \Big\{\cos\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \quad \Big\{\sin\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \qquad n = \overline{1,\infty}, \tag{11.10}$$

выделив постоянную составляющую. При $l = \pi$ система (11.10) упрощается:

$$1, \quad \{\cos nx\}, \quad \{\sin nx\}, \qquad n = \overline{1,\infty}. \tag{11.11}$$

Пример 11.2. Показать, что

1) основная тригонометрическая система функций (11.10) ортогональна на промежутке $[-l, l]$ и не ортогональна на любой его половине ($[-l, 0]$ или $[0, l]$);
2) любая из подсистем (11.10) ортогональна как на $[-l, l]$, так и на $[0, l]$,

и записать ортонормированную систему функций.

Решение. 1) Следуя определению, находим скалярные произведения

$$\left\langle 1\middle|\cos\frac{\pi nx}{l}\right\rangle = \int\limits_{-l}^{l} 1\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0; \tag{11.12}$$

$$\left\langle 1\middle|\sin\frac{\pi nx}{l}\right\rangle = \int\limits_{-l}^{l} 1\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx = -\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0. \tag{11.13}$$

Отсюда следует, что единица как функция ортогональна системам $\{\sin\pi nx/l\}$, $\{\cos\pi nx/l\}$ для всех $n=\overline{1,\infty}$.

Далее, для $n\neq m$; $n\geqslant 1$, $m\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\left\langle \sin\frac{\pi nx}{l}\middle|\sin\frac{\pi mx}{l}\right\rangle &= \int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi mx}{l}dx = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\Big[\cos\frac{\pi(n-m)x}{l} - \cos\frac{\pi(n+m)x}{l}\Big]dx = \\ &= \frac{l}{2\pi}\Big[\frac{\sin\pi(n-m)x/l}{n-m} - \frac{\sin\pi(n+m)x/l}{n+m}\Big]\Big|_{-l}^{l} = 0; \end{aligned}\tag{11.14}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \cos\frac{\pi nx}{l}\middle|\cos\frac{\pi mx}{l}\right\rangle &= \int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi mx}{l}dx = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\Big[\cos\frac{\pi(n+m)x}{l} + \cos\frac{\pi(n-m)x}{l}\Big]dx = \\ &= \frac{l}{2\pi}\Big[\frac{\sin\pi(n+m)x/l}{n+m} + \frac{\sin\pi(n-m)x/l}{n-m}\Big]\Big|_{-l}^{l} = 0. \end{aligned}\tag{11.15}$$

Из формул (11.12), (11.14) и (11.15) следует попарная ортогональность внутри каждой из подсистем – четной и нечетной в отдельности.

Рассмотрим теперь ортогональность этих подсистем между собой. В этом случае при $n\neq m$; $n\geqslant 1$, $m\geqslant 1$

$$\begin{aligned}&\left\langle \sin\frac{\pi nx}{l}\middle|\cos\frac{\pi mx}{l}\right\rangle = \int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi mx}{l}dx = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\Big[\sin\frac{\pi(n+m)x}{l} - \sin\frac{\pi(n-m)x}{l}\Big]dx = \\ &= -\frac{l}{2\pi}\Big[\frac{\cos\pi(n+m)x/l}{n+m} + \frac{\cos\pi(n-m)x/l}{n-m}\Big]\Big|_{-l}^{l} = 0. \end{aligned}\tag{11.16}$$

При $m = 0$ и $n \geqslant 1$ имеем (11.13).

И, наконец, для всех $n = m = \overline{1, \infty}$:

$$\left\langle \sin\frac{\pi nx}{l} \middle| \cos\frac{\pi nx}{l} \right\rangle = \int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{\pi nx}{l} \cos\frac{\pi nx}{l} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{2\pi nx}{l} dx = -\frac{l}{2\pi} \cos\frac{2\pi nx}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0. \qquad (11.17)$$

Таким образом, все функции основной тригонометрической системы (11.10) попарно ортогональны на промежутке $[-l, l]$, что и требовалось доказать.

Для исследования ортогональности системы, например, на промежутке $[0, l]$ рассмотрим скалярные произведения (11.12)–(11.17), в которых интегрирование ведется по этому промежутку:

$$\left\langle 1 \middle| \cos\frac{\pi nx}{l} \right\rangle = \int\limits_{0}^{l} 1 \cdot \cos\frac{\pi nx}{l} dx = \frac{l}{\pi n} \sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_{0}^{l} = 0; \qquad (11.18)$$

$$\left\langle 1 \middle| \sin\frac{\pi nx}{l} \right\rangle = \int\limits_{0}^{l} 1 \cdot \sin\frac{\pi nx}{l} dx = -\frac{l}{\pi n} \cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_{0}^{l} =$$

$$= -\frac{l}{\pi n}(\cos\pi n - 1) = \frac{l}{\pi n}\big[1 - (-1)^n\big] =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \dfrac{2l}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1; \end{cases} \quad k = \overline{1, \infty}. \qquad (11.19)$$

Из (11.18), (11.19) следует, что единица как функция ортогональна всем функциям системы (11.10), за исключением функций $\sin \pi(2k-1)x/l$. Этого достаточно для утверждения, что система (11.10) не ортогональна на промежутке $[0, l]$, без вычисления других скалярных произведений. Аналогично можно показать неортогональность системы функций (11.10) на промежутке $[-l, 0]$ и, более того, на любом промежутке $[a, b]$, целиком лежащем в $[-l, l]$.

2) Рассмотрим теперь четную и нечетную подсистемы в промежутке $[0, l]$ раздельно.

а) Для четной подсистемы

$$1, \quad \left\{\cos\frac{\pi nx}{l}\right\}, \qquad n = \overline{1, \infty},$$

из (11.18) следует, что единица ортогональна всем функциям $\cos \pi nx/l$. Остается вычислить скалярные произведения

$$\left\langle \cos\frac{\pi nx}{l} \middle| \cos\frac{\pi mx}{l} \right\rangle$$

для $n, m = \overline{1, \infty}$ и $n \neq m$. Из (11.15) имеем

$$\left\langle \cos\frac{\pi nx}{l} \middle| \cos\frac{\pi mx}{l} \right\rangle = \int\limits_{0}^{l} \cos\frac{\pi nx}{l} \cos\frac{\pi mx}{l} dx =$$

$$= \frac{l}{2\pi}\frac{\sin\pi(n+m)x/l}{n+m} + \frac{\sin\pi(n-m)x/l}{n-m}\Big]\Big|_0^l = 0. \qquad (11.20)$$

б) Для нечетной подсистемы

$$\Big\{\sin\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \qquad n=\overline{1,\infty},$$

достаточно рассмотреть скалярные произведения

$$\Big\langle \sin\frac{\pi nx}{l}\Big|\sin\frac{\pi mx}{l}\Big\rangle$$

для $n\neq m$, которые с учетом (11.14) можно записать

$$\Big\langle \sin\frac{\pi nx}{l}\Big|\sin\frac{\pi mx}{l}\Big\rangle = \int\limits_0^l \sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi mx}{l}dx =$$

$$= \frac{l}{2\pi}\Big[\frac{\sin\pi(n-m)x/l}{n-m} - \frac{\sin\pi(n+m)x/l}{n+m}\Big]\Big|_0^l = 0. \qquad (11.21)$$

Таким образом, каждая из подсистем является системой ортогональных функций в промежутке $[0,l]$. Это же справедливо и для промежутка $[-l,0]$.

3) Для перехода к ортонормированной системе (11.10) вычислим соответствующие нормы:

$$\|1\| = \langle 1|1\rangle^{1/2} = \Big(\int\limits_{-l}^{l} dx\Big)^{1/2} = \sqrt{2l};$$

$$\Big\|\cos\frac{\pi nx}{l}\Big\| = \Big\langle \cos\frac{\pi nx}{l}\Big|\cos\frac{\pi mx}{l}\Big\rangle^{1/2} = \Big[\int\limits_{-l}^{l}\cos^2\frac{\pi nx}{l}dx\Big]^{1/2} =$$

$$= \Big[\frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\Big(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\Big)dx\Big]^{1/2} = \sqrt{l}; \qquad (11.22)$$

$$\Big\|\sin\frac{\pi nx}{l}\Big\| = \Big\langle \sin\frac{\pi nx}{l}\Big|\sin\frac{\pi mx}{l}\Big\rangle^{1/2} = \Big[\int\limits_{-l}^{l}\sin^2\frac{\pi nx}{l}dx\Big]^{1/2} =$$

$$= \Big[\frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\Big(1-\cos\frac{2\pi nx}{l}\Big)dx\Big]^{1/2} = \sqrt{l}.$$

С учетом (11.22) запишем ортонормированную систему функций

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}}\Big\{\cos\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}}\Big\{\sin\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \qquad n=\overline{1,\infty}. \qquad (11.23)$$

Пусть теперь $f(x)$ – некоторая интегрируемая на $[-l,l]$ функция. Выберем для удобства следующий ортогональный базис:

$$\frac{1}{2}, \quad \Big\{\cos\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \quad \Big\{\sin\frac{\pi nx}{l}\Big\}, \qquad n=\overline{1,\infty}. \qquad (11.24)$$

Разложение функции $f(x)$ по этому базису будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\Big). \qquad (11.25)$$

Эта формула следует из (11.8), в которой коэффициенты C_n заменены на a_n для четной и b_n для нечетной подсистем базиса (11.24). Сами коэффициенты a_n и b_n находятся по формулам

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = \overline{0,\infty};\\ b_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = \overline{1,\infty}, \end{aligned} \qquad (11.26)$$

которые следуют из (11.8) с учетом (11.22).

♦ Ряд (11.25) с коэффициентами (11.26) называется *тригонометрическим рядом Фурье* функции $f(x)$, а коэффициенты a_n и b_n – *коэффициентами Фурье*.

При $l = \pi$ выражения для ряда Фурье и его коэффициентов упрощаются:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx);\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = \overline{0,\infty};\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = \overline{1,\infty}; \end{aligned} \qquad (11.27)$$

Если функция $f(x)$ – четная, то коэффициенты (11.26) можно представить в виде

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \qquad b_n = 0, \qquad (11.28)$$

и ряд Фурье записывается как

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{l}. \qquad (11.29)$$

Если же функция $f(x)$ – нечетная, то

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \qquad (11.30)$$

и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad (11.31)$$

соответственно. Аналогично упрощаются и формулы (11.27).

◊ Хотя четные или нечетные функции $f(x)$ могут разлагаться на промежутке $]-l, l[$ по одной из подсистем базиса (11.24), произвольная функция может быть разложена только по полной системе (11.24). Это связано с понятием полноты (или замкнутости) ортогонального базиса ряда Фурье, которое мы рассмотрим позже. Здесь мы ограничимся иллюстрацией из векторной алгебры, когда для разложения произвольного трехмерного вектора требуется ортогональный базис $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, хотя вектор, лежащий, например, в плоскости xOy, может быть разложен по двум ортам $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$.

Для исследования сходимости ряд Фурье (11.25), как и любой другой функциональный ряд, представляют в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\Big) = S_k(x) + r_k(x), \quad x \in [-l, l], \tag{11.32}$$

где

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\Big(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\Big); \tag{11.33}$$

$$r_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\Big). \tag{11.34}$$

♦ Величины $S_k(x)$ и $r_k(x)$ называют *частичной суммой* и *остатком* ряда Фурье. Функцию $S_k(x)$ иногда называют тригонометрическим полиномом или полиномом Фурье k-го порядка функции $f(x)$.

Возвращаясь к разложению (11.25), отметим, что его левую часть, т.е. функцию $f(x)$, мы определяли на промежутке $[-l, l]$, тогда как его правая часть, состоящая из тригонометрических функций, вообще говоря, определена на всей числовой оси с общим периодом $T = 2l$. Это несоответствие можно устранить, если либо ограничить изменение x в правой части (11.25) одним периодом $[-l, l]$, либо функцию $f(x)$ продолжить на всю числовую ось с периодом $2l$ соотношением $f(x \pm 2nl) = f(x)$, где n – целое число.

Следует заметить, что если функция $f(x)$ задана на замкнутом промежутке $[-l, l]$, но $f(-l) \neq f(l)$, то функция $f^*(x)$, являющаяся периодическим продолжением $f(x)$, в точках $x = (1 \pm 2n)l$ будет в общем новом пределе неоднозначной. Этого затруднения можно избежать, продолжая не функцию $f(x)$, заданную на $[-l, l]$, а функцию, заданную либо на $]-l, l]$, либо на $[-l, l[$, либо на $]-l, l[$. В результате такого продолжения точки неоднозначности $x = (1 \pm 2n)l$ становятся точками разрыва первого рода функции $f^*(x)$. К этому следует добавить, что периодическое продолжение $f^*(x)$ будет интегрируемо по любому отрезку длины $2l$, причем

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \int\limits_{-l}^{l} f^*(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+2l} f^*(x)dx. \tag{11.35}$$

Последнее соотношение очевидным образом вытекает из геометрического смысла определенного интеграла, примененного к периодической функции, и может быть полезно при вычислении коэффициентов (11.26).

Таким образом, если функция $f(x)$, заданная на $[-l, l]$, разлагается в ряд Фурье, то этот ряд будет сходиться к ее периодическому продолжению на всю числовую ось, т.е. к функции $f^*(x)$. Это оказывается полезным при описании периодических процессов, часто встречающихся в приложениях.

Тригонометрический ряд Фурье мы получили, исходя из абстрактного ряда Фурье (11.7). Такой подход оправдан своей универсальностью и дает возможность выяснить положение тригонометрического ряда Фурье в общей теории рядов Фурье. Однако существует другой подход, приводящий к понятию тригонометрического ряда Фурье, основанный на свойствах тригонометрических функций с разными периодами и их сумм и более соответствующий истории появления рядов Фурье.

Известно, что простейшими периодическими функциями являются функции

$$a\cos(\omega x+\varphi), \qquad a\sin(\omega x+\varphi). \tag{11.36}$$

Если переменная x обозначает время, то эти функции описывают простейшие периодические по времени процессы.

♦ Процессы, описываемые функциями (11.36), называются простыми или *гармоническими колебаниями* с амплитудой a, частотой ω и начальной фазой φ, а их графики – *простыми гармониками.*

Результат суммирования двух гармонических колебаний существенным образом зависит от соотношения их амплитуд и частот. Рассмотрим, например, сумму

$$y(x)=A_1\sin\omega_1x+A_2\sin\omega_2x. \tag{11.37}$$

Начнем со случая, когда $A_1=A_2$. По известной из тригонометрии формуле найдем

$$y(x)=A(x)\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}x, \tag{11.38}$$

где

$$A(x)=2\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}x. \tag{11.39}$$

Явление, описываемое формулой (11.38), можно рассматривать как колебания с частотой $(\omega_1+\omega_2)/2$ или периодом $T_1=4\pi/(\omega_1+\omega_2)$ и переменной амплитудой $A(x)$. Амплитуда $A(x)$ меняется периодически с частотой $(\omega_1-\omega_2)/2$ и периодом $T_2=4\pi/(\omega_1-\omega_2)$ тем большим, чем ближе частоты ω_1 и ω_2. Если отношение T_1/T_2 иррационально, то результирующее движение не будет не только гармоническим, но даже периодическим. Такие функции будут исследованы в разделе, посвященном интегралу Фурье. Если T_1/T_2 – рациональная дробь, то результирующее движение относится к так называемым биениям, которые хорошо известны в акустике. Например, в радиотехнике частоты передаваемых электромагнитных волн во много раз превышают частоты звуковых колебаний. Однако разность $\omega_1-\omega_2$ попадает в область акустических колебаний. Это позволяет с помощью высокочастотных $(\omega_1+\omega_2)/2$ электромагнитных колебаний передавать низкочастотные $(\omega_1-\omega_2)/2$ акустические колебания, амплитуды которых меняются по закону $2\cos(\omega_1-\omega_2)/2$. На рис. 4 изображен график суммы

$$y(x)=\sin7x+\sin9x=2\cos x\sin8x.$$

Очевидно, что при $\omega_1=\omega_2$ из (11.37) мы получаем гармоническое колебание с частотой ω_2 и удвоенной амплитудой, т.е. $y(x)=2\sin\omega_1x$.

Рассмотрим теперь более общий случай (11.37), когда $A_1\neq A_2$.

Как и ранее, для несоизмеримых частот, когда ω_1/ω_2 иррационально, движение непериодично в противоположность случаю, когда $\omega_1=\omega_2$ и $y(x)=(A_1+A_2)\sin\omega_1x$

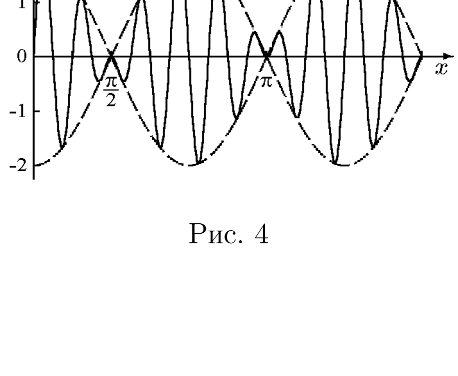


Рис. 4

описывает гармоническое колебание. Отметим, что если складывать гармонические колебания

$$y(x) = A_1 \sin \omega x + A_2 \cos \omega x, \tag{11.40}$$

то результирующее колебание тоже гармоническое. Убедиться в этом можно следующим образом. Представим

$$A_1 = A \cos \varphi, \qquad A_2 = A \sin \varphi, \tag{11.41}$$

тогда

$$y(x) = A(\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi) = A \sin(\omega x + \varphi). \tag{11.42}$$

Зависимость (11.42) определяет гармоническое колебания с амплитудой A, частотой ω и сдвигом фазы φ. Значения A и φ достаточно просто находятся из (11.41):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A}. \tag{11.43}$$

Перейдем теперь к случаю соизмеримых частот. Пусть $\omega_1 = n_1\omega$ и $\omega_2 = n_2\omega$, где n_1, n_2 – целые числа. Сложение гармонических колебаний (11.42) в этом случае

$$y(x) = A_1 \sin(n_1\omega x + \varphi_1) + A_2 \sin(n_2\omega x + \varphi_2) \tag{11.44}$$

приводит к движению, которое, не будучи уже гармоническим, является, однако, периодическим с периодом $T = 2\pi/\omega$. Действительно, сумма (11.44) не изменит своего значения при прибавлении к любому значению x величины $T = 2\pi/\omega$. Так как число $2\pi/\omega$ является наименьшим положительным числом, обладающим этим свойством, то оно служит периодом суммарного колебания.

♦ Колебание, описываемое формулой (11.44), называется *сложным гармоническим колебанием*, а его график – *сложной гармоникой*.

Было замечено, что суммы простых гармоник с соизмеримыми частотами $\omega_n = n\omega$, амплитудами A_n и начальными фазами φ_n

$$y(x) = \sum_{n=0}^{k} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) \tag{11.45}$$

при варьировании A_n, $\omega_n = n\omega$ и φ_n могут описывать самые разнообразные сложные периодические процессы.

В связи с этим, естественно, возник вопрос: нельзя ли, напротив, любое периодическое движение представить как сложную гармонику, т.е. сумму простых гармоник. В математическом плане это означает – возможно ли соответствующим подбором A_n, $\omega_n = n\omega$ и φ_n заранее заданную периодическую функцию представить в виде суммы простых гармоник.

Оказалось, что если привлечь бесконечно много простых гармоник, т.е. если конечную сумму (11.45) заменить рядом

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n), \tag{11.46}$$

то, вообще говоря, любую функцию $y(x)$ с периодом $T = 2\pi/\omega$, принадлежащую весьма широкому классу функций, можно разложить на простейшие гармоники, т.е. в ряд (11.46). Если воспользоваться тригонометрической формулой (11.42) и обозначить

$$A_n \cos \varphi_n = a_n, \qquad A_n \sin \varphi_n = b_n, \tag{11.47}$$

то ряд простых гармоник (11.46) обратится в более привычный тригонометрический ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x, \tag{11.48}$$

который при $\omega = \pi/l$ совпадает с введенным ранее из других соображений тригонометрическим рядом Фурье (11.25). Коэффициенты этого ряда можно найти методом Эйлера–Фурье, смысл которого заключается в непосредственном использовании формул (11.12)–(11.17) без всякого упоминания об ортогональности функций. В результате, естественно, получим выражения (11.27).

♦ Простая гармоника с $n = 1$ в разложении (11.46) или (11.48) называется *основным колебанием*, или *основной гармоникой*, функции $f(x)$. Гармоника с $n = 2$ называется *первым гармоническим обертоном*, или *первой гармоникой*. Гармоники с $n \geqslant 3$ называются *обертонами*, или *гармониками, высших порядков*.

♦ Процесс разложения периодической функции $f(x)$ на гармоники называется *гармоническим анализом*.

Цель гармонического анализа состоит в отыскании величин a_n и b_n для (11.48) или A_n, ω_n, φ_n для (11.46), которые связаны равенствами (11.47).

♦ Счетные множества всех A_n, ω_n, φ_n называются *амплитудным*, *частотным* и *фазовым* спектрами функции $f(x)$, соответственно.

Таким образом, задача гармонического анализа состоит в отыскании указанных спектров, поэтому иногда гармонический анализ называют спектральным. Так как функция $f(x)$ однозначно определяет спектры A_n, ω_n, φ_n (что будет показано ниже), то и, наоборот, по заданному спектру с помощью ряда Фурье однозначно восстанавливается функция $f(x)$.

Приведем два простых примера, иллюстрирующих разложение функции в ряд Фурье. Другие примеры мы рассмотрим после выяснения условий сходимости ряда Фурье.

Пример 11.3. Разложить функцию $f(x) = x$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, в ряд Фурье.

Решение. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx.$$

Проинтегрируем по частям, положив $U = x$, $dU = dx$, $dV = \cos nx\,dx$, $V = (\sin nx)/n$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\Big) = 0,$$

что и следовало ожидать в силу нечетности функции $f(x) = x$. Далее

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx.$$

Снова проинтегрируем по частям, положив $U = x$, $dU = dx$, $dV = \sin nx\,dx$, $V = (\cos nx)/n$. Тогда

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(-2\frac{\pi\cos n\pi}{n}\Big) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Окончательно запишем

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad x\in]-\pi,\pi[. \tag{11.49}$$

Если полученный ряд Фурье (11.49) с промежутка $]-\pi,\pi[$ распространить на всю числовую ось (рис. 5), то его сумма будет сходиться к периодическому продолжению $f^*(x)$ так, что

$$f^*(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \tag{11.50}$$
$$x\in\mathbb{R}, \quad x\neq(1+2k)\pi, \quad k=\overline{-\infty,\infty}.$$

На рис. 5 изображены функция $f(x)=x$, для которой разложение (11.49) справедливо только в промежутке $]-\pi,\pi[$, и функция $f^*(x)$, являющаяся периодическим продолжением $f(x)$, которую ряд Фурье (11.50) представляет на всей числовой оси за исключением точек $x=(1+2k)\pi$, $k=\overline{-\infty,\infty}$.

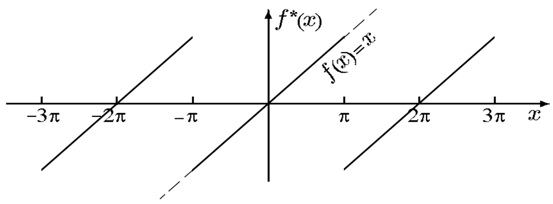


Рис. 5

Заметим, что обе суммы – и (11.49), и (11.50) – на концах промежутка, а также во всех точках $x=(1+2k)\pi$ обращаются в нуль, не представляя ни $f(x)=x$, ни $f^*(x)$. Такое поведение сумм (11.49) и (11.50) будет объяснено позднее при выяснении условий сходимости ряда Фурье.

Пример 11.4. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in]-\pi,0[; \\ 1, & x\in]0,\pi[, \end{cases} \tag{11.51}$$

разложить в ряд Фурье в промежутке $]-\pi,\pi[$.

Решение. Согласно определению (11.27), найдем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} dx = 1,$$

для $n\geqslant 1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

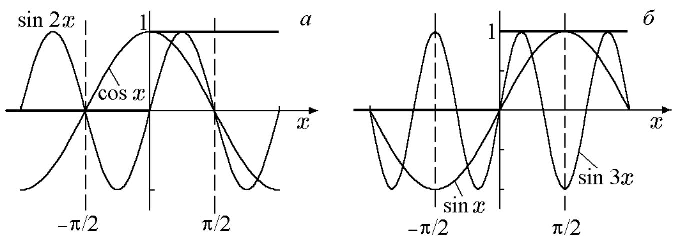


Рис. 6

$$= -\frac{1}{\pi n}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{\pi n}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{2}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x. \tag{11.52}$$

Формула (11.52), как указывалось выше, допускает две интерпретации.

Во-первых, если основную тригонометрическую систему (11.24) рассматривать как ортогональный функциональный базис в пространстве квадратично интегрируемых на $[-\pi, \pi]$ функций, то коэффициенты Фурье a_n, b_n являются «координатами» функции (11.51) в этом базисе, т.е. характеризуют «проекции» функции (11.51) на орты тригонометрического базиса (11.23). Этим легко объясняется отсутствие в сумме (11.52) слагаемых, содержащих $\cos nx$ и $\sin 2nx$. Действительно, функция (11.51) (рис. 6,*а*) на полупериоде $]-\pi, 0[$ обладает симметрией относительно прямой $x = -\pi/2$, а на полупериоде $]0, \pi[$ – относительно прямой $x = \pi/2$, тогда как функции $\cos nx$ и $\sin 2nx$ на тех же полупериодах обладают симметрией относительно точек $x = \pm\pi/2$ (но не прямых) и их присутствие нарушало бы симметрию относительно прямых $x = \pm\pi/2$. Поэтому «проекции» разлагаемой функции (11.51) на эти орты должны быть равны (и равны, согласно вычислениям) нулю, чем, подчеркнем еще раз, и объясняется их отсутствие в сумме (11.52). Легко увидеть, что оставшиеся в сумме (11.52) слагаемые $\sin(2k-1)x$ на каждом полупериоде симметричны относительно прямых $x = \pm\pi/2$ соответственно (рис. 6,*б*) и, кроме того, с ростом k соответствующие «проекции» $2/\pi(2k-1)$ монотонно убывают, стремясь к нулю при $k \to \infty$.

Во-вторых, если функцию (11.51) рассматривать как сумму гармонических колебаний, то видно, что основная гармоника

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x$$

задает качественное поведение функции (11.51) (рис. 7,*а*), а гармоники (или обертоны) высших порядков с убывающими амплитудами $2/\pi(2k-1)$ корректируют ее поведение, придавая ей форму графика функции (11.51) (рис. 7,*б*,*в*).

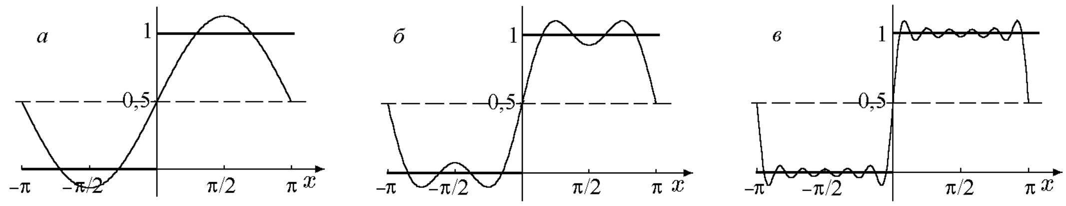


Рис. 7

Поведение суммы (11.52) в точках $-\pi, 0, \pi$, в которых она равна $1/2$, будет объяснено позднее.

В заключение, возвращаясь к основным формулам для ряда Фурье, заметим, что помимо (11.46) и (11.48) можно привести еще одну форму его записи, если воспользоваться формулами Эйлера для тригонометрических функций.

12. Комплексная форма рядов Фурье

Рассмотрим функцию $f(x)$ с периодом $2l$ и связанный с ней ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{12.1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt.$$

Воспользуемся формулами Эйлера

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi nx}{l} &= \frac{1}{2}\big(e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}\big), \\ \sin\frac{\pi nx}{l} &= \frac{i}{2}\big(e^{-in\pi x/l} - e^{in\pi x/l}\big). \end{aligned} \tag{12.2}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/l} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/l}\Big]. \tag{12.3}$$

Последнее соотношение можно записать как

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \tag{12.4}$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad c_{-n} = c_n^*, \end{aligned} \tag{12.5}$$

а с учетом (11.26)

$$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\pi nx/l}dx. \tag{12.6}$$

♦ Функциональный ряд (12.4) с коэффициентами (12.5) или (12.6) называют *рядом Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме.*

Пример 12.1. Функцию $f(x) = x$ из примера 11.3 разложить в ряд Фурье в комплексной форме.

Решение. Согласно определению (12.6), для $n = 0$ найдём

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{x^2}{4\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Для $n \neq 0$ интегрирование по частям с учётом формул Эйлера даёт

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{x}{in}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big\{-\frac{\pi}{in}[e^{-in\pi} + e^{in\pi}] + \frac{1}{n^2}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}\Big\} = \frac{i}{n}\cos n\pi + \frac{1}{2\pi n^2}(e^{-in\pi} - e^{in\pi}) =$$

$$= \frac{i}{n}(-1)^n - \frac{i}{\pi n^2}\sin n\pi = (-1)^n\frac{i}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$x = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n i}{n}e^{-inx}, \qquad x \in]-\pi,\pi[. \tag{12.7}$$

Разложение в форме (12.7) можно найти, исходя из результатов примера 11.3, дающего

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

и используя соотношения (12.5). Тогда

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = -\frac{i}{2}(-1)^{n+1}\frac{2}{n} = (-1)^n\frac{i}{n}, \quad c_{-n} = c_n^*,$$

что соответствует значениям коэффициентов, найденных непосредственным вычислением интегралов (12.6).

Напротив, из комплексной формы ряда Фурье (12.7) легко получить разложение в тригонометрической форме (11.49), если воспользоваться формулами Эйлера (12.3). Действительно, из (12.7) имеем

$$x = i\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-inx}\Big], \quad x \in]-\pi,\pi[.$$

Поменяв во второй сумме знак индекса суммирования на противоположный ($n \to -n$), получим выражение

$$x = i\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-inx} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}\Big] = i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(e^{-inx} - e^{inx}) =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad x \in]-\pi,\pi[,$$

совпадающее с (11.49).

Пример 12.2. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x < 0; \\ 1, & 0 < x < l \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье в комплексной форме.

Решение. Согласно (12.6), для $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{2l}\int\limits_{0}^{l} dx = \frac{1}{2}$$

и для $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-in\pi x/l}dx = \frac{1}{2l}\int\limits_{0}^{l} e^{-in\pi x/l}dx =$$

$$= -\frac{1}{2i\pi n}(e^{-in\pi} - 1) = \frac{i}{2\pi n}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k = \overline{1, \infty}, \\ -\dfrac{i}{\pi(2k-1)}, & k = \overline{-\infty, \infty}. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k-1}e^{i(2k-1)\pi x/l}. \tag{12.8}$$

Как и в предыдущем примере, разложение (12.8) при $l = \pi$ можно получить, исходя из результатов примера 11.4, дающего

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, b_{2k} = 0, \quad b_{2k-1} = \frac{2}{\pi(2k-1)}, \quad k = \overline{-\infty, \infty},$$

и используя соотношения (12.5). Тогда

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}, \quad c_{2k} = \frac{1}{2}(a_{2k} - ib_{2k}) = 0,$$
$$c_{2k-1} = \frac{1}{2}(a_{2k-1} - ib_{2k-1}) = -\frac{i}{\pi(2k-1)}, \quad c_{-(2k-1)} = c^*_{2k-1},$$

что соответствует значениям коэффициентов, найденных непосредственным вычислением интегралов (12.6).

В качестве проверки, напротив, получим из комплексной формы (12.8) действительную форму (11.52). Для этого запишем (12.8) в виде

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}e^{i(2k-1)x} + \sum_{k=0}^{-\infty}\frac{1}{2k-1}e^{i(2k-1)x}\Big]. \tag{12.9}$$

Поменяв знак индекса суммирования ($k \to -l$) во второй сумме, получим

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}e^{i(2k-1)x} - \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{-i(2l+1)x}\Big].$$

Если принять во внимание, что со сдвигом индекса суммирования на единицу ($l = m - 1$) вторую сумму можно записать как

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} e^{-i(2l+1)x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-i(2m-1)x},$$

то разложение (12.9) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} e^{-i(2l+1)x} \right] =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x,$$

совпадающий с (11.52).

13. Основная лемма гармонического анализа и принцип локализации

Перейдем теперь к более детальному изучению поведения тригонометрического ряда Фурье (11.25). Исследование сходимости этого ряда, как и любого функционального ряда, начнем с рассмотрения его k-частичной суммы или тригонометрического полинома k-го порядка (11.33).

Лемма 13.1. *Частичную сумму ряда Фурье* (11.25) *для* $2l$*-периодической функции можно представить в виде*

$$S_k = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \frac{\sin[(2k+1)\pi(t-x)/(2l)]}{2\sin[\pi(t-x)/(2l)]} dt, \tag{13.1}$$

Интеграл (13.1) *называется интегралом Дирихле и широко используется в теории гармонического анализа.*

Доказательство. Подставив в (11.33) коэффициенты Фурье (11.26) в явном виде, получим

$$S_k(x) = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{n=1}^{k} \left\{ \left[\frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{\pi n t}{l} dt \right] \cos\frac{\pi n x}{l} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{\pi n t}{l} dt \right] \sin\frac{\pi n x}{l} \right\}. \tag{13.2}$$

Для конечной суммы операции суммирования и интегрирования можно поменять местами. Если при этом учесть известное тригонометрическое соотношение

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \tag{13.3}$$

то частичную сумму $S_k(x)$ (13.2) можно записать в виде

$$S_k(x) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} dt\, f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left[\cos\frac{\pi nt}{l}\cos\frac{\pi nx}{l} + \sin\frac{\pi nt}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\right]dt. \qquad (13.4)$$

Сумму в последнем интеграле вычислим следующим образом. Обозначим $\pi(t-x)/l = \alpha$ и воспользуемся формулой Эйлера, тогда

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n\alpha = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \ldots + \cos k\alpha = \frac{1}{2} + \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} + \ldots + \frac{e^{ik\alpha}+e^{-ik\alpha}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\big[e^{-ik\alpha} + e^{-i(k-1)\alpha} + \ldots + e^{-i\alpha} + \ldots + e^{ik\alpha}\big].$$

По формуле суммы геометрической прогрессии с первым членом $e^{-ik\alpha}$, последним $e^{ik\alpha}$ и знаменателем $e^{i\alpha}$ находим

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n\alpha = \frac{1}{2}\frac{e^{ik\alpha}e^{i\alpha} - e^{-ik\alpha}}{e^{i\alpha}-1}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $e^{-i\alpha/2}$, получим

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n\alpha = \frac{1}{2}\frac{e^{i(k+1/2)\alpha} - e^{-i(k+1/2)\alpha}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}} = \frac{\sin(k+1/2)\alpha}{2\sin\alpha/2}. \qquad (13.5)$$

Для удобства в интеграле (13.1) проведем замену

$$t - x = \tau \qquad (13.6)$$

и воспользуемся формулой (11.35), тогда

$$S_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l-x}^{l-x} f(\tau+x)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/(2l)]}{\sin[\pi\tau/(2l)]}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(\tau+x)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/(2l)]}{\sin[\pi\tau/(2l)]}d\tau. \qquad (13.7)$$

С помощью (13.5) k-частичную сумму ряда Фурье (13.4) можно представить в виде интеграла (13.1). Таким образом, утверждение доказано.

◊ Приведем одно частное значение интеграла Дирихле (13.1) при $f(t) \equiv 1$. В силу (13.4) и (13.7) имеем

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\right]dt = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/(2l)]}{\sin[\pi\tau/(2l)]}d\tau.$$

Интеграл в левой части этого равенства равен единице, поскольку

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{k}\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt=\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{k}\left[\cos\frac{\pi nx}{l}\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{\pi nt}{l}dt+\sin\frac{\pi nx}{l}\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nt}{l}dt\right]=0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/(2l)]}{\sin[\pi\tau/(2l)]}d\tau=1.$$

Учитывая четность подынтегральной функции, находим

$$\int\limits_{0}^{l}\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/(2l)]}{\sin[\pi\tau/(2l)]}d\tau=l. \tag{13.8}$$

Итак, k-частичную сумму ряда Фурье мы представили в виде интеграла Дирихле (13.7), содержащего число k в качестве параметра. Далее нам предстоит исследовать поведение этого интеграла при $k\to\infty$. Особенность интеграла Дирихле заключается в том, что для него не может быть проведен предельный переход $k\to\infty$ под знаком интеграла, поскольку подынтегральное выражение при $k\to\infty$ не имеет предела. Частичный выход из создавшегося затруднения дает

Лемма 13.2 (основная лемма гармонического анализа). *Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема в некотором промежутке $[a,b]$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{a}^{b}f(t)e^{i\lambda t}dt=0. \tag{13.9}$$

Доказательство. Согласно формуле Эйлера, достаточно показать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{a}^{b}f(t)\sin\lambda t\,dt=\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{a}^{b}f(t)\cos\lambda t\,dt=0. \tag{13.10}$$

Рассмотрим сначала первый интеграл в этой формуле. Предварительно заметим, что если функцию $f(t)$ подчинить более жесткому требованию – существования для нее кусочно-непрерывной производной $f'(t)$, то справедливость (13.10) элементарным образом вытекает из формулы интегрирования по частям

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{a}^{b}f(t)\sin\lambda t\,dt=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\left[f(a)\cos\lambda a-f(b)\cos\lambda b+\int\limits_{a}^{b}f'(t)\cos\lambda t\,dt\right]=0.$$

Возвращаясь к заданному условию леммы, напомним известную оценку

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\sin\lambda t\,dt\right|=\left|\frac{\cos\lambda t_2-\cos\lambda t_1}{\lambda}\right|\leqslant\frac{2}{\lambda} \tag{13.11}$$

на произвольном конечном промежутке $[t_1,t_2]$.

Далее разобьем промежуток $[a, b]$ точками t_i

$$a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b, \tag{13.12}$$

местоположение которых определим ниже.

Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$ в собственном смысле, то в i-ом промежутке ее наименьшее значение обозначим через m_i, а ее максимальное изменение на этом промежутке – через Δ_i. Тогда

$$\Delta_i \geqslant f(t) - m_i. \tag{13.13}$$

В соответствии с разбиением (13.12) исходный интеграл (13.10) представим в виде

$$\int\limits_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt = \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\sin\lambda t\,dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t) - m_i]\sin\lambda t\,dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} m_i\sin\lambda t\,dt,$$

откуда с учетом оценок (13.11) и (13.13) можем получить суммарную оценку

$$\Big|\int\limits_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} |[f(t) - m_i]\sin\lambda t|\,dt + \sum_{i=1}^{n-1}\Big|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} m_i\sin\lambda t\,dt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\Delta_i\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} dt + \sum_{i=1}^{n-1}|m_i|\Big|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\sin\lambda t\,dt\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\Delta_i(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{|m_i|}{2\lambda}. \tag{13.14}$$

Теперь можно уточнить характер разбиения (13.12).

В силу интегрируемости функции $f(t)$ разбиение всегда можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_i(t_{i+1} - t_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

где ε – произвольная положительная сколь угодно малая величина. Принимая во внимание, что проведенное разбиение однозначно определило величины m_i, параметр λ, в свою очередь, можно выбрать таким, что

$$\lambda \geqslant \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n-1}|m_i|.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{|m_i|}{2\lambda} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

и в результате

$$\Big|\int\limits_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда и следует (13.10).

Теперь, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$ в несобственном смысле, то достаточно ограничиться предположением, что особой точкой является точка $x = a$ или $x = b$. В противном случае $[a, b]$ всегда можно разбить на промежутки, отвечающие данному предположению. Выберем для определенности особой точкой точку $x = a$. Тогда исходный интеграл (13.10), согласно разбиению (13.12), представим в виде

$$\int\limits_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt = \int\limits_a^{x_1} f(t)\sin\lambda t\,dt + \int\limits_{x_1}^b f(t)\sin\lambda t\,dt. \tag{13.15}$$

Первый интеграл в (13.15) независимо от λ имеет оценку

$$\Big|\int\limits_a^{x_1} f(t)\sin\lambda t\,dt\Big| \leqslant \int\limits_a^{x_1} |f(t)|\,dt. \tag{13.16}$$

Второй интеграл на промежутке $[x_1, b]$ является собственным и по уже доказанному удовлетворяет (13.10). Независимость оценки (13.16) от λ и абсолютная интегрируемость функции $f(t)$ позволяют выбрать x_1 так, чтобы

$$\Big|\int\limits_a^{x_1} f(t)\sin\lambda t\,dt\Big| \leqslant \int\limits_a^{x_1} |f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon,$$

где ε положительная сколь угодно малая величина. Следовательно, и в этом случае убеждаемся в справедливости первого соотношения в (13.10).

Аналогично доказывается второе соотношение.

Применение леммы 13.2 к формулам (11.26) и (12.5) для коэффициентов Фурье приводит к следующему утверждению.

Теорема 13.1 (Римана). *Коэффициенты Фурье* (11.26) *и* (12.5) *абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \to \infty$, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{i\pi nx/l}dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0.$$

Основная лемма гармонического анализа позволяет также сформулировать следующее утверждение.

Теорема 13.2 (принцип локализации). *Сходимость ряда Фурье в данной точке x определяется поведением функции $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности этой точки.*

Доказательство. Обозначив

$$\frac{f(x+\tau)}{2l\sin[\pi\tau/(2l)]} = F(x,\tau), \tag{13.17}$$

$$\frac{(2k+1)\pi}{2l} = \lambda \tag{13.18}$$

и выбрав произвольно число $0 < \delta < l$, разобьем интеграл (13.7) на три:

$$S_k(x) = \int\limits_{-l}^{l} F(x,\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau = \int\limits_{-l}^{-\delta} F(x,\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_{-\delta}^{\delta} F(x,\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau + \int\limits_{\delta}^{l} F(x,\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau. \qquad (13.19)$$

При таком разбиении точка $\tau = 0$ содержится только в области интегрирования второго интеграла, а это значит, что, согласно (13.17), функция $F(x,\tau)$ абсолютно интегрируема в промежутках $[-l,-\delta]$ и $[\delta,l]$, в которых $\sin(\pi\tau/2l)$ не обращается в нуль.

Если в (13.19) перейти к пределу при $k \to \infty$, то в силу (13.18) $\lambda \to \infty$ и тогда

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-l}^{-\delta} F(x,\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau +$$
$$+ \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} F(x,\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau + \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{\delta}^{l} F(x,\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau. \qquad (13.20)$$

Согласно основной лемме, первый и последний пределы в (13.20) равны нулю, и тогда

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} F(x,\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2l} \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau. \qquad (13.21)$$

Таким образом, существование предела для k-й частичной суммы ряда Фурье $S_k(x)$ и его значение полностью определяются пределом интеграла (13.21). Но в этот интеграл входят лишь значения функции $f(x)$, отвечающие изменению аргумента в промежутке от $x-\delta$ до $x+\delta$, что в силу произвольной малости δ и доказывает справедливость теоремы.

$\Diamond$ Исходя из принципа локализации, можно утверждать, что если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают в некоторой δ-окрестности точки x, то соответствующие этим функциям ряды Фурье ведут себя в этой точке совершенно одинаково: либо оба расходятся, либо оба сходятся, причем к одной и той же сумме. Особенность этого утверждения состоит еще и в том, что два спектра коэффициентов рядов Фурье $\{a_n, b_n\}_1$ и $\{a_n, b_n\}_2$, определяемых поведением функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на всем промежутке $[-l,l]$, могут оказаться совершенно различными.

14. Ряды Фурье кусочно-гладких функций

Как мы уже установили, функция $f(x)$, заданная на промежутке $[-l,l]$ и периодически продолженная на всю числовую ось, может быть разложена в ряд

Фурье (11.25). Как следует из принципа локализации, сходимость его в точке x обусловлена существованием предела (13.21) в сколь угодно малой окрестности этой точки. Поэтому условия сходимости ряда Фурье, вообще говоря, определяются условиями существования предела (13.21). Поскольку общая формулировка необходимых и достаточных условий его сходимости до сих пор не установлена, мы рассмотрим два типа частных условий, в общем случае не вытекающих друг из друга и охватывающих различные классы функций, разлагаемые в ряд Фурье. Одно из таких условий сходимости этого ряда дает следующая

Теорема 14.1. *Если функция $f(x)$ периода $2l$ – кусочно-гладкая в промежутке $[-l, l]$, то ее ряд Фурье сходится к этой функции в точках её непрерывности и к $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ в каждой точке разрыва первого рода.*

Доказательство. Для общности изложения будем исходить не из предела (13.21), хотя это сократило бы доказательство, а обратимся к k-й частичной сумме ряда Фурье (11.25) функции $f(x)$ в виде интеграла Дирихле (13.7)

$$S_k(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau.$$

Рассмотрим предел этого равенства при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau. \tag{14.1}$$

Промежуток интегрирования $[-l, l]$ разобьем на два: $[-l, 0]$ и $[0, l]$.

На промежутке $[0, l]$ введем вспомогательную функцию

$$\varphi(\tau) = \frac{\pi}{2l}\frac{f(x+\tau)-f(x+0)}{\sin(\pi\tau/2l)}. \tag{14.2}$$

Эта функция построена так, что несмотря на наличие знаменателя, обращающегося в нуль в точке $\tau = 0$, $\varphi(\tau)$ является кусочно-непрерывной на замкнутом интервале $[0, l]$. Действительно, на полуоткрытом промежутке $]0, l]$ это очевидным образом вытекает из требований теоремы, предъявляемых к самой функции $f(x)$. Правосторонняя же непрерывность $\varphi(\tau)$ при $\tau \to +0$ вытекает из требований, предъявляемых к производной $f'(x)$, а именно из существования правосторонней производной $f'(x+0)$:

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\pi}{2l}\frac{f(x+\tau)-f(x+0)}{\sin(\pi\tau/2l)} = \lim_{\tau\to+0}\frac{\pi}{2l}\frac{f(x+\tau)-f(x+0)}{\tau} = f'(x+0).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{0}^{l}\varphi(\tau)\sin\Big[(2k+1)\frac{\pi\tau}{2l}\Big]d\tau. \tag{14.3}$$

Поскольку функция $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям основной леммы гармонического анализа, применение ее к интегралу (14.3) дает

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{0}^{l}\varphi(\tau)\sin\Big[(2k+1)\frac{\pi\tau}{2l}\Big]d\tau = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись (14.2), получим равенство

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^l f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^l f(x+0)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau=0$$

или

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^l f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x+0)}{2l}\int\limits_0^l \frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau,$$

которое с учетом (13.8) можно записать

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^l f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau=\frac{f(x+0)}{2}. \tag{14.4}$$

Аналогично находим для отрезка $[-l,0]$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^0 f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau=\frac{f(x-0)}{2}. \tag{14.5}$$

Суммирование (14.4) и (14.5) дает

$$\lim_{k\to\infty}S_k(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^l f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau=$$
$$=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{14.6}$$

Если учесть, что в точке непрерывности $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$, то $[f(x+0)+f(x-0)]/2=f(x)$, что и подтверждает справедливость теоремы.

Легко установить, что функция $f(x)$ в примере 11.3 удовлетворяет условиям теоремы 14.1 и полученный там ряд Фурье представляет эту функцию в каждой точке непрерывности, а в точках разрыва $x=\pm n\pi$ дает значение

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0.$$

♢ Если функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 14.1, в каждой точке разрыва доопределить равенством

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

то ряд Фурье будет всюду представлять заданную таким образом функцию. Это относится и к функциям $f^*(x)$ – периодическим продолжениям функций $f(x)$.

♢ Теорема 14.1 позволяет решить вопрос о сходимости ряда Фурье для одного из важнейших классов функций, а именно: кусочно-гладких на $[-l,l]$ функций. Этот класс функций характеризуется наличием на $[-l,l]$, во-первых, конечного числа интервалов монотонности и, во-вторых, интервалов непрерывной дифференцируемости, а также конечных односторонних производных в особых точках. Если рассматриваемая функция не удовлетворяет хотя бы одному из условий, теорема 14.1 не дает ответа на вопрос о сходимости ее ряда Фурье. Так, например, теорема не применима к кусочно-монотонным функциям, поскольку монотонные функции, даже непрерывные, вообще говоря, могут на некотором множестве из $[-l, l]$ не иметь производной или иметь неограниченную производную. С другой стороны, теорема также не применима к некоторым дифференцируемым, но немонотонным функциям.

В качестве примера рассмотрим две функции, заданные на промежутке $[-l, l]$ соотношениями

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(|x|/2l)}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{14.7}$$

и

$$f_2(x) = \begin{cases} x\cos(l/x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{14.8}$$

к которым теорема 14.1 не применима.

Действительно, несложно установить, что функция $f_1(x)$ является непрерывной на отрезке $[-l, l]$ с интервалами монотонности $]-l, 0[$ и $]0, l[$, причем в указанных интервалах она является непрерывно дифференцируемой. Однако наличие в точке $x = 0$ неограниченной производной не позволяет отнести ее к классу кусочно-гладких функций. Что касается функции $f_2(x)$, то для нее любой интервал, содержащий точку $x = 0$, невозможно разбить на конечное число интервалов монотонности, в силу чего ее также нельзя отнести к классу кусочно-гладких функций.

С учетом вышесказанного перейдем к признакам сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ в более широких, чем в теореме 14.1, предположениях.

15. Признак Дини сходимости ряда Фурье

Теперь вместо вспомогательной функции (14.2) введем функцию

$$\psi(\tau) = f(x+\tau) + f(x-\tau) - [f(x+0) + f(x-0)], \tag{15.1}$$

удовлетворяющую условию

$$\lim_{\tau\to+0} \psi(\tau) = 0.$$

Теорема 15.1 (Дини). *Для функции $f(x)$, заданной в промежутке $[-l, l]$ и периодически продолженной на всю числовую ось, ряд Фурье в точке x сходится к сумме*

$$f^*(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

если при некотором $0 < \delta < l$ существует интеграл Дини

$$\int\limits_0^\delta \frac{|\psi(\tau)|}{\tau} d\tau \tag{15.2}$$

для функции $\psi(\tau)$, определенной равенством (15.1).

Доказательство. Поскольку эта теорема, как будет показано ниже, является обобщением предыдущей, то её доказательство при необходимости можно использовать и для доказательства теоремы 14.1. В силу этого доказательство теоремы Дини проведем более подробно, чем теоремы 14.1.

Как и при доказательстве теоремы 14.1, воспользуемся выражением для k-й частичной суммы ряда Фурье через интеграл Дирихле (13.7). В силу четности множителя

$$\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}$$

интеграл (13.7) можно представить в виде

$$S_k(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_0^l [f(x+\tau)+f(x-\tau)]\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau. \tag{15.3}$$

Из (15.3) вычтем (13.8), поделенный на l и умноженный на число $f^*(x)$. В результате получим

$$\begin{gathered}
S_k(x)-f^*(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_0^l [f(x+\tau)+f(x-\tau)]\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau - \\
-\frac{1}{l}\int\limits_0^l f^*(x)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau = \\
= \frac{1}{2l}\int\limits_0^l \{[f(x+\tau)+f(x-\tau)]-[f(x+0)+f(x-0)]\}\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau = \\
= \frac{1}{2l}\int\limits_0^l \psi(\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau. \qquad (15.4)
\end{gathered}$$

Согласно принципу локализации, из существования интеграла (15.2) следует существование интеграла

$$\frac{1}{2l}\int\limits_0^l \frac{\psi(\tau)}{\tau}d\tau. \tag{15.5}$$

Разность (15.4) перепишем в виде

$$S_k(x)-f^*(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_0^l \frac{\psi(\tau)}{\tau}\frac{\tau}{\sin(\pi\tau/2l)}\sin(2k+1)\frac{\pi\tau}{2l}d\tau$$

и вычислим ее предел при $k\to\infty$:

$$\lim_{k\to\infty}[S_k(x)-f^*(x)] = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^l \frac{\psi(\tau)}{\tau}\frac{\tau}{\sin(\pi\tau/2l)}\sin(2k+1)\frac{\pi\tau}{2l}d\tau. \tag{15.6}$$

В силу абсолютной сходимости интеграла от функции

$$\frac{\psi(\tau)}{\tau}\frac{\tau}{\sin(\pi\tau/2l)}$$

предел в правой части (15.6) равен нулю, и, стало быть,

$$\lim_{k\to\infty}[S_k(x) - f^*(x)] = 0$$

или

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = f^*(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \\ = \begin{cases} f(x) & \text{в точках непрерывности,} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{в точках разрыва,} \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что для существования интеграла Дини (15.2) достаточно предположить существование порознь интегралов вида

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f(x\pm\tau) - f(x\pm 0)|}{\tau}d\tau, \quad \delta > 0.$$

Одним из условий их существования может быть, в частности, условие Липшица–Гельдера (см. приложение «Несобственные интегралы» [2])

$$\Big|\frac{f(x\pm\tau) - f(x\pm 0)}{\tau}\Big| \leqslant L\tau^{\alpha-1}, \qquad 0<\alpha\leqslant 1, \tag{15.7}$$

где L, α – положительные постоянные.

♦ Условие (15.7) применительно к ряду Фурье принято называть *условием Липшица–Гельдера сходимости ряда Фурье* в точке x.

Условия (15.7) при $\alpha = 1$ будут заведомо выполняться, если в точке x, даже если это точка разрыва первого рода, существуют конечные односторонние пределы

$$f'(x\pm 0) = \lim_{\tau\to+0}\frac{f(x\pm\tau) - f(x\pm 0)}{\pm\tau} = \operatorname{tg}\alpha_\pm,$$

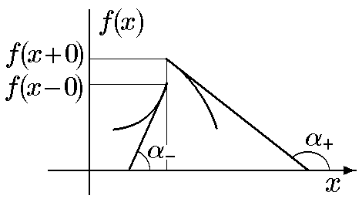


Рис. 8

хотя бы и разные, как на рис. 8.

Но это условие представляет собой ни что иное, как условие кусочной гладкости в окрестности точки x. Отсюда видно, что теореме 14.1 представляет собой частный случай теоремы 15.1.

Применим признак Дини к функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, заданных ранее соотношениями (14.7) и (14.8). Для функции $f_2(x)$ во всех точках, включая точку $x = 0$, заведомо выполняется условие Липшица–Гельдера (15.7) для $\alpha = 1$, а значит, и условие Дини (15.2), поскольку

$$|f(x) - f(0) = \Big|x\cos\frac{l}{x} - 0\Big| \leqslant |x|.$$

Это означает, что функция $f_2(x)$ представима своим рядом Фурье во всех точках заданного промежутка.

Что касается функции $f_1(x)$, то для нее интеграл Дини, относящийся к точке $x = 0$, расходится, поскольку

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f(\tau)+f(-\tau)-2f(0)|}{\tau}d\tau = 2\int\limits_0^\delta \frac{d\tau}{\tau\ln(\tau/2l)} =$$
$$= 2\int\limits_0^\delta \frac{d[\ln(\tau/2l)]}{\ln(\tau/2l)} = 2\lim_{\gamma\to+0}\ln\left|\ln\frac{\tau}{2l}\right|\Bigg|_\gamma^\delta = \infty.$$

Это означает, что признак Дини не устанавливает сходимость ряда Фурье этой функции в точке $x = 0$, поэтому мы продолжим рассмотрение других признаков сходимости рядов Фурье.

16. Признак Дирихле сходимости ряда Фурье

Обратимся теперь к одному из признаков, опирающихся на характер изменения самой функции и не связанных непосредственно с требованиями ее дифференцируемости. Рассмотрим широкий класс кусочно-монотонных функций. Для этого нам потребуется лемма, характеризующая одно из свойств монотонных функций, которую мы приведем без доказательства (доказательство см. в разд. «Дельта-функция Дирака» [2]).

Лемма 16.1. *Если на промежутке монотонности от $x = 0$ до $x = \delta > 0$ функция $f(x)$ является ограниченной, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^\delta f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx = \frac{\pi}{2}f(+0). \tag{16.1}$$

Теорема 16.1 (Дирихле). *Если функция $f(x)$ периода $2l$ – кусочно-монотонная и ограниченная в промежутке $[-l, l]$, то ее ряд Фурье в каждой точке x сходится к величине*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Доказательство. Для произвольной точки x из $[-l, l]$ воспользуемся принципом локализации, дающим для k-й частичной суммы ряда Фурье формулу (13.21), которую в силу четности множителя представим в виде

$$\lim_{k\to\infty}S_k(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^\delta [f(x+\tau)+f(x-\tau)]\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau. \tag{16.2}$$

Поскольку величина δ произвольна, выберем ее такой, чтобы промежутки $[x - \delta, x]$ и $[x, x + \delta]$ были промежутками монотонности функции $f(x)$. Это можно сделать в силу условий теоремы. Рассмотрим первый интеграл в правой части (16.2) и проведем в нем следующее тождественное преобразование:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^\delta f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^\delta f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\pi\tau/2l}d\tau+$$

$$+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^\delta f(x+\tau)\left(\frac{1}{\sin(\pi\tau/2l)}-\frac{1}{\pi\tau/2l}\right)\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2l}\tau\right]d\tau. \tag{16.3}$$

Для первого интеграла в (16.3), если его записать в виде

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\tau}d\tau,$$

можно воспользоваться леммой 16.1, поскольку на промежутке $[x, x+\delta]$ функция $f(x+\tau)$ монотонна. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\tau}d\tau=\frac{1}{2}f(x+0).$$

Ко второму интегралу из правой части (16.2) можно применить лемму 13.2, поскольку произведение

$$f(x+\tau)\left(\frac{1}{\sin(\pi\tau/2l)}-\frac{1}{\pi\tau/2l}\right)=f(x+\tau)\frac{\pi\tau/2l-\sin(\pi\tau/2l)}{(\pi\tau/2l)\sin(\pi\tau/2l)} \tag{16.4}$$

является абсолютно интегрируемой на $[0,\delta]$ функцией переменной τ. Действительно,

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\pi\tau/2l-\sin(\pi\tau/2l)}{(\pi\tau/2l)\sin(\pi\tau/2l)}=0.$$

Кроме того, для $\delta<l$ аргумент $\pi\tau/2l<\pi/2$ и, следовательно, второй сомножитель в (16.4) не имеет разрывов во всех точках промежутка $[0,\delta]$.

В результате соотношение (16.4) можно рассматривать как произведение двух ограниченных, монотонных на $[0,\delta]$ функций, откуда и следует абсолютная интегрируемость (16.4). С учетом сказанного (16.3) можно записать в виде

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^\delta f(x+\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau=\frac{1}{2}f(x+0). \tag{16.5}$$

Аналогично для второго интеграла в правой части (16.2) получим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_0^\delta f(x-\tau)\frac{\sin[(2k+1)\pi\tau/2l]}{\sin(\pi\tau/2l)}d\tau=\frac{1}{2}f(x-0). \tag{16.6}$$

Подставив (16.5) и (16.6) в (16.2), приходим к

$$\lim_{k\to\infty}S_k(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], \tag{16.7}$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что в точке непрерывности (16.7) обращается в $f(x)$.

♢ Условия теоремы 16.1 часто называют условиями Дирихле. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 16.1, то говорят, что она удовлетворяет условиям Дирихле.

Если в теореме 16.1 термин «кусочно-монотонная» заменить его развернутым определением, то ее можно переформулировать в следующем виде:

Теорема 16.2 (Дирихле). *Если функция $f(x)$:*

1) *ограничена на отрезке $[-l, l]$,*
2) *имеет конечное число экстремумов,*
3) *непрерывна на этом отрезке, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода $x_1, \ldots, x_n$,*

то сумма ряда Фурье определяет функцию, совпадающую с $f(x)$ на отрезках непрерывности и равную $[f(x_j - 0) + f(x_j + 0)]/2$ в точках разрыва x_j.

Очевидно, что условия Дирихле, определяемые теоремами 16.1 и 16.2, эквивалентны.

С помощью признака Дирихле мы можем теперь исследовать вопрос о сходимости ряда Фурье функции $f_1(x)$, заданной соотношениями (14.7). Поскольку ранее мы уже установили, что эта периодическая и непрерывная функция кусочно-монотонна, то, согласно признаку Дирихле, она на всей числовой оси представима своим рядом Фурье.

$\Diamond$ В заключение отметим, что признаки Дирихле и Дини охватывают большую часть функций, используемых в математическом анализе и его приложениях. Тот факт, что эти признаки являются достаточными, но не необходимыми, говорит о том, что существуют функции, разлагаемые в ряд Фурье и не относящиеся к рассмотренным выше классам. Сходимость некоторых из них может быть исследована с помощью специальных признаков, однако общая формулировка необходимого и достаточного признака до сих пор не установлена. Даже в простейшем случае непрерывных функций, как мы уже видели в конкретных примерах, требуются дополнительные условия: наличие конечной производной, существование некоторого интеграла, кусочная монотонность и др. В общем случае требования непрерывности функции $f(x)$ оказывается недостаточно. Для разрывных функций задача о сходимости ряда Фурье еще более усложняется и для ее решения в настоящее время привлекают уже более общие понятия функции, ее производной и интеграла.

17. Примеры разложения функций в ряд Фурье

Выше мы рассмотрели простейший пример 11.3, иллюстрирующий использование формул (11.26) для вычисления коэффициентов ряда Фурье a_n, b_n. Приведем еще ряд примеров, где подробно рассматривается разложение функций в ряд Фурье.

Пример 17.1. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \leqslant 0; \\ bx, & x > 0 \end{cases} \tag{17.1}$$

разложить в ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$. Исследовать частные случаи разложения.

Решение. На промежутке $[-l, l]$ функция удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому ее можно представить сходящимся рядом Фурье. Коэффициенты ряда находим по формулам (11.26)

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\Big[\int\limits_{-l}^{0} ax\,dx + \int\limits_{0}^{l} bx\,dx\Big] = \frac{l}{2}(b - a);$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{l}\Big[\int\limits_{-l}^{0} ax\cos\frac{\pi nx}{l}dx + \int\limits_{0}^{l} bx\cos\frac{\pi nx}{l}dx\Big]. \qquad (17.2)$$

Вычисление этих интегралов по частям:

$$U = x, \quad dV = \cos\frac{\pi nx}{l}dx, \quad dU = dx, \quad V = \frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}$$

даёт

$$a_n = \frac{a}{l}\Big[\frac{lx}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_{-l}^{0} - \frac{l}{\pi n}\int\limits_{-l}^{0}\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big] + \frac{b}{l}\Big[\frac{lx}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_{0}^{l} - \frac{l}{\pi n}\int\limits_{0}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big] =$$

$$= \frac{al}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_{-l}^{0} + \frac{bl}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_{0}^{l} =$$

$$= \frac{l(a-b)}{(\pi n)^2}\Big[1 - \cos\frac{\pi nx}{l}\Big] = \frac{l(a-b)}{(\pi n)^2}[1 - (-1)^n] =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad n = 2k, \quad k = \overline{0,\infty}; \\ \dfrac{2l(a-b)}{\pi^2(2k+1)^2}, \quad n = 2k+1. \end{cases} \qquad (17.3)$$

Для коэффициентов b_n:

$$b_n = \frac{1}{l}\Big[\int\limits_{-l}^{0} ax\sin\frac{\pi nx}{l}dx + \int\limits_{0}^{l} bx\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big],$$

как и в предыдущем случае интегрирование по частям:

$$U = x, \quad dV = \sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad dU = dx, \quad V = -\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}$$

даёт

$$b_n = \frac{a}{l}\Big[-\frac{lx}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_{-l}^{0} + \frac{l}{\pi n}\int\limits_{-l}^{0}\cos\frac{\pi nx}{l}dx\Big] +$$

$$+ \frac{b}{l}\Big[-\frac{lx}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_{0}^{l} + \frac{l}{\pi n}\int\limits_{0}^{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx\Big] =$$

$$= -\frac{(a+b)l}{\pi n}\cos\pi n = \frac{(a+b)l}{\pi n}(-1)^{n+1}. \qquad (17.4)$$

Таким образом, ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{l(b-a)}{4} + \frac{2l(a-b)}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l} +$$

$$+ \frac{l(a+b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (17.5)$$

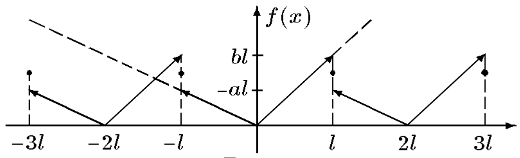


Рис. 9

Ряд (17.5) представляет функцию (17.1) в промежутке $]-l, l[$, а в точках $x = \pm l$ он дает значение

$$\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} = \frac{-al+bl}{2} = \frac{l}{2}(b-a), \tag{17.6}$$

нарушающее равенство (17.5). Равенство (17.5) не выполняется и вне этого промежутка, поскольку графиком суммы (17.5), в отличие от графика функции (17.1), будет бесконечное множество периодически повторяющихся ломаных линий и точек с координатами $((1 \pm 2n), l(b-a)/2)$ (рис. 9).

С другой стороны, как мы уже отмечали, график на рис. 9 можно рассматривать как периодическое продолжение $f^*(x)$ функции $f(x)$ (17.1) с промежутка $[-l, l]$ на всю числовую ось. Тогда ряд Фурье (17.5) является разложением такого периодического продолжения.

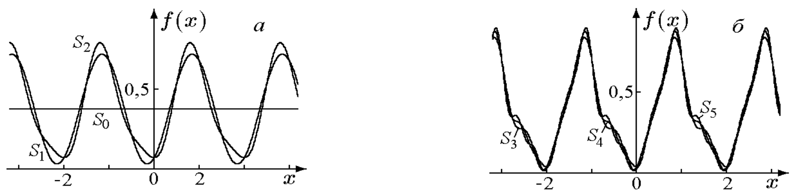


Рис. 10

Отметим различный характер убывания коэффициентов в первой и второй суммах (17.5). Коэффициенты первой суммы убывают быстрее, поскольку они определяются квадратичной зависимостью $(2k+1)^{-2}$, тогда как коэффициенты второй суммы определяются линейной зависимостью $1/n$. Наличие такой зависимости сильно замедляет сходимость ряда. На рис. 10 последовательно изображены пять первых гармоник суммы (17.5) для $a = -1/2$, $b = 1$, $l = 1$. Интересно, что если значения a и b подобрать так, чтобы периодическое продолжение было непрерывным, то зависимость вида $1/n$ исчезает. Действительно, при $a = -b$ сумма (17.5) принимает вид

$$f(x) = \frac{lb}{2} - \frac{4lb}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l}, \tag{17.7}$$

а график на рис. 9 переходит в непрерывную ломаную линию, изображенную на рис. 11. Частичные суммы (17.7) при $l = \pi$, $b = 1$ изображены на рис. 22.

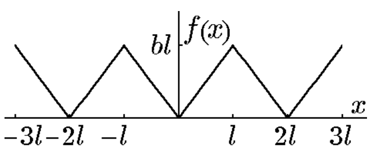


Рис. 11

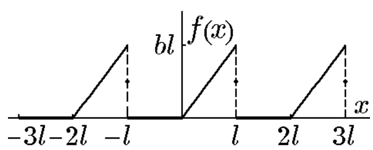


Рис. 12

Отметим, что разложения непрерывных функций не будут содержать зависимостей вида $1/n$. И, наоборот, присутствие в разложении функции в ряд

Фурье зависимостей такого вида будет означать наличие точек разрыва в разлагаемой функции. Присутствие зависимостей вида $1/n^2$ будет означать наличие разрывов первой производной функции $f(x)$ и т.д. Ограничимся здесь этим замечанием, поскольку вопрос о характере коэффициентов Фурье в зависимости от непрерывности самой функции и ее производных мы рассмотрим несколько позже.

При $a = 0$ из (17.5) получим ряд Фурье

$$f(x) = \frac{lb}{4} - \frac{2lb}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l} + \frac{lb}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{l} \qquad (17.8)$$

функции, изображенной на рис. 12. На рис. 13 изображены пять первых гармоник ряда (17.8) для $b = l = 1$.

Рис. 13

Если в (17.5) положить $a = b = 1$, то $f(x) = x$, и ее разложение имеет вид

$$f(x) = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (17.9)$$

При $l = \pi$ это разложение совпадает с полученным ранее в примере 11.3.

Из разложений (17.5)–(17.9) можно найти суммы некоторых сходящихся числовых рядов. Например, из (17.5) с учетом (17.6) для $x = l$ находим

$$\frac{l}{2}(b-a) = \frac{l(b-a)}{4} + \frac{2l(a-b)}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\pi(2k+1),$$

откуда, разделив на $l(b-a) \neq 0$ и учтя, что $\cos\pi(2k+1) = -1$, получим

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}. \qquad (17.10)$$

Используя (17.10), можно найти суммы еще двух числовых рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Действительно, очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \qquad (17.11)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\Big].$$

Отсюда

$$3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{24}. \tag{17.12}$$

Подстановка (17.10), (17.12) в (17.11) дает

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{17.13}$$

Кроме того, полагая в (17.9) $x=\pi/2$, имеем

$$f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{\pi}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n}{2}=$$
$$=2\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(2k+1)+1}}{2k+1}\sin\frac{\pi(2k+1)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k}\sin\pi k\Big]=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1},$$

откуда

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}. \tag{17.14}$$

Ранее формула (17.14) была получено из разложения $\operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора (10.57).

Пример 17.2. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-l,l]$ функцию $\sin ax$.

Решение. Заданная функция удовлетворяет условиям Дирихле и, поскольку она нечетная, то $a_n=0$ и

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\sin ax\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Воспользовавшись стандартными тригонометрическими формулами и предположив, что $a\neq\pi n/l$, найдём

$$b_n=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}\Big[\cos\Big(a-\frac{\pi n}{l}\Big)x-\cos\Big(a+\frac{\pi n}{l}\Big)x\Big]dx=$$
$$=\frac{1}{2l}\Big[\frac{\sin(a-\pi n/l)x}{a-\pi n/l}-\frac{\sin(a+\pi n/l)x}{a+\pi n/l}\Big]\Big|_{-l}^{l}=$$
$$=\frac{1}{l}\Big(\frac{\sin(a-\pi n/l)l}{a-\pi n/l}-\frac{\sin(a+\pi n/l)l}{a+\pi n/l}\Big)=\frac{(-1)^n}{l}\sin al\Big(\frac{1}{a-\pi n/l}-\frac{1}{a+\pi n/l}\Big).$$

Таким образом,

$$b_n=\frac{(-1)^n 2\pi n\sin al}{l^2(a^2-n^2)}$$

и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\pi n \sin al}{l^2[a^2 - (\pi n/l)^2]} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

При $a = \pi n/l$ имеем $b_k = 0$ для $k \neq n$ и $b_n = 1$, т.е. ряд Фурье состоит из самой функции $\sin(\pi k x/l)$.

$\Diamond$ Из полученных результатов для 2π-периодических функций ($l = pi$) имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \tag{17.15}$$
$$b_n = \frac{(-1)^n 2n \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}$$

при $a \neq k$ и $f(x) = \sin kx$ при $a = k$.

Пример 17.3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ функцию $f(x) = \cos ax$.

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Поскольку функция является четной, то $b_n = 0$, а

$$\begin{gathered}
a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} \cos ax\, dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} \cos ax\, dx = \frac{2}{al}\sin ax\Big|_0^l = \frac{2}{al}\sin al,\\
a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} \cos ax \cos\frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} \cos ax \cos\frac{\pi n x}{l} dx.
\end{gathered} \tag{17.16}$$

Положив $a \neq \pi n/l$, с использованием известных тригонометрических формул найдём

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l}\Big[\cos\Big(a + \frac{\pi n}{l}\Big)x + \cos\Big(a - \frac{\pi n}{l}\Big)x\Big]dx = \\
&= \frac{1}{l}\Big[\frac{\sin(a + \pi n/l)x}{a + \pi n/l} + \frac{\sin(a - \pi n/l)x}{a - \pi n/l}\Big]\Big|_0^l = \\
&= \frac{1}{l}\Big[\frac{\sin(al + \pi n)}{a + \pi n/l} + \frac{\sin(al - \pi n)}{a - \pi n/l}\Big] = \frac{(-1)^n}{l}\frac{2a}{a^2 - (\pi n/l)^2}\sin al.
\end{aligned} \tag{17.17}$$

Таким образом,

$$\cos ax = \frac{1}{al}\sin al + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a \sin al}{l[a^2 - (\pi n/l)^2]}\cos\frac{\pi n x}{l}. \tag{17.18}$$

При $a = \pi n/l$ имеем $a_0 = 0$, $a_n = 1$, $a_k = 0$ для всех $n \neq k$, т.е. ряд Фурье состоит из самой функции $\cos(\pi n x/l)$.

Как и в предыдущих примерах, из разложения (17.18) можно получить некоторые полезные соотношения. Так, например, полагая в (17.18) $x = 0$, найдем

$$1 = \frac{\sin al}{al} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a \sin al}{l[a^2 - (\pi n/l)^2]}$$

или

$$\frac{1}{\sin al} = \frac{1}{al} + \frac{2a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-(\pi n/l)^2}, \qquad (17.19)$$

а положив $x = l$, получим

$$\cos al = \frac{\sin al}{al} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a\sin al}{l[a^2-(\pi n/l)^2]}$$

или

$$\frac{\cos al}{\sin al} = \operatorname{ctg} al = \frac{1}{al} + \frac{2a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-(\pi n/l)^2}. \qquad (17.20)$$

$\diamondsuit$ Обозначив $al = z$, из (17.19), (17.20) можно найти разложения функций $1/\sin z$, $\operatorname{ctg} z$ на простые дроби

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2-(\pi n)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{z-\pi n} + \frac{1}{z-\pi n}\Big), \qquad (17.21)$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-(\pi n)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-\pi n} + \frac{1}{z-\pi n}\Big). \qquad (17.22)$$

Формулы (17.21), (17.22) мы получим другим способом при изучении функций комплексного переменного [2].

Пример 17.4. Пусть периодическая с периодом $2l$ функция $f(x)$ имеет своими коэффициентами Фурье величины a_n, b_n. Выразить через них коэффициенты Фурье A_n, B_n смещенной на заданную величину x_0 функции $f(x+x_0)$.

Решение. Поскольку смещение аргумента не нарушает периодичности функции $f(x+x_0)$, то в силу определения (11.26) и с учетом (11.35) находим

$$A_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x+x_0)dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l+x_0}^{l+x_0} f(x)dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = a_0, \qquad (17.23)$$

$$A_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x+x_0)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l+x_0}^{l+x_0} f(x)\cos\frac{\pi n(x-x_0)}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int\limits_{-l+x_0}^{l+x_0} f(x)\Big[\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi nx_0}{l} + \sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi nx_0}{l}\Big]dx =$$

$$= \cos\frac{\pi nx_0}{l}\Big[\frac{1}{l}\int\limits_{-l+x_0}^{l+x_0} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\Big] + \sin\frac{\pi nx_0}{l}\Big[\frac{1}{l}\int\limits_{-l+x_0}^{l+x_0} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big] =$$

$$= a_n\cos\frac{\pi nx_0}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx_0}{l}. \qquad (17.24)$$

Аналогично

$$B_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x+x_0)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = b_n\cos\frac{\pi nx_0}{l} - a_n\sin\frac{\pi nx_0}{l}. \qquad (17.25)$$

Пример 17.5. Разложить функцию $f(x) = (l - x)/2$ в ряд Фурье на промежутке $[-l, l]$.

Решение. Будем исходить из разложения (17.9):

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{l}, \quad -l < x < l,$$

для которого $a_n = 0$, $b_n = 2(-1)^{n+1}/n$. Полагая в формулах (17.23)–(17.25) $x_0 = -l$, для функции $x - l$ найдем

$$\begin{gathered} A_0 = a_0 = 0, \qquad A_n = a_n\cos\pi n - b_n\sin\pi n = 0, \\ B_n = b_n\cos\pi n + a_n\sin\pi n = b_n(-1)^n = -2/n. \end{gathered} \tag{17.26}$$

Следовательно,

$$x - l = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad -l < x < l$$

или

$$\frac{l - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad -l < x < l. \tag{17.27}$$

Как мы уже видели, симметрия относительно оси Oy и начала координат, присущая графикам четных и нечетных функций, соответственно, позволяет упростить вычисление коэффициентов Фурье таких функций. Можно предположить, что любая дополнительная симметрия способна еще несколько упростить процедуру их вычисления.

♦ Функцию $f(x)$ будем называть *функцией с двойной симметрией*, если она, являясь четной или нечетной, обладает на полупериоде $[0, l]$ дополнительной симметрией или относительно прямой $x = l/2$, или относительно точки с координатами $(l/2, 0)$.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих особенности разложения функций с двойной симметрией.

Пример 17.6. Показать, что если четная периодическая функция $f(x)$ на полупериоде $[0, l]$ обладает дополнительной симметрией

1) относительно прямой $x = l/2$, то ее разложение имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos\frac{\pi 2nx}{l}, \tag{17.28}$$

где

$$a_{2n} = \frac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{\pi 2nx}{l}dx, \qquad n = \overline{0, \infty}; \tag{17.29}$$

2) относительно точки $(l/2, 0)$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}, \tag{17.30}$$

где

$$a_{2n+1} = \frac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}dx, \qquad n = \overline{0, \infty}. \tag{17.31}$$

Решение. 1) В этом случае условие четности функции $f(-x)=f(x)$ следует дополнить условием

$$f(l-x)=f(x), \qquad (17.32)$$

являющимся выражением симметрии графика функции относительно прямой $x=l/2$ (и $x=-l/2$, рис. 14,a). Четность функции $f(x)$ означает, что $b_n=0$, а для вычисления коэффициентов a_n имеем

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{\pi 2nx}{l}dx=\frac{2}{l}\Big[\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{\pi 2nx}{l}dx+\int\limits_{l/2}^{l} f(x)\cos\frac{\pi 2nx}{l}dx\Big].$$

Во втором интеграле проведем замену переменных $x=l-y$, тогда

$$a_n=\frac{2}{l}\Big[\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx-\int\limits_{l/2}^{0} f(l-y)\cos\frac{\pi n(l-y)}{l}dy\Big]=$$
$$=\frac{2}{l}\Big[\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx+\int\limits_0^{l/2} f(l-y)\cos\frac{\pi n(l-y)}{l}dy\Big].$$

Воспользовавшись равенством (17.32), с учетом соотношения $\cos(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cos\alpha$ можем записать

$$a_n=\frac{2}{l}\Big[\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx+\int\limits_0^{l/2} f(y)(-1)^n\cos\frac{\pi ny}{l}dy\Big]=$$
$$=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l/2}[1+(-1)^n]f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=$$
$$=\begin{cases}0, & n=(2k+1),\ k=\overline{0,\infty};\\ \dfrac{4}{l}\displaystyle\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{2\pi kx}{l}dx, & n=2k,\end{cases}$$

что соответствует (17.29).

2) В этом случае условие четности функции $f(-x)=f(x)$ следует дополнить условием

$$f(l-x)=-f(x), \qquad (17.33)$$

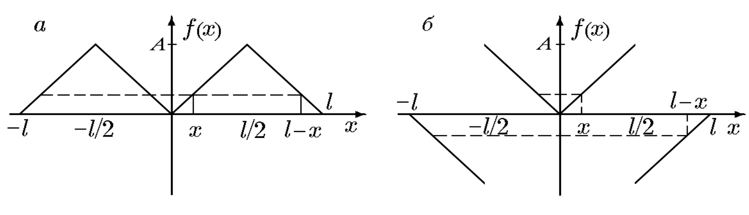


Рис. 14

являющимся выражением симметрии графика функции относительно точки $(l/2, 0)$ [и $(-l/2, 0)$, рис. 14,*б*]. Как и в предыдущем случае, четность функции $f(x)$ означает, что $b_n = 0$, а для вычисления коэффициентов a_n имеем

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\Big[\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx + \int\limits_{l/2}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\Big].$$

Воспользовавшись во втором интеграле заменой переменных $x = l - y$, равенством (17.33) и соотношением $\cos(\alpha + \pi n) = (-1)^n\cos\alpha$, находим

$$a_n = \frac{2}{l}\Big[\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx - \int\limits_{l/2}^{0}(-1)^n f(y)\cos\frac{\pi ny}{l}dy\Big] =$$

$$= \frac{2}{l}\int\limits_0^{l/2}[1-(-1)^n]f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k = \overline{0,\infty}; \\ \dfrac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}dx, & n = 2k+1, \end{cases}$$

что соответствует (17.31).

Пример 17.7. Показать, что если нечетная периодическая функция $f(x)$ на полупериоде $[0, l]$ обладает дополнительной симметрией относительно

1) прямой $x = l/2$, то ее разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}, \tag{17.34}$$

где

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}dx, \quad n = \overline{0,\infty}; \tag{17.35}$$

2) точки $(l/2, 0)$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}\sin\frac{2n\pi x}{l}, \tag{17.36}$$

где

$$b_{2n} = \frac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{l}dx, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{17.37}$$

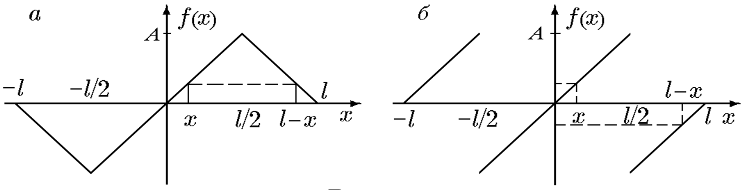


Рис. 15

Решение. Примеры графиков функций $f(x)$ с двойной симметрией, соответствующей пунктам 1) и 2), приведены на рис. 15. Нечетность функции означает, что $a_n = 0$, а вывод формул (17.34), (17.36) полностью повторяет вывод формул (17.28), (17.30) с учетом того, что $\sin(\alpha + \pi n) = (-1)^n \sin\alpha$.

Пример 17.8. Показать, что если в промежутке $[-l, l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(l+x) = f(x)$, то $a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0$, если же она удовлетворяет условию $f(l + x) = -f(x)$, то $a_{2n} = b_{2n} = 0$, $n = \overline{0, \infty}$.

Решение аналогично решению предыдущих примеров.

Пример 17.9. В промежутке $[-\pi, \pi]$ функции

1. $f_1(x) = e^x$,
2. $f_2(x) = e^{\cos x}\cos(\sin x)$,
3. $f_3 = e^{\cos x}\sin(\sin x)$

разложить в ряд Фурье.

Решение. 1. По формулам (11.26) находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{\cos nx - n\sin nx}{\pi(1+n^2)} e^x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2(-1)^n \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\, dx = \frac{\sin nx - n\cos nx}{\pi(1+n^2)} e^x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2(-1)^{n-1} \frac{n\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)},$$

откуда

$$e^x = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\Big]. \qquad (17.38)$$

2. В этом случае использование формул (11.26) приводит к громоздким выкладкам, которых можно избежать следующим образом. Составим сумму

$$f_2(x) + if_3(x) = e^{\cos x}[\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)]$$

и воспользуемся формулой Эйлера

$$f_2(x) + if_3(x) = e^{\cos x + i\sin x} = e^{e^{ix}}.$$

Полученную функцию в промежутке $[-\pi, \pi]$ разложим в ряд Тейлора

$$f_2(x) + if_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}.$$

Приравняв действительные и мнимые части полученного равенства, найдем

$$f_2(x) = e^{\cos x}\cos(\sin x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}, \qquad (17.39)$$

$$f_3(x) = e^{\cos x}\sin(\sin x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}. \qquad (17.40)$$

$\Diamond$ Рассмотренные выше примеры наглядно иллюстрируют еще одну особенность ряда Фурье: одним аналитическим выражением представлять любые кусочно-непрерывные функции, что зачастую облегчает работу с ними.

18. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на полупериоде

Нередко встречается задача разложения в тригонометрический ряд функции, заданной в промежутке $[0, l]$, т.е. на полупериоде. Будем предполагать, что в этом промежутке она удовлетворяет теореме Дирихле.

Поскольку известны правила разложения в ряд Фурье функции, заданной на промежутке $[-l, l]$, то достаточно доопределить функцию в промежуток $[-l, 0]$ (рис. 16). Такое доопределение, или продолжение, можно производить произвольным образом, но так, чтобы во всем промежутке $[-l, l]$ функция также удовлетворяла условиям Дирихле: имела не более чем конечное число точек разрыва первого рода и экстремумов на $[0, l]$.

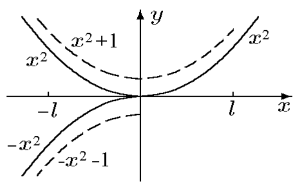


Рис. 16

Разложив в ряд Фурье функцию, определенную на $[-l, l]$, рассматриваем разложение лишь на $[0, l]$.

Наиболее часто встречаются так называемые четные и нечетные продолжения, при которых на промежутке $[-l, l]$ получаются четная и нечетная функции.

При четном продолжении функции $f(x)$ на промежуток $[-l, 0]$ мы получим ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{18.1}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{18.2}$$

При нечетном продолжении получим ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{18.3}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{18.4}$$

Внутри промежутка $[0, l]$ суммы рядов «по косинусам» и «по синусам» для одной и той же функции $f(x)$ совпадают, но в промежутке $[-l, 0]$ они различны, так как сумма ряда «по косинусам» соответствует четному, а сумма ряда «по синусам» – нечетному продолжению функции из промежутка $[0, l]$ в промежуток $[-l, 0]$ (см. рис. 16).

◊ Заметим, что четное продолжение предпочтительнее, поскольку при нечетном возможно появление дополнительной точки разрыва (см. рис. 16), которая может ухудшить сходимость ряда Фурье.

◊ Разложение в ряд Фурье функции, заданной в промежутке $[0, \pi]$, представляет частный случай рассмотренного разложения, когда $l = \pi$.

Пример 18.1. Разложить функцию $f(x) = 1$, заданную в промежутке $[0, 1]$, в ряд по синусам.

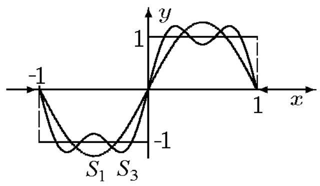


Рис. 17

Решение. Для разложения функции в ряд по синусам ее нужно продолжить в $[-1,0]$ нечетным образом (см. рис. 17), а затем продолжить полученную функцию периодически на всю числовую ось.

Коэффициенты ряда вычислим по формулам

$$a_0 = a_n = 0,$$
$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Здесь нужно положить $l=1$, $f(x)=1$. Тогда

$$b_n = 2\int\limits_0^1 \sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 = -\frac{2}{n\pi}[\cos n\pi - \cos 0] = -\frac{2}{n\pi}[(-1)^n - 1] =$$
$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad k = \overline{1,\infty},$$

т.е.

$$b_1 = \frac{4}{\pi},\quad b_2 = 0,\quad b_3 = \frac{4}{3\pi},\quad b_4 = 0,\quad b_5 = \frac{4}{5\pi},\quad \ldots$$

Ряд Фурье для данной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\Big[\frac{\sin\pi x}{1} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} + \ldots\Big] =$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\pi(2k-1)x.$$

Пример 18.2. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье по косинусам на интервале $[0,\pi]$.

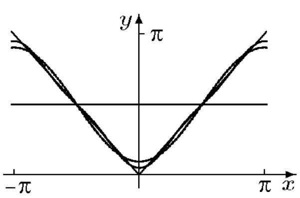


Рис. 18

Решение. 1. Из условий задачи следует, что нужно сделать четное продолжение заданной функции $f(x) = x$ на $[-\pi,0]$, а затем разложить эту функцию в ряд Фурье (см. рис. 18)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

2. После доопределения четным образом получим

$$f^*(x) = \begin{cases} -x & \text{на } [-\pi,0], \\ x & \text{на } [0,\pi] \end{cases} = |x|, \quad x\in[-\pi,\pi].$$

3. Вычислим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1).$$

Таким образом,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

4. Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$f^*(x) = |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)\cos nx =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{3^2\pi}\cos 3x + \ldots, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Окончательно запишем

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Этот результат совпадает с (17.7) при $l = \pi$, $b = 1$.

Пример 18.3. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье: а) по косинусам, б) по синусам кратных дуг.

Решение. а) Функцию $f(x)$ с промежутка $[0, \pi]$ продолжим четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$, а затем полученную функцию продолжим периодически (с периодом 2π) на всю числовую ось. Тогда получим непрерывную кусочно-гладкую функцию $f^*(x)$, $f^*(x) = f(x)$ при $|x| \leqslant \pi$. Для коэффициентов имеем

$$b_n = 0, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x^2\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Тогда

$$f^*(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Полученный ряд сходится к периодическому продолжению $f^*(x)$, изображённому на рис. 19,*а*, причём для $0 \leqslant x \leqslant \pi$ справедливо

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Из полученного разложения при $x = 0$ следует

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

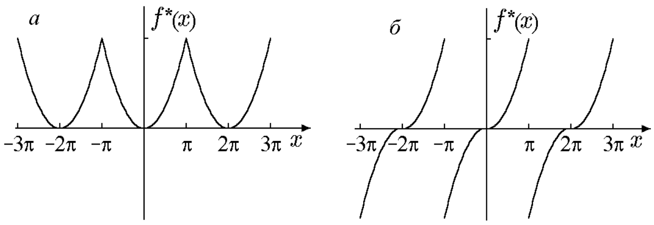


Рис. 19

б) Функцию x^2 с промежутка $[0, \pi]$ продолжим на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & [-\pi, 0], \\ x^2, & [0, \pi]. \end{cases}$$

Затем полученную функцию продолжим 2π-периодически на всю числовую ось. Вычислим коэффициенты

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi x^2 \sin nx\, dx = -\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1].$$

Получим

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ -\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1] \Big\} \sin nx =$$

$$= -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \pm(1-2n)\pi.$$

Этот ряд сходится к периодическому продолжению $f^*(x)$, изображённому на рис. 19,*б*, на всей числовой оси, к нулю в точках разрыва $x = \pm(1+2n)\pi$ и к $= x^2$ при $0 \leqslant x < \pi$.

19. Разложение функции в ряд Фурье на произвольном отрезке

Произвольному отрезку $[a, a+2l]$ длины $2l$ соответствует ортогональная система тригонометрических функций

$$\Big\{ 1, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}, \ldots \Big\},$$

так как интеграл от произведения любых двух функций этой системы, взятый в пределах от a до $a+2l$, равен нулю

$$\int\limits_a^{a+2l} 1 \cdot \sin\frac{\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\int\limits_a^{a+2l} 1 \cdot \cos\frac{\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\int_a^{a+2l} \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0.$$

При этом

$$\int_a^{a+2l} \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = \int_a^{a+2l} \cos^2\frac{n\pi x}{l}dx = l.$$

◊ Поэтому в случае, когда функция $f(x)$, имеющая период $2l$, задана на произвольном отрезке $[a, a+2l]$ длины $2l$ и удовлетворяет условиям Дирихле на этом отрезке, получим следующее разложение $f(x)$ в тригонометрический ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Big),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Положив $a = 0$, получим разложение функции $f(x)$, заданной на $[0, 2l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Big), \tag{19.1}$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned} \tag{19.2}$$

Положив $a + 2l = b$ и, следовательно, $l = (b-a)/2$, получим разложение функции $f(x)$, заданной на произвольном отрезке $[a, b]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\Big), \tag{19.3}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx, \qquad (19.4)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx.$$

Пример 19.1. Разложить в тригонометрический ряд функцию $f(x) = -x^2 + 8x - 12$, заданную на отрезке $[2, 6]$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = 6$, $b - a = 4$, $l = (b - a)/2 = 2$.

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{2n\pi x}{4} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{4}\Big) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{2n\pi x}{4} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{4}\Big).$$

Согласно (19.4), вычислим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{2}{4}\int\limits_2^6(-x^2 + 8x - 12)dx = \frac{16}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx = \frac{2}{4}\int\limits_2^6(-x^2 + 8x - 12)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{16}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx = \frac{2}{4}\int\limits_2^6(-x^2 + 8x - 12)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = 0.$$

Искомое разложение имеет вид

$$f^*(x) = \frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\pi x/2)}{n^2}. \qquad (19.5)$$

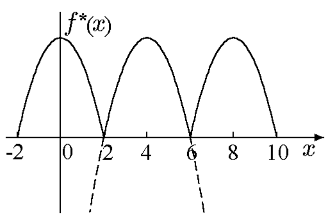


Рис. 20

Полученный ряд Фурье сходится к периодическому продолжению $f^*(x)$ функции $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ с промежутка $[2, 6]$, изображённому на рис. 20, причём для $x \in [2, 6]$ справедливо представление

$$-x^2 + 8x - 12 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{2n\pi x}{4} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{4}\Big).$$

Легко проверить, что разложение (19.5) справедливо и для периодического продолжения функции $f_1^*(x) = -x^2 + 4$, но с промежутка $[-2, 2]$.

20. Сопряженный ряд Фурье

Отметим, что тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = f(x) \tag{20.1}$$

можно рассматривать как действительную часть степенного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{inx} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (e^{ix})^n. \tag{20.2}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(a_n - ib_n)e^{inx} &= (a_n - ib_n)(\cos nx + i \sin nx) = \\ &= (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + i(a_n \sin nx - b_n \cos nx).\end{aligned}$$

Мнимая часть формально представляется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx) = \psi(x). \tag{20.3}$$

♦ Ряд (20.3) называется *сопряженным с рядом Фурье* (20.1), а функция $\psi(x)$ называется *сопряженной с функцией* $f(x)$.

Рассмотрим более подробно ряд (20.3)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-b_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + a_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \Big) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{(-ia_n - b_n)e^{inx} + (ia_n - b_n)e^{-inx}\} = \\ &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n - ib_n)e^{inx} - (a_n + ib_n)e^{-inx}\}.\\ C_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad C_{-n} = C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).\end{aligned}$$

Тогда

$$\psi(x) = -i \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inx} \Big\} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} n C_n e^{inx},$$

где

$$\operatorname{sign} n = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

♦ Выражение

$$\psi(x) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} n C_n e^{inx} \tag{20.4}$$

называется *комплексной формой* ряда, сопряженного к ряду Фурье (20.1).

♦ *Преобразованием Гильберта* функции $f(x)$ называется несобственный интеграл

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}dt. \tag{20.5}$$

Если интеграл в (20.5) сходится в смысле главного значения, то *обратным преобразованием Гильберта* называется несобственный интеграл в смысле главного значения

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t-x}dt. \tag{20.6}$$

Для 2π-периодических функций, заданных на промежутке $[-\pi,\pi]$, связь прямого и обратного преобразований Гильберта даёт следующая теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема 20.1. *Пусть функция $f(x)$ представима рядом* (20.1), *а функция $\psi(x)$ — рядом* (20.3). *Тогда*

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}dt. \tag{20.7}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt. \tag{20.8}$$

Следствие. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx, \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{20.9}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}dt,\\ f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}dt. \end{aligned} \tag{20.10}$$

Действительно, $f(x)$ и $\psi(x)$ являются частным случаем (20.1) и (20.3) при $b_n = 0$, $a_0 = 0$. Следовательно, второе слагаемое в (20.8) обращается в нуль.

♦ Переход от функции $f(x)$ к $\psi(x)$ и от $\psi(x)$ к $f(x)$, задаваемый соотношениями (20.7) и (20.8), называется *прямым* и *обратным преобразованием Гильберта*.

Пример 20.1. Функцию $f(x) = \sin(x/2)$ разложить в ряд Фурье на интервале $]-\pi,\pi[$. Записать ряд Фурье, сопряженный ему, и найти его сумму.

Решение. Поскольку функция $f(x)$ нечетная, то $a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-1/4}$$

(см. пример 17.2). Следовательно, формула (17.15) при $a = 1/2$ примет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-1/4}\sin nx = \sin\frac{x}{2}, \quad |x| < \pi.$$

Сопряженный ряд Фурье, согласно (20.3), запишется следующим образом:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-b_n)\cos nx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\cos nx}{n^2-1/4}.$$

Согласно теореме 20.1, функции $f(x)$ и $\psi(x)$ связаны преобразованием Гильберта:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}dt = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}d\frac{t}{2} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos\frac{t-x+x}{2}\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}d\frac{t}{2} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Big(\cos\frac{t-x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{t-x}{2}\sin\frac{x}{2}\Big)\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}d\frac{t}{2} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\Bigg[\int\limits_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{t-x}{2}d\frac{t}{2} - \int\limits_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\frac{\sin^2(t-x)/2}{1-\sin^2(t-x)/2}d\Big(\sin\frac{t-x}{2}\Big)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sin\frac{x}{2}\Big(-2\sin\frac{x}{2} - \ln\Big|\frac{1+\sin(x/2)}{1-\sin(x/2)}\Big|\Big) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\Big[2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\ln\Big|\frac{1+\sin(x/2)}{1-\sin(x/2)}\Big|\Big] =$$

$$= -\frac{2}{\pi} + \frac{\sin(x/2)}{\pi}\ln\Big|\frac{1+\sin(x/2)}{1-\sin(x/2)}\Big|.$$

21. Обобщенный ряд Фурье. Ортонормированные системы функций

В курсе линейной алгебры и ее приложениях решение многих задач существенно упрощается с введением такого понятия, как евклидово пространство. Не менее полезным оказывается обобщение и распространение этого понятия на бесконечномерный случай, когда элементами пространства являются функции, а само это пространство – функциональным. Начнем с определения элементов предполагаемого функционального пространства.

♦ Вещественнозначная функция $v(x)$ называется *квадратично интегрируемой* на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x) > 0$, $x \in [a, b]$, если существует интеграл

$$\int\limits_{a}^{b}\rho(x)v^2(x)dx. \tag{21.1}$$

Множество всех таких квадратично интегрируемых на $[a,b]$ функций будем обозначать $L_2([a,b],\rho(x),D) = L_2([a,b],\rho(x))$ или просто L_2. Здесь $D\subset\mathbb{R}$ – множество значений функции $v(x)$.

Множество L_2 наглядно характеризуется следующими утверждениями.

Свойство 1. Если $v_1(x), v_2(x) \in L_2([a,b],\rho(x))$, то их линейная комбинация $\lambda_1 v_1(x)+\lambda_2 v_2(x)$ также принадлежит множеству $L_2([a,b],\rho(x))$, причем

$$\Big|\int\limits_a^b \rho(x)v_1(x)v_2(x)dx\Big| \leqslant \Big[\int\limits_a^b \rho(x)v_1^2(x)dx\Big]^{1/2}\Big[\int\limits_a^b \rho(x)v_2^2(x)dx\Big]^{1/2}. \qquad (21.2)$$

Неравенство (21.2) называется неравенством Коши–Буняковского или неравенством Шварца.

Действительно, первая часть утверждения доказывается в стандартных курсах математического анализа (см., например, [14]), а для доказательства (21.2) воспользуемся тем, что при любых вещественных λ для линейной комбинации $v_1(x)+\lambda v_2(x)$ справедливо

$$\int\limits_a^b \rho(x)\{v_1(x)+\lambda v_2(x)\}^2dx = \int\limits_a^b \rho(x)v_1^2(x)dx+$$
$$+2\lambda\int\limits_a^b \rho(x)v_1(x)v_2(x)dx+\lambda^2\int\limits_a^b \rho(x)v_2^2(x)dx \geqslant 0.$$

Будем рассматривать полученное выражение как квадратное неравенство относительно действительного λ. Тогда его дискриминант должен удовлетворять условию

$$\Big[\int\limits_a^b \rho(x)v_1(x)v_2(x)dx\Big]^2 - \int\limits_a^b \rho(x)v_1^2(x)dx\int\limits_a^b \rho(x)v_2^2(x)dx \leqslant 0,$$

из которого и следует неравенство (21.2).

Продолжая аналогию с линейной алгеброй, определим на множестве $L_2([a,b],\rho(x))$ скалярное произведение.

♦ *Скалярным произведением* двух функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ будем называть число $\langle v_1(x)|v_2(x)\rangle$, определяемое равенством

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_1(x)|v_2(x)\rangle_\rho = \int\limits_a^b \rho(x)v_1(x)v_2(x)dx. \qquad (21.3)$$

Скалярное произведение обладает очевидными свойствами

$$\langle[\lambda_1 v_1(x)+\lambda_2 v_2(x)]|v_3(x)\rangle_\rho = \lambda_1\langle v_1(x)|v_3(x)\rangle_\rho + \lambda_2\langle v_2(x)|v_3(x)\rangle_\rho =$$
$$= \lambda_1\langle v_3(x)|v_1(x)\rangle_\rho + \lambda_2\langle v_3(x)|v_2(x)\rangle_\rho = \langle v_3(x)|[\lambda_1 v_1(x)+\lambda_2 v_2(x)]\rangle_\rho. \qquad (21.4)$$

С помощью скалярного произведения определим норму функции $v(x)$.

♦ *Нормой* функции $v(x)$ будем называть число

$$\|v\| = \|v(x)\| = \sqrt{\langle v(x)|v(x)\rangle_\rho} = \sqrt{\int\limits_a^b \rho(x)v^2(x)dx} \geqslant 0. \tag{21.5}$$

Неравенство Коши – Буняковского в терминах скалярного произведения и нормы можно записать в виде

$$|\langle v_1(x)|v_2(x)\rangle| \leqslant \|v_1(x)\|\,\|v_2(x)\|. \tag{21.6}$$

Из (21.6) вытекает весьма полезное и достаточно очевидное неравенство – неравенство Минковского

$$\|v_1(x) + v_2(x)\| \leqslant \|v_1(x)\| + \|v_2(x)\|. \tag{21.7}$$

Так же как и в линейной алгебре, функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ будем называть ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\langle v_1(x)|v_2(x)\rangle_\rho = \int\limits_a^b \rho(x)v_1(x)v_2(x)dx = 0. \tag{21.8}$$

Заметим, что ортогональность функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ зависит не только от их явного вида, но и от промежутка $[a, b]$ и от весовой функции $\rho(x)$, т.е. функции, ортогональные на одном промежутке, могут быть не ортогональны на другом или ортогональные с одной весовой функцией не ортогональны с другой.

♦ Конечная или бесконечная система линейно независимых функций $\{v_k(x)\}$ называется *ортогональной*, если

$$\langle v_k(x)|v_l(x)\rangle = 0 \quad \text{для} \quad k \neq l. \tag{21.9}$$

Пример 21.1. Показать, что система тригонометрических функций

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}, \quad n = \overline{1, \infty} \tag{21.10}$$

ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$ с весом $\rho(x) = 1$.

Решение. Ортогональность различных функций следует (см. (11.22)) из интегралов

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx\, dx = \frac{\sin^2 nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

С помощью соотношений

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

нетрудно убедиться, что при $n \neq m$, $n, m = \overline{1,\infty}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0.$$

Найдем интегралы от квадратов функций системы:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = 2\pi.$$

С помощью соотношений

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha), \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi, \quad n \geqslant 1, \tag{21.11}$$

что и требовалось показать.

♦ В разделе «Специальные функции» (см. [3]) мы подробно рассмотрим ортогональные системы специальных функций:

- функции Бесселя $\{J_\nu(\alpha_k^\nu x)\}_{k=1}^\infty$ ортогональны на отрезке $[0,1]$ с весом $\rho(x) = x$ (здесь α_k^ν – k-ый положительный корень функции Бесселя $J_\nu(\alpha) = 0$;
- полиномы Лежандра $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(x) = 1$;
- полиномы Эрмита $\{H_n(x)\}_{n=0}^\infty$ ортогональны на интервале $]-\infty,\infty[$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$;
- полиномы Лагерра $\{L_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ ортогональны на интервале $[0,\infty[$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x^2}$ $(\alpha > -1)$;
- функции Эрмита $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$ ортогональны на интервале $]-\infty,\infty[$ с весом $\rho(x) = 1$;
- функции Лагерра $\{I_{\alpha+n,n}(x)\}_{n=0}^\infty$ ортогональны на интервале $[0,\infty[$ с весом $\rho(x) = 1$ $(\alpha > -1)$.

Кроме того, мы рассмотрим некоторые основные свойства ортогональных систем, образованных собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля (см. [3]), а в разделе «Уравнения математической физики» — систем, образованных собственными функциями симметричных ядер интегральных уравнений (см. [4]).

♦ Ортогональная система функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$ называется *ортонормированной*, если $\|v_k\| = 1$.

◊ Любую ортогональную систему функций $\{v_k(x)\}$ можно превратить в ортонормированную $\{u_k(x)\}$, положив

$$u_k(x) = \frac{v_k(x)}{\|v_k\|}.$$

Пример 21.2. Ортонормировать тригонометрическую систему функций (21.10).

Решение. С учетом соотношения (21.11) получим

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}, \qquad n = \overline{1,\infty}.$$

♦ Ортогональную систему функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, будем называть *полной*, если в $L_2([a,b],\rho(x))$ не существует отличной от нуля функции $f(x)$, ортогональной всем функциям $v_k(x)$ этой системы.

◊ Функцию, равную нулю на $[a,b]$ всюду, кроме конечного числа точек, будем также считать нулем.

Полную ортогональную систему функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, можно рассматривать как ортогональный бесконечномерный базис в пространстве $L_2([a,b],\rho(x))$, так что любая функция из этого пространства может быть представлена разложением

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k(x), \tag{21.12}$$

в котором постоянные C_k играют роль «координат» функции $f(x)$ относительно базиса $\{v_k(x)\}$.

Свойство 2. Если ряд (21.12) сходится равномерно, то коэффициенты C_k в разложении (21.12) определяются соотношением

$$C_n = \frac{\langle f(x)|v_n(x)\rangle}{\|v_n(x)\|^2}, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{21.13}$$

♦ Разложение (21.12), в котором коэффициенты C_k определяются формулой (21.13), называется *рядом Фурье по ортогональной системе функций* $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, а сами коэффициенты C_k – *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$ *относительно базиса* $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Умножив скалярно правую и левую части (21.12) на функцию $v_n(x)$ и воспользовавшись соотношениями (21.4), (21.8), получим

$$\langle f(x)|v_n(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\langle v_k(x)|v_n(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\|v_n(x)\|^2\delta_{kn} = C_n\|v_n(x)\|^2.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Свойство 3. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2\|v_k(x)\|^2 \tag{21.14}$$

сходится, причем справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2\|v_k(x)\|^2 \leqslant \|f(x)\|^2. \tag{21.15}$$

Соотношение (21.15) называется неравенством Бесселя.

Доказательство. Для исследования сходимости ряда Фурье (21.12) рассмотрим величину

$$\Big\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}C_kv_k(x)\Big\|^2=\int\limits_a^b\rho(x)\Big[f(x)-\sum_{k=1}^{n}C_kv_k(x)\Big]^2dx=$$

$$=\int\limits_a^b\rho(x)f^2(x)dx-2\sum_{k=1}^{n}C_k\int\limits_a^b\rho(x)f(x)v_k(x)dx+\sum_{k,j=1}^{n}C_kC_j\int\limits_a^b\rho(x)v_k(x)v_j(x)dx=$$

$$=\|f(x)\|^2-\sum_{k=1}^{n}C_k^2\|v_k(x)\|^2\geqslant 0. \qquad (21.16)$$

Из (21.16) следуют сходимость ряда (21.14) и неравенство (21.15).

◊ Для ортонормированных систем ($\|u_k(x)\|=1$) неравенство Бесселя примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k^2\leqslant\|f(x)\|^2.$$

♦ Ортогональную систему функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называют *замкнутой*, если для любой функции $f(x)\in L_2([a,b],\rho(x))$ неравенство Бесселя (21.15) обращается в равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k^2\|v_k(x)\|^2=\|f(x)\|^2. \qquad (21.17)$$

Равенство (21.17) называют *равенством Парсеваля*, или *формулой замкнутости.*

Формула замкнутости позволяет записать (21.16) в виде

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}C_kv_k(x)\Big\|=0. \qquad (21.18)$$

Она отражает тот факт, что при замене функции $f(x)$ ее n-частичной суммой ряда Фурье среднеквадратичная погрешность стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т.е. ряд (21.12) «сходится» к функции $f(x)$. Отметим, однако, что сходимость ряда Фурье, определяемая соотношением (21.18), отличается от сходимости ряда в обычном (поточечном)

$$\lim_{n\to\infty}\Big|f(x)-\sum_{k=1}^{n}C_kv_k(x)\Big|=0$$

смысле и представляет собой пример сходимости в среднем или среднеквадратичном [так называемая сходимость по норме в пространстве $L_2([a,b],\rho(x))$].

♦ Последовательность $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $v_k(x)\in L_2([a,b],\rho(x))$, $k=\overline{1,\infty}$, будем называть *сходящейся к функции* $f(x)$ из $L_2([a,b],\rho(x))$ *в среднем* [или *среднеквадратичном*, или *по норме в пространстве* $L_2([a,b],\rho(x))$], если

$$\lim_{k\to\infty}\|f(x)-v_k(x)\|=0. \qquad (21.19)$$

♦ Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}v_k(x),\qquad v_k(x)\in L_2([a,b],\rho(x))$$

будем называть *сходящимся к функции* $f(x)$ из $L_2([a,b],\rho(x))$ *в среднем* [*по норме в пространстве* $L_2([a,b],\rho(x))$], если последовательность его n-частичных сумм сходится в среднем к функции $f(x)$.

$\Diamond$ Из сходимости в среднем не следует сходимость в обычном смысле, поскольку в некоторых точках отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ могут достаточно сильно отличаться друг от друга, что невозможно при обычной (поточечной) сходимости. Заметим к тому же, что из поточечной сходимости также, вообще говоря, не следует сходимость в среднем, что и проиллюстрируем следующим примером.

Пример 21.3. Исследовать последовательность

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2nx}e^{-nx^2/2}, \qquad n=\overline{1,\infty}, \quad x\in[0,1]$$

на сходимость.

Решение. Очевидно, что $\varphi_n(0)=0$ и для любого фиксированного $x\in]0,1]$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2nx}}{e^{nx^2/2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{n}}\frac{(-2)}{x^2e^{nx^2/2}} = 0.$$

Здесь мы воспользовались правилом Лопиталя. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = 0, \quad x\in[0,1].$$

Исследуем теперь вопрос о сходимости в среднем последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ к функции $\varphi(x)=0$. Рассмотрим интеграл

$$J_n = \int\limits_0^1[\varphi_n(x)-0]^2dx = \int\limits_0^1 2nx\,e^{-nx^2}dx = 1-e^{-n},$$

из которого следует, что

$$\lim_{n\to\infty}J_n = 1$$

и последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ не сходится по норме пространства $L_2([0,1])$ к функции $\varphi(x)=0$.

Выяснив характер сходимости в среднем и возвращаясь к разложению функции в ряд Фурье, сформулируем следующее утверждение:

Свойство 4. Замкнутая ортогональная система функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $v_k(x)\in L_2([a,b],\rho(x))$ является полной в $L_2([a,b],\rho(x))$.

Действительно, предположим, что система $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не является полной, т.е. существует функция $\varphi(x)$, ортогональная всем $v_k(x)$ системы $\{v_k(x)\}$. Но тогда все ее коэффициенты Фурье равны нулю и формула замкнутости принимает вид

$$\|\varphi(x)\|^2 = \int\limits_a^b\rho(x)\varphi^2(x)dx = 0. \tag{21.20}$$

Если функция $\varphi^2(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то, приняв во внимание, что $\rho(x) > 0$, можем записать $\varphi^2(x) = 0$ и, соответственно, $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in [a,b]$. Таким образом, функция, ортогональная всем $v_k(x)$, есть тождественный нуль, а это и означает полноту системы $\{v_k(x)\}$.

Если функция $\varphi^2(x)$ на $[a,b]$ кусочно-непрерывна, то из (21.20) следует, что она будет равна нулю всюду, кроме конечного числа отдельных точек, являющихся границами интервала непрерывности. Такую функцию, по принятой ранее договоренности, мы считаем нулем, а следовательно, и в данном случае замкнутая система $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной.

Ответ на вопрос о сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ дается следующим утверждением:

Свойство 5. Если $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная замкнутая система в $L_2([a,b],\rho(x))$, то любая функция $f(x)$ из пространства $L_2([a,b],\rho(x))$ может быть единственным образом разложена в ряд Фурье, сходящийся к ней в среднем.

Действительно, из ортогональности системы вытекает возможность разложения функции в ряд Фурье, из замкнутости следует его сходимость к функции $f(x)$, а заодно и полнота $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, которая, в свою очередь, обеспечивает единственность этого разложения.

Пример 21.4. Показать, что среднеквадратичное отклонение

$$\Big\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x) \Big\| \tag{21.21}$$

будет наименьшим, если произвольные вещественные коэффициенты a_k принять равными коэффициентам Фурье C_k функции $f(x)$ из L_2 по ортогональной системе $\{v_k(x)\} \in L_2$.

Решение. Рассмотрим величину

$$\Big\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x) \Big\|^2 = \Big\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k v_k(x) - \sum_{k=1}^{n} (a_k - C_k) v_k(x) \Big\|^2,$$

которую с помощью обозначений

$$\tilde f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k v_k(x), \quad \tilde a_k = a_k - C_k$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Big\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x) \Big\|^2 &= \Big\| \tilde f(x) - \sum_{k=1}^{n} \tilde a_k v_k(x) \Big\|^2 = \\ &= \Big\langle \tilde f(x) - \sum_{k=1}^{n} \tilde a_k v_k(x) \Big| \tilde f(x) - \sum_{k=1}^{n} \tilde a_k v_k(x) \Big\rangle = \\ &= \|\tilde f(x)\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \tilde a_k \langle v_k(x) | \tilde f(x)\rangle + \sum_{k=1}^{n} \tilde a_k^2 \|v_k(x)\|^2. \end{aligned} \tag{21.22}$$

Приняв во внимание, что

$$\langle v_k(x)|\tilde{f}(x)\rangle = \Big\langle v_k(x)\Big| f(x) - \sum_{l=1}^{n} C_l v_l(x)\Big\rangle = \\ = C_k\|v_k(x)\|^2 - C_k\|v_k(x)\|^2 = 0, \qquad n = \overline{1,n},$$

из (21.22) находим

$$\Big\|f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x)\Big\|^2 = \|\tilde{f}(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \|v_k(x)\|^2$$

или

$$\Big\|f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x)\Big\|^2 = \Big\|f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k v_k(x)\Big\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - C_k)^2 \|v_k(x)\|^2,$$

откуда и следует, что (21.21) примет минимальное значение при $a_k = C_k$.

$\Diamond$ Выбор абстрактной ортогональной системы $\{f_n(x)\}$ в виде основной тригонометрической системы (11.24)

$$\Big\{\cos\frac{\pi nx}{l}, \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi nx}{l}\Big\}$$

возвращает нас к тригонометрическому ряду Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\Big). \tag{21.23}$$

Все теоремы и выводы, сформулированные для абстрактных рядов Фурье, остаются справедливыми и для тригонометрических рядов (21.23). Конкретные формулы можно уточнить с помощью явного вида тригонометрической системы и введенного в разд. «Понятие ряда Фурье» скалярного произведения.

Так, тригонометрический полином Фурье k-го порядка

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\Big(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\Big) \tag{21.24}$$

минимизирует среднеквадратичное отклонение

$$\int\limits_{-l}^{l} [f(x) - S_k(x)]^2 dx = \min_{P_k(x)} \int\limits_{-l}^{l} [f(x) - P_k(x)]^2 dx,$$

где

$$P_k(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\Big(\alpha_n \cos\frac{\pi nx}{l} + \beta_n \sin\frac{\pi nx}{l}\Big)$$

– произвольный тригонометрический полином вида (21.24). Как следует из (21.18), ряд (21.23) сходится в среднем к $f(x)$. Уравнение замкнутости (21.17) с учетом соотношений (11.12)–(11.22) и того, что часть коэффициентов c_n обозначается через a_n, а часть – через b_n, в этом случае можно записать

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2). \tag{21.25}$$

Неравенство Бесселя, соответственно, принимает вид

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \tag{21.26}$$

откуда для любой квадратично интегрируемой функции $f(x)$ следует сходимость числового ряда, стоящего в правой части (21.26), а также сходимость каждого из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \tag{21.27}$$

в отдельности.

Наконец, из (21.17) приходим к обобщенному уравнению замкнутости или обобщенной формуле Парсеваля

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx. \tag{21.28}$$

Здесь $a_n, b_n, \alpha_n, \beta_n$ – коэффициенты тригонометрических рядов Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно.

$\lozenge$ Все приведенные выше неравенства остаются справедливыми также для четной и нечетной подсистем, определенных на промежутке $[0, l]$.

Пример 21.5. С помощью равенства Парсеваля для функции из примера 11.3 найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Решение. В примере 11.3 получено разложение функции $f(x) = x$ в ряд Фурье

$$x = \sum \frac{(-1)^{n+1}2}{n}\sin nx, \qquad x \in [-\pi, \pi], \tag{21.29}$$

согласно которому, по формуле (21.25) находим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{21.30}$$

что совпадает с (17.13).

◊ Сказанное выше можно распространить на случай комплекснозначных функций вещественного аргумента. В линейной алгебре такой переход соответствует переходу от евклидовых пространств к эрмитовым.

♦ Комплекснозначная функция $v(x)$ называется *квадратично интегрируемой* на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x) > 0$, $t \in [a, b]$, если существует интеграл

$$\int\limits_a^b \rho(x)|v(x)|^2 dx. \tag{21.31}$$

Множество всех квадратично интегрируемых на $[a, b]$ комплекснозначных функций будем обозначать $L_2([a, b], \rho(x), \mathbb{C})$ или просто L_2.

Аналогично в пространстве $L_2([a, b], \rho(x), \mathbb{C})$ определяются скалярное произведение и норма.

♦ *Скалярным произведением двух комплекснозначных функций* $v_1(x)$ и $v_2(x)$ будем называть число $\langle v_1(x)|v_2(x)\rangle$, определяемое равенством

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_1(x)|v_2(x)\rangle_\rho = \int\limits_a^b \rho(x)v_1^*(x)v_2(x)dx, \tag{21.32}$$

где $v_n^*(x)$ – функция, комплексно сопряженная функции $v_n(x)$.

♦ *Нормой комплекснозначной функции* $v(x)$ будем называть число

$$\|v\| = \|v(x)\| = \sqrt{\langle v(x)|v(x)\rangle_\rho} = \sqrt{\int\limits_a^b \rho(x)|v(x)|^2 dx} \geqslant 0. \tag{21.33}$$

Пример 21.6. Установить свойства скалярного произведения (21.32), аналогичные свойствам (21.4).

Решить самостоятельно.

♦ Система комплекснозначных функций $\{u_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется *ортонормированной* на интервале $a < x < b$, если

$$\int\limits_a^b u_n(x)u_m^*(x)dx = \delta_{mn}, \tag{21.34}$$

где $u_n^*(x)$ – функция, комплексно сопряженная функции $u_n(x)$.

Пример 21.7. Показать,что система комплекснозначных функций

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\Big\}, \qquad n = \overline{-\infty, \infty}$$

является ортонормированной с весом $\rho(x) = 1$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Решение. При $n \neq m$, $m, n = \overline{-\infty, \infty}$,

$$J_{nm} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-imx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{-i}{2\pi(n-m)}e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Аналогично при $n = m$

$$J_{nn} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)^2 dx = 1,$$

что и требовалось показать.

Ортонормированные системы функций обладают целым рядом замечательных свойств, которые будут изучены позднее. Здесь же отметим, что коэффициенты Фурье C_n разложения функции $f(x)$ (21.12) по полной ортонормированной системе комплекснозначных функций вычисляются по формуле

$$C_n = \int\limits_a^b f(y)u_m^*(y)dy, \tag{21.35}$$

которая с очевидностью вытекает из (21.12) с учетом (21.34).

Подставив (21.35) в (21.12), запишем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \int\limits_a^b f(y)u_n^*(y)dy, \quad a < x < b. \tag{21.36}$$

Формально изменив в (21.36) порядок интегрирования и суммирования, получим

$$f(x) = \int\limits_a^b f(y)G(x,y)dy, \quad G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n^*(y); \tag{21.37}$$
$$a < x < b, \quad a < y < b.$$

Сравнив ядро функционала (21.37) с определением дельта-функции, видим, что функция $G(x,y)$ в пространстве L_2 играет роль $\delta(x-y)$.

♦ Соотношение

$$\delta(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n^*(y), \quad a < x < b, \quad a < y < b, \tag{21.38}$$

справедливое для любой функции $f(x) \in L_2$, называется *условием полноты* для ортонормированной системы $\{u_n(x)\}$ в классе L_2.

Таким образом, полные ортонормированные системы функций $\{u_n(x)\}$ порождают представление дельта-функции в виде (21.38).

Соотношение (21.38) широко используется в физической литературе, где его часто принимают за определение полной в пространстве L_2 системы функций и называют условием полноты.

Заметим, что ряд в (21.37) может в обычном смысле расходиться. В этом случае сходимость ряда (21.37) понимается в обобщенном смысле. Опишем один из наиболее используемых методов суммирования расходящихся рядов – метод Абеля (см., например, [33]). Название метода восходит к теореме Абеля, из которой следует непрерывность суммы степенного ряда. Рассмотрим вспомогательный степенной ряд

$$G(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n^*(y)z^n, \tag{21.39}$$
$$a < x < b, \quad a < y < b, \quad |z| < 1.$$

Если ряд (21.39) сходится в обычном смысле, то равенство (21.38) понимается следующим образом: для любой функции $\varphi(x) \in L_2$

$$\lim_{z\to 1-0}\int\limits_a^b \varphi(y)G(x,y,z)dy = \varphi(x). \tag{21.40}$$

$\Diamond$ Если в соотношении (21.39) z — комплексное число, то предел при $z \to 1$ в (21.40) вычисляется по любой кривой в комплексной плоскости, лежащей в круге единичного радиуса и не касающейся окружности.

В результате можно дать еще одну формулировку теоремы Дирихле 16.2:

Теорема 21.1 (Дирихле). На множестве 2π-периодических функций, удовлетворяющих на отрезке $[-\pi,\pi]$ условиям Дирихле (т.е. кусочно-монотонных и имеющих конечное число точек разрыва первого рода), справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)G(x,y)dy = \frac{1}{2}[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)]$$

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx\cos ny + \sin nx \sin ny).$$

Доказательство. Ряд, стоящий в правой части (21.1), расходится в обычном смысле, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости. Просуммируем его методом Абеля. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$G(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}z^n(\cos nx\cos ny + \sin nx\sin ny) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}z^n\cos n(x-y).$$

Но при $|z|<1$ и произвольном α справедливо соотношение

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}z^n\cos n\alpha = \frac{1}{2}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n(e^{i\alpha n}+e^{-i\alpha n})\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1+\frac{ze^{i\alpha}}{1-ze^{i\alpha}}+\frac{ze^{-i\alpha}}{1-ze^{-i\alpha}}\Big] = \frac{1-z^2}{2(1-2z\cos\alpha+z^2)},$$

т.е.

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}z^n\cos n\alpha = \frac{1-z^2}{2(1-2z\cos\alpha+z^2)}. \tag{21.41}$$

Следовательно,

$$G(x,y,z) = \frac{1-z^2}{2\pi(1-2z\cos(x-y)+z^2)}. \tag{21.42}$$

Рассмотрим произвольную 2π-периодическую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую на отрезке $[-\pi,\pi]$ условиям Дирихле. Обозначим

$$\varphi(x,z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}G(x,y,z)\varphi(y)dy =$$

$$= \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} G(x, t+x, z)\varphi(t+x)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} G(x, t+x, z)\varphi(t+x)dt.$$

Здесь мы воспользовались периодичностью функций $\varphi(x)$ и $G(x, y, z)$. Разобьем последний интеграл на два:

$$\varphi(x, z) = \int\limits_{-\pi}^{0} G(x, x+t, z)\varphi(x+t)dt + \int\limits_{0}^{\pi} G(x, x+t, z)\varphi(x+t)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \big[G(x, x+t, z)\varphi(x+t) + G(x, x-t, z)\varphi(x-t)\big]dt.$$

С учетом явного вида функции $G(x, y, z)$ (21.42) получим

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{g(x+t)(1-z^2)}{1-2z\cos t + z^2}dt, \tag{21.43}$$

где обозначено

$$g(x+t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)].$$

Заметим, что для всех z, $|z| < 1$, выполняется

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-z^2}{1-2z\cos t + z^2}dt = 1 \tag{21.44}$$

и для любого $\varepsilon \in]0, \pi[$ справедливо

$$\lim_{z\to 1-0} \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{g(x+t)(1-z^2)}{1-2z\cos t + z^2}dt = 0, \tag{21.45}$$

так как в этом случае знаменатель дроби положителен, а числитель стремится к нулю.

Для любого числа $\rho > 0$ выберем такое $\varepsilon \in]0, \pi[$, чтобы для всех $t \in [0, \varepsilon[$ выполнялось неравенство

$$|g(t) - g(+0)| < \rho. \tag{21.46}$$

Тогда в силу (21.44) и (21.46) справедлива следующая оценка:

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{g(t)(1-z^2)}{1-2z\cos t + z^2}dt - g(+0)\Big| < \Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{[g(t) - g(+0)](1-z^2)}{1-2z\cos t + z^2}dt\Big| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{|g(t) - g(+0)|(1-z^2)}{1-2z\cos t + z^2}dt \leqslant \rho\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{1-z^2}{1-2z\cos t + z^2}dt \leqslant \rho,$$

т.е. справедлива оценка

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{g(t)(1-z^2)}{1-2z\cos\alpha + z^2}dt - g(+0)\Big| < \rho,$$

не зависящая от z. Отсюда с учетом (21.45) и определения функции $G(x, y, z)$ получим

$$\lim_{z\to 1-0}\int\limits_{-\pi}^{\pi} G(x, y, z)\varphi(y)dy = \frac{1}{2}[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)], \tag{21.47}$$

что и требовалось показать.

♢ В разделе «Специальные функции» мы в явном виде покажем справедливость условия полноты (21.38) для полиномов Лежандра $P_n(x)$, функций Эрмита $U_n(x)$ и функций Лагерра $I_{\nu+n,n}(x)$.

22. Интегрирование тригонометрических рядов Фурье

Теорема 22.1. *Ряды Фурье кусочно-непрерывных функций $f(x)$ можно почленно интегрировать, т.е.*

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int\limits_{x_0}^{x} a_n\cos\frac{\pi nx}{l}dx + \int\limits_{x_0}^{x} b_n\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big). \tag{22.1}$$

Доказательство. Воспользуемся обобщенным уравнением замкнутости (21.28), положив в нем

$$g(x) = \begin{cases} 1, & [x_0, x]; \\ 0, & [-l, l]\setminus[x_0, x]. \end{cases} \tag{22.2}$$

Тогда

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

Отсюда с учетом формул для коэффициентов Фурье функции (22.2):

$$\alpha_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x} dx,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x}\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{x_0}^{x}\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

приходим к равенству

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int\limits_{x_0}^{x} a_n\cos\frac{\pi nx}{l}dx + \int\limits_{x_0}^{x} b_n\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big),$$

совпадающему с (22.1). Доказательство соотношения (22.1) проведено только на основе уравнения замкнутости, без использования предположений о характере сходимости ряда (21.23). Поэтому можно утверждать, что ряд (22.1) сходится независимо от сходимости исходного ряда (21.23), что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Промежуток $[-l, l]$ в условии теоремы можно заменить промежутком $[0, 2l]$. Кроме того, теорема остается справедливой и для синус- и косинус-рядов Фурье, рассматриваемых на промежутке $[0, l]$.

Пример 22.1. Показать, что для любой кусочно-непрерывной абсолютно интегрируемой на промежутке $[-l, l]$ функции $f(x)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}, \tag{22.3}$$

где b_n – коэффициенты Фурье этой функции, сходится.

Решение. В формуле (22.1) выполним интегрирование выражений, стоящих под знаком суммы, положив $x_0 = 0$:

$$\int\limits_0^x\Big[f(x)-\frac{a_0}{2}\Big]dx = \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{a_n}{n}\sin\frac{\pi nx}{l} - \frac{b_n}{n}\Big(\cos\frac{\pi nx}{l} - 1\Big)\Big]. \tag{22.4}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{gathered} F(x) = \int\limits_0^x\Big[f(x)-\frac{a_0}{2}\Big]\,dx, \\ A_0 = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}, \quad A_n = -\frac{lb_n}{\pi n}, \quad B_n = -\frac{la_n}{\pi n}, \end{gathered} \tag{22.5}$$

то (22.4) можно записать

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos\frac{\pi nx}{l} + B_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big). \tag{22.6}$$

Согласно теореме 22.1, ряд (22.6) сходится к функции $F(x)$, но тогда коэффициент A_0 конечен и, следовательно,

$$\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = A_0 < \infty, \tag{22.7}$$

откуда и вытекает сходимость ряда (22.3). Заметим, что можно найти сумму этого ряда. Для этого ряд Фурье (22.6) проинтегрируем на интервале $[-l, l]$ и получим

$$\int\limits_{-l}^{l}F(x)dx = \int\limits_{-l}^{l}\frac{A_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx + B_n\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big] = A_0 l.$$

Таким образом,

$$A_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}F(x)dx \tag{22.8}$$

и, соответственно, из (22.7) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{\pi}{2l^2} \int\limits_{-l}^{l} F(x)\,dx. \tag{22.9}$$

Формула (22.8) позволяет при интегрировании ряда находить коэффициент A_0, не прибегая к суммированию (22.7).

Пример 22.2. Найти разложение функции $f(x) = x^2$, заданной на промежутке $[-\pi, \pi]$, в ряд Фурье.

Решение. Такое разложение найдено в примере 18.3 непосредственным вычислением коэффициентов a_n, b_n. Такой способ неудобен тем, что при вычислении соответствующих интегралов используется двукратное интегрирование по частям. Если воспользоваться известным разложением (21.29), полученным в примере 11.3, то искомое разложение может быть найдено его интегрированием. Действительно, по теореме 22.1 имеем

$$\int\limits_0^x x\,dx = \sum \frac{(-1)^{n+1}2}{n} \int\limits_0^x \sin nx\,dx$$

или

$$F(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos nx + B_n \sin nx\big). \tag{22.10}$$

Если учесть, что в разложении (21.29) $a_0 = a_n = 0$, $b_n = (-1)^{n+1}2/n$, то по формулам (22.5) найдем

$$A_n = -\frac{(-1)^{n+1}2}{n^2} = \frac{(-1)^n 2}{n^2}, \quad B_n = 0.$$

Коэффициенты A_0 можно найти или по формуле (22.7)

$$A_0 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2}{n^2} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

из которой с учетом известной суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

(см. пример 18.3) следует

$$A_0 = 4\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3},$$

или по формуле (22.8)

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

В конечном итоге подстановка всех найденных коэффициентов в (22.10) дает разложение

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{n^2}\cos nx$$

или

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$$

совпадающее с полученным в примере 18.3 разложением.

Пример 22.3. Исходя из известного на полупериоде $[0,\pi]$ разложения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx=\begin{cases}-x/2, & 0\leqslant x<\pi/2;\\ (\pi-x)/2, & \pi/2<x\leqslant\pi,\end{cases}\tag{22.11}$$

найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\tag{22.12}$$

и сумму ряда Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx.\tag{22.13}$$

Решение. Ряд Фурье (22.11) проинтегрируем в пределах от нуля до некоторого $x<\pi/2$ и получим

$$\int\limits_0^x dx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\int\limits_0^x\sin nx\,dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\cos nx\Big|_0^x=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}(\cos nx-1)=\int\limits_0^x\Big(-\frac{x}{2}\Big)dx=-\frac{x^2}{4}\Big|_0^x=-\frac{x^2}{4}$$

или

$$\frac{x^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\cos nx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}.\tag{22.14}$$

Чтобы найти сумму числового ряда (22.12), равенство (22.14) проинтегрируем на промежутке $[0,\pi/2]$. Это дает

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x^2}{4}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos nx\,dx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2}dx$$

или

$$\frac{\pi^3}{96}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2},$$

откуда с учетом соотношения

$$\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{2}\sin n\pi=0$$

имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{48}. \tag{22.15}$$

Чтобы найти сумму ряда Фурье (22.13), равенство (22.14) проинтегрируем еще раз на промежутке $[0, x<\pi/2]$. Тогда

$$\int\limits_0^x\frac{x^2}{4}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\int\limits_0^x\cos nx\,dx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\int\limits_0^x dx$$

или

$$\frac{x^3}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Подставив формулу (22.15) в полученное равенство, найдем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx=\frac{x^3}{12}-\frac{x\pi^2}{48},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}. \tag{22.16}$$

Чтобы найти сумму (22.13) в интервале $\pi/2<x\leqslant\pi$, ряд Фурье (22.11) проинтегрируем в промежутке от $x>\pi/2$ до $x=\pi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\int\limits_x^{\pi}\sin nx\,dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\cos nx\Big|_x^{\pi}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}(\cos nx-\cos nx)=\int\limits_x^{\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=-\frac{(\pi-x)^2}{4}\Big|_x^{\pi}=-\frac{(\pi-x)^2}{4}$$

или

$$\frac{(\pi-x)^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\cos nx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\cos n\pi. \tag{22.17}$$

Положив в (22.17) $x=\pi/2$, получим соотношение

$$\frac{\pi^2}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos^2\frac{n\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\cos n\pi. \tag{22.18}$$

Преобразуем первую сумму в правой части (22.18) следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos^2\frac{n\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1+\cos n\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1+(-1)^n}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}.$$

Отсюда с учетом (17.12) найдём

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos^2\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{24}. \tag{22.19}$$

Подставив (22.19) в (22.18), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\cos n\pi=\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{16}=-\frac{\pi^2}{48}. \tag{22.20}$$

В свою очередь, подстановка (22.20) в (22.17) приводит его к виду

$$\frac{(\pi - x)^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\frac{n\pi}{2} \cos nx + \frac{\pi^2}{48}, \quad \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \tag{22.21}$$

Проинтегрировав полученное выражение на промежутке от $x > \pi/2$ до $x = \pi$, получим

$$\int\limits_x^\pi \frac{(\pi - x)^2}{4} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\frac{n\pi}{2} \int\limits_x^\pi \cos nx\, dx + \frac{\pi^2}{48} \int\limits_x^\pi dx$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos\frac{n\pi}{2} \sin nx = \frac{(x - \pi)^3}{12} - \frac{\pi^2}{48}(x - \pi), \quad \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \tag{22.22}$$

Объединив (22.16) и (22.22), можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos\frac{n\pi}{2} \sin nx = \begin{cases} \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x\pi^2}{48}, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{(x - \pi)^3}{12} - \dfrac{\pi^2(x - \pi)}{48}, & \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases} \tag{22.23}$$

Заметим, что мы попутно установили равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\frac{n\pi}{2} \cos nx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{48}, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{(x - \pi)^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{48}, & \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi, \end{cases} \tag{22.24}$$

которое получается объединением (22.14), (22.15) и (22.21).

23. Дифференцирование тригонометрических рядов Фурье

Теорема 23.1. *Ряды Фурье непрерывных кусочно-гладких на промежутке* $[-l, l]$ *функций* $f(x)$*, таких, что* $f(-l) = f(l)$*, можно почленно дифференцировать.*

Доказательство. Если теорема справедливо, то мы имеем два разложения

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right), \tag{23.1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l} b_n \cos\frac{\pi n x}{l} - \frac{\pi n}{l} a_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right). \tag{23.2}$$

С другой стороны, для функции $f'(x)$ можно записать собственное разложение с коэффициентами a'_n, b'_n:

$$f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a'_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b'_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right), \tag{23.3}$$

которые определяются стандартным образом по функции $f'(x)$:

$$a'_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\,dx, \quad a'_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$$

$$b'_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Вычисление первого интеграла с учетом условий теоремы даёт

$$a'_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f'(x)\,dx = \frac{1}{l}f(x)\Big|_{-l}^{l} = \frac{1}{l}[f(l) - f(-l)] = 0. \tag{23.4}$$

Два последних интеграла вычислим по частям:

$$a'_n = \frac{1}{l}\left[f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{-l}^{l} + \frac{\pi n}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{l}[f(l) - f(-l)]\cos\pi n + \frac{\pi n}{l^2}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \frac{\pi n}{l}\left[\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\right] = \frac{\pi n}{l}b_n, \tag{23.5}$$

$$b'_n = \frac{1}{l}\left[f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{\pi n}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx\right] =$$

$$= -\frac{\pi n}{l}\left[\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx\right] = -\frac{\pi n}{l}a_n. \tag{23.6}$$

В силу условия $f(-l) = f(l)$, которое обеспечивает непрерывное периодическое продолжение функции $f(x)$ с промежутка $[-l, l]$ на всю числовую ось, для коэффициентов a'_0, a'_n, b'_n из (23.4)–(23.6) получим

$$a'_0 = 0, \quad a'_n = \frac{\pi n}{l}b_n, \quad b'_n = -\frac{\pi n}{l}a_n. \tag{23.7}$$

В результате ряды (23.2) и (23.3) совпадают.

Таким образом, мы показали, что для определенных классов функций $f(x)$ их производные можно получить почленным дифференцированием соответствующих им рядов Фурье.

♢ Подчеркнем, что теорема 23.1 раскрывает принципиальную возможность почленного дифференцирования ряда Фурье, но не гарантирует сходимости продифференцированного ряда к производной $f'(x)$. Другими словами, теорема не гарантирует знака равенства в выражении (23.2). Для установления сходимости ряда (23.2) к $f'(x)$ следует воспользоваться сформулированными ранее признаками сходимости Дини и Дирихле аналогично тому, как это делается при дифференцировании равномерно сходящихся рядов. Равномерно сходящийся ряд можно почленно дифференцировать при условии, что ряд из производных так же будет равномерно сходящимся, для установления чего необходимо дополнительное исследование. Очевидно, что ряд Фурье (23.2) будет сходиться к $f'(x)$ при условии, что он будет равномерно сходящимся. Для выяснения этого следует рассмотреть равномерную сходимость рядов Фурье, что и будет сделано ниже.

Пример 23.1. В зависимости от параметра a исследовать возможность почленного дифференцирования ряда Фурье функции $f(x) = \sin ax$, заданной на промежутке $[-l, l]$.

Решение. Функция $f(x) = \sin ax$ внутри промежутка удовлетворяет условиям теоремы 23.1. Проверим выполнение условия $f(-l) = f(l)$, которое в данном случае имеет вид

$$\sin(-al) = \sin l. \tag{23.8}$$

Это уравнение имеет корни $a = \pi k/l$, где k – любое целое число. Следовательно, только для этих a производную функции $f(x)$ можно получить почленным дифференцированием ее ряда Фурье.

Напомним, что в примере 17.2 было получено разложение функции $\sin ax$ в ряд Фурье. При $a = \pi k/l$ это разложение сходится к самой функции, что и подтверждает возможность соответствующего дифференцирования. Если $a \neq \pi k/l$, то разложение имеет вид

$$\sin ax = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\pi n \sin al}{l^2[a^2 - (\pi n/l)^2]} \sin \frac{\pi n x}{l} \tag{23.9}$$

и почленное дифференцирование приводит к разложению

$$a \cos ax = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(\pi n)^2 \sin al}{l^3[a^2 - (\pi n/l)^2]} \cos \frac{\pi n x}{l}. \tag{23.10}$$

Очевидно, что ряд в правой части (23.10) не «представляет» функцию $a \cos ax$. Более того, он вообще не является рядом Фурье абсолютно интегрируемой функции, поскольку его коэффициенты не стремятся к нулю при $n \to \infty$. Последнее обстоятельство как раз и подтверждает невозможность почленного дифференцирования ряда Фурье (23.9).

На рис. 21 изображены графики функции $\sin ax$ для двух частных случаев: $a = \pi/l$ и $a = \pi/(2l)$, характеризующие непрерывное и разрывное продолжения функции с промежутка $[-l, l]$.

Забегая вперед, заметим, что трудности, связанные с дифференцированием выражения (23.9), обусловлены не только характером разложения, представляющего разрывную функцию, но и классическим пониманием производной. Упрощая, можно сказать, что производная в точке разрыва выражается через дельта-функцию. Для корректного рассмотрения этого вопроса необходимо введение обобщенных функций (см. разд. «Обобщенные функции» [2].

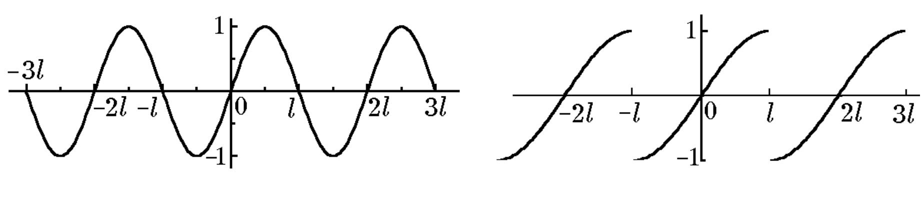


Рис. 21

Пример 23.2. С помощью ряда Фурье найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''(x) - y(x) = f(x), \tag{23.11}$$

где $f(x)$ – периодическая функция с периодом 2π, совпадающая в промежутке $[-\pi, \pi]$ с функцией $|x|$.

Решение. При нахождении частного решения уравнения (23.11) будем использовать разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье. Для этого воспользуемся результатом решения примера 18.2

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

Это позволяет записать уравнение (23.11) в виде

$$y''(x) - y(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x. \tag{23.12}$$

Решение этого уравнения будем искать также в виде тригонометрического ряда Фурье

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \tag{23.13}$$

коэффициенты которого подлежат определению. Вычислив

$$y''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \tag{23.14}$$

и подставив (23.13), (23.14) в (23.12), получим

$$-\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k\cos kx + b_k\sin kx) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

Приравняв коэффициенты при синусах и косинусах равных кратных дуг, найдём

$$\begin{aligned}
\cos 0x &: -\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2};\\
\sin kx &: -b_k(k^2+1) = 0, \quad k = \overline{1,\infty};\\
\cos 2nx &: -a_{2n}[(2n)^2+1] = 0, \quad n = \overline{1,\infty};\\
\cos(2n-1)x &: -a_{2n-1}[(2n-1)^2+1] = -\frac{4}{\pi(2n-1)^2},
\end{aligned}$$

откуда

$$a_0 = 0, \quad b_k = 0, \quad a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)^2[(2n-1)^2+1]}. \tag{23.15}$$

Подстановка (23.15) в (23.13) даёт искомое частное решение уравнения (23.11):

$$y(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2[(2n-1)^2+1]}\cos(2n-1)x.$$

24. Равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье

Обратимся к еще одному аспекту разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\Big]. \tag{24.1}$$

Как уже упоминалось, равномерная сходимость ряда (24.1) к функции $f(x)$ предъявляет к этой функции более жесткие требования, нежели сходимость в среднем.

Для выяснения этих требований следовало бы, вообще говоря, сначала выяснить условия равномерной сходимости интеграла Дирихле (13.1), а затем обобщить теоремы Дирихле и Дини для условий равномерной сходимости ряда Фурье. Однако такой подход представляет более теоретический, чем практический интерес. Поэтому мы будем использовать непосредственно признаки сходимости и некоторые свойства рядов Фурье.

Теорема 24.1. *Ряд Фурье непрерывной и кусочно-гладкой на $[-l, l]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно в замкнутом промежутке $[-l, l]$, если значения этой функции на концах этого промежутка равны, т.е. $f(-l) = f(l)$.*

Доказательство. В силу условий этой теоремы и теоремы Дирихле ряд (24.1) сходится в каждой точке промежутка $[-l, l]$. Для доказательства его равномерной сходимости воспользуемся рядом

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|), \tag{24.2}$$

мажорирующим ряд (24.1). Для доказательства теоремы достаточно показать, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|). \tag{24.3}$$

Пусть a'_n и b'_n – коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, которые связаны с коэффициентами a_n и b_n соотношениями (23.7). Тогда

$$\frac{l}{\pi n}|a'_n| = |b_n|, \qquad \frac{l}{\pi n}|b'_n| = |a_n|. \tag{24.4}$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a'_n|}{n} \tag{24.5}$$

сходится. Воспользовавшись неравенством

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - |a_n|\Big)^2 \leqslant 0,$$

т.е.

$$\frac{|a'_n|}{n} \leqslant \frac{|a'_n|^2 + n^{-2}}{2}$$

и учитывая сходимость рядов, составленных из слагаемых в правой части, приходим к требуемому утверждению: ряд (24.5) сходится. Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n'|}{n} \tag{24.6}$$

(кстати, сходимость этого ряда доказана ранее в примере 22.1 другим способом). Теперь из (24.4) следует сходимость ряда (24.3). В свою очередь, из сходимости мажорирующего ряда (24.3) в силу признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость ряда Фурье (24.1), что и требовалось доказать.

Доказанная теорема имеет равносильную формулировку, принадлежащую Вейерштрассу. Эта формулировка оказывается полезной в приложениях при приближенном вычислении функции $f(x)$ с помощью тригонометрических полиномов.

Теорема 24.2 (Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* 24.1, *то для всех $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином $S_k(x)$, что*

$$|f(x) - S_k(x)| < \varepsilon. \tag{24.7}$$

Действительно, если $S_k(x)$ рассматривать как k-частичную сумму ряда Фурье (24.1), то неравенство (24.7) непосредственно следует из определения равномерной сходимости последовательности $\{S_k(x)\}$ к функции $f(x)$ на промежутке $[-l, l]$.

Полезно привести еще одну формулировку теоремы 24.1.

Теорема 24.3. *Если функция $f(x)$, периодическая с периодом $2l$, является непрерывной и кусочно-гладкой на всей числовой оси, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой оси.*

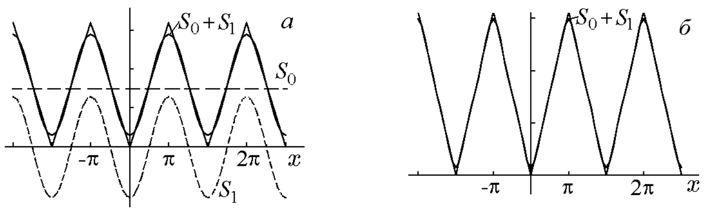


Рис. 22

Рис. 22 наглядно иллюстрирует (несколькими гармониками) эту теорему на примере функции $y = |x|$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и непрерывно и периодически продолженной на всю числовую ось (см. пример 17.1).

В заключение, не вдаваясь в подробности, заметим, что теорема 24.1 допускает обобщение на случай кусочно-гладких функций, формулируя условия равномерной сходимости ряда Фурье (24.1) к функции $f(x)$ на каждом из интервалов непрерывности.

Условия равномерной сходимости ряда Фурье в точках разрыва не выполняются, однако характер сходимости ряда в их окрестности может оказаться несколько неожиданным. Проиллюстрируем поведение ряда Фурье вблизи точек разрыва частным примером. Описанный в этом примере своеобразный дефект сходимости тригонометрического ряда Фурье известен под названием «эффект Гиббса».

Пример 24.1. Показать, что геометрическим изображением предела при $n \to \infty$ последовательности частичных сумм $S_n(x)$ ряда Фурье, сходящегося к функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & 0 < x < \pi; \\ 0, & x = 0,\ \pm\pi; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi < x < 0, \end{cases} \tag{24.8}$$

является не ломаная линия, показанная на рис. 23,*а*, как этого можно было ожидать,

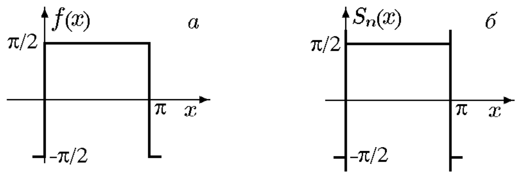


Рис. 23

а ломаная линия с удлиненными вертикальными отрезками, показанная на рис. 23,*б*.

Решение. Ряд Фурье, сходящийся к сумме (24.8), имеет вид (см. пример 18.1)

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}. \tag{24.9}$$

Изучим поведение частичной суммы ряда (24.9):

$$S_{2n}(x) = S_{2n-1}(x) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = 2\Big[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\Big]. \tag{24.10}$$

Поведение суммы (24.10) достаточно рассмотреть в промежутке $[0, \pi/2]$, поскольку четность функции (24.8) позволяет уменьшить отрезок $[-\pi, \pi]$ до $[0, \pi]$, а ее симметрия относительно прямой $x = \pi/2$, в свою очередь, — отрезок $[0, \pi]$ до $[0, \pi/2]$. Как и при выводе интеграла Дирихле, сумму (24.10) представим в виде

$$S_{2n-1}(x) = 2\int\limits_0^x \big\{\cos t + \cos 3t + \ldots + \cos(2n-1)t\big\}dt = \int\limits_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt. \tag{24.11}$$

Из уравнения

$$[S_{2n-1}(x)]' = \Big[\int\limits_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt\Big]' = \frac{\sin 2nx}{\sin x} = 0$$

непосредственно следует, что сумма $S_{2n-1}(x)$, обращаясь в нуль в точке $x = 0$, имеет экстремумы в точках $x_m^{(n)} = m\pi/2n$, $m = \overline{1, n}$. Легко установить, что точки x_m при нечетных m являются точками максимума, а при четных m – точками минимума. С другой стороны, заменой $2nt = \tau$ частичную сумму (24.11) можно представить как

$$S_{2n-1}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt = \frac{1}{2n}\int\limits_0^{2nx} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)}d\tau \tag{24.12}$$

или

$$S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n}\int\limits_0^{2nx} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)}d\tau = \frac{1}{2n}\Big\{\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)}d\tau + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)}d\tau + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)} d\tau + \int\limits_{k\pi}^{2nx} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)} d\tau \Big\}, \tag{24.13}$$

где k – целая часть дроби $2nx/\pi$.

Для произвольного интеграла из (24.13) имеем

$$\frac{1}{2n} \int\limits_{l\pi}^{(l+1)\pi} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)} d\tau = \frac{(-1)^l}{2n} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin(u+l\pi)/(2n)} du = (-1)^l S_l, \tag{24.14}$$

откуда следует, что

$$S_l > 0, \quad S_l > S_{l+1} \quad \text{для} \quad l \leqslant k-1. \tag{24.15}$$

Для последнего интеграла из (24.13) можем записать

$$\frac{1}{2n} \int\limits_{k\pi}^{2nx} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)} d\tau = (-1)^k \bar{S}_k, \tag{24.16}$$

причем $\bar{S}_k < S_k$.

В результате частичную сумму $S_{2n-1}(x)$ можно представить в виде знакочередующегося ряда

$$S_{2n-1}(x) = S_0 - S_1 + \ldots + (-1)^{k-1} S_{k-1} + (-1)^k \bar{S}_k \tag{24.17}$$

убывающих, согласно (24.15), слагаемых. В точках $x = x_m^{(n)} = m\pi/2n$ целая часть дроби $2nx/\pi$ совпадает с m, поскольку $2nx_m^{(n)}/\pi = m$ и, следовательно, сумма (24.17) в этих точках принимает значения

$$S_{2n-1}(x_m^{(n)}) = S_0 - S_1 + \ldots + (-1)^m S_m. \tag{24.18}$$

Для наглядности выпишем несколько первых экстремальных значений $S_{2n-1}(x_m^{(n)})$:

$$S_{2n-1}(x_1^{(n)}) = S_0, \quad S_{2n-1}(x_2^{(n)}) = S_0 - S_1,$$
$$S_{2n-1}(x_3^{(n)}) = S_0 - S_1 + S_2, \quad \ldots$$

Итак, небольшое исследование показывает, что при фиксированном n и изменении x от нуля до $\pi/2$ сумма $S_{2n-1}(x)$ ведет себя следующим образом: равная нулю в точке $x = 0$, она резко возрастает до своего максимального значения S_0 в точке $x_1^{(n)} = \pi/2n$ и затем начинает колебаться, приобретая в точках $x_m^{(n)} = m\pi/2n$ экстремальные значения, причем максимальные значения убывают, а минимальные возрастают по мере приближения x к $\pi/2$. На отрезке $[\pi/2, \pi]$ картина выглядит как зеркальное отображение. На отрезке же $[-\pi, 0]$ картина нечетным образом повторяется с отрезка $[0, \pi]$. Рис. 24 иллюстрирует сказанное выше для $n = 6$.

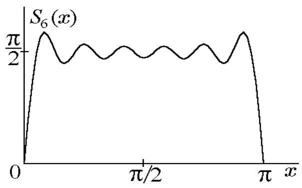


Рис. 24

Рассмотрим теперь поведение частичной суммы и ее экстремумов при $n \to \infty$. Начнем с первого – наибольшего – максимума $\mu_1^{(n)}$ в точке $x_1^{(n)} = \pi/2n$, значение которого, согласно (24.12), равно

$$\mu_1^{(n)} = S_{2n-1}(x_1^{(n)}) = S_{2n-1}(\pi/2n) = \frac{1}{2n} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\tau}{\sin\tau/(2n)} d\tau. \tag{24.19}$$

Для вычисления предела $\mu_1^{(n)}$ при $n \to \infty$ интеграл (24.19) представим в виде

$$\mu_1^{(n)} = \int\limits_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau}\frac{\tau/(2n)}{\sin\tau/(2n)}d\tau \tag{24.20}$$

и тогда

$$\lim_{n\to\infty}\mu_1^{(n)} = \int\limits_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau}\frac{\tau/(2n)}{\sin\tau/(2n)}d\tau = \int\limits_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau = \mathrm{Si}(\pi) = \mu_1. \tag{24.21}$$

Здесь символом $\mathrm{Si}(x)$ обозначена специальная функция

$$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau, \quad \mathrm{Si}(0) = 0, \quad \mathrm{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}, \tag{24.22}$$

называемая интегральным синусом [1]. В результате можем сказать, что значение в точке первого максимума при $n\to\infty$ отнюдь не стремится к нулю, а равно значению интегрального синуса в точке $x=\pi$, т.е. приближенно

$$\mu_1 = \mathrm{Si}(\pi) \approx \frac{\pi}{2} + 0{,}281 \tag{24.23}$$

(см., например, [1]).

Последующие значения $\mu_m^{(n)}$ при $n\to\infty$ в точках экстремума имеют пределы

$$\mu_m = \lim_{n\to\infty}\mu_m^{(n)} = \mathrm{Si}(m\pi), \quad m = \overline{2,\infty}. \tag{24.24}$$

Поскольку значения $\mu_m^{(n)}$ в точках всех экстремумов колеблются около $\pi/2$, то разности

$$\nu_m = \mu_m - \frac{\pi}{2}, \quad m = \overline{1,\infty},$$

образуют знакочередующуюся последовательность (см. таблицу значений $\mathrm{Si}(x)$ в [1])

$$\nu_1 \approx 0{,}251, \quad \nu_2 \approx -0{,}153, \quad \nu_3 \approx 0{,}104, \quad \nu_4 \approx -0{,}073, \quad \ldots, \tag{24.25}$$

для которой

$$\begin{gathered} |\nu_m| > |\nu_{m+1}|, \\ \lim_{m\to\infty}|\nu_m| = \lim_{m\to\infty}\mathrm{Si}(m\pi) - \frac{\pi}{2} = S(\infty) - \frac{\pi}{2} = 0. \end{gathered} \tag{24.26}$$

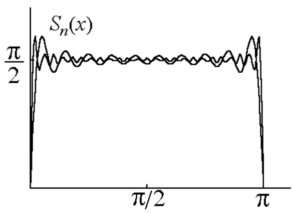


Рис. 25

Таким образом, все сказанное выше позволяет охарактеризовать сходимость частичных сумм $S_{2n-1}(x)$ к функции $f(x)$ на отрезке $[0,\pi/2]$ следующим образом. Точку разрыва $x=0$ функции $f(x)$ выделим малой окрестностью δ. В результате получим два полуинтервала $[0,\delta[$ и $]\delta,\pi/2]$. На втором полуинтервале ряд сходится равномерно, поскольку экстремумы, попадающие сюда, близки к $\pi/2$ в силу соизмеримости больших значений m и n. Графики частичных сумм при больших n сколь угодно близко примыкают к прямой $f(x)=\pi/2$ (рис. 25). На первом же полуинтервале $[0,\delta[$, где функция $f(x)$ скачком переходит от нуля к $\pi/2$, равномерная сходимость суммы (24.11) к этой функции, естественно, нарушается. Но сумма, в отличие от $f(x)$, меняется непрерывным образом. Равная примерно $\pi/2$ вблизи точки $x=\delta$, она с все большим размахом начинает колебаться около этого значения по мере приближения x от $x\approx\delta$ до $x=0$. Все экстремумы с малыми m, сдвигаясь влево, группируются около точки $x_1 = \pi/(2n)|_{n\to\infty} = +0$, соответствующей первому ($m=1$) наибольшему максимуму. Предельное значение частичной суммы в этой точке можно представить в виде

$$S_\infty(+0) = \frac{\pi}{2} + \nu_1 - \nu_2 + \nu_3 - \ldots$$

Если сумму знакочередующейся последовательности ν_i (24.25) оценить первым слагаемым, то приближенное значение $S_\infty(+0)$ можно записать

$$S_\infty(+0) = \frac{\pi}{2} + \nu_1 \approx \frac{\pi}{2} + 0{,}281.$$

В результате на полуинтервале $[0,\delta[$ предельное значение частичной суммы в точке $+0$ примерно на 0,281 больше, чем $\pi/2$, и только затем непрерывным образом резко уменьшается до нуля в точке $x=0$ (рис. 25). Но это и означает, что геометрическим изображением предела частичных сумм ряда (24.9) является ломаная, изображенная на рис. 23,*б*, вертикальные линии которой удлинены по сравнению с $\pi/2\approx 1{,}57$ на величину $\nu_1\approx 0{,}28$, составляющую примерно 18%. На отрезке $[\pi/2,\pi]$ картина зеркально отображается с отрезка $[0,\pi/2]$. В свою очередь, с отрезка $[0,\pi]$ картина нечетным образом отображается на отрезок $[-\pi,0]$. Все вместе это соответствует графику, изображенному на рис. 23,*б*, что и требовалось доказать.

25. Скорость сходимости тригонометрического ряда Фурье

Коэффициенты ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции, как это следует из теоремы Римана 13.1, стремятся к нулю при $n\to\infty$. С точки зрения вычислений выгодно, чтобы они стремились к нулю как можно быстрее, тогда ряд будет быстрее сходиться. В примере 17.1 мы установили для конкретной функции, что слагаемые порядка $1/n$ при $n\to\infty$ в коэффициентах Фурье, делающие ряд медленно сходящимся, возникают, если исходная функция имеет разрывы. Выясним, как влияют разрывы функции и ее производных на характер поведения коэффициентов в общем случае.

Теорема 25.1. *Если периодическая с периодом $2l$ функция $f(x)$ на всей числовой оси непрерывна вместе со своими производными до $(k-1)$-го порядка, а k-я производная кусочно-непрерывна, то коэффициенты Фурье a_n, b_n функции $f(x)$ есть бесконечно малые выше k-го порядка относительно величины $1/n$ при $n\to\infty$, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n^k}=\lim_{n\to\infty}a_nn^k=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{1/n^k}=\lim_{n\to\infty}b_nn^k=0, \tag{25.1}$$

причём все ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}(|a_n|+|b_n|),\qquad \alpha=\overline{0,k-1}, \tag{25.2}$$

сходятся.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ на $[-l,l]$ имеет разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big). \tag{25.3}$$

Согласно теореме о равномерной сходимости, ряд (25.3) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование, поскольку ряд для $f'(x)$ с коэффициентами a'_n и b'_n:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a'_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b'_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big) \tag{25.4}$$

также сходится равномерно в силу той же теоремы. Коэффициенты a_n, b_n связаны с коэффициентами a'_n, b'_n соотношениями (23.7):

$$a_n=-\frac{l}{\pi n}b'_n,\qquad b_n=\frac{l}{\pi n}a'_n. \tag{25.5}$$

Поскольку функция $f(x)$ обладает непрерывными производными до $(k-1)$-го порядка включительно, то операцию дифференцирования можно повторить

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a''_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b''_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big), \tag{25.6}$$

причём
$$a_n = -\Big(\frac{l}{\pi n}\Big)^2 a_n'', \qquad b_n = -\Big(\frac{l}{\pi n}\Big)^2 b_n'', \tag{25.7}$$
и ряд (25.6) сходится равномерно. Согласно условиям теоремы, операцию дифференцирования можно повторить ровно k раз, пока мы не получим ряд Фурье для k-й производной
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n^{(k)}\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n^{(k)}\sin\frac{\pi n x}{l}\Big), \tag{25.8}$$
являющейся кусочно-непрерывной функцией. Из формул (25.5) и (25.7) несложно установить связь между коэффициентами a_n, b_n и $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$:
$$a_n = \begin{cases}(-1)^{k/2}a_n^{(k)}/n^k, & k \text{ четное};\\ (-1)^{(k+1)/2}b_n^{(k)}/n^k, & k \text{ нечетное};\end{cases}$$
$$b_n = \begin{cases}(-1)^{k/2}b_n^{(k)}/n^k, & k \text{ четное};\\ (-1)^{(k-1)/2}b_n^{(k)}/n^k, & k \text{ нечетное};\end{cases}$$
или
$$a_n n^k = \begin{cases}(-1)^{k/2}a_n^{(k)}, & k \text{ четное};\\ (-1)^{(k+1)/2}b_n^{(k)}, & k \text{ нечетное};\end{cases} \tag{25.9}$$
$$b_n n^k = \begin{cases}(-1)^{k/2}b_n^{(k)}, & k \text{ четное};\\ (-1)^{(k-1)/2}b_n^{(k)}, & k \text{ нечетное};\end{cases} \tag{25.10}$$

Так как коэффициенты Фурье $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$, согласно теореме Римана 13.1, стремятся к нулю при $n \to \infty$, т.е.
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} b_n^{(k)} = 0, \tag{25.11}$$
то предельный переход (25.9) и (25.10) при $n \to \infty$ с учетом (25.11) приводит к (25.1). Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Сходимость рядов (25.2) обусловлена равномерной сходимостью рядов Фурье, представляющих функции $f(x)$, $f'(x)$ и т.д., до $f^{(k-1)}(x)$ включительно, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Отметим, что в случае непрерывной функции порядок малости коэффициентов Фурье a_n, b_n относительно $1/n$ при $n \to \infty$, как это следует из (25.1), превышает единицу. Это означает, что в коэффициентах a_n, b_n слагаемые, имеющие оценку $1/n$, отсутствуют. Наряду с этим подчеркнем, что теорема справедлива для периодических функций. Если теорема применяется к периодически продолженным с промежутка $[-l, l]$ функциям $f(x)$, то от них и их односторонних производных следует требовать выполнения условий
$$f(-l) = f(l), \quad f'(-l) = f'(l), \quad \ldots, \quad f^{(k-1)}(-l) = f^{(k-1)}(l). \tag{25.12}$$

Переформулируем эту теорему, сделав ее более удобной в практических приложениях.

Теорема 25.2. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 25.1 и точки x_i, $i = \overline{1,p}$, являются точками разрыва k-й производной $f^{(k)}(x)$ со скачком $\delta^{(k)}(x_i)$ в каждой точке разрыва. Тогда коэффициенты Фурье a_n, b_n функции $f(x)$ при $n \to \infty$ есть бесконечно малые $(k+1)$-го порядка относительно величины $1/n$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 25.1, будем исходить из разложения (25.3). Почленным дифференцированием рядов Фурье функции $f(x)$ и ее k-й производной было установлено, что коэффициенты a_n, b_n и $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$ связаны соотношениями (25.9), (25.10). Эта операция была возможной в силу равномерной сходимости упомянутых рядов Фурье. Поскольку функция $f^{(k)}(x)$ имеет разрывы, то ее ряд Фурье не является равномерно сходящимся, и, следовательно, связь между коэффициентами a_n, b_n и $a_n^{(k+1)}$, $b_n^{(k+1)}$ невозможно найти с помощью почленного дифференцирования ряда (25.8). Тем не менее, их можно вычислить, пользуясь определением (11.26):

$$\begin{aligned} a_n^{(k+1)} &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^{(k+1)}(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \\ b_n^{(k+1)} &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^{(k+1)}(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \end{aligned} \tag{25.13}$$

Предположив теперь, например, k четным, запишем первое равенство в (25.9) в виде

$$a_n n^k = (-1)^{k/2}a_n^{(k)} = (-1)^{k/2}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^{(k)}(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Для вычисления этого интеграла предположим сначала, что в промежутке $[-l, l]$ имеется одна точка разрыва x_1, тогда

$$a_n n^k = (-1)^{k/2}\frac{1}{l}\Big[\int\limits_{-l}^{x_1} f^{(k)}(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx + \int\limits_{x_1}^{l} f^{(k)}(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\Big].$$

Проинтегрировав по частям:

$$U = f^{(k)}(x), \quad dV = \cos\frac{\pi nx}{l}dx, \quad dU = f^{(k+1)}(x)\,dx, \quad V = \frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l},$$

получим

$$\begin{aligned} a_n n^k = \frac{(-1)^{k/2}}{l}\Big[\frac{l}{\pi n}f^{(k)}(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_{-l}^{x_1} - \frac{l}{\pi n}\int\limits_{-l}^{x_1} f^{(k+1)}(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx+ \\ + \frac{l}{\pi n}f^{(k)}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_{x_1}^{l} - \frac{l}{\pi n}\int\limits_{x_1}^{l} f^{(k+1)}(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big] = \\ =(-1)^{k/2}\frac{1}{l}\Big\{\frac{l}{\pi n}\Big[f^{(k)}(x_1+0) - f^{(k)}(x_1-0)\Big]\sin\frac{\pi nx_1}{l} - \frac{l}{\pi n}\int\limits_{-l}^{l} f^{(k+1)}(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big\}. \end{aligned}$$

Если обозначить

$$\delta^{(k)}(x_1) = f^{(k)}(x_1+0) - f^{(k)}(x_1-0) \tag{25.14}$$

и учесть (25.13), то

$$a_n n^k = (-1)^{k/2}\Big[-\frac{1}{\pi n}\delta^{(k)}(x_1)\sin\frac{\pi nx_1}{l} - \frac{l}{\pi n}a_n^{(k+1)}\Big]$$

или

$$a_n = (-1)^{k/2+1}\Big[\frac{\delta^{(k)}(x_1)\sin(\pi nx_1/l)}{\pi n^{k+1}} + \frac{l}{\pi n^{k+1}}a_n^{(k+1)}\Big]. \tag{25.15}$$

Здесь первое слагаемое при $n \to \infty$ является бесконечно малой порядка $(k+1)$ по отношению к величине $1/n$, а второе – бесконечно малой более высокого порядка, чем $(k+1)$, поскольку сам коэффициент $a_n^{(k+1)} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, коэффициент a_n имеет порядок малости $(k+1)$ относительно величины $1/n$. Последнее можно записать в виде

$$a_n \sim \frac{1}{n^{k+1}}, \tag{25.16}$$

где символ $\sim$ определен в разд. «Простейшие асимптотические оценки» [2].

Аналогично для b_n получаем

$$b_n = (-1)^{k/2}\Big[\frac{\delta^{(k)}(x_1)\cos(\pi n x_1/l)}{\pi n^{k+1}} + \frac{l}{\pi n^{k+1}} b_n^{(k+1)}\Big]. \tag{25.17}$$

Это означает, что

$$b_n \sim \frac{1}{n^{k+1}}. \tag{25.18}$$

Повторив аналогичные выкладки для нечетных k, легко убедиться, что оценки (25.16) и (25.18) справедливы и для этого случая. Таким образом, оценки (25.16) и (25.18) справедливы для любых k. Напомним, что эти оценки мы получили в предположении, что существует лишь одна точка разрыва x_1. Наличие большего числа точек разрыва не меняет существа дела, поскольку

$$a_n = (-1)^{k/2+1}\Big[\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\delta^{(k)}(x_i)\sin(\pi n x_i/l)}{\pi n^{k+1}} + \frac{l}{\pi n^{k+1}} a_n^{(k+1)}\Big]; \tag{25.19}$$

$$b_n = (-1)^{k/2}\Big[\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\delta^{(k)}(x_i)\cos(\pi n x_i/l)}{\pi n^{k+1}} + \frac{l}{\pi n^{k+1}} b_n^{(k+1)}\Big], \tag{25.20}$$

откуда мы снова приходим к оценкам (25.16) и (25.18). Таким образом, теорема доказана.

Можно показать, что справедлива и обратная

Теорема 25.3. *Если коэффициенты Фурье a_n, b_n функции $f(x)$ имеют оценку* (25.16) *или* (25.18)*, то производная k-го порядка $f^{(k)}(x)$ имеет в промежутке $[-l, l]$ по крайней мере одну точку разрыва.*

◊ Таким образом, согласно оценкам (25.16) и (25.18), коэффициенты Фурье a_n, b_n для кусочно-непрерывной функции имеют оценку $\sim n^{-1}$, для непрерывной – $\sim n^{-2}$, для гладкой – $\sim n^{-3}$ и т.д. Наоборот, если a_n, b_n имеют оценки $\sim n^{-1}$, $\sim n^{-2}$, $\sim n^{-3}$, то в первом случае разрывной является сама функция, во втором – первая производная, в третьем – вторая производная и т.д. Отсюда следует, что для того, чтобы функция была непрерывно дифференцируемой бесконечное число раз, необходимо выполнение оценки $\sim n^{-\infty}$. Другими словами, в этом случае порядок малости коэффициентов Фурье функции $f(x)$ относительно $1/n$ должен быть «бесконечным».

Пример 25.1. В примере 23.2 получено частное решение дифференциального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2[(2n-1)^2+1]}\cos(2n-1)x.$$

Охарактеризовать характер непрерывности самого решения и его производных.

Решение. Поскольку коэффициенты Фурье решения $y(x)$ при $n \to \infty$ $a_n \sim 1/n^4$, то, согласно теореме 25.2, решение $y(x)$ является функцией, непрерывно дифференцируемой вплоть до 3-го порядка, тогда как производная 4-го порядка имеет, по меньшей мере, одну точку разрыва.

26. Улучшение сходимости тригонометрических рядов Фурье

Как уже было показано, наличие непрерывных производных высоких порядков у функции обеспечивает быстрое убывание коэффициентов Фурье и, следовательно, быструю сходимость ряда. Однако в приложениях часто встречаются «составные» функции, т.е. составленные из нескольких (сюда мы относим и периодические продолжения) функций, каждая из которых имеет в своем интервале на $[-l, l]$ свое число производных. В точках сшивания или на границах промежутка $[-l, l]$ может нарушаться непрерывность такой <составной> функции или ее производных. Наличие у функции хотя бы одной точки разрыва внутри промежутка или на его границе, т.е. несовпадение значений $f(-l+0)$ и $f(l-0)$, понижает порядок малости коэффициентов и ухудшает сходимость ряда Фурье. Функция может быть гладкой везде, кроме одной точки разрыва, которая понижает порядок малости коэффициентов. Если он понижается настолько, что появляются коэффициенты вида $1/n$, то ряд становится практически непригодным для приближенных вычислений, так как для достижения точности всего 0,01 необходимо учесть несколько десятков слагаемых ряда.

Кроме того, такой ряд невозможно почленно дифференцировать, что, как правило, требуется в приложениях, особенно в математической физике. Это объясняется тем, что дифференцирование ряда понижает порядок малости коэффициентов на единицу. Так, например, ряд, содержащий коэффициенты вида $1/n^2$, после дифференцирования будет иметь коэффициенты порядка $1/n$. В свою очередь, ряд, содержащий коэффициенты вида $1/n$, почленно дифференцировать нельзя, так как он не сходится равномерно (см. пример 17.2).

Из всего этого и вытекает задача улучшения сходимости ряда Фурье, т.е. преобразования его к ряду, коэффициенты которого имели бы порядок, по меньшей мере, не ниже второго (или вообще такой, какого требует конкретная задача).

Для этого, как правило, используется метод последовательного выделения особенностей, называемый еще методом Крылова. Смысл этого метода заключается в следующем. Пусть имеется сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big) \tag{26.1}$$

с коэффициентами a_n, b_n первого порядка малости относительно $1/n$. Представим их в виде

$$a_n = \frac{A_n}{n} + \alpha_n, \qquad b_n = \frac{B_n}{n} + \beta_n, \tag{26.2}$$

где α_n, β_n имеют порядок малости относительно $1/n$ выше первого. Тогда ряд (26.1) можно записать как

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\alpha_n\cos\frac{\pi nx}{l} + \beta_n\sin\frac{\pi nx}{l}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{A_n}{n}\cos\frac{\pi nx}{l} + \frac{B_n}{n}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big). \tag{26.3}$$

Здесь первый ряд будет иметь порядок малости выше первого, что и требовалось. При работе со вторым рядом возможны следующие операции. Самый простой случай: его можно просуммировать с помощью известных разложений. Если такая операция затруднена, необходимо исследовать поведение ряда в окрестности точек разрыва функции, обусловливающих наличие коэффициентов вида $1/n$. Точки разрыва можно найти из явного вида функции или формул (25.19), (25.20) в тех случаях, когда функция $f(x)$ неизвестна, а известно только само разложение. По точкам разрыва конструируется вспомогательная функция $\varphi(x)$. Такая вспомогательная функция должна быть как можно проще, лучше всего линейной, и в найденных ранее точках разрыва вести себя аналогично исходной функции. Вычтя разложение функции $\varphi(x)$ (его найти проще, чем просуммировать указанный ряд) из разложения (26.1), устраним его медленно сходящуюся часть, так что оставшийся ряд будет сходиться быстрее.

Если требуется более высокий порядок малости коэффициентов (т.е. более быстрая сходимость), то следует продолжить операцию улучшения сходимости. Для этого улучшенный ряд дифференцируется, затем снова выделяется главная часть вида $1/n$, и процедура улучшения сходимости повторяется.

Таким образом, последовательное выделение особенностей позволяет достичь необходимой скорости сходимости ряда Фурье. Такова общая схема метода, которую мы проиллюстрируем на конкретных примерах.

Пример 26.1. Улучшить сходимость ряда Фурье

$$f(x) = \frac{3l}{8} - \frac{3l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l} + \frac{l}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (26.4)$$

с периодом $2l$.

Решение. Очевидно, что ряд (26.4) представляет разрывную на отрезке $[-l,l]$ функцию, поскольку коэффициенты второй суммы имеют порядок $1/n$. Его сходимость ряда можно улучшить с помощью полученного ранее разложения (17.9). Как следует из (17.9), ряд

$$\frac{l}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (26.5)$$

определяет $2l$ периодическую функцию $f_1(x)$, заданную на промежутке $[-l,l]$ выражением

$$f_1(x) = \frac{x}{4}, \qquad (26.6)$$

т.е.

$$f_1(x) = \frac{l}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{l}. \qquad (26.7)$$

Исходный ряд (26.4) с учетом (26.7) можно записать

$$f(x) = \frac{3l}{8} - \frac{3l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l} + f_1(x)$$

или

$$\varphi(x) = f(x) - f_1(x) = \frac{3l}{8} - \frac{3l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}. \qquad (26.8)$$

Полученный ряд сходится достаточно быстро и, кроме того, равномерно, а улучшенная функция $\varphi(x)$ непрерывна на всей числовой оси.

Пример 26.2. Разложить в ряд Фурье функцию, изображенную на рис. 26. В случае необходимости улучшить сходимость полученного разложения.

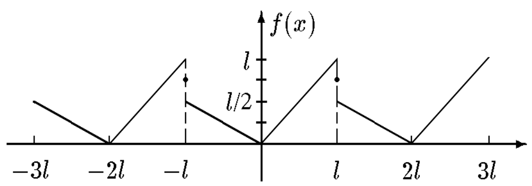


Рис. 26

Решение. На рис. 26 изображено $2l$-периодическое продолжение функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-l,l]$ выражением

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < l; \\ -x/2, & -l < x \leqslant 0. \end{cases} \qquad (26.9)$$

В точках сшивания $x_k = (2k+1)l$, $k = \overline{0, \pm\infty}$, функция изменяется скачком

$$\delta(x_k) = f(-l+0) - f(l-0) = \frac{l}{2} - l = -\frac{l}{2}. \tag{26.10}$$

Очевидно, что ряд Фурье такой функции будет содержать коэффициенты порядка $1/n$, что потребует улучшения его сходимости. Для нахождения разложения заданной функции в ряд Фурье воспользуемся результатом примера 17.1, положив $b = 1$, $a = -1/2$. Тогда из (17.5) следует

$$f(x) = \frac{3l}{8} - \frac{3l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l} + \frac{l}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{26.11}$$

Вторая сумма, как мы и предполагали, содержит коэффициенты порядка $1/n$. Согласно методу Крылова, улучшение сходимости ряда (26.11) можно провести с помощью вспомогательной функции $f_1(x)$. Эту функцию мы можем построить так, чтобы разность $f(x) - f_1(x)$ оказалась непрерывной функцией на всей числовой оси. Из рис. 26 нетрудно установить, что таких функций, вообще говоря, существует бесконечное множество. Рациональнее всего воспользоваться функциями $f_1(x)$, представляющими прямые линии.

Рассмотрим два простейших варианта улучшения сходимости ряда (26.11) с помощью прямых.

1. Разность $f(x)-f_1(x)$ можно сделать непрерывной на всей числовой оси, положив $f_1(x) = x/4$, где $x \in [-l, l]$ (см. рис. 27).

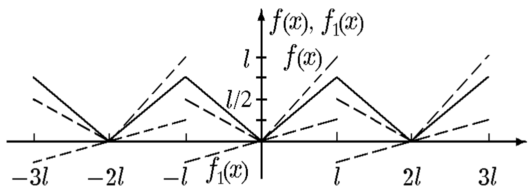


Рис. 27

Действительно, согласно (26.10), если значение $f(-l+0)$ увеличить на $l/4$, то значение $f(l-0)$ следует на столько же уменьшить. В этом случае вместо (26.10) будем иметь

$$\delta(x_k) = \Big[f(-l+0) + \frac{l}{4}\Big] - \Big[f(l-0) - \frac{l}{4}\Big] =$$
$$= f(-l+0) - f(l-0) + \frac{l}{2} = -\frac{l}{2} + \frac{l}{2} = 0.$$

Следовательно, нам нужно записать уравнение прямой, проходящей через две точки: $A(-l, -l/4)$ и $B(l, l/4)$. Уравнение прямой, проходящей через эти две точки, и есть уравнение $f_1(x) = x/4$. Рис. 27 наглядно иллюстрирует непрерывность функции $f(x)-f_1(x)$.

Поскольку разложение функции $f(x)$ было получено ранее в виде (26.11), найдем разложение в ряд Фурье функции $f_1(x)$. Это нетрудно сделать стандартным способом, поскольку функция $f_1(x)$ известна. Здесь проще воспользоваться результатом примера 17.1:

$$f_1(x) = \frac{l}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{26.12}$$

Вычтя (26.12) из (26.11), получим

$$f(x) - f_1(x) = \frac{3l}{8} - \frac{3l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l}, \tag{26.13}$$

откуда

$$f(x) = \frac{3l}{8} - \frac{3l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l} + f_1(x). \tag{26.14}$$

Очевидно, что полученное в итоге разложение (26.14) является улучшенным разложением ряда (26.11).

◊ Заметим, что формулу (26.13) можно легко получить, если учесть, что разность $f(x) - f_1(x)$ на промежутке $[-l, l]$ задается выражением

$$f(x) - f_1(x) = \frac{3}{4}|x|, \qquad x \in [-l, l]. \tag{26.15}$$

В справедливости формулы (26.15) также легко убедиться из рис. 26. Но разложение для $|x|$, $x \in [-l, l]$ было получено ранее (см. формулу (17.7) при $b = 1$), т.е.

$$f^*(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l}. \tag{26.16}$$

Умножив (26.16) на $3/4$, приходим к (26.13).

2. В этом случае разность $f(x) - f_1(x)$ можно сделать непрерывной на всей числовой оси, положив на промежутке $[-l, l]$ (см. рис. 28)

$$f_1(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leqslant x \leqslant l; \\ 0, & -l \leqslant x \leqslant 0. \end{cases} \tag{26.17}$$

Действительно, согласно (26.10), если значение $f(-l+0)$ не изменять, то значение $f(l-0)$ следует изменить на величину $l/2$. Тогда вместо (26.10) получим

$$\delta(x_k) = f(-l+0) - \Big[f(l-0) - \frac{l}{2}\Big] = -\frac{l}{2} + \frac{l}{2} = 0.$$

Рис. 28,*б* наглядно иллюстрирует справедливость формулы (26.17) и непрерывность функции $f(x) - f_1(x)$.

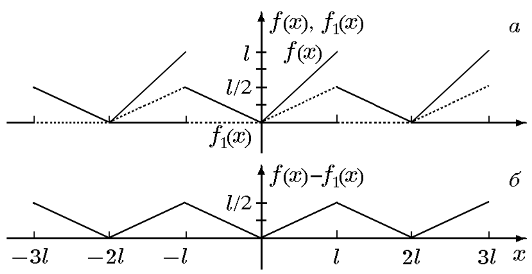


Рис. 28

Поскольку разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье (26.11) известно, то нам следует получить разложение функции $f_1(x)$. Для этого воспользуемся результатом примера 17.1 – формулой (17.8) при $b = 1/2$:

$$f_1(x) = \frac{l}{8} - \frac{l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l} + \frac{l}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{26.18}$$

Вычтя (26.18) из (26.11), получим

$$f(x) - f_1(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l}, \tag{26.19}$$

откуда

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)x}{l} + f_1(x). \tag{26.20}$$

Очевидно, что полученное в итоге разложение (26.20) является улучшенным разложением ряда (26.11).

Сравнив формулы (26.14) и (26.20), мы видим, что разным функциям $f_1(x)$ соответствуют разные улучшенные разложения, но в обоих случаях, как и следовало ожидать, эти функции устраняют из разложения (26.11) слагаемое с коэффициентами, пропорциональными $1/n$.

$\Diamond$ Как и в случае 1, заметим, что формулу (26.20) можно получить, если учесть, что в случае 2 разность $f(x) - f_1(x)$ на промежутке $[-l, l]$ задается выражением [ср. с (26.15)]

$$f(x) - f_1(x) = \frac{1}{2}|x|, \qquad x \in [-l, l]. \tag{26.21}$$

В справедливости формулы (26.15) так же легко убедиться из графика 28,*б*. Как мы уже упоминали, разложение для $|x|$, $x \in [-l, l]$ задается формулой (26.16). Умножив (26.16) на $1/2$, приходим к (26.19).

В заключение рассмотрим пример, предложенный А.Н. Крыловым в работе «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах».

Пример 26.3. Улучшить сходимость ряда Фурье

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cos(\pi n/2)}{n^2-1}\sin nx, \tag{26.22}$$

представляющего некоторую периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, до пятого порядка относительно $1/n$.

Решение. Подчеркнем, что в отличие от предыдущего примера функция $f(x)$ неизвестна. В этом отношении данный пример аналогичен примеру 26.1. Но если в примере 26.1 для улучшения сходимости было достаточно использования разложения линейной на $[-l, l]$ функции, то в данном случае дело обстоит несколько сложнее.

Итак, имеем нечетную функцию $f(x)$ с коэффициентами

$$b_n = -\frac{2n}{\pi(n^2-1)}\cos\frac{\pi n}{2}. \tag{26.23}$$

Чтобы представить b_n в виде (25.20), запишем дробь $n/(n^2-1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{n}{n^2-1} &= \frac{n^2}{n(n^2-1)} = \frac{n^2-1+1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n^2-1)} = \\ &= \frac{1}{n} + \frac{n^2}{n^3(n^2-1)} = \frac{1}{n} + \frac{n^2-1+1}{n^3(n^2-1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3(n^2-1)}.\end{aligned} \tag{26.24}$$

С учетом этого разложения формулу (26.22) можно записать

$$\begin{aligned}f(x) = -\frac{2}{\pi}\Big[&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}\sin nx + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{\pi n}{2}\sin nx + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)}\cos\frac{\pi n}{2}\sin nx\Big].\end{aligned} \tag{26.25}$$

Так как коэффициенты последнего ряда в (26.25) имеют оценку $O(1/n^5)$, то следует просуммировать два первых ряда.

Рассмотрим сначала первый ряд

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}\sin nx, \tag{26.26}$$

обусловленный разрывностью самой функции $f(x)$ в точках, которые нам предстоит определить. В соответствии с формулой (25.20), при $k=0$ имеем

$$\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{p}\delta(x_i)\cos nx_i = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{n\pi}{2}. \tag{26.27}$$

Это соотношение с учетом нечетности ряда (26.26) справедливо при любом n, если выбрать

$$i=1,2;\quad x_1=-\frac{\pi}{2},\quad \delta(-\pi/2)=-1,\qquad x_2=\frac{\pi}{2},\quad \delta(\pi/2)=-1. \tag{26.28}$$

Определив точки разрыва, построим вспомогательную функцию $f_1(x)$, приняв во внимание, что $f(-\pi)=f(\pi)=0$. Одной из простейших нечетных функций, непрерывной на границах интервала и изменяющейся скачком $\delta(-\pi/2)=\delta(\pi/2)=1$ в точках разрыва, является функция $f_1(x)=-f_1(-x)$, заданная на полупериоде $[0,\pi]$ соотношениями

$$f_1(x)=\begin{cases} x/\pi, & 0\leqslant x<\pi/2;\\ (x-\pi)/\pi, & \pi/2<x\leqslant\pi.\end{cases} \tag{26.29}$$

График $f_1(x)$ изображен на рис. 15,*б*, где нужно положить $l=\pi$, $A=0{,}5$.

Разложив $f_1(x)$ как функцию с двойной симметрией в ряд Фурье, получим

$$f_1(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}\sin nx. \tag{26.30}$$

Таким образом, мы подобрали вспомогательную функцию так, что ее разложение (26.30) совпадает с разложением (26.26), т.е. фактически мы просуммировали ряд (26.26).

◊ Здесь уместно отметить, что ряд (26.26) можно было просуммировать аналогично тому, как это сделано в примере 26.1, с помощью простейших разложений.

Действительно, с учетом тригонометрических соотношений ряд (26.26) можно записать в виде

$$\begin{aligned}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}\cos nx &= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\Big[\sin n\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)-\sin n\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]=\\ &=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big),\end{aligned} \tag{26.31}$$

откуда после некоторых преобразований и следует (26.29).

Рассмотрим теперь второе слагаемое суммы (26.25)

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{\pi n}{2}\sin nx. \tag{26.32}$$

Ряд (26.32) обусловлен разрывностью второй производной функции $f(x)$. Легко увидеть, что этот ряд представляет собой дважды проинтегрированный ряд (26.26). Если воспользоваться результатом примера 22.3, то для $f_2(x)=-f_2(-x)$ имеем

$$f_2(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{\pi n}{2}\sin nx=\begin{cases}-\dfrac{x^3}{6\pi}+\dfrac{\pi}{24}x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2};\\ -\dfrac{(x-\pi)^3}{6\pi}+\dfrac{\pi}{24}(x-\pi), & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases} \tag{26.33}$$

Таким образом, для исходного разложения (26.22) мы получили выражение

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)}\cos\frac{\pi n}{2}\sin nx, \tag{26.34}$$

являющееся решением поставленной задачи.

ГЛАВА 4

Интеграл Фурье

27. Интеграл Фурье: основные понятия и определения

Мы выяснили, что тригонометрический ряд Фурье представляет собой сумму периодических слагаемых с общим периодом $2l$ и поэтому функция $f(x)$, представленная рядом Фурье, должна быть также периодической и иметь период $2l$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\Big), \tag{27.1}$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt. \end{aligned} \tag{27.2}$$

Если функция $f(x)$ непериодическая, то она может быть представлена рядом Фурье только на некотором конечном интервале. Вне этого интервала ряд и функция ведут себя по-разному.

Таким образом, аппарат рядов Фурье не работает для непериодических функций, определенных на всей числовой оси $]-\infty, \infty[$ или на полуоси $]0, \infty[$. Тем не менее, этот аппарат с некоторыми модификациями можно использовать и для таких функций, если условно считать непериодический процесс периодическим, но с периодом l, стремящимся к бесконечности. Предельные переходы, которые неизбежны при такой операции, приведут к замене ряда Фурье некоторым двойным интегралом с бесконечными пределами. Этот интеграл и был назван интегралом Фурье. Он играет для неограниченных интервалов ту же роль, что и ряд Фурье для ограниченных.

Рассмотрим на качественном уровне процедуру предельного перехода от ряда Фурье к интегралу Фурье. Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[-l, l]$ и удовлетворяет (для определенности) условиям Дирихле. Тогда она может быть представлена в точках непрерывности суммой своего ряда Фурье (27.1). В точках разрыва сумма ряда (27.1) равна

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

— среднему арифметическому левого и правого пределов функции в этой точке.

Ряд Фурье (27.1) представляет функцию $f(x)$ в виде суммы гармонических слагаемых

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = M_n \sin\Big(\varphi_n + \frac{\pi n x}{l}\Big), \tag{27.3}$$

частоты которых $n\pi/l$ принимают дискретные значения

$$0,\ \frac{\pi}{l},\ \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}, \ldots$$

Здесь амплитуды $M_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_n = a_n/b_n$, φ_n — начальные фазы.

Рассмотрим, каким образом можно провести гармонический анализ функции $f(x)$, заданной на всей оси Ox.

Пусть функция $f(x)$, определенная на бесконечном промежутке $]-\infty, \infty[$, удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, т.е. существует несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = Q,$$

хотя бы в смысле главного значения;

2) на любом конечном промежутке функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле.

Зафиксируем некоторое произвольное l и воспользуемся разложением (27.1) функции $f(x)$ в ряд Фурье на $[-l, l]$. Выясним, как изменится правая часть равенства (27.1), если перейти к пределу при $l \to \infty$.

Для этого подставим в соотношение (27.1) явный вид коэффициентов (27.2) и получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt\Big)\cos\frac{n\pi x}{l} + \\ + \Big(\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt\Big)\sin\frac{n\pi x}{l}\Big]$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\Big(\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big)dt.$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством (13.3), запишем

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)dt. \qquad (27.4)$$

Это равенство имеет место при всех x, удовлетворяющих условию $|x| < l$, где l — любое фиксированное число. Теперь зафиксируем x, а l устремим к бесконечности ($l \to +\infty$).

Прежде всего заметим, что при $l \to +\infty$

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt = 0. \qquad (27.5)$$

Действительно, так как функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = Q,$$

то

$$\left|\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2l}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \frac{Q}{2l}.$$

Отсюда при $l \to \infty$ следует справедливость (27.5). Таким образом, переходя в равенстве (27.4) к пределу при $l \to \infty$, получим

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi}{l}(x-t)dt. \tag{27.6}$$

Введем новую переменную $u_n = \pi n/l$, где $n = \overline{1,\infty}$. Поскольку

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l},$$

соотношение (27.6) можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\Delta u_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos u_n(x-t)dt. \tag{27.7}$$

Интегралы под знаком суммы являются значениями функции

$$\phi(u,x) = \int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos u(x-t)dt,$$

вычисленными в точках $u = u_n$ при фиксированном x. Сумма, стоящая в правой части формулы (27.7), напоминает интегральную сумму (не являясь ею!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(u_n, x)\Delta u_n,$$

составленную для промежутка $]0, +\infty[$. Поэтому формальный предельный переход в (27.7) даёт

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\Delta u_n \to 0 \\ l\to\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(u_n, x)\Delta u_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\, dt. \tag{27.8}$$

♦ Формула (27.8) называется *интегральной формулой Фурье*, а стоящий в ней интеграл — *двойным интегралом Фурье* или *интегралом Фурье*.

♦ Представление функции $f(x)$ в виде (27.8) называется *разложением этой функции в интеграл Фурье*.

Интеграл Фурье (27.8) можно представить в виде, более похожем на ряд Фурье (27.1).

Для этого преобразуем правую часть формулы (27.8). Используя известную тригонометрическую формулу

$$\cos u(x-t) = \cos ux \cos ut + \sin ux \sin ut,$$

получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos ux \cos ut\,dt + \int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\sin ux \sin ut\,dt\Big]du$$

или

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \Big[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos ut\,dt\Big]\cos ux\,du + \int\limits_0^\infty \Big[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\sin ut\,dt\Big]\sin ux\,du. \quad (27.9)$$

Обозначив

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos ut\,dt, \qquad B(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\sin ut\,dt, \quad (27.10)$$

получим

$$f(x) = \int\limits_0^\infty [A(u)\cos ux + B(u)\sin ux]du. \quad (27.11)$$

Соотношение (27.11) представляет непериодическую функцию $f(x)$ интегралом Фурье в его второй форме. Подынтегральная функция в (27.11) напоминает общий член ряда Фурье, только здесь частота u, непрерывно изменяясь, пробегает все значения от нуля до бесконечности, и поэтому суммирование заменено интегрированием по u. Функции $A(u)$ и $B(u)$ определяются по формулам (27.10), аналогичным формулам Эйлера–Фурье и при изменении u от 0 до ∞ указывают закон изменения амплитуд и начальных фаз гармонических функций.

$\Diamond$ Ниже мы покажем, что функции $A(u)$ и $B(u)$ непрерывны, даже если функция $f(x)$ разрывна, и стремятся к нулю при $|u| \to \infty$.

Таким образом, мы на качественном уровне установили, что интеграл Фурье можно рассматривать как предельный случай ряда Фурье, когда период функции $f(x)$ стремится к бесконечности, т.е. $l \to \infty$ так, что $\Delta u_n = \pi\Delta n/l = \pi/l \to 0$. Другими словами, формулы (27.8), (27.11) осуществляют разложение непериодической функции на бесконечное множество простых гармоник с непрерывно меняющимися от $u = 0$ до $u = \infty$ частотами, определяя, как говорят, его «непрерывный спектр».

Теперь перейдем к строгому обоснованию интегральной формулы Фурье (27.8) и следующей из нее формулы (27.11). Чтобы воспользоваться результатами, полученными при рассмотрении ряда Фурье, вместо доказательства законности предельного перехода (27.8) мы докажем, что из (27.10) следует (27.11) или, что то же самое, справедливость формулы Фурье (27.8) при некоторых предположениях относительно $f(x)$.

Рассмотрим интеграл

$$I(l) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l \Big[\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x_0 - t)dt\Big]du, \quad (27.12)$$

где $l > 0$ — произвольное конечное число, а x_0 — некоторое фиксированное значение x. Нетрудно заметить, что интеграл (27.12), являясь аналогом n-й частичной суммы ряда Фурье S_n, позволяет записать интеграл Фурье (27.8) как предел

$$\lim_{l\to\infty} I(l) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x_0-t)dt\Big]du \tag{27.13}$$

и, следовательно, перенести схему исследования частичной суммы S_n на интеграл $I(l)$ и установить условия сходимости интеграла Фурье.

Пример 27.1. Доказать, что абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ может быть представлена интегралом Фурье в виде

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} M(u)\sin(ux+\varphi_u)du. \tag{27.14}$$

Решение. Подынтегральную функцию в (27.11) приведем к форме, аналогичной (27.3).

Для этого положим

$$M(u) = \sqrt{A^2(u)+B^2(u)}, \quad \frac{A(u)}{M(u)} = \sin\varphi_u, \quad \frac{B(u)}{M(u)} = \cos\varphi_u,$$

т.е.

$$\operatorname{tg}\varphi_u = \frac{A(u)}{B(u)}. \tag{27.15}$$

Тогда

$$A(u)\cos ux + B(u)\sin ux = M(u)[\sin\varphi_u\cos ux + \cos\varphi_u\sin ux] = M(u)\sin(ux+\varphi_u).$$

Тогда интеграл Фурье (27.11) примет вид

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} M(u)\sin(ux+\varphi_u)\,du, \tag{27.16}$$

где $M(u)$ и начальная фаза φ_u определены соотношениями (27.15).

28. Признак Дини сходимости интеграла Фурье

Сформулируем для интеграла Фурье утверждение, аналогичное основной лемме гармонического анализа.

Лемма 28.1. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $]a,\infty[$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 0. \tag{28.1}$$

Доказательство. Утверждение (28.1) эквивалентно двум равенствам

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^\infty f(x)\cos\lambda x\,dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^\infty f(x)\sin\lambda x\,dx=0, \tag{28.2}$$

доказательство которых аналогично доказательству, используемому в лемме 13.2 с учетом того, что интегралы (28.1) — несобственные.

Далее, полагая $f(t)$ абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x_0-t)\,dt. \tag{28.3}$$

Его можно (хотя бы и в смысле главного значения) рассматривать как предел

$$\lim_{L\to\infty}\int\limits_{-L}^L f(t)\cos u(x_0-t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x_0-t)\,dt. \tag{28.4}$$

Условие абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ позволяет последовательно утверждать, что, во-первых, интеграл (28.3) сходится равномерно относительно u, поскольку для всех u он мажорируется сходящимся интегралом

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x_0-t)\,dt\Big|\leqslant\int\limits_{-\infty}^\infty |f(t)|\,|\cos u(x_0-t)|\,dt<\int\limits_{-\infty}^\infty |f(t)|\,dt=Q<\infty.$$

Во-вторых, можно утверждать, что интеграл в левой части равенства (28.4) стремится к своему пределу равномерно.

Опираясь на эти утверждения и следуя схеме исследования n-частичной суммы ряда Фурье, преобразуем интеграл $I(l)$ к виду, аналогичному виду интеграла Дирихле (13.1). Для этого первоначально представим его в виде

$$I(l)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^l\Big[\lim_{L\to\infty}\int\limits_{-L}^L f(t)\cos u(x_0-t)\,dt\Big]du. \tag{28.5}$$

Подчеркнем, что равномерная сходимость (28.4) позволяет вынести операцию предельного перехода за знак интеграла по переменной u с последующей заменой порядка интегрирования в (28.5)

$$I(l)=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-L}^L f(t)\Big[\int\limits_0^l\cos u(x_0-t)\,du\Big]dt. \tag{28.6}$$

Вычисление внутреннего интеграла в (28.6) позволяет записать его в виде, аналогичном интегралу Дирихле (13.1):

$$I(l)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\frac{\sin l(t-x_0)}{t-x_0}dt \tag{28.7}$$

и играющем ту же роль при рассмотрении уже интеграла Фурье. Как и при рассмотрении ряда Фурье, введем функцию

$$\psi(\tau)=f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)-[f(x_0+0)+f(x_0-0)], \tag{28.8}$$

предположив существование односторонних пределов $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

Теорема 28.1 (Дини). *Интеграл Фурье функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на промежутке $]-\infty,\infty[$, в точке x_0 сходится к значению $[f(x_0+0)+f(x_0-0)]/2$, если при некотором δ сходится интеграл Дини*

$$\int\limits_0^\delta \frac{|\psi(\tau)|}{\tau}d\tau \tag{28.9}$$

для функции $\psi(\tau)$, определяемой равенством (28.8).

Доказательство. Интеграл (28.7) заменой $\tau = t - x_0$ и в силу четности множителя $(\sin l\tau)/\tau$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} I(l) &= \frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_0^\infty f(x_0+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau + \int\limits_{-\infty}^0 f(x_0+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau\Big] = \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_0^\infty f(x_0+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau + \int\limits_0^\infty f(x_0-\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau\Big] = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \big[f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big]\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau. \end{aligned} \tag{28.10}$$

Далее воспользуемся представлением единицы известным несобственным интегралом:

$$1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau. \tag{28.11}$$

Вычтем из (28.10) соотношение (28.11), умноженное на число $[f(x_0+0)+f(x_0-0)]/2$, и найдем

$$\begin{aligned} I(l) &- \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin l\tau}{\tau}\Big\{f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)-[f(x_0+0)+f(x_0-0)]\Big\}d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau. \end{aligned} \tag{28.12}$$

Предельный переход в (28.12) при $l\to\infty$, согласно (27.13), дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x_0-t)\,dt &- \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \\ &= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\psi(\tau)}{\tau}\sin l\tau\,d\tau. \end{aligned} \tag{28.13}$$

Отсюда легко увидеть, что теорема будет доказана, если показать, что предел в правой части (28.13) равен нулю. Вычислим этот предел, разбив интервал интегрирования на два:

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^\infty \frac{\psi(\tau)}{\tau}\sin l\tau\,d\tau = \lim_{l\to\infty}\Big[\int\limits_0^\delta \frac{\psi(\tau)}{\tau}\sin l\tau\,d\tau + \int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(\tau)}{\tau}\sin l\tau\,d\tau\Big]. \tag{28.14}$$

С учетом условия (28.9) теоремы по лемме 13.2 имеем

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^\delta \frac{\psi(\tau)}{\tau}\sin l\tau\,d\tau = 0.$$

Далее учтем, что из абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ на промежутке $]-\infty,\infty[$ следует абсолютная интегрируемость функции $[f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)]/\tau$ на промежутке $]\delta,\infty[$. Тогда для оставшегося в (28.14) предела

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(\tau)}{\tau}\sin l\tau\,d\tau = \lim_{l\to\infty}\int\limits_\delta^\infty \frac{f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)}{\tau}\sin l\tau\,d\tau -$$

$$-\,[f(x_0+0)+f(x_0-0)]\lim_{l\to\infty}\int\limits_\delta^\infty \frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau, \tag{28.15}$$

в соответствии с леммой 28.1 имеем

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_\delta^\infty \frac{f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)}{\tau}\sin l\tau\,d\tau = 0.$$

Проведя во втором пределе (28.15) замену переменной $l\tau = y$, по определению несобственного интеграла получим

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_\delta^\infty \frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau = \lim_{l\to\infty}\int\limits_{l\delta}^\infty \frac{\sin y}{y}dy = 0.$$

Таким образом, предел в правой части (28.13) действительно равен нулю, что и доказывает утверждение теоремы, т.е.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty du\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x_0-t)\,dt = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \tag{28.16}$$

♢ Поскольку в точках непрерывности

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = f(x_0),$$

то значение интеграла Фурье дает в этой точке значение самой функции $f(x_0)$.

♢ Как и для ряда Фурье, условие (28.9) можно заменить условием существования в точке x_0 конечных односторонних производных $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ (см. рис. 8), совпадающих, если точка x_0 является точкой непрерывности и дифференцируемости.

29. Теорема Фурье

Рассмотрим еще один признак сходимости интеграла Фурье. Для этого нам потребуется достаточно простое обобщение леммы 16.1.

Лемма 29.1. *Если функция $f(x)$ на промежутке $[0, L]$, $L > 0$, удовлетворяет условиям Дирихле, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^L f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = f(+0). \tag{29.1}$$

Доказательство. Леммы 16.1 и 29.1 различаются условиями, предъявляемыми к функции $f(x)$. Если лемма 16.1 требует монотонности и ограниченности на $[0, L]$, то лемма 29.1 требует выполнения условия Дирихле. Но из самой формулировки условия Дирихле вытекает, что промежуток $[0, L]$ можно разбить на конечное число частей, в каждой из которых функция $f(x)$ будет монотонной и ограниченной. С учетом этого интеграл (29.1) можно записать

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^L f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{L_1} f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx + \\ &+ \lim_{\lambda\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_{L_1}^{L_2} f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx + \ldots + \lim_{\lambda\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_{L_n}^{L} f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx.\end{aligned}$$

К первому слагаемому в правой части применима лемма 16.1, а к остальным — лемма 13.2. Следовательно, первое слагаемое равно $f(+0)$, а остальные – нулю, что и требовалось доказать (см. также разд. <Дельта-функция Дирака и ее свойства> [2]).

Теорема 29.1 (теорема Фурье). *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси и удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном промежутке этой оси, то при всех x имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty du \int\limits_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(x - t)\, dt = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}. \tag{29.2}$$

В точках непрерывности интеграл равен функции $f(x)$.

Доказательство. Воспользуемся некоторыми результатами, полученными в ходе доказательства теоремы 28.1. Так, например, для интеграла Фурье воспользуемся представлением (28.10):

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty du \int\limits_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(x - t)\, dt = \lim_{l\to\infty} I(l) =$$

$$\lim_{l\to\infty} \Big[\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty f(x + \tau) \frac{\sin l\tau}{\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty f(x - \tau) \frac{\sin l\tau}{\tau} d\tau\Big]. \tag{29.3}$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (29.3), который, задавшись некоторым числом $L > 0$, можно записать в виде

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau =$$
$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^L f(x+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau + \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_L^\infty f(x+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau.$$

В силу леммы 29.1 первое слагаемое в правой части соотношения равно $\varphi(x+0)/2$ и, следовательно,

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau = \frac{\varphi(x+0)}{2} + \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_L^\infty f(x+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau. \tag{29.4}$$

Так как при $\tau > 0$ множитель $|(\sin l\tau)/\tau| < 1$ при любом l, то справедлива оценка

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_L^\infty f(x+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau\Big| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_L^\infty |f(x+\tau)|\,d\tau. \tag{29.5}$$

Но функция $f(x+\tau)$, согласно условию теоремы, абсолютно интегрируема в промежутке $]0,\infty[$. Следовательно, можно задать такие $\varepsilon > 0$ и $L > 1$, что для всех l, согласно (29.5), будет выполняться неравенство

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_L^\infty f(x+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau\Big| < \varepsilon$$

для любого сколь угодно малого ε. Благодаря этому предел (29.4) примет следующее значение:

$$\lim_{l\to\infty}\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x+\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau\Big| = \frac{f(x+0)}{2}. \tag{29.6}$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{l\to\infty}\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x-\tau)\frac{\sin l\tau}{\tau}d\tau\Big| = \frac{f(x-0)}{2}. \tag{29.7}$$

Подстановка (29.6) и (29.7) в (29.3) приводит к (29.2).Тем самым теорема доказана.

Рассмотрим еще одну форму интеграла Фурье, широко используемую в приложениях.

30. Комплексная форма интеграла Фурье

Обратимся к интегральной формуле Фурье (27.11). Заметим, что внутренний интеграл представляет собой некоторую функцию от u. Так как эта функция зависит не от самой переменной u, а от ее косинуса, то она должна быть четной: при замене u на $-u$ интеграл не изменится. Поэтому по свойству четной функции можем переписать формулу в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

Это позволяет формулу Фурье записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

Применим к имеющемуся в этой формуле косинусу формулу Эйлера

$$\cos u(x-t) = \frac{1}{2}[e^{iu(x-t)} + e^{-iu(x-t)}].$$

Получим

$$f(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)[e^{iu(x-t)} + e^{-iu(x-t)}]dt \right\} du$$

или

$$f(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}dt \right] du + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iu(x-t)}dt \right] du.$$

С помощью подстановки $z = -u$ нетрудно убедиться, что интегралы, стоящие в правой части, равны. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}dt \right] du. \tag{30.1}$$

♦ Формула (30.1) называется *разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье в комплексной форме.*

Вынеся множитель, не зависящий от t, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt \right] e^{iux} du \tag{30.2}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt. \tag{30.3}$$

Если ввести комплекснозначную функцию

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt, \tag{30.4}$$

то интегральную формулу Фурье (30.3) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{iux} du.$$

♦ Функцию $\varphi(u)$ называют *спектральной функцией* или *спектральной плотностью* функции $f(x)$. При этом ее модуль $|\varphi(u)|$ называют *амплитудным*, а аргумент $\arg \varphi(u)$ – *фазовым* спектрами функции $f(x)$.

Такая терминология обусловлена тем, что интеграл Фурье рассматривается как спектральное разложение непериодической, заданной на всей числовой оси функции $f(x)$ на гармоники с непрерывно меняющимися частотами u. Необходимость такого разложения обусловлена многочисленными физическими задачами. Ограничимся одной из них, возникающей в системах (электронных, оптических и т.д.), преобразующих некоторые сигналы. С математической точки зрения, такая система эквивалентна оператору R, осуществляющему преобразование функции f, моделирующей входной сигнал, называемый еще оригиналом, в новый – выходной – сигнал, называемый еще откликом (образом) исходного. При изучении работы такой системы удобно сложный входной сигнал представить линейной комбинацией элементарных сигналов e^{iux} (или $\sin ux$, $\cos ux$). Тогда, вычислив образы (отклики) элементарных сигналов, мы получим образ (отклик) исходного сложного сигнала. Кроме того, если функция $f(x)$ является квадратично интегрируемой на всей числовой оси, то функции $f(x)$ и $\varphi(u)$ связаны соотношением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 du,$$

аналогичным равенству Парсеваля для ряда Фурье и называемым равенством Планшереля.

В рамках приведенной физической интерпретации интеграла Фурье равенство Планшереля есть математическое выражение того факта, что энергия входного сигнала равна сумме энергий его гармонических компонент.

Пример 30.1. Функцию $f(x) = e^{-|x|}$ представить интегралом Фурье.

Решение. Заданная функция удовлетворяет всем условиям теоремы Фурье, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{|-x|}|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{|-x|}\, dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} dx = -2e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 2.$$

Тогда, согласно (30.3), можно записать

$$e^{|-x|} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-iut} dt. \tag{30.5}$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|-iut} dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(1-iu)t} dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(1+iu)t} dt =$$

$$= \frac{e^{(1-iu)t}}{1-iu}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(1+iu)t}}{1+iu}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-iu}+\frac{1}{1+iu}=\frac{2}{1+u^2}. \qquad (30.6)$$

Подстановка (30.6) в (30.5) дает разложение функции в интеграл Фурье в комплексной форме

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+u^2}e^{iux}du.$$

С помощью формулы Эйлера его можно представить в виде

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+u^2}(\cos ux + i\sin ux)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2}du + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ux}{1+u^2}du\Big],$$

который с учетом четности и нечетности соответствующих подынтегральных функций можно записать как

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2}du. \qquad (30.7)$$

Формулу (30.7) можно рассматривать как интегральную формулу Фурье в форме (27.11) с $A(u) = 2/[\pi(1+u^2)]$ и $B(u) = 0$. Нетрудно убедиться, что результат (30.7) можно получить и непосредственно из формулы (27.10).

31. Интеграл Фурье четной и нечетной функции

Пусть $f(x)$ — четная функция, удовлетворяющая условиям представимости интегралом Фурье.

Учитывая свойство интегралов по симметричному интервалу от четных и нечетных функций, из равенств (27.1) получим

$$A(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt, \qquad B(u) = 0.$$

Таким образом, интеграл Фурье четной функции запишется так:

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} A(u)\cos ux\,du \qquad (31.1)$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt\Big]\cos ux\,du. \qquad (31.2)$$

Аналогично для нечетной функции, удовлетворяющей условиям представимости интегралом Фурье, получим

$$A(u) = 0, \quad B(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\sin ut\,dt,$$

и, следовательно, интеграл Фурье нечетной функции имеет вид

$$f(x) = \int\limits_0^\infty B(u)\sin ux\,du \tag{31.3}$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_0^\infty f(t)\sin ut\,dt\Big]\sin ux\,du. \tag{31.4}$$

Пример 31.1. Разложить в интеграл Фурье четную функцию (см. рис. 29)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leqslant l; \\ 0, & \text{если } |x| > l. \end{cases}$$

Решение. То, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке и удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном промежутке, видно непосредственно. Следовательно, разложение в интеграл Фурье существует. Так как эта функция — четная, интеграл Фурье имеет вид

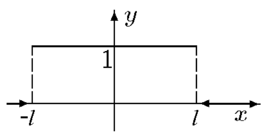


Рис. 29

$$f(x) = \int\limits_0^\infty A(u)\cos ux\,du,$$

где

$$A(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\cos ut\,dt, \quad B(u) = 0.$$

Вычислим коэффициент $A(u)$:

$$A(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^l 1\cdot\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{u}\sin ut\Big|_0^l = \frac{2}{\pi u}\sin ul.$$

Таким образом, искомым разложением является

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin ul}{u}\cos ux\,du.$$

Эта формула справедлива для всех значений x за исключением $x = \pm l$, в которых функция имеет разрыв первого рода. В этих двух точках интеграл Фурье равен $1/2$ и определяет функцию

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin ul}{u}\cos ux\,du = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < l; \\ 1/2, & \text{если } |x| = \pm l; \\ 0, & \text{если } |x| > l. \end{cases}$$

В частности, при $l = 1$ будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \cos ux\, du = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } |x| < 1; \\ \pi/4, & \text{если } |x| = \pm 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Положив здесь $x = 0$, найдем значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Для этой же функции найдем теперь интеграл Фурье в комплексной форме. В этом случае применяем формулу интеграла Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iu(x-t)} dt \Big] du.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iu(x-t)} dt = \int_{-l}^{l} e^{iu(x-t)} dt = -\frac{1}{iu} e^{iu(x-t)} \Big|_{-l}^{l} =$$

$$= -\frac{1}{iu} [e^{iu(x-l)} - e^{iu(x+l)}] = \frac{2e^{iux}}{u} \frac{e^{iul} - e^{-iul}}{2i} = \frac{2e^{iux}}{u} \sin ul.$$

Следовательно, для заданной функции интеграл Фурье в комплексной форме приобретает следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ul}{u} e^{iux} du.$$

32. Представление интегралом Фурье функции, заданной на полуоси

Пусть функция $f(x)$ задана на полуоси $[0, \infty[$, абсолютно интегрируема на ней и на любом конечном промежутке удовлетворяет условиям Дирихле.

Так же, как это делалось в теории рядов Фурье, доопределим функцию $f(x)$ в промежуток $]-\infty, 0[$. Проще всего это можно сделать, продолжив ее в промежуток $]-\infty, 0[$ из промежутка $[0, \infty[$ четным или нечетным образом.

При четном продолжении функции $f(x)$ мы пользуемся интегралом Фурье (31.2) для четной функции, при нечетном — интегралом Фурье (31.4) для нечетной функции. Напомним еще раз, что в точках разрыва интеграл равен полусумме пределов функции справа и слева.

Пример 32.1. Разложить в интеграл Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant l; \\ 0, & \text{если } x > l, \end{cases}$$

продолжив ее на отрицательную полуось нечетным и четным образом, а также нулем (см. рис. 30).

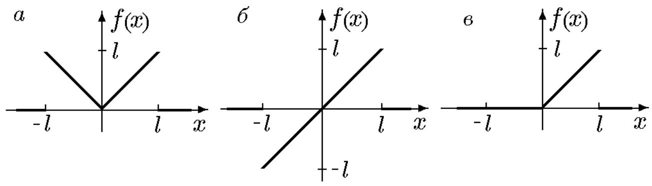


Рис. 30

Решение. При любом из трех продолжений данная функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье.

Запишем интеграл Фурье, продолжив функцию нечетным образом (см. рис. 30,*б*):

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_0^\infty f(t)\sin ut\,dt\Big]\sin ux\,du.$$

Вычислим внутренний интеграл по частям:

$$\int\limits_0^\infty f(t)\sin ut\,dt = \int\limits_0^l t\sin ut\,dt = -\frac{t}{u}\cos ut\Big|_0^l + \frac{1}{u}\int\limits_0^l t\cos ut\,dt =$$

$$= -\frac{l}{u}\cos ul + \frac{1}{u^2}\sin ut\Big|_0^l = -\frac{l}{u}\cos ul + \frac{\sin ul}{u^2}.$$

Поэтому

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{ul\cos ul - \sin ul}{u^2}\sin ux\,du.$$

Эта формула справедлива для всех значений x, за исключением точек разрыва $x = \pm l$; для $x = l$ значение правой части будет вдвое меньше значения функции и равно $l/2$. Итак,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x < l; \\ l/2, & \text{если } x = l; \\ 0, & \text{если } x > l \end{cases} \quad \text{и} \quad f(-x) = -f(x) \tag{32.1}$$

или

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{ul\cos ul - \sin ul}{u^2}\sin ux\,du = \begin{cases} x, & \text{если } |x| < l; \\ \pm l/2, & \text{если } x = \pm l; \\ 0, & \text{если } |x| > l. \end{cases}$$

Запишем теперь интеграл Фурье, продолжив функцию четным образом (см. рис. 30,*а*):

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos ux\,du \int\limits_0^\infty f(t)\cos ut\,dt.$$

Вычисление внутреннего интеграла дает

$$\int\limits_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \int\limits_0^l t\cos ut\,dt = \frac{\cos ul - 1}{u^2} + \frac{l\sin ul}{u}.$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{\cos ul - 1}{u^2} + \frac{l\sin ul}{u}\right]\cos ux\,du.$$

Как и в предыдущем случае, эта формула справедлива для всех значений x, за исключением точек разрыва $x = \pm l$, для которых значение интеграла вдвое меньше значения функции и равно $l/2$. Итак,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x < l; \\ l/2, & \text{если } x = l; \\ 0, & \text{если } x > l \end{cases} \quad \text{и} \quad f(-x) = f(x) \tag{32.2}$$

или

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{\cos ul - 1}{u^2} + \frac{l\sin ul}{u}\right]\cos ux\,du = \begin{cases} |x|, & \text{если } |x| < l; \\ l/2, & \text{если } |x| = l; \\ 0, & \text{если } |x| > l. \end{cases}$$

Запишем, наконец, интеграл Фурье для функции, продолженной на отрицательную полуось нулем: $f(x) = 0$ для $x < 0$ (см. рис. 30,*в*). Воспользуемся формулой (27.11), в которой

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos ut\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^l t\cos ut\,dt;$$

$$B(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin ut\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^l t\sin ut\,dt.$$

Эти интегралы уже вычислены при четном и нечетном продолжениях и, следовательно,

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin ul - ul\cos ul}{u^2}, \quad B(u) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos ul - 1 + ul\sin ul}{u^2}.$$

Отсюда имеем разложение

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\cos ul - 1 + ul\sin ul]\cos ux + [\sin ul - ul\cos ul]\sin ux}{u^2}du,$$

которое с помощью известных тригонометрических соотношений можно упростить к виду

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos u(x-l) - \cos ux + ul\sin u(l-x)}{u^2}du. \tag{32.3}$$

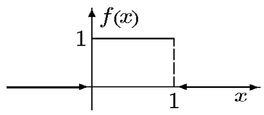
Можно проверить, что это же выражение получится, если вместо формы (27.11) воспользоваться формой (27.8).

Отметим, что настоящий пример наглядно иллюстрирует возможность интеграла Фурье описывать единым аналитическим выражением функции, заданные на разных промежутках различными формулами. При этом функция, заданная на полуоси, может, как в данном случае, быть описана выражениями (32.1), (32.2) или (32.3). Кроме того, эти, вообще говоря, различные интегралы на полуоси $x > 0$ определяют одну и ту же функцию и, следовательно, совпадают друг с другом, когда $x > 0$.

33. Примеры разложения функций в интеграл Фурье

Пример 33.1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$



.

Решение. Так как эта функция удовлетворяет условиям теоремы Фурье (условию существования интеграла Фурье), то ее можно представить интегралом Фурье

$$f(x) = \int\limits_0^\infty [A(u)\cos ux + B(u)\sin ux]du,$$

где

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt;$$

$$B(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

Вычислим $A(u)$ и $B(u)$:

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot\cos ut\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1} \cos ut\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty} 0\cdot\cos ut\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1} \cos ut\,dt = \frac{1}{\pi u}\sin ut\Big|_0^1 = \frac{\sin u}{\pi u};$$

$$B(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot\sin ut\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1} \sin ut\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty} 0\cdot\sin ut\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1} \sin ut\,dt = -\frac{1}{\pi u}\cos ut\Big|_0^1 = -\frac{\cos u}{\pi u} + \frac{1}{\pi u}.$$

Так как в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция разрывна, то

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{f(1-0)+f(1+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Окончательно запишем

$$\int\limits_0^\infty \Big[\frac{\sin u}{\pi u}\cos ux + \Big(-\frac{\cos u}{\pi u} + \frac{1}{\pi u}\Big)\sin ux\Big]du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin xu - \sin(x-1)u}{u}du = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{при } x > 1; \\ 1/2 & \text{при } x = 0; \\ 1/2 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Представим это разложение функции $f(x)$ интегралом Фурье в комплексной форме. Для этого вычислим спектральную плотность

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^1 e^{-iut}dt =$$

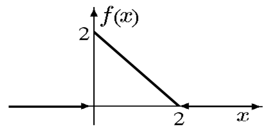
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\frac{e^{-iut}}{iu}\Big|_0^1\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\frac{e^{-iu}}{iu} + \frac{1}{iu}\Big) = \frac{1}{iu\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-iu}).$$

Следовательно, искомое представление имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(-\frac{e^{-iu}}{iu} + \frac{1}{iu}\Big)e^{iux}du = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1 - e^{-iu}}{u}e^{iux}du.$$

Пример 33.2. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 2 - x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$



Решение. Так как эта функция удовлетворяет условиям теоремы Фурье (условию существования интеграла Фурье), то ее, как и в предыдущих примерах, можно представить интегралом Фурье в форме (27.11):

$$f(x) = \int\limits_0^\infty [A(u)\cos ux + B(u)\sin ux]du.$$

Вычислим $A(u)$ и $B(u)$:

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^2 (2-t)\cos ut\,dt = \frac{1}{\pi u^2} - \frac{\cos 2u}{\pi u^2};$$

$$B(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^2 (2-t)\sin ut\,dt = \frac{2}{\pi u} - \ frac\sin 2u\pi u^2.$$

Так как $x = 0$ — точка разрыва функции, то

$$\frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Окончательно запишем

$$\int\limits_0^\infty \Big[\Big(\frac{1}{\pi u^2} - \frac{\cos 2u}{\pi u^2}\Big)\cos ux + \Big(\frac{2}{\pi u} - \frac{\sin 2u}{\pi u^2}\Big)\sin ux\Big]du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{2u\sin ux + \cos ux - \cos u(x-2)}{u^2}du = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x = 0; \\ 2-x & \text{при } 0 < x \leqslant 2; \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Заметим, что это же представление можно получить, если воспользоваться интегральной формулой Фурье в виде (27.8):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty du \int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

Действительно, внутренний интеграл вычисляется однократным интегрированием по частям:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)\,dt = \int\limits_0^2 (2-t)\cos u(x-t)\,dt = \\ = \frac{2u\sin ux + \cos ux - \cos u(x-2)}{u^2}.$$

Представим также разложение функции $f(x)$ интегралом Фурье в комплексной форме. Для этого вычислим спектральную плотность

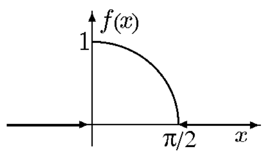
$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^2 (2-t)e^{-iut}dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{2}{iu} - \frac{e^{-iut}}{u^2}\Big|_0^2\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{2}{iu} - \frac{e^{-2iu}}{u^2} + \frac{1}{u^2}\Big).$$

Следовательно, искомое представление в комплексной форме имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \Big(\frac{2}{iu} + \frac{1-e^{-2iu}}{u^2}\Big)e^{iux}du.$$

Пример 33.3. Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in [0, \pi/2[; \\ 0 & x \notin [0, \pi/2] \end{cases}$$



.

Решение. Для спектральной плотности

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\pi/2} \cos t e^{-iut}dt$$

вычислим интеграл по частям, положив $U = e^{-iut}$, $dU = (-iu)e^{-iut}dt$, $dV = \cos t\,dt$, $V = \sin t$:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos t e^{-iut}dt = e^{-iut}\sin t\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} iue^{-iut}\sin t\,dt.$$

Повторное интегрирование по частям дает

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-iut}\cos t\,dt = e^{i\pi u/2} + iu + u^2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-iut}\cos t\,dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-iut}\cos t\,dt = \frac{e^{iu\pi/2}+iu}{1-u^2}$$

и

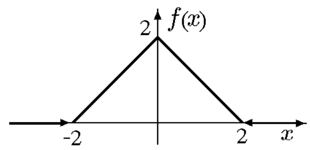
$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-iu\pi/2}+iu}{1-u^2}.$$

Следовательно, искомое представление имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu\pi/2}+iu}{1-u^2}e^{iux}du.$$

Пример 33.4. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{при } -2 \leqslant x < 0; \\ -x+2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 2 \end{cases}$$



.

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Фурье. Ее можно представить интегралом Фурье

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty}[A(u)\cos ux + B(u)\sin ux]du.$$

Функция четная, поэтому $B(u) = 0$. Вычислим $A(u)$:

$$A(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2}(-t+2)\cos ut\,dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot\cos ut\,dt =$$

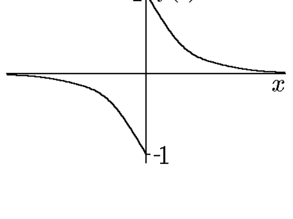
$$= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\cos 2u}{u^2} + \frac{1}{u^2}\Big) = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos 2u}{u^2}.$$

Так как функция непрерывна на всей числовой оси, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1-\cos 2u}{u^2}\cos ux\,du = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\cos ux\,du.$$

Пример 33.5. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ -e^{x} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$



.

Решение. Эта функция имеет разрыв первого рода в точке $x = 0$. Проверим, является ли функция $f(x)$ абсолютно интегрируемой на всей числовой оси:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int\limits_{-\infty}^{0} |-e^x|dx + \int\limits_{0}^{\infty} |e^{-x}|dx = e^x\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = 2.$$

Интеграл сходится. Следовательно, функцию $f(x)$ можно представить интегралом Фурье

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} [A(u)\cos ux + B(u)\sin ux]du.$$

Так как эта функция нечетная, поэтому $A(u) = 0$. Вычислим $B(u)$:

$$B(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\sin ut\,dt.$$

Проинтегрировав по частям, найдём

$$B(u) = \frac{2}{\pi}\lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{e^{-b}\cos ub}{u} + \frac{1}{u} - \frac{e^{-t}\sin ut}{u^2}\Big|_0^b + \int\limits_0^b \frac{\sin ut}{u^2}(-e^{-t})dt\Big] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{e^{-b}\cos ub}{u} + \frac{1}{u} - \frac{e^{-b}\sin ub}{u^2}\Big] - \frac{2}{\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{u^2}\int\limits_0^b e^{-t}\sin ut\,dt$$

или

$$\frac{2}{\pi}\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-t}\sin ut\,dt = \frac{2}{\pi u} - \frac{2}{\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{u^2}\int\limits_0^b e^{-t}\sin ut\,dt,$$

а поскольку

$$\lim_{b\to\infty}\Big(\frac{1}{u^2}+1\Big)\frac{2}{\pi}\int\limits_0^b e^{-t}\sin ut\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{u},$$

то

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}\sin ut\,dt = \frac{2u^2}{\pi u(1+u^2)}$$

и соответственно

$$B(u) = \frac{2u}{\pi(1+u^2)}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{u}{1+u^2}\sin ux\,du.$$

Положив $x = 1$, получим

$$e^{-1} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{u\sin u}{1+u^2}du,$$

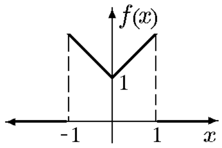
откуда

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e},$$

т.е. получим численное значение еще одного интересного несобственного интеграла.

Пример 33.6. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 1 & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases}$$



.

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Фурье. Следовательно, ее можно представить интегралом Фурье

$$f(x) = \int_0^\infty [A(u) \cos ux + B(u) \sin ux] du.$$

Функция четная, поэтому $B(u) = 0$. Вычислим $A(u)$:

$$A(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (t+1) \cos ut \, dt.$$

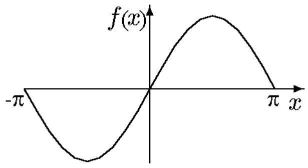
Интегралы такого вида мы уже неоднократно вычисляли. Интегрирование по частям дает

$$A(u) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{2 \sin u}{u} + \frac{\cos u}{u^2} - \frac{1}{u^2}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{2 \sin u}{u} - \frac{1 - \cos u}{u^2}\Big).$$

Следовательно, в точках непрерывности

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Big(\frac{2 \sin u}{u} - \frac{1 - \cos u}{u^2}\Big) \cos ux \, du.$$

Пример 33.7. Представить интегралом Фурье функцию



$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } \ 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0 & \text{при } \ \pi < x, \end{cases}$$

продолжив ее нечетным образом.

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Фурье. Следовательно, ее можно представить интегралом Фурье

$$f(x) = \int_0^\infty [A(u) \cos ux + B(u) \sin ux] du.$$

Функция продолжена нечетным образом, поэтому $A(u) = 0$. Вычислим $B(u)$:

$$B(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\sin ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t\sin ut\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}\big[\cos(t-ut) - \cos(t+ut)\big]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos t(1-u)\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos t(1+u)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\sin t(1-u)}{1-u}\Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi}\frac{\sin t(1+u)}{1+u}\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin\pi(1-u)}{1-u} - \frac{\sin\pi(1+u)}{1+u}\Big] = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin\pi u}{1-u} + \frac{\sin\pi u}{1+u}\Big) = \frac{2\sin\pi u}{\pi(1-u^2)}.$$

Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\pi u}{1-u^2}\sin ux\,du.$$

34. Преобразование Фурье

Рассмотрим некоторый класс функций $f(x)$, определенных на конечном $]a,b[$, полубесконечном $b=\infty$ или бесконечном $a=-\infty$, $b=\infty$ промежутке и фиксированную для этого класса функций функцию $K(x,u)$, определенную в прямоугольнике $]a,b[\times]c,d[$.

♦ *Интегральным преобразованием* (или *интегральным образом*) функции $f(x)$ с ядром $K(x,u)$ называется функция

$$\varphi(u) = \int\limits_a^b f(x)K(x,u)\,dx. \qquad (34.1)$$

Согласно определению, интегральное преобразование (34.1), представляющее собой интеграл, зависящий от параметра, можно рассматривать как новый способ задания функциональных зависимостей, используемых в математике и ее приложениях, в частности в математической физике. Изменяя ядро интегрального преобразования $K(x,u)$ [или классы $f(x)$], можно получать образы $\varphi(u)$, обладающие определенными свойствами.

Если через $\mathcal{K}$ обозначить интегральный оператор, действующий по правилу (34.1), то интегральный образ $\varphi(u)$ функции $f(x)$ можно записать как

$$\varphi(u) = \mathcal{K}[f](u) = \mathcal{K}_{x\to u}f(x) = \int\limits_a^b f(x)K(x,u)\,dx. \qquad (34.2)$$

Тогда исходную функцию $f(x)$ можно представить в виде интегрального преобразования

$$f(x) = \mathcal{K}^{-1}[\varphi](x) = \mathcal{K}^{-1}_{u\to x}\varphi(u) = \int\limits_a^b \varphi(u)K^{-1}(x,u)\,du. \qquad (34.3)$$

♦ Интегральное преобразование (34.3) называется *обратным* к (прямому) интегральному преобразованию (34.2), а функция $K^{-1}(x,u)$ – *ядром обратного преобразования* (34.3).

С учетом введенных определений функцию $f(x)$ можно представить следующим двойным интегралом:

$$f(x) = \mathcal{K}^{-1}\big[\mathcal{K}[f]\big](x). \tag{34.4}$$

Вернемся к интегралу Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iut}dt\Big]e^{iux}du. \tag{34.5}$$

Этот интеграл получен как обобщение понятия ряда Фурье на непериодическую на промежутке $]-\infty,\infty[$ функцию $f(x)$. С другой стороны, двойной интеграл (34.5), определяющий интеграл Фурье функции $f(x)$, можно рассматривать как частный случай двойного интеграла (34.4) с прямым

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx \tag{34.6}$$

и обратным интегральным преобразованием

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)e^{iux}du, \tag{34.7}$$

т.е. интегральными преобразованиями (34.2), (34.3) с ядрами

$$K(x,u) = \frac{e^{-iux}}{\sqrt{2\pi}}, \quad K^{-1}(x,u) = \frac{e^{iux}}{\sqrt{2\pi}}.$$

♦ Функция $\varphi(u)$, определяемая преобразованием (34.6), называется *преобразованием Фурье* или *образом Фурье* функции $f(x)$ (а также, как и ранее, *спектральной функцией* или *спектральной плотностью*) и с помощью оператора F обозначается как

$$\varphi(u) = F[f](u) = F_{x\to u}f(x). \tag{34.8}$$

Соответственно, формула (34.7) называется формулой обратного преобразования Фурье или обратным преобразованием Фурье и может быть записана как

$$f(x) = F^{-1}[\varphi](x) = F^{-1}_{u\to x}\varphi(u). \tag{34.9}$$

Таким образом, по формуле (34.6) можно найти образ Фурье известной функции, а по формуле (34.7) восстановить «оригинал», т.е. функцию $f(x)$ по ее известному образу Фурье. Распространённость преобразования Фурье (34.6) наряду с интегралом Фурье (34.5) оправдана тем, что выполнение некоторых операций над Фурье-образом $\varphi(u)$ оказывается иногда проще, чем над исходной функцией $f(x)$. При этом иногда весьма полезным оказывается тождество

$$F[f(x)] = F^{-1}[f(-x)], \tag{34.10}$$

вытекающее из (34.6) и (34.7).

Некоторые авторы вместо (34.6) и (34.7) рассматривают преобразования Фурье, определяемые соотношениями

$$\varphi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)e^{iux}du \tag{34.11}$$

или симметризованными заменой $u = 2\pi v$

$$\varphi(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi vx}dx, \quad f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)e^{i2\pi vx}dv, \tag{34.12}$$

а также

$$\varphi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iux}dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)e^{-iux}du \tag{34.13}$$

и др.

Равенство (34.6) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(u)$, стоящей под знаком интеграла, решение которого дается формулой (34.7) (см. главу «Интегральные уравнения» [4]). Впрочем, равенства (34.6) и (34.7) можно поменять местами.

Позднее мы рассмотрим преобразования с другими интегральными операторами (Лапласа, Меллина и др.) для соответствующих классов функций f, φ, аргументы которых могут быть и комплексными переменными.

Рассмотрим теперь частные случаи преобразования Фурье.

Пусть $f(x)$ — четная функция. Напомним формулу интеграла Фурье для четной функции

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\Big[\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt\Big]\cos ux\,du.$$

Перепишем ее в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt\Big]\cos ux\,du$$

и положим

$$\varphi_{\text{c}}(u) = F_{\text{c}}[f](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt. \tag{34.14}$$

Тогда получим

$$f(x) = F_{\text{c}}^{-1}[\varphi](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} \varphi_{\text{c}}(u)\cos ux\,du. \tag{34.15}$$

Видим, что функции $f(x)$ и $\varphi_{\text{c}}(u)$ совершенно одинаково выражаются друг через друга интегральной формулой, которая называется косинус-преобразованием Фурье.

$\Diamond$ Формула (34.14) определяет прямое косинус-преобразование Фурье четной функции $f(x)$, приводящее к функции $\varphi_{\text{c}}(u)$, а формула (34.15) — обратное косинус-преобразование Фурье.

Пусть $f(x)$ — нечетная функция. Запишем интеграл Фурье для нечетной функции

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_0^\infty f(t)\sin ut\,dt\Big]\sin ux\,du$$

и по аналогии можем определить прямое синус-преобразование Фурье

$$\varphi_{\mathrm{s}}(u) = F_{\mathrm{s}}[f](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\sin ut\,dt \tag{34.16}$$

и обратное синус-преобразование

$$f(x) = F_{\mathrm{s}}^{-1}[\varphi](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \varphi_{\mathrm{s}}(u)\sin ux\,du. \tag{34.17}$$

Поскольку любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы $f(x) = p(x)+q(x)$ четной функции $p(x) = [f(x)+f(-x)]/2$ и нечетной функции $q(x) = [f(x)-f(-x)]/2$, то преобразование Фурье любой функции можно представить в виде

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iux}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)[\cos ux - i\sin ux]\,dx = \varphi_{\mathrm{c}}(u) - i\varphi_{\mathrm{s}}(u),$$

где φ_{c} и φ_{s} – косинус- и синус-преобразования Фурье функций $q(x)$ и $p(x)$, соответственно.

Пример 34.1. Пусть функция $f(x)$ определена равенством

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x < a; \\ 1/2, & \text{если } x = a; \\ 0, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

Найти ее косинус- и синус-преобразования Фурье.

Решение. Косинус-преобразование этой функции есть

$$\varphi_{\mathrm{c}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^a 1\cdot\cos ut\,dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_a^\infty 0\cdot\cos ut\,dt =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^a \cos ut\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin au}{u};$$

синус-преобразование

$$\varphi_{\mathrm{s}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\sin ut\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^a 1\cdot\sin ut\,dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_a^\infty 0\cdot\sin ut\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^a \sin ut\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos au}{u}.$$

Найдя косинус- и синус-преобразования функций $\varphi_c(u)$, $\varphi_s(u)$, получим, согласно (34.16) и (34.17), интегральное представление функций

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin au}{u} \cos xu\, du = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < a; \\ 1/2, & \text{при } |x| = a; \\ 0, & \text{при } |x| > a; \end{cases} \qquad (34.18)$$

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{1 - \cos au}{u} \sin ux\, du = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0; \\ 1, & \text{при } 0 < x < a; \\ \pm 1/2, & \text{при } x = \pm a; \\ 0, & \text{при } x > a; \\ -1, & \text{при } -a < x < 0. \end{cases} \qquad (34.19)$$

Здесь $x = 0$ — точка разрыва. Для $x > 0$ интегралы (34.18) и (34.19) равны.

Пример 34.2. Найти решение уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty y(u) \cos ux\, du = e^{-x},$$

где $y(u)$ — искомая функция.

Решением этого уравнения будет обратное косинус-преобразование Фурье функции e^{-x}. Двукратное интегрирование по частям дает

$$y(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-t} \cos ut\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + u^2}$$

или

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + x^2},$$

если переобозначить u через x.

Пример 34.3. Показать, что косинус- и синус-преобразования Фурье φ_c и φ_s четной и нечетной функции $f(x)$ с точностью до множителя совпадают с коэффициентами $A(u)$ и $B(u)$ ее интегральной формулы Фурье в форме (27.11).

Решение. Так как

$$A(u) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut\, dt, \qquad B(u) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut\, dt,$$

а

$$\varphi_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(t) \cos ut\, dt, \qquad \varphi_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(t) \sin ut\, dt,$$

то, представив фурье-образы в виде

$$\varphi_{\text{c}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt, \qquad \varphi_{\text{s}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt,$$

находим

$$A(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi_{\text{c}}(u), \qquad B(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi_{\text{s}}(u).$$

Практика нахождения фурье-образов сталкивается с вычислением разнообразных несобственных интегралов, для которых использование стандартных методов затруднительно. В этих случаях можно обратиться к методам функций комплексного переменного, например теории вычетов, а также к методам дифференцирования и интегрирования несобственных интегралов по параметру. Приведем два примера, иллюстрирующих это замечание.

Пример 34.4. Для функции

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad a > 0,$$

найти преобразования Фурье и записать ее представление интегралом Фурье.

Решение. Четная функция $f(x)$ является дифференцируемой и абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{1}{a^2+x^2}\Big| dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

В силу четности функции $f(x)$ косинус-преобразование Фурье ($u > 0$) имеет вид

$$\varphi_{\text{c}}(u) = F_{\text{c}}\Big[\frac{1}{a^2+x^2}\Big](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ut}{a^2+t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ut}{a^2+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\Big[2\pi i \operatorname*{Res}_{t=ia} \frac{e^{iut}}{a^2+t^2}\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\Big[2\pi i \frac{e^{-au}}{2ia}\Big] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-au}}{a}.$$

Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-au}}{a} \cos ux\,du = \frac{1}{a} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-au} \cos ux\,du.$$

Пример 34.5. Для функции $f(x) = e^{-x^2}$ найти преобразования Фурье и записать ее представление интегралом Фурье.

Решение. Четная функция является дифференцируемой и абсолютно интегрируемой, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|e^{-x^2}\big|\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx < 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{1-x} dx = 2e. \tag{34.20}$$

На этом основании косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$ запишется в виде

$$\varphi_{\text{c}}(u) = F_{\text{c}}\big[e^{-x^2}\big](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\cos ut\,dt. \tag{34.21}$$

Наряду с самой функцией дифференцируемой и абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ является функция xe^{-x^2}:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \big|xe^{-x^2}\big|\,dx = 2\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx = -e^{-x^2}\Big|_0^\infty = 1. \tag{34.22}$$

В силу этого подынтегральное выражение $e^{-t^2}\cos ut$ в (34.21) и его производная

$$\frac{d}{du}\big(e^{-t^2}\cos ut\big) = -te^{-t^2}\sin ut$$

непрерывны и абсолютно интегрируемы в квадрате $]0,\infty[\times]0,\infty[$, поскольку они мажорируются интегралами (34.20) и (34.22). Тогда на основании признака Вейерштрасса интеграл (34.21) сходится равномерно и его можно дифференцировать по параметру u (см. также свойства 1 и 8 преобразований Фурье).

Дифференцирование (34.21) по u дает выражение

$$\varphi_{\text{c}}'(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty te^{-t^2}\sin ut\,dt,$$

проинтегрировав которое по частям, запишем

$$\varphi_{\text{c}}'(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bigg[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin ut\Big|_0^\infty - \frac{u}{2}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\cos ut\,dt\bigg] = -\frac{u}{2}\varphi_{\text{c}}(u).$$

Проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, найдем

$$\ln|\varphi_{\text{c}}(u)| = -\frac{u^2}{4} + \ln|c|$$

или

$$\varphi_{\text{c}}(u) = ce^{-u^2/4},$$

где c — произвольная постоянная. Ее можно определить, если воспользоваться интегралом Эйлера–Пуассона

$$\varphi_{\text{c}}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = c.$$

Тогда

$$\varphi_{\text{c}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-u^2/4}$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \varphi_{\text{c}}(u)\cos ux\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-u^2/4}\cos ux\,dx.$$

35. Свойства преобразования Фурье

Свойство 1. Непрерывность преобразования Фурье. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $]-\infty,\infty[$, то ее преобразование Фурье

$$\varphi(u) = F[f](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx \qquad (35.1)$$

ограничено и непрерывно в промежутке $]-\infty,\infty[$ и стремится к нулю при $|u|\to\infty$.

Доказательство. Из абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ следует, что для интеграла (35.1) существует мажорирующий интеграл

$$|\varphi(u)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx = Q < \infty.$$

Следовательно, функция $\varphi(u)$ ограничена и интеграл (35.1) сходится равномерно по параметру u. Отсюда, в свою очередь, следует непрерывность функции $\varphi(u)$ на всей числовой оси. Поведение фурье-образа $\varphi(u)$ на бесконечности легко устанавливается с помощью леммы 13.2.

$\Diamond$ Свойство 1 замечательно тем, что даже для разрывной функции $f(x)$ ее фурье-образ $\varphi(u)$ будет непрерывной функцией.

$\Diamond$ Свойство 1 справедливо и для косинус- и синус-преобразований Фурье, а также для коэффициентов $A(u)$ и $B(u)$ (см. пример 34.3).

Свойство 2. Линейность преобразования Фурье. Если $\varphi(u) = F[f](u)$, $\psi(u) = F[g](u)$, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные, то

$$F[C_1f + C_2g](u) = C_1F[f](u) + C_2F[g](u). \qquad (35.2)$$

Доказательство очевидно и вытекает из свойства линейности определенного интеграла (35.1).

Пример 35.1. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = 2e^{-|x|} + g(x)/3$, где

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & 0 < x < 1; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Решение. Воспользовавшись результатами примеров 30.1 и 33.1, имеем

$$F\big[e^{-|x|}\big](u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+u^2)}, \quad F[g](u) = -\frac{i(1-e^{iu})}{\sqrt{2\pi}u}.$$

Отсюда, согласно (35.2), найдем

$$F[f](u) = F\Big[2e^{-|x|} + \frac{g(x)}{3}\Big](u) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(1+u^2)} - \frac{i(1-e^{iu})}{3\sqrt{2\pi}u}.$$

Свойство 3. Теорема подобия. Если $\varphi(u) = F[f(x)](u)$, а $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, то

$$F[f(cx)](u) = \frac{1}{|c|}F[f(x)]\Big(\frac{u}{c}\Big) = \frac{1}{|c|}\varphi\Big(\frac{u}{c}\Big) \tag{35.3}$$

(при $c = -1$ имеем чистое отражение).

Доказательство можно получить, проведя в (35.1) замену $cx = y$. Тогда

$$F[f(cx)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(cx)e^{-iux}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i(u/c)y}dy, & c > 0; \\ -\dfrac{1}{c}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i(u/c)y}dy, & c < 0, \end{cases}$$

откуда и следует (35.3).

Пример 35.2. Найти преобразование Фурье функции

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ 2 + x/3, & -6 < x < 0; \\ 0, & x < -6. \end{cases}$$

Решение. Из решения примера 33.2 известно преобразование Фурье

$$F[f(x)](u) = \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-\frac{2i}{u} + \frac{1 - e^{-2iu}}{u^2}\Big] \tag{35.4}$$

функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2 - x, & 0 < x < 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases} \tag{35.5}$$

Поскольку функция $g(x)$ записывается как $g(x) = f(-x/3)$, то ее изображение можно найти, воспользовавшись формулой (35.3):

$$F[g(x)](u) = F[f(-x/3)](u) = \frac{1}{|-1/3|}F[f(x)]\Big(\frac{u}{-1/3}\Big) =$$
$$= 3\varphi(-3u) = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{2i}{3u} + \frac{1 - e^{6iu}}{9u^2}\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{2i}{u} + \frac{1 - e^{6iu}}{3u^2}\Big].$$

В справедливости полученной формулы можно убедиться непосредственным вычислением фурье-образа функции $g(x)$. Действительно,

$$F[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iux}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-6}^{0}\Big(2 + \frac{x}{3}\Big)e^{-iux}dx.$$

Вычислим интеграл по частям, положив $U = 2 + 3/x$, $dV = e^{-iux}dx$, $dU = dx/3$, $V = -e^{-iux}/(iu)$:

$$\int\limits_{-6}^{0}\Big(2 + \frac{x}{3}\Big)e^{-iux}dx = -\frac{2 + x/3}{iu}\Big|_{-6}^{0} + \frac{1}{3iu}\int\limits_{-6}^{0} e^{-iux}dx =$$

$$= -\frac{2}{iu} + \frac{1}{3u^2} e^{-iux}\Big|_{-6}^{0} = \frac{2i}{u} + \frac{1}{3u^2}(1 - e^{6iu}).$$

Тогда

$$F[g(x)] = \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{2i}{u} + \frac{1}{3u^2}(1 - e^{6iu})\Big].$$

Следует отметить, что, хотя функция (35.5) имеет разрыв в точке $x = 0$, функция $\varphi(u)$ непрерывна в точке $u = 0$, поскольку

$$\lim_{u\to 0}\varphi(u) = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-\frac{2i}{u} + \frac{1 - e^{-2iu}}{u^2}\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-\frac{2i}{u} + \frac{2iu}{u^2}\Big] = 0,$$

что подтверждает свойство 1. Кроме того, $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u) = 0$.

Свойство 4. Теорема запаздывания. Теорема смещения. Если $\varphi(u) = F[f(x)](u)$, то

$$F[f(x + x_0)](u) = e^{iux_0}F[f(x)](u) = e^{iux_0}\varphi(u). \tag{35.6}$$

Доказательство можно получить, проведя в (35.1) замену $x + x_0 = y$. Тогда

$$F[f(x + x_0)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x + x_0)e^{-iux}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iu(y-x_0)}dy = e^{iux_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iuy}dy,$$

откуда и следует (35.6).

Пример 35.3. Найти преобразование Фурье функции

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < -1;\\ 1 - x, & -1 < x < 1;\\ 0, & x > 1.\end{cases}$$

Решение. Из решения примера 33.2 известно преобразование Фурье (35.4) функции (35.5). Поскольку функцию $g(x)$ можно записать как $g(x) = f(x + 1)$, то ее изображение можно найти, воспользовавшись формулой (35.6):

$$F[g(x)](u) = F[f(x + 1)](u) = e^{iu}F[f(x)](u) =$$
$$= e^{iu}\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iu}\Big[-\frac{2i}{u} + \frac{1 - e^{-2iu}}{u^2}\Big].$$

Такой же результат можно получить непосредственным вычислением фурье-образа функции $g(x)$. Действительно,

$$F[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iux}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{1}(1 - x)e^{-iux}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-\frac{1}{iu}(1-x)e^{-iux}+\frac{1}{u^2}e^{-iux}\Big]\Big|_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-\frac{1}{iu}(-2)e^{-iu}+\frac{1}{u^2}(e^{-iu}-e^{iu})\Big] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iu}\Big[-\frac{2i}{u}+\frac{1}{u^2}(1-e^{-2iu})\Big].$$

Свойство 5. Теорема смещения для Фурье образов. Если $\varphi(u) = F[f(x)](u)$, то

$$F[f(x)e^{iu_0x}](u) = F[f(x)](u-u_0) = \varphi(u-u_0). \tag{35.7}$$

Доказательство получается заменой $u - u_0$ в (35.1), т.е.

$$F[f(x)e^{iu_0x}](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iu_0x}e^{-iux}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(u-u_0)x}dx = F[f(x)](u-u_0) = \varphi(u-u_0).$$

Пример 35.4. Найти преобразование Фурье функции

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ (2-x)e^{3x}, & 0 < x < 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Решение. Поскольку функцию $g(x)$ можно записать как $g(x) = f(x)e^{3x}$, где $f(x)$ определена равенством (35.5), то преобразование Фурье можно получить, воспользовавшись известным преобразованием Фурье (35.4) функции $f(x)$ и формулой (35.7). Тогда

$$F[g(x)](u) = F[f(x)e^{3x}](u) = F[f(x)](u+3i) =$$
$$= \varphi(u+3i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[-\frac{2i}{u+3i}+\frac{1-e^{-2i(u+3i)}}{(u+3i)^2}\Big].$$

Пример 35.5. Пусть $\varphi(u) = F[f(x)](u)$. Показать, что

$$F\big[f(x)\cos u_0x\big](u) = \frac{1}{2}\big\{F[f(x)](u-u_0)+F[f(x)](u+u_0)\big\}, \tag{35.8}$$
$$F\big[f(x)\sin u_0x\big](u) = \frac{1}{2i}\big\{F[f(x)](u-u_0)+F[f(x)](u+u_0)\big\}. \tag{35.9}$$

Решение. Согласно определению (34.6),

$$F\big[f(x)\cos u_0x\big](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\cos u_0x\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{iu_0x}+e^{-iu_0x}}{2}e^{-iux}dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iu_0x}e^{-iux}dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iu_0x}e^{-iux}dx\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{F\big[f(x)e^{iu_0x}\big](u) + F\big[f(x)e^{-iu_0x}\big](u)\Big\} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{F\big[f(x)\big](u-u_0) + F\big[f(x)\big](u+u_0)\Big\},$$

что и требовалось показать. Справедливость соотношения (35.9) доказывается аналогично.

Пример 35.6. Найти преобразование Фурье функции

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \notin \Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]. \end{cases}$$

Решение. Функцию $g(x)$ можно рассматривать как произведение $g(x) = f(x)\cos x$, где функция $f(x)$ взята из примера 31.1 с $l = \pi/2$. Тогда

$$F[f(x)](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(n\pi/2)}{u}$$

и, следовательно, согласно (35.8),

$$F[g(x)](u) = F\big[f(x)\cos x\big](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(u-1)\pi/2}{u-1} + \frac{\sin(u+1)\pi/2}{u+1}\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[-\frac{\cos\pi u/2}{u-1} + \frac{\cos\pi u/2}{u+1}\Big] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\pi u/2}{1-u^2}.$$

Свойство 6. Теорема о повторном преобразовании Фурье. Если $\varphi(u) = F[f(x)](u)$, то

$$F\big[F[f]\big](x) = F[\varphi(u)] = f(-x). \tag{35.10}$$

Доказательство. Действуя на тождество (34.10)

$$F[f(x)] = F^{-1}[f(-x)]$$

оператором F, приходим к (35.10).

Свойство 7. Теорема дифференцирования. Если $\varphi(u) = F[f(x)](u)$ и абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ имеет n абсолютно интегрируемых производных, то

$$F[f^{(n)}(x)](u) = (iu)^nF[f(x)](u) = (iu)^n\varphi(u). \tag{35.11}$$

Доказательство достаточно провести для $n = 1$. Тогда

$$F[f'(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iux}dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$F[f'(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{f(x)e^{-iux}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iu\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx\right\} = iuF[f(x)](u),$$

поскольку первое слагаемое обращается в нуль: $f(\pm\infty) = 0$ в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$.

Пример 35.7. Найти преобразование Фурье функции

$$g(x) = -\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}, \quad a > 0.$$

Решение. Легко увидеть, что функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и может быть представлена в виде $g(x) = f'(x)$, где

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

В примере 34.4 получена формула

$$F\Big[\frac{1}{a^2+x^2}\Big](u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ua}}{a},$$

откуда, согласно (35.11), можно записать

$$F\Big[-\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}\Big](u) = F\Big[\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{a^2+x^2}\Big)\Big](u) = iuF\Big[\frac{1}{a^2+x^2}\Big](u) = iu\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ua}}{a}.$$

Пример 35.8. Показать, что если в формуле (35.11)

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases}$$

где функция $g(x)$ дифференцируема в $]a,b[$, то

$$F[f'(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big[g(b-0)e^{-ibu} - g(a+0)e^{-iau}\big] + iuF[g(x)](u).$$

Решение. Согласно определению,

$$F[f'(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b g'(t)e^{-iut}dt.$$

После интегрирования по частям получим

$$F[f'(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[g(x)e^{-iut}\Big|_a^b + iu\int\limits_a^b g(t)e^{-iut}dt\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big[g(b-0)e^{-ibu} + g(a+0)e^{-iau}\big] + iuF[g(x)](u),$$

что и требовалось показать.

Свойство 8. Теорема дифференцирования для фурье-образов. Если вместе с функцией $f(x)$ абсолютно интегрируемыми в промежутке $]-\infty,\infty[$ являются и функции $xf(x)$, $x^2f(x)$, ..., $x^nf(x)$, то функция $\varphi(u) = F[f](u)$ имеет все производные до n-го порядка включительно, которые ограничены, непрерывны и стремятся к нулю при $|u| \to \infty$, причем

$$F[(-ix)^n f(x)](u) = \big(F[f(x)](u)\big)^{(n)} = \varphi^{(n)}(u). \tag{35.12}$$

Доказательство достаточно провести для $n = 1$. Согласно свойству 1, функция $\varphi(u)$ – ограниченная непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $|u| \to \infty$. Формальным дифференцированием интеграла (35.1) по параметру u получим интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-iux}dx,$$

который, согласно условию, является абсолютно интегрируемым, но тогда он сходится равномерно по параметру u, причем именно к $\varphi'(u)$. Доказательство для $n > 1$ аналогично.

Пример 35.9. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-x^2}$.

Решение. Как показано в примере 34.5, функция xe^{-x^2} абсолютно интегрируема в $\mathbb{R}$. Следовательно, чтобы найти ее преобразование Фурье, можно воспользоваться формулой (35.12). Приняв во внимание, что

$$F[e^{-x^2}](u) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-u^2/4},$$

находим

$$F[xe^{-x^2}](u) = i\frac{d}{du}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-u^2/4}\Big] = \frac{iu}{2\sqrt{2}}e^{-u^2/4}.$$

Введем следующее определение:

♦ *Сверткой двух функций* $f(x)$ и $g(x)$, обозначаемой $f(x) * g(x)$, называется функция $h(x)$, равная

$$h(x) = f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy. \tag{35.13}$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то $h(x)$ также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, причем

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x) \tag{35.14}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx. \tag{35.15}$$

Свойство 9. Теорема умножения. Если $\varphi(u) = F[f]$ и $\psi(u) = F[g]$, то

$$F[f * g] = F[f]F[g] = \varphi(u)\psi(u), \tag{35.16}$$

т.е. преобразование Фурье от свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье каждой из них.

Доказательство следует из цепочки преобразований

$$F[f(x)*g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izu}dz\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(z-y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)e^{-iu(x+y)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)e^{-iux}dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iuy}dy = \psi(u)\varphi(u). \qquad (35.17)$$

Следовательно,

$$f(x)*g(x) = F^{-1}[\varphi(u)\psi(u)] = F^{-1}\big[F[f]F[g]\big](x). \qquad (35.18)$$

Подействовав на (35.18) оператором F, получим (35.16).

Равенство (35.17) можно записать в более привычной форме, если воспользоваться определением (35.13):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)\varphi(u)e^{iux}du.$$

36. Фурье-образы и дельта-функция Дирака

В дополнение к изложенным выше методам нахождения преобразования Фурье рассмотрим еще один, использующий дельта-функцию Дирака $\delta(x-x_0)$, которая является обобщенной функцией.

Подробное изложение теории обобщенных функций проведено в [2]. Для конкретной задачи – нахождения фурье-образов функций – нам будет достаточно следующих формальных положений. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f(x)\,dx = f(x_0),$$

то преобразование Фурье $\delta(x-x_0)$ имеет вид

$$F[\delta(x-x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)e^{-iux}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iux_0}.$$

Кроме того, дифференцирование разрывной в точке x_0 функции проводится по правилу

$$f'(x) = f'(x) + [f(x+0) - f(x-0)]\delta(x-x_0), \qquad (36.1)$$

где $f'(x)$ – производная в точках непрерывности. Согласно этой формуле, в отсутствие точек разрыва производные $f'(x)$ и $f'(x)$ совпадают. При наличии же точек разрыва дифференцирование добавляет соответствующую дельта-функцию.

Идею метода лучше всего пояснить на примерах.

Пример 36.1. Найти фурье-образ функции, изображенной на рис. 31,*а*.

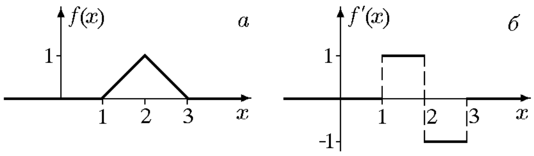


Рис. 31

Решение. Легко видеть, что производная $f'(x)$ задается графиком (рис. 31,*б*).
Тогда $f''(x) = \delta(x-1) - 2\delta(x-2) + \delta(x-3)$ и, следовательно,

$$F[f''(x)](u) = F[\delta(x-1)] - 2F[\delta(x-2)] + F[\delta(x-3)].$$

Но с учетом свойства 7 имеем

$$(iu)^2 F[f(x)](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[e^{-iu} - 2e^{-2iu} + e^{-3iu}],$$

откуда

$$F[f(x)](u) = -\frac{1}{u^2}e^{-2iu}\big\{-2 + e^{-iu} + e^{iu}\big\} = \frac{e^{-2iu}}{\sqrt{2\pi}u^2}2(1-\cos u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-2iu}}{u^2}\sin^2 u.$$

Пример 36.2. Найти Фурье-образ функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in]-\pi/2, \pi/2[, \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

(рис. 32,*а*).

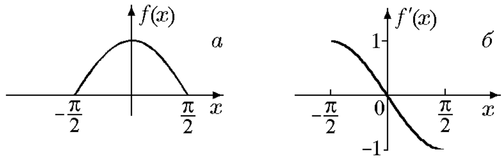


Рис. 32

Решение. Легко видеть, что производная $f'(x)$ задается графиком, изображенным на рис. 32*б*.
Тогда

$$f''(x) = \delta\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) - \cos x + \delta\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) = \delta\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) - f(x) + \delta\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)$$

и, следовательно,

$$F[f''(x)](u) = F\Big[\delta\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)\Big](u) - F[f(x)](u) + F\Big[\delta\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\Big](u).$$

Отсюда с учетом свойства 7 найдем

$$F[f''(x)](u) = (iu)^2 F[f(x)](u) = \frac{e^{-i\pi u/2}}{\sqrt{2\pi}} - F[f(x)](u) + \frac{e^{i\pi u/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

откуда

$$(1-u^2)F[f(x)](u) = \frac{e^{i\pi u/2} + e^{-i\pi u/2}}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\pi u}{2}$$

или

$$F[f(x)](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(\pi u/2)}{1-u^2}.$$

Аналогичный результат получен в примере 35.6.

Пример 36.3. Найти преобразование Фурье функции

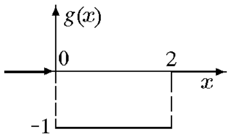
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2 - x, & 0 < x < 2; \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

приведенной в примере 33.2.

Решение. Дифференцирование заданной функции, согласно (36.1), дает

$$f'(x) = 2\delta(x) + g(x),$$

где



$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ -1, & 0 < x < 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

и, соответственно,

$$f''(x) = 2\delta'(x) - \delta(x) + \delta(x - 2).$$

Преобразование Фурье этого равенства

$$F[f''(x)](u) = 2F[\delta'(x)](u) - F[\delta(x)](u) + F[\delta(x - 2)](u)$$

с учетом свойства 7 можно записать

$$-u^2 F[f(x)(u) = 2iuF[\delta(x)](u) - F[\delta(x)](u) + F[\delta(x - 2)](u)$$

или (ср. с примером 33.2)

$$F[f(x)](u) = -\frac{1}{u^2}\Big[\frac{2iu}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-2iu}}{\sqrt{2\pi}}\Big] = \frac{1}{u^2\sqrt{2\pi}}\big\{ - 2iu + 1 - e^{-2iu}\big\}.$$

Теоретические вопросы

1. Определение числового ряда. Сумма и сходимость ряда.
2. Основные свойства числовых рядов.
3. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.
4. Достаточные признаки сходимости ряда. Признаки сравнения.
5. Достаточные признаки сходимости ряда. Признак Даламбера.
6. Достаточные признаки сходимости ряда. Признак Коши.
7. Достаточные признаки сходимости ряда. Интегральный признак.
8. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
9. Абсолютная и условная сходимость. Признаки Коши и Даламбера для знакопеременных рядов.
10. Функциональные ряды. Область сходимости.
11. Равномерно сходящиеся функциональные ряды. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
12. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.
13. Разложение функций в степенные ряды. Ряд и Формула Тейлора.
14. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд $y = \exp x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$.
15. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд $y = \cos x$, $y = \sin x$.
16. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд $y = \ln(1+x)$.
17. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд $y = \operatorname{arctg} x$.
18. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд $y = (1 + x)$.
19. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций. Свойства коэффициентов ряда Фурье. Тригонометрические полиномы.
20. Комплексная форма рядов Фурье.
21. Разложение в ряд Фурье функций периода 2π.
22. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на полупериоде $(0, \pi)$.
23. Разложение в ряд Фурье функций заданных на произвольном отрезке $[a, b]$.
24. Интеграл Фурье.
25. Различные формы интеграла Фурье. Комплексная форма интеграла Фурье.
26. Интеграл Фурье четной и нечетной функции.
27. Преобразование Фурье и его свойства.
28. Представление интегралом Фурье функций заданных на полуоси $[0, \infty)$.
29. Сопряженный ряд Фурье. Преобразование Гильберта.
30. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$
или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

1.2. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n(2n)!!}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$$
на сходимость по признаку Даламбера.

1.3. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+5n-1}{5n^2+2n+1}\right)^{n}$$
на сходимость по признаку Коши.

1.4. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$$
на сходимость по интегральному признаку.

1.5. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sin n\alpha}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}-\pi}{\sqrt{n^2-n}}$$
на сходимость с помощью признаков сравнения.

1.6. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)^2}}{\ln(n+1)}$$
на сходимость и абсолютную сходимость.

1.7. Исследовать на сходимость ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n-a}-\sqrt[4]{n^2+n+1}); \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1); \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{2^n};$$
$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\sin\frac{1}{n}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n+1}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{[(n+2)!]^2}.$$

1.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(2n)!!/n^n$.

1.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью α:
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}, \quad \alpha=0{,}01; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad \alpha=0{,}001.$$

1.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2+1+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$
Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

1.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

1.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(3x-1)}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4}\right)^x.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

1.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $[0,3]$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x}{(1+\sqrt{x})^n},$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}\sqrt{3+nx}},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

1.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{x^n}{n!}.$$

1.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \operatorname{tg}^n x, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2^n)}{x^n}.$$

1.16. Для функций

$$\text{а)}\ \operatorname{tg} x, \qquad \text{б)}\ e^{\sin x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=\pi/4$ и $x_0=\pi/2$ соответственно.

1.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{1}{x^2+9x+20}, \qquad \text{б)}\ \ln(1-5x+4x^2), \qquad \text{в)}\ (1+x)e^{-2x}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=0$, $x_0=-2$, соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

1.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n}\right] x^{2n}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

1.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}.$$

1.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\text{а)}\ \int_0^1 x^{-x}dx,\ \sigma = 10^{-2}.$$

1.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' = 2\cos x - xy^2, \quad y(0) = 1,$$

в ряд Тейлора.

1.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

1.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0; \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = e^x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2.$$

Построить график суммы полученного ряда.

1.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = x^2, \quad x \in]0, \pi[; \quad \text{б)}\ f(x) = \frac{l}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in]0, l[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

1.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 33) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

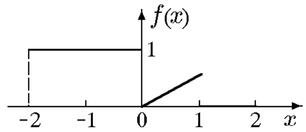


Рис. 33

1.26. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi; \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

1.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = (2x + 1)e^{-|x|}.$$

1.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{x}{9 + x^2},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 2

2.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

2.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^6}{6^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

2.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ 3 + (2{,}1)^2 + (2{,}01)^3 + (2{,}001)^4 + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{3n} \sin^n \frac{1}{n^2}$$

на сходимость с помощью признака Коши.

2.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n},\quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg} n}{\sqrt{n}}$$

на сходимость по интегральному признаку.

2.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 \pi n/3}{3^n+2},\quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

2.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/3)}{n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+2)}}{\sqrt{n}}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

2.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2});\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\sin\frac{1}{n}\Big)^{n^2};\quad \text{в)}\ \sum_{n=3}^{\infty}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi/n)}{\cos(\pi/n)};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos(3/\sqrt{n+2})};\quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+3}}\sin\frac{\pi n}{8};\quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{4n^2+4n-3}.$$

2.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(2n)!/(2^n)!$.

2.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью α

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{n^2}},\quad \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^n(n+1)},\quad \alpha=0{,}001.$$

2.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+4+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

2.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}.$$

2.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x(x+n)}{n}\Big)^n;\quad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}x^{-n\operatorname{ctg}x}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

2.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]-\infty,\infty[$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $[1+\delta,\infty[$, $\delta>0$, ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

2.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(2-x)^n \sin\frac{\pi}{2n}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}.$$

2.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(1+x^2), \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(4-x^2)^n.$$

2.16. Для функций

$$\text{а)}\ \sin(2\arcsin x), \qquad \text{б)}\ \ln^2(1-2x)$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0 = 1/2$ и $x_0 = 0$ соответственно.

2.17. Функции

$$\text{а)}\ x\cos x, \qquad \text{б)}\ \arcsin x, \qquad \text{в)}\ \frac{1}{2+x}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = \pi/4$, $x_0 = 0$, $x_0 = -1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

2.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x^2-1)^n, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(4n^2+9n+5)x^{n+1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

2.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x-\sin x}.$$

2.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x}e^x dx, \quad \sigma = 0{,}01.$$

2.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' = x + x^2 + y^2, \quad y(0) = 1,$$

в ряд Тейлора.

2.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

2.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi < x < 0; \\ \dfrac{(x-\pi)^2}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = 6-3x, \quad x \in]0,4[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

2.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = 2x-3, \quad x \in]0,\pi[; \qquad \text{б)}\ f(x) = e^{2x}, \quad x \in]0,l[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

2.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 34) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

2.26. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in]-1,0[;\\ x, & x\in]0,1[\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

2.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}x\cos 3x, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

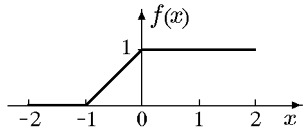


Рис. 34

2.28.* Для функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 3

3.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

3.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

3.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ 2+1+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\ldots,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\frac{\pi}{2^n}$$

на сходимость с помощью признака Коши.

3.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}},\quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$$

на сходимость по интегральному признаку.

3.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n\operatorname{arctg}\frac{\pi}{3^n},\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

3.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{(\ln n)^3}}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

3.7. Исследовать на сходимость ряд

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\dfrac{n+1}{n}}\Big)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\cdots(5n-3)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n^2]{n!}}{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+n-2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big(1-\dfrac{2}{n}\Big)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{5^n}$.

3.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^n/n^{n!}$.

3.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с заданной точностью

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n},\quad \alpha=0{,}01;\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(3n+1)},\quad \alpha=0{,}001.$$

3.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+6+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

3.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}.$$

3.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^n;\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

3.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]0,\infty[$ ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+\sqrt{x})^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $[1,10]$ ряд

$$\text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

3.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n,\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}(x-3)^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

3.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(4x+7)^{2n-1}},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n n\ln n}.$$

3.16. Для функций

$$\text{а)}\quad e^x\cos^2 x,\qquad \text{б)}\quad \Big(\frac{\arcsin x}{x}\Big)^2$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=\pi/3$ и $x_0=1/2$ соответственно.

3.17. Функции

$$\text{а)}\quad \arccos(x+1), \quad \text{б)}\quad \frac{1}{x^2-4x+3}, \quad \text{в)}\quad \ln(2+x)$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=-1$, $x_0=-2$, $x_0=-1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

3.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n(n-1)}, \quad \text{б)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

3.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-x}{x\sqrt[3]{8+x}-2x},$$

3.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью

$$\int_0^1 \sqrt{e^{3x^2}}dx, \quad \sigma=0{,}01.$$

3.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y'=2x+\cos 2y, \quad y(0)=0,$$

в ряд Тейлора.

3.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1-x^3)y''-6x^2y'-6xy=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

3.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\quad f(x)=3-|x|, \quad x\in]-\pi,\pi[; \qquad \text{б)}\quad f(x)=x^2-x, \quad x\in]0,4[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

3.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\quad f(x)=\sin x, \quad x\in]0,\pi[; \quad \text{б)}\quad f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2x}{\pi}, & x\in]0,\pi/2[;\\ 0, & x\in]\pi/2,\pi[,\end{cases}$$

разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и по синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

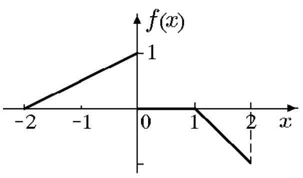


Рис. 35

3.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 35) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

3.26. Функцию $f(x)=e^{-|x|}$ представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

3.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

3.28.* Для функции

$$f(x)=\frac{1}{4+x^2},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 4

4.1. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-4)}$$
или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

4.2. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}+\frac{5}{9}+\ldots,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+5)^2}{2^n}$$
на сходимость с помощью признака Даламбера.

4.3. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\cos^n\frac{\pi n}{2(n+1)},\qquad \text{б)}\ \frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\left(\frac{4}{5}\right)^{16}+\ldots$$
на сходимость с помощью признака Коши.

4.4. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},\quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$$
на сходимость по интегральному признаку.

4.5. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)2^n},\quad \text{б)}\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}$$
на сходимость с помощью признаков сравнения.

4.6. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-n}}{n}$$
на сходимость и абсолютную сходимость.

4.7. Исследовать на сходимость ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}-e^{-1/n}}{\operatorname{tg}(2/n)-\sin(1/n)};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}};$$
$$\text{г)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\ln^{1/2}n\sin\frac{\pi n^2}{n+1};\quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n};\qquad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(2n)!!}.$$

4.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^n/n^{n^3}$.

4.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{1+n^8},\quad \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n)!3n},\quad \alpha=0{,}001.$$

4.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+1+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$
Сделать проверку. Сумму произведения рядов сравнить с произведением сумм этих рядов. следует получить умножением суммы первого ряда на второй ряд.

4.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

4.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin 2n\alpha; \quad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

4.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]-\infty,\infty[$ ряд

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^3},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

4.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n!)^2}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n (x+3)^n}{n}.$$

4.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{\ln^2 \sin(1/n)}.$$

4.16. Для функций

$$\text{а)} \ (1-x)\sqrt{1+x}, \qquad \text{б)} \ \operatorname{tg}(1+e^x)$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, где $x_0 = 0$ и $x_0 = 0$ соответственно.

4.17. Функции

$$\text{а)} \ x2^x, \quad \text{б)} \ \sqrt{2+x}, \quad \text{в)} \ x^{-2}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = 3$, $x_0 = -1$, $x_0 = -2$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

4.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} 2nx(x^2-2)^{n-1}, \quad \text{б)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

4.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}.$$

4.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью

$$\int_0^1 x^x dx, \quad \sigma = 0{,}01.$$

4.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0, \quad y(0) = 2,$$

в ряд Тейлора.

4.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+x^3)y''+6x^2y'+6xy=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

4.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x)=\frac{\pi-x}{3},\quad x\in]-\pi,\pi[;\quad \text{б)}\ f(x)=\begin{cases}x, & x\in]0,1[;\\ 1, & x\in]1,2[.\end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

4.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x)=3-4x^2,\quad x\in]0,\pi[;\qquad \text{б)}\ f(x)=e^{x-1},\quad x\in]0,2[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

4.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 36) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

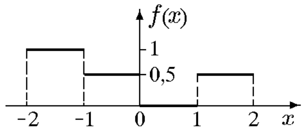


Рис. 36

4.26. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x-2, & x\in(-2,-1);\\ x, & x\in]-1,1[;\\ -x+2, & x\in]1,2[;\\ 0, & |x|>2\end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

4.27.* Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=xe^{-x^2/2}.$$

4.28. Для функции

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in]0,\pi];\\ 0, & x\in]\pi,\infty[,\end{cases}$$

заданной на $]0,\infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 5

5.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(5+b^2)^{n-1}}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

5.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n+2}{n+3}\Big)^2\frac{1}{3^n},\qquad \text{б)}\ 1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

5.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n^2+1}{4n^2-3}\Big)^{n/3},\qquad \text{б)}\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

5.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+n^2},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$$

на сходимость по интегральному признаку.

5.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

5.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n},\qquad \text{б)}\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

5.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n};\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7{\cdot}13\cdots(6n+1)}{1{\cdot}8{\cdot}27\cdots n^3};\qquad \text{в)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n);$$

$$\text{г)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}(2/n)}{\sin 2\pi(10+1/n)};\qquad \text{д)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n+2};\qquad \text{е)}\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos(\pi n/12)}{\ln\sqrt{n}}.$$

5.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)!!/(2n)!!(2n+1)$.

5.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\quad \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n,\quad \alpha=0{,}01.$$

5.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+8+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

5.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}.$$

5.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2};\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n\operatorname{tg}x}}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

5.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]0,1[$ ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{x}}{(1-x)^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $[0,10]$ ряд

$$\text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

5.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n^2}\Big)x^n, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{(2n-1)!!}.$$

5.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}(x^2-1)^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\cos\frac{x}{n}\Big)^n.$$

5.16. Для функций

$$\text{а)}\ \sin(\alpha\arcsin x), \qquad \text{б)}\ e^{(1-x)/x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=2$ соответственно.

5.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{1}{x^2+4x+7}, \qquad \text{б)}\ \ln\frac{2+x}{3+4x}, \qquad \text{в)}\ \sin(x^2+2x)$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=-2$, $x_0=0$, $x_0=-1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

5.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^3-1)^{n+1}}{n+1}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+5)x^{n+1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

5.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\ln\big[(1+x+x^2)(1-x-x^2)\big]^{1-\cos x}.$$

5.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_2^4 e^{1/x}dx, \qquad \sigma=0{,}01.$$

5.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y''=\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}, \qquad y(1)=1, \qquad y'(1)=0,$$

в ряд Тейлора.

5.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(1+2x)y''-2xy'+2y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

5.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x)=\begin{cases}-2, & x\in]-\pi,0[;\\ 1, & x\in]0,\pi[;\end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x)=\begin{cases}x, & x\in]0,1[;\\ 2-x, & x\in]1,2[.\end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

5.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x)=\pi-2x, \quad x\in]0,\pi[; \qquad \text{б)}\ f(x)=(x-1)^2, \quad x\in]0,2[,$$

разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и по синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

5.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 37) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

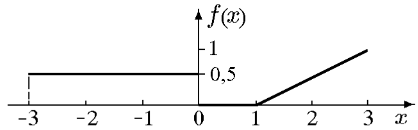


Рис. 37

5.26.* Функцию
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

5.27. Найти преобразование Фурье функции
$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

5.28. Для функции
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in]0, \pi]; \\ 0, & x \in [\pi, \infty[, \end{cases}$$
заданной на $]0, \infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 6

6.1. Найти сумму ряда или установить его расходимость
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$
исходя из определения или критерия Коши.

6.2. Исследовать ряд
$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdots (2n+5)}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}$$
на сходимость с помощью признака Даламбера.

6.3. Исследовать ряд
$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n^2}, \qquad \text{б)} \ \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \frac{1}{\ln^4 5} + \ldots$$
на сходимость с помощью признака Коши.

6.4. Исследовать ряд
$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$$
на сходимость по интегральному признаку.

6.5. Исследовать ряд
$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}), \quad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}[2 + (-1)^n]}{\ln(1+n)}$$
на сходимость с помощью признаков сравнения.

6.6. Исследовать ряд
$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-2)!}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{10} n}{n} \sin \frac{\pi n}{4}$$
на сходимость и абсолютную сходимость.

6.7. Исследовать на сходимость ряд

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2(\sin 1/n)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{2+\sqrt{n}}{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n)^n}{(2n-1)!}$.

6.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} n!/n^n$.

6.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n5^n},\ \alpha=0{,}01; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!},\ \alpha=0{,}001.$$

6.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4+1+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

6.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

6.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}2^{3n}n^3\sin^{3n}x.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

6.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]0,1[$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1-x)^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $0{,}5\leqslant x\leqslant 2$ ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}(x^n+x^{-n}),$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

6.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\sqrt{2})^n}{(n+1)\ln(n+1)}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}x^n\operatorname{arctg}^n\frac{n^2+3}{n^2+1}.$$

6.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(3x-2)}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}.$$

6.16. Для функций

$$\text{а)}\ \ln(2+\sin x), \qquad \text{б)}\ \frac{e^{1/x}}{1-x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=\pi/4$ и $x_0=2$ соответственно.

6.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{1}{x^2-6x+5},\qquad \text{б)}\ (2+e^{-x})^2,\qquad \text{в)}\ (x-1)\sin 5x$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=3$, $x_0=0$, $x_0=1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

6.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-n-1)(x^2-1)^n,\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\Big)x^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

6.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x[e^{\sin^2 x}-\ln(x^2+e)]}{\operatorname{tg}x-\sin x}.$$

6.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью

$$\int_0^1 \operatorname{ch}x^2dx,\quad \sigma=0{,}01.$$

6.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y''=(y')^2+xy,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-2,$$

в ряд Тейлора.

6.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''-(2+x)y'+2y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

6.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x)=x,\quad x\in]-\pi,\pi[;\qquad \text{б)}\ f(x)=x-1,\quad x\in]0,2[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

6.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x)=\frac{1}{2}x^2-1,\quad x\in]0,\pi[;\qquad \text{б)}\ f(x)=|x-1|,\quad x\in]0,3[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график сумм полученных рядов.

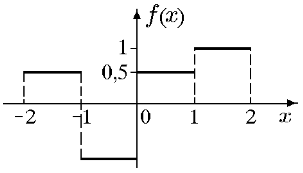


Рис. 38

6.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 38) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

6.26.* Функцию

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

6.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in]1,2[;\\ 0, & x\notin]1,2[.\end{cases}$$

6.28. Для функции

$$f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 7

7.1. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^n}$$
или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

7.2. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{(n!)^2}{2^{n^3}},\qquad \text{б)}\ 1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots$$
на сходимость с помощью признака Даламбера.

7.3. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{3}{n}\Bigr)^{n^2},\qquad \text{б)}\ 1+2\sin^2\frac{\pi}{4}+3\sin^3\frac{\pi}{8}+4\sin^4\frac{\pi}{16}+\ldots$$
на сходимость с помощью признака Коши.

7.4. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$$
на сходимость по интегральному признаку.

7.5. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{2+(-1)^n}{6}\pi,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$$
на сходимость с помощью признаков сравнения.

7.6. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-\alpha^2)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+k^2}$$
на сходимость и абсолютную сходимость.

7.7. Исследовать на сходимость ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^\alpha};\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{n^2};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{n^2+4};$$
$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{4^{n^2}};\quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl[\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+2)}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}\Bigr];\quad \text{е)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{40}}{n}\cos\frac{\pi n}{4}.$$

7.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)!/n^n$.

7.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с заданной точностью
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{5^n},\ \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{7^n},\ \alpha=0{,}01.$$

7.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+10+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$
Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением суммы этих рядов.

7.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

7.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+e^x)};\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\frac{x}{2}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

7.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $[0,1]$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $-2<x<\infty$ ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

7.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x+11)^n}{n^n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n.$$

7.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^n(n^2+1)}},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^n\ln\frac{n+4}{n-4}.$$

7.16. Для функций

$$\text{а)}\ \cos(\mu\arcsin x),\qquad \text{б)}\ 2^{x/(1-x)}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=1/2$ соответственно.

7.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{1}{(1-x)^2},\qquad \text{б)}\ \cos\frac{\pi x}{4},\qquad \text{в)}\ \ln(5x+3)$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=3$, $x_0=-2$, $x_0=1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

7.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^2(x^3-1)^{n-1},\quad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

7.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{1-\cos x}.$$

7.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{1+x^3},\quad \sigma=0{,}01.$$

7.21. Методом последовательного дифференцирования найти шесть членов разложения решения задачи Коши

$$y'' = ye^x - x(y')^2, \quad y(0) = y'(0) = 1,$$

в ряд Тейлора.

7.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

7.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^2, & x \in]-\pi, 0[; \\ \pi^2, & x \in]0, \pi[; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = 4 - 2|x|, \quad x \in]-2, 4[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

7.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = x(\pi - x), \quad x \in]0, \pi[; \qquad \text{б)}\ f(x) = \sin x, \quad x \in]0, \pi/2[,$$

разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и по синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

7.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 39) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

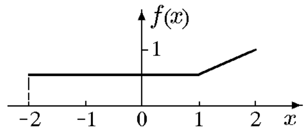


Рис. 39

7.26. Функцию

$$f(x) = e^{-|x|}\cos x$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

7.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x\cos x, & |x| \leqslant 3; \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$$

7.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+4)^2},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 8

8.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n-1}}{6^{n+1}}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

8.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \frac{1}{(\ln 3)^3} + \frac{1}{2!(\ln 4)^3} + \frac{1}{3!(\ln 5)^3} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

8.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \frac{\pi}{2} + \arcsin^2\frac{1}{2} + \arcsin^3\frac{1}{3} + \arcsin^4\frac{1}{4} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$$

на сходимость с помощью признака Коши.

8.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-\sqrt{n^3}}$$

на сходимость по интегральному признаку.

8.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}},\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

8.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!},\qquad \text{б)}\ \sin 1+\sin\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{3}-\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{5}+\sin\frac{1}{6}-\ldots$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

8.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{4n-2}-\sin\frac{\pi n}{2n+1}\Big);\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(1/n)}{n-n\cos(1/n)};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\sqrt{\frac{n+1}{n}};\qquad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n+20};\quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}.$$

8.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{3n}/n!$.

8.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}},\ \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\pi n\Big),\ \alpha=0{,}01.$$

8.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5+1+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведение рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

8.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

8.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2n+2x^2}{(n+x^2)^2(n+1+x^2)^2};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{x+1/n}}\arcsin^n\frac{x-3}{n+1}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

8.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $|x|<\infty$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin^2 x}{(2-\cos^2 x)^n},$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx}{1+n^6x^2},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

8.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}9^n(n^2+1)(x+5)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}\frac{x^{3n}}{3^n}.$$

8.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x}{1-x}\Big)^n, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x.$$

8.16. Для функций

$$\text{а)}\ e^{1/x}\frac{1}{1-x}, \qquad \text{б)}\ \ln(1+8\sin^3 x)$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0 = 1/3$ и $x_0 = 0$ соответственно.

8.17. Функции

$$\text{а)}\ \sqrt[3]{x}, \qquad \text{б)}\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \qquad \text{в)}\ e^{x^2-4x}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = 1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 2$, соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

8.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}n(2n-1)x^{n+2}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

8.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\Big),$$

8.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_2^3 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx, \quad \sigma = 0{,}01.$$

8.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y'' - e^y\sin y' = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = \frac{\pi}{2},$$

в ряд Тейлора.

8.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x^2-x+1)y'' + (4x-2)y' + 2y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

8.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} x+\pi, & x\in]-\pi,0[;\\ \dfrac{(x-\pi)^2}{\pi}, & x\in]0,\pi[; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = e^{|x|}, \quad x\in]-2,4[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

8.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = 1-x^2, \quad x\in]0,1[; \qquad \text{б)}\ f(x) = \sin\frac{\pi x}{4l}, \quad x\in]0,l[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

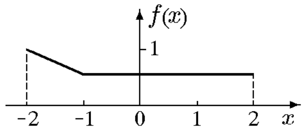


Рис. 40

8.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 40) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

8.26. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}\cos 3x, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

8.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & |x| \leqslant 6; \\ 0, & |x| > 6. \end{cases}$$

8.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+4)},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 9

9.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^2-1)}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

9.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \frac{11}{2} + \frac{21}{4} + \frac{31}{8} + \frac{41}{16} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+1/n)^n}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

9.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^{16}} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$$

на сходимость с помощью признака Коши.

9.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$$

на сходимость по интегральному признаку.

9.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n^2}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2\pi/3n)}{\sqrt[4]{n^4-1}}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

9.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt[3]{n}} \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

9.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n\ln n^n}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 10\cdots(6n-2)}{1\cdot 16\cdots(3n-2)^2}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(4+\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n(\ln\ln n)^2}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2; \qquad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

9.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(2n)^n/(2n-1)!$.

9.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с заданной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^5+1)},\ \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!},\ \alpha=0{,}001.$$

9.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6+1+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

9.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

9.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos\frac{n\alpha}{2};\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n\sin^n x}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

9.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $|x|<\infty$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sh}x}{(2+\operatorname{sh}^2x)^n},$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt[3]{n}}$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

9.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+4}}{(n+2)!},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n^2}}{(n+1)^n}.$$

9.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}[x(x+2)]^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\operatorname{tg}x)^n}{2^n}.$$

9.16. Для функций

$$\text{а)}\ e^{\sqrt{1+x^2}},\qquad \text{б)}\ \ln|\cos x|$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=-1$ и $x_0=2$ соответственно.

9.17. Функции

$$\text{а)}\ \ln(x^2+6x+12),\qquad \text{б)}\ \frac{1}{x^2+3x+2},\qquad \text{в)}\ xe^{2x-x^2}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=-3$, $x_0=-4$, $x_0=1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

9.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{3^n},\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+}\cos^{n+1}x}{n(n+1)}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

9.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{arctg} x-2\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1+2x^3)}.$$

9.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^1 \frac{1-e^{x/2}}{x}dx,\ \sigma=0{,}01.$$

9.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y'-\arcsin y+x^2=0,\quad y(0)=0{,}5,$$

в ряд Тейлора.

9.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+4x^2)y''+16xy'+8y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

9.23. Разложить в ряд Фурье на указанных интервалах функцию

$$\text{а)}\ \ f(x)=\pi-x,\quad x\in]-\pi,\pi[;\qquad \text{б)}\ \ f(x)=|x|-5,\quad x\in]-2,4[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

9.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ \ f(x)=\begin{cases}0, & x\in]0,\pi/2[;\\ \sin x, & x\in]\pi/2,\pi[\end{cases}\quad \text{б)}\ \ f(x)=1-e^x,\quad x\in]0,1[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

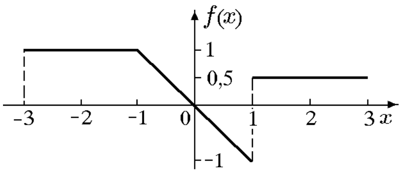


Рис. 41

9.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 41) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

9.26. Функцию

$$f(x)=e^{-2x^2}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

9.27.* Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

9.28. Для функции

$$f(x)=\begin{cases}4x-1, & x\in]0,1/4];\\ 0, & x\in]1/4,\infty[,\end{cases}$$

заданной на $]0,\infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 10

10.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

10.2. Исследовать ряд

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{7^{n-1}}, \qquad \text{б)}\ 1+\frac{2}{5}+\frac{6}{25}+\frac{24}{125}+\frac{120}{625}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

10.3. Исследовать ряд

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^3}, \qquad \text{б)}\ \frac{\pi}{4}+\operatorname{arcctg}^2\frac{1}{2}+\operatorname{arcctg}^3\frac{1}{3}+\operatorname{arcctg}^4\frac{1}{4}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

10.4. Исследовать ряд

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2, \quad \text{б)} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$$

на сходимость по интегральному признаку.

10.5. Исследовать ряд

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

10.6. Исследовать ряд

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}, \qquad \text{б)} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sin n}{2n+\sin n}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

10.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}); \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2}\frac{1}{n^{\alpha-1}};$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n^2}}; \qquad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(3n+2)(3n-1)}; \qquad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{2^{n^2}}.$$

10.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} n^n/(2n)!$.

10.9. Оценить остаток ряда и найти его сумму с указанной точностью:

$$\text{а)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)},\ \alpha=0{,}05; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4-\ln n},\ \alpha=0{,}01.$$

10.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7+1+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

10.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

10.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{1+2^nx^2}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

10.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $[-10, 10]$ ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{(2-\cos x)^n},$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^4}{n\ln^2 n}\right),$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

10.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}(x+2)^{n^2}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

10.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n\cos^n x, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} (x^2-1)^{n!}.$$

10.16. Для функций

$$\text{а)}\quad \frac{\sin x}{x^4-6x^2+25}, \qquad \text{б)}\quad \frac{1}{\cos^2 x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=3$ и $x_0=\pi/4$ соответственно.

10.17. Функции

$$\text{а)}\quad (x^3+2\operatorname{ctg} x)\sin x, \qquad \text{б)}\quad \ln(1-x+x^2), \qquad \text{в)}\quad \sin\frac{x}{2}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=0$, $x_0=\pi/2$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

10.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2-n+1)(x-1)^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

10.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x - \sin^2(x-1)}{e^{(x-1)^2}-1}.$$

10.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^1 \operatorname{ch}\sqrt{x}\,dx, \quad \sigma = 0{,}05.$$

10.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' = e^x + \frac{1}{y}, \quad y(0)=1,$$

в ряд Тейлора.

10.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(1+x)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

10.23. Разложить в ряд Фурье на указанных интервалах функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} -1, & x \in]-\pi, 0[; \\ 3, & x \in]0, \pi[; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = e^x - 1, \quad x \in]-1, 3[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

10.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \frac{x^2}{2} - 1, \quad x \in]0, \pi[; \qquad \text{б)}\ f(x) = x \sin x, \quad x \in]0, \pi/2[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

10.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 42) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

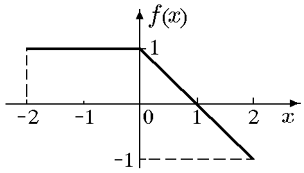


Рис. 42

10.26.* Функцию

$$f(x) = \frac{x}{1 + 4x^2}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

10.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-|x|} \sin x.$$

10.28. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in]0, a]; \\ 0, & x \in]a, \infty[, \end{cases}$$

заданной на $]0, \infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 11

11.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

11.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \cos\frac{\pi n}{2^n}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

11.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+2)}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln^2 3} + \frac{3}{\ln^3 4} + \frac{4}{\ln^4 5} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

11.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$$

на сходимость по интегральному признаку.

11.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2^n+1)^2}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

11.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1{\cdot}4{\cdot}7\cdots(3n-2)}{7{\cdot}9{\cdot}11\cdots(2n+5)}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{n^2}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

11.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\ln^2 n}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}; \qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right);$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\sin\sqrt[3]{n}}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+6}}{n(n+1)(n+2)}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n}.$$

11.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} n!/2^{n^2}$.

11.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^6+1)},\ \alpha = 0{,}01; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\ \alpha = 0{,}01.$$

11.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2+3+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

11.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

11.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n\ln^{n-1}(1+x^2); \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^n}{n} x^{2n}\sin(x+\pi n).$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

11.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]-\infty,\infty[$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{[(n-1)\sin^2 x+1][n\sin^2 x+1]},$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\sin nx}}{n\ln^3 n},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

11.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n+3}+\frac{5^n}{n+5}\right)(x-15)^{2n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+5}{6n+7}\right)^n x^n.$$

11.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nx}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x^2-2x)^n}{2^n}.$$

11.16. Для функций

$$\text{а)}\ \frac{1}{\sin x}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0 = \pi/6$ и $x_0 = 1$ соответственно.

11.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{\sin 3x}{x} - \cos x, \qquad \text{б)}\ \frac{4x-1}{\sqrt{3-4x}}, \qquad \text{в)}\ x \arcsin(x + \sqrt{1-x^2})$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = 0$, $x_0 = 1/4$, $x_0 = 0$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

11.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+x^2)^{n+1}}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

11.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)e^{-x} - (1-x)e^{x}}{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}.$$

11.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_5^{10} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx, \quad \sigma = 0,01.$$

11.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y'' = xyy', \quad y(0) = y'(0) = 1,$$

в ряд Тейлора.

11.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(4-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

11.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = 2x+3, \quad x \in]-\pi,\pi[; \quad \text{б)}\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in]0,\pi[; \\ \pi, & x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

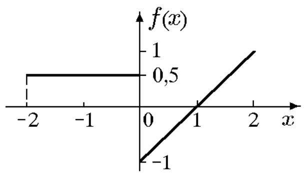


Рис. 43

11.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2}, \quad x \in]0,\pi[; \qquad \text{б)}\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in]0,l[, \\ x^2, & x \in]1,2[, \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и по синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

11.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 43) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

11.26.* Функцию

$$f(x) = \frac{1}{9+x^2}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

11.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-|x|}\cos x.$$

11.28. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in]0,1[; \\ 2-x, & x \in]1,2]; \\ 0, & x \in]2,\infty[, \end{cases}$$

заданной на $]0,\infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 12

12.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

12.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+6}{6^n}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{9}{3^3}+\frac{16}{3^4}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

12.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(4+\frac{1}{n^4}\Big)^{n/2}, \qquad \text{б)}\ \frac{3}{2}+1+\frac{27}{4^3}+\frac{81}{5^4}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

12.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg} n}{\sqrt{n}}$$

на сходимость по интегральному признаку.

12.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4\sqrt{n}}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

12.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!!}{n^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=5}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

12.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\cos\frac{\pi}{n}\Big)^{1+1/n}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}; \qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)n/2}}{n\ln(2n^2)};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{n+2\sqrt{n}\cos\pi n}{n^{3/2}+1}\Big); \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n^n}.$$

12.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} n^n/[(n+2)!]^2$.

12.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1},\ \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!2n},\ \alpha=0{,}001.$$

12.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+2+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

12.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}.$$

12.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\Big);\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[5]{nx+1}-\sqrt[5]{n})n^{4n/5}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

12.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]0,1[$ ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})},$$

исходя из определения, и на промежутке $[-10,10]$ ряд

$$\text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{x^2+n^2},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

12.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{x^n}{\sqrt{n^5+1}},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(1-\sqrt[n]{5})(x-5)^n.$$

12.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^n,\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(3x^2+4x+2)^n}.$$

12.16. Для функций

$$\text{а)}\quad e^{-x}\cos x^2;\qquad \text{б)}\quad \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=0$ соответственно.

12.17. Функции

$$\text{а)}\quad \arcsin(4x^2+4x+1),\qquad \text{б)}\quad \frac{1}{(3-x)^2},\qquad \text{в)}\quad \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=-1/2$, $x_0=1$, $x_0=2$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

12.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{tg}^{2n-1}x}{2n-1},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big[3^n+\frac{(-1)^n}{n}\Big]x^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

12.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+x^2/2-\sin x}{\operatorname{arctg}^3 x},$$

12.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_0^2 x^{-x}dx,\quad \sigma=0{,}05.$$

12.21. Методом последовательного дифференцирования найти семь членов разложения решения задачи Коши

$$y^{(4)}=xy+y'x^2,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=1,$$

в ряд Тейлора.

12.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+8x^3)y''+48x^2y'+48xy=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

12.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ \ f(x)=\pi^2-x^2,\quad x\in]-\pi,\pi[;\qquad \text{б)}\ \ f(x)=\sin\frac{2\pi x}{3},\quad x\in]-3,3[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

12.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ \ f(x)=x,\quad x\in]0,\pi[;\qquad \text{б)}\ \ f(x)=e^{x/3},\quad x\in]0,3[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

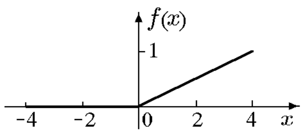


Рис. 44

12.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 44) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

12.26. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leqslant\pi;\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

12.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=xe^{-|x|}.$$

12.28.* Для функции

$$f(x)=\frac{1}{16+x^4},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 13

13.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k(k-1)}{(k+1)!}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

13.2. Исследовать ряд

$$а)\ \frac{2}{2{\cdot}5}+\frac{4}{5{\cdot}8}+\frac{8}{8{\cdot}11}+\ldots,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

13.3. Исследовать ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\ln(n+1)}{n}\Big)^n,\qquad б)\ 3+\Big(\frac{5}{2}\Big)^4+\Big(\frac{7}{3}\Big)^9+\Big(\frac{9}{4}\Big)^{16}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

13.4. Исследовать ряд

$$а)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)},\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[7]{n}}}{\sqrt[7]{n^6}}$$

на сходимость по интегральному признаку.

13.5. Исследовать ряд

$$а)\ \frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}+\frac{4}{19}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt[4]{n^5}}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

13.6. Исследовать ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi/2\sqrt{n})}{\sqrt{3n+1}},\qquad б)\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

13.7. Исследовать на сходимость ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}};\quad б)\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5+1}}\arcsin\frac{3+(-1)^n}{n};\quad в)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{4n^2-9};\qquad д)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^3+3)\ln n};\qquad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!}{2^{n^2}}.$$

13.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(n+3)!/n^n$.

13.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n+1}},\ \alpha=0{,}01;\qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n},\ \alpha=0{,}001.$$

13.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+5+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

13.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}.$$

13.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$а)\ \sum_{n=0}^{\infty}n^n\ln^n\Big(1+\frac{x}{(x+1)^n}\Big);\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^{n\operatorname{ctg}x}}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

13.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]-\infty,\infty[$ ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sin^2 x+n)(\sin^2 x+n+1)},$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}3^{-nx^4},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

13.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(3x-1)^{2n}}{5^n},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n^2]{n!}\,x^n}{n}.$$

13.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-1/n)^{n^2}}{(x+1)^{2n}},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}8^n n^2\sin^{3n}x.$$

13.16. Для функций

$$\text{а)}\quad \sqrt{1+\sin x},\qquad \text{б)}\quad (\arcsin x)^2$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=\pi/4$ и $x_0=1/2$ соответственно.

13.17. Функции

$$\text{а)}\quad (x-1)\operatorname{ch}x,\qquad \text{б)}\quad \frac{3^{x^2}-1}{x^2},\qquad \text{в)}\quad \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=0$, $x_0=0$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

13.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n-1}x^{4n-2}}{2^{n-1}(4n-2)!!},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+7n+5)x^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

13.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

13.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_{0,1}^{0,2}\frac{1}{x^2}e^{x^2}\,dx,\qquad \sigma=0{,}01.$$

13.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y''=x^2+y^2,\quad y(-1)=2,\quad y'(-1)=0{,}5,$$

в ряд Тейлора.

13.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(1-x)y''-2xy'+2y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

13.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию а) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\in]-\pi,0[;\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\in]0,\pi[;\end{cases}$ б) $f(x)=8-4x, \quad x\in]-1,3[.$

Построить график суммы полученного ряда.

13.24. Заданную на полупериоде функцию

а) $f(x)=\cos 2x, \quad x\in]0,\pi[;$ б) $f(x)=\operatorname{sign}(1-x), \quad x\in]0,2[,$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

13.25. Заданную на $]-l,l[$ граф (рис. 45) представить рядом Фурье записать спектральную функцию, ам спектры.

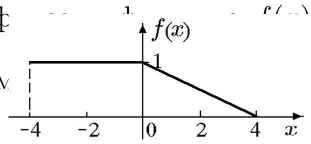


Рис. 45

13.26. Функцию

$$f(x)=e^{1-x^2}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

13.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}3, & x\in]-3,0[;\\ x, & x\in]0,3[;\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$$

13.28.* Для функции

$$f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 14

14.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2+n}\sin\frac{2n+1}{n^2+n}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

14.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{3^n}, \qquad \text{б)}\ \frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

14.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \frac{2}{3}+\frac{(3/2)^4}{9}+\frac{(4/3)^9}{27}+\frac{(5/4)^{27}}{81}+\ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\Big(\frac{n-2}{2n+1}\Big)^{3n}$$

на сходимость с помощью признака Коши.

14.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^5+5}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$$

на сходимость по интегральному признаку.

14.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(\pi n/2)}{n(n+1)(n+2)}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}n(e^{1/n}-1)^2$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

14.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/2)}{\ln n}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

14.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2+3n}{2+3n^2}\Big)^2;\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{n}{n+1};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n!)^2}{(2n)!};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}};\quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-15};\quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n)^n}{(2n+1)!}.$$

14.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)!!/n^n$.

14.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+4)^2},\ \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!n!},\ \alpha=0{,}001.$$

14.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5+2+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

14.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

14.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}};\quad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

14.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]-1,1[$ ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt{x+1})^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $[-100,100]$ ряд

$$\text{б)}\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+8}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+27}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+64}}+\ldots,$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

14.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(x+e)^n e^{-\sqrt[3]{n}},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{4^{n^2}}x^n.$$

14.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2x-1)^{2n-1}},\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\operatorname{tg}^{2n}x.$$

14.16. Для функций

$$\text{а)}\quad \ln \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{б)}\quad 2^{\cos^2(x-\pi/4)}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, где $x_0 = 0$ и $x_0 = 0$ соответственно.

14.17. Функции

$$\text{а)}\quad \frac{1}{x^2-4x+3}, \qquad \text{б)}\quad \ln(1-5x+4x^2), \qquad \text{в)}\quad \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = -2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 0$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

14.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos x)^{2n-1}}{2n-1}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} n(2n-1)x^{n+2}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

14.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}.$$

14.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{e^{x^2}}\,dx, \qquad \sigma = 0{,}01.$$

14.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' = xy + e^y, \qquad y(0) = 0,$$

в ряд Тейлора.

14.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1-4x^2)y'' - 16xy' - 8y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

14.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0]; \\ x, & x \in]0, \pi/2]; \\ \pi/2, & x \in]\pi/2, \pi]; \end{cases} \qquad \text{б)}\quad f(x) = 2x - 5, \quad x \in]0, 2[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

14.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\quad f(x) = \frac{\pi}{8}, \quad x \in]0, \pi[; \qquad \text{б)}\quad f(x) = e^{x/2}, \quad x \in]0, 2[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

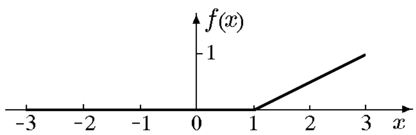


Рис. 46

14.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 46) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

14.26. Функцию
$$f(x) = (2-x)e^{-(x-2)^2/2}$$
представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

14.27.* Найти преобразование Фурье функции
$$f(x) = \frac{x}{16+x^2}.$$

14.28. Для функции
$$f(x) = \begin{cases} 2\sin 3x, & x \in]0, 4\pi/3[; \\ 0, & x \notin]0, 4\pi/3[, \end{cases}$$
заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 15

15.1. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n})$$
или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

15.2. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 6\sin\frac{\pi}{8} + 24\sin\frac{\pi}{16} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$$
на сходимость с помощью признака Даламбера.

15.3. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 3^n}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots$$
на сходимость с помощью признака Коши.

15.4. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$$
на сходимость по интегральному признаку.

15.5. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \ln 2 + \frac{\ln 4}{8} + \frac{\ln 8}{27} + \frac{\ln 16}{64} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
на сходимость с помощью признаков сравнения.

15.6. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{n^{20}}{2^n}$$
на сходимость и абсолютную сходимость.

15.7. Исследовать на сходимость ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(1/n) 5^{2n}}{(2n-1)!}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3}n}{n+4}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(3n+2)}{3n+2};$$

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$; д) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n+1/n)}{n}$; е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+3)!}$.

15.8. С помощью признаков сходимости числовых рядовраскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(2n)^n/(2n-1)!$.

15.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^3+1)},\ \alpha=0{,}05; \qquad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\Big),\ \alpha=0{,}01.$$

15.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+7+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

15.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!}.$$

15.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}, \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

15.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]1,2[$ ряд

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})},$$

исходя из определения, и на промежутке $[0,\infty[$ ряд

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}3^n\ln\Big[1+\sin\frac{1}{4^n(x+1)}\Big],$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

15.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-\cos(1/n)]x^n}{\sqrt[n]{e^3}}, \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2nx)^n}{(2n-1)!}.$$

15.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{tg}^n\,2x, \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n x}.$$

15.16. Для функций

$$\text{а) } \frac{1}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{б) } \mathrm{tg}\,x$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=1/2$ и $x_0=\pi/4$ соответственно.

15.17. Функции

$$\text{а) } \ln(1+8x^3), \qquad \text{б) } \sqrt{x}, \qquad \text{г) } e^x\cos x$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = 0$, $x_0 = 2$, $x_0 = 0$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

15.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n-1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

15.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - \sin^2 x}{e^{x^2} - 1}.$$

15.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_0^2 x^x\,dx, \quad \sigma = 0{,}05.$$

15.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' = x^2 y^2 - 1, \quad y(0) = 1,$$

в ряд Тейлора.

15.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x^3 - 8)y'' + 6x^2 y' + 6xy = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

15.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in]-\pi, 0[; \\ 2x, & x \in]0, \pi[; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in]-2, 4[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

15.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in]0, \pi/2[; \\ -x^2, & x \in]\pi/2, \pi[; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = \cos\frac{\pi x}{4}, \quad x \in]0, 2[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы полученного ряда.

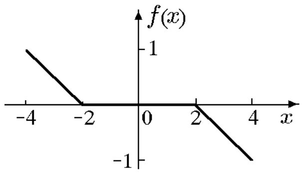


Рис. 47

15.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 47) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

15.26. Функцию

$$f(x) = \operatorname{sign}(x-2) - \operatorname{sign}(x-3)$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

15.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = (1+x)e^{-|x|}.$$

15.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 16

16.1. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)2^n}{n(n+1)}$$
или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

16.2. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{2^{n+5}(n^2+1)}, \qquad \text{б)}\ 1+\frac{2}{4}+\frac{6}{27}+\frac{24}{256}+\frac{120}{3125}+\ldots$$
на сходимость с помощью признака Даламбера.

16.3. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(2n+1/n)^n}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{15}+\left(\frac{2}{25}\right)^4+\left(\frac{3}{35}\right)^9+\left(\frac{4}{45}\right)^{16}+\ldots$$
на сходимость с помощью признака Коши.

16.4. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-1}}$$
на сходимость по интегральному признаку.

16.5. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2+\cos(\pi n/2)]\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$$
на сходимость с помощью признаков сравнения.

16.6. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+2}} \sin\frac{\pi n}{4}$$
на сходимость и абсолютную сходимость.

16.7. Исследовать на сходимость ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{6}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{1/(1+2n)}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sqrt{\cos(1/n)}}{1-\cos\sqrt{1/n}}; \qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{arctg}^n\,\frac{3}{2n^2};$$
$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}} \cos\frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}-(-1)^n}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2n}.$$

16.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} (5n)!/2^{n^2}$.

16.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^n+1}},\ \alpha=0{,}05; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n+1)^n},\ \alpha=0{,}01.$$

16.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7+2+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$
Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

16.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}.$$

16.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n\operatorname{tg}x}};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[1+(2x)^n]\sqrt[n]{n!}}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

16.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]-1,1[$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}\Big),$$

исходя из определения, и на промежутке $|x|<\infty$ ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}nx}{\sqrt[4]{n^5+x^6}},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

16.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-35)^{2n+1}}{3^n+5^n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n x^n.$$

16.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{(x^2-9)^n}},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}(x^2-2)^n}.$$

16.16. Для функций

$$\text{а)}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{1+x},\qquad \text{б)}\ \ln(1+e^x)$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=-1$ соответственно.

16.17. Функции

$$\text{а)}\ x\sqrt[3]{27-2x},\qquad \text{б)}\ \ln\frac{1}{x^2-2x+2},\qquad \text{в)}\ \sin^3 x$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=1$, $x_0=\pi/2$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

16.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1-2x)^n},\quad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

16.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln\sqrt{2x+\sqrt{1+4x^2}}}{x-\sin x\cos x},$$

16.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_1^2 e^{1/x^2}dx,\quad \sigma=0{,}01.$$

16.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$(1+x^2)y''+xy'-y=0,\quad y(0)=y'(0)=1,$$

в ряд Тейлора.

16.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(16-x^2)y''-4xy'-2y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

16.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ \ f(x)=\begin{cases}e^x, & x\in]-\pi,0[;\\ 1, & x\in]0,\pi[;\end{cases}\qquad \text{б)}\ \ f(x)=\begin{cases}0, & x\in]-2,0[;\\ x/2, & x\in]0,1[.\end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

16.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ \ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in]0,\pi/2[;\\ 4-x^2, & x\in]\pi/2,\pi[;\end{cases}\qquad \text{б)}\ \ f(x)=e^{x/3},\ x\in]0,1[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

16.25. Заданную на $]-l,l[$ граф (рис. 48) представить рядом Фурье записать спектральную функцию, ам спектры.

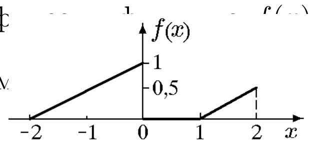


Рис. 48

16.26. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}2\Big(1-\dfrac{|x|}{3}\Big), & |x|\leqslant 3;\\ 0, & |x|>3,\end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

16.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=e^{-|x|}\cos\beta x.$$

16.28.* Для функции

$$f(x)=\frac{1}{1+16x^4},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 17

17.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(\frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1}\Big)$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

17.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \ \frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{24}{10000}+\ldots,\qquad \text{б)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+1)^n}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

17.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \ \Big(\frac{10}{11}\Big)+\Big(\frac{10}{11}\Big)^2 2^5+\Big(\frac{10}{11}\Big)^3 3^5+\Big(\frac{10}{11}\Big)^4 4^5+\ldots,\qquad \text{б)}\ \ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$$

на сходимость с помощью признака Коши.

17.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$$

на сходимость по интегральному признаку.

17.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n+\cos^2 n}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arcsin[(n-1)/n]}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

17.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(2+1/n)^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\cos\frac{\pi n}{8}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

17.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}); \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt[n]{2}}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n \arcsin^{3n}\frac{1}{2^n};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{(\ln 3)^n}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4n^2-10}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n!}}.$$

17.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} n^5/(2n)!$.

17.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n},\ \alpha=0{,}1; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n},\ \alpha=0{,}05.$$

17.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2+9+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

17.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{n!}.$$

17.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n\ln\Big(x-\frac{1}{2}\Big)e^{n/\ln x}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

17.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]-1,0]$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+x)^2}{[2(1+x)+x^2]^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $|x|<\infty$ ряд

$$\text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

17.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{4n^2+4n-3}(x-3)^{2n}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1{\cdot}4{\cdot}7{\cdots}(3n-2)(3x-2)^n}{2{\cdot}7{\cdot}12{\cdots}(5n-3)}.$$

17.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{2n}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln^4 \left(\frac{x}{e}\right).$$

17.16. Для функций

$$\text{а)}\quad \operatorname{tg}^2 x, \qquad \text{б)}\quad \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0 = \pi/4$ и $x_0 = 1$ соответственно.

17.17. Функции

$$\text{а)}\quad \frac{1+x^3}{(1-x)^3}, \qquad \text{б)}\quad \operatorname{sh}^2 x, \qquad \text{в)}\quad \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 0$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

17.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}, \qquad \text{б)}\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

17.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x(1-\cos x) - x^3\cos x}{x^5\cos x}.$$

17.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\text{б)}\quad \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}dx, \quad \sigma = 0{,}05.$$

17.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$(1+x^2)y' = x+y, \quad y(0) = 1,$$

в ряд Тейлора.

17.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(2+x)y'' - 4xy' + 4y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

17.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\quad f(x) = x+|x|, \quad x \in]-\pi,\pi[; \quad \text{б)}\quad f(x) = 2x-5, \quad x \in]0,4[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

17.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\quad f(x) = (x-\pi)^2, \quad x \in]0,\pi[; \qquad \text{б)}\quad f(x) = \frac{3}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in]0,3[,$$

разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и по синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

17.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 49) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

17.26. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}3\sin 3x, & |x|\leqslant 2\pi/3;\\ 0, & |x|>2\pi/3,\end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

17.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=(x-2)e^{-|x|/2}.$$

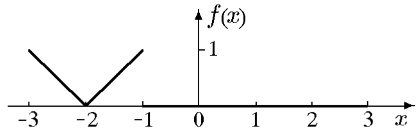


Рис. 49

17.28.* Для функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 18

18.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

18.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!},\qquad \text{б)}\ \operatorname{arctg}5+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+\frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{5}{4}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

18.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}n^4\operatorname{arctg}^{2n}\frac{\pi}{4n},\qquad \text{б)}\ \left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{2}{7}\right)^5+\left(\frac{3}{10}\right)^7+\left(\frac{4}{13}\right)^9+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

18.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4{\cdot}2}+\ldots,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$$

на сходимость по интегральному признаку.

18.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),\quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^3-3}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

18.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{10^{10}}{n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/4)}{n\sqrt{n}+\sin(\pi n/4)}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

18.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}2^{-(\ln n)^2};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2+(-3)^{2n}};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+e^2};\quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+6}{n^2+5n};\qquad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^3}}.$$

18.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(2n)!!/n^n$.

18.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n-3}^{8}},\ \alpha = 0{,}05;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!},\ \alpha = 0{,}001.$$

18.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9+2+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

18.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

18.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\sqrt{\pi}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

18.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]0,1[$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})},$$

исходя из определения, и на промежутке $[0,10]$ ряд

$$\text{б)}\ \frac{1}{2^x}+\frac{2}{2^{2x}}+\frac{3}{2^{3x}}+\ldots,$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

18.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1})(x-3)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}.$$

18.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\Big(\frac{x}{2x+1}\Big)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2^n)}{x^n}.$$

18.16. Для функций

$$\text{а)}\ \sin x^2,\qquad \text{б)}\ e^{1/(x-1)}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0 = \sqrt{\pi}/2$ и $x_0 = 0$ соответственно.

18.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{x^3+4x+1}{x^3-1},\qquad \text{б)}\ \cos^3 x,\qquad \text{в)}\ \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = 0$, $x_0 = \pi/3$, $x_0 = 0$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

18.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{x^n}{(1+e^x)^{2n}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-n-2)x^{n+1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

18.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{arctg} x - x^2}{x^2\sqrt{27+x^2}-3x^2},$$

18.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_0^1 x^6 \operatorname{ch} x\, dx,\ \sigma = 0{,}05.$$

18.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y'' - xy' + y - 1 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1,$$

в ряд Тейлора.

18.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+8x^3)y'' + 48x^2y' + 48xy = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

18.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-\pi, 0[; \\ (x-\pi)^2, & x \in]0, \pi[; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = e^{x-1}, \quad x \in]-2, 0[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

18.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = e^{2x},\ x \in]0, 1/2[; \qquad \text{б)}\ f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{\pi}, & x \in]0, \pi[; \\ 0, & x \in]\pi, 2\pi[, \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

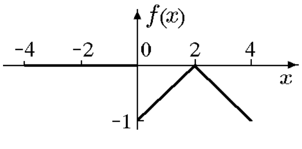


Рис. 50

18.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 50) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

18.26. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & |x| \leqslant 2; \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

18.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\sin 2x, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

18.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{1}{4+x^2},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 19

19.1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

19.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

19.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \Big(1+\frac{2}{n}\Big)^{-n^2}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

19.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} n^6 e^{-n^7}$$

на сходимость по интегральному признаку.

19.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1+\sqrt[3]{n^2}}{1+n^3}\Big)^3, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

19.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{2n}{3n+6}\Big)^n, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n+1)} \cos\frac{\pi n^2}{n+1}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

19.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1-\frac{1}{\sqrt[n]{10}}\Big); \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}(n!)^3}{(3n)!}; \qquad \text{в)}\ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{\lg n};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\Big(1+\frac{1}{2n}\Big); \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}+2^{1-n}}{3^{1-n}}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n)!}.$$

19.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+3)!!/n^n$.

19.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},\ \alpha = 0{,}05; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-2)}{(n^2-1)^2},\ \alpha = 0{,}01.$$

19.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3+4+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

19.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}.$$

19.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{\ln^{2n}(3x-1)};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{n\sin x}}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

19.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]-2,-1[$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+x)^2}{[(1+x)+x^2]^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $[-2,2]$ ряд

$$\text{б)}\ \frac{x}{3}+\frac{x^4}{3^4}+\frac{x^9}{3^9}+\frac{x^{16}}{3^{16}}+\ldots,$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

19.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n+2}\ln\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big),\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}.$$

19.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(x^2-4x+6)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}4^{nx}\operatorname{arctg}\frac{1}{4^n}.$$

19.16. Для функций

$$\text{а)}\ e^{x^2},\qquad \text{б)}\ \sin(\pi/x)$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=1$ и $x_0=1/2$ соответственно.

19.17. Функции

$$\text{а)}\ x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\qquad \text{б)}\ \frac{1}{3+x},\qquad \text{в)}\ xe^x$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=-2$, $x_0=-1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

19.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!(\sin x)^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big]x^{n-1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

19.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(1+x^2)(1+\cos 2x)/2}}{(\cos^{-2}-1)^2}.$$

19.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^1\frac{1}{x}\operatorname{sh}x^2dx,\ \sigma=0{,}01.$$

19.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' = \sin(x + y), \quad y(0) = \frac{\pi}{3},$$

в ряд Тейлора.

19.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1 - 9x^2)y'' - 36xy' - 18y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

19.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ \ f(x) = -\frac{|x|}{\pi}, \quad x \in]-\pi, \pi[; \qquad \text{б)}\ \ f(x) = \begin{cases} x, & x \in]-1, 0[; \\ 2x, & x \in]0, 2[, \end{cases}$$

Построить график суммы полученного ряда.

19.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ \ f(x) = 3x - 2, \quad x \in]0, \pi[; \qquad \text{б)}\ \ f(x) = \sin\frac{2}{\pi x}, \quad x \in]0, 2\pi[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

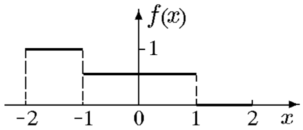


Рис. 51

19.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 51) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

19.26. Функцию $f(x) = e^{-a^2|x|}$ представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

19.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x\cos x, & |x| \leqslant \pi; \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

19.28.* Для функции $f(x) = (1 - e^{-x})/x$, заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 20

20.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

20.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \ 2 + \frac{1}{2} + \frac{8}{9} + 1 + \frac{32}{25} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{4^n}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

20.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{5}\left(1 + \frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n, \qquad \text{б)}\ \ \operatorname{arctg}^2\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}^4\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}^6\frac{1}{6} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

20.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}, \qquad \text{б)}\ \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\ln n}$$

на сходимость по интегральному признаку.

20.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{3n-1}{4n+2}\Big)^n, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\operatorname{arctg}\frac{1+(-1)^n}{2}n$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

20.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

20.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt[3]{n}}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1+n}{n}\Big)^{n/3}; \qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1{\cdot}4{\cdot}7\cdots(3n-2)}{3{\cdot}5{\cdot}7\cdots(2n+1)}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{n!}.$$

20.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)!!/n^n$.

20.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{4+n^2},\ \alpha=0{,}03; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(1+n^4)^2},\ \alpha=0{,}001.$$

20.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = 4+3+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

20.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

20.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{n\sin x}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

20.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]0,1[$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{[(n-1)\sqrt{x}+1](n\sqrt{x}+1)},$$

исходя из определения, и на промежутке $[-3,0]$ ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

20.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!(x+3)^n}{n^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n+1}{2n+1}\Big)^n x^n.$$

20.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n^2+1}\frac{1}{(27x^2+12x+2)^n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{(x+1)^n}}.$$

20.16. Для функций

$$\text{а)}\ |\cos x|,\qquad \text{б)}\ \operatorname{tg} x$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=-\pi/4$ соответственно, с указанием интервала сходимости.

20.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{\operatorname{sh}2x}{x}-2,\qquad \text{б)}\ \frac{x}{(1-x)(1-x^2)},\qquad \text{в)}\ \frac{1}{\sqrt{4+x}}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=0$, $x_0=0$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

20.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^{2n-1}x}{2n-1},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big[1-\frac{1}{n}\Big]\frac{1}{x^n}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

20.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x^2}e^{-x)}.$$

20.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^1 x^2(1+e^{x^2})dx,\ \sigma=0{,}05.$$

20.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y''=x\sin y',\quad y(1)=0,\quad y'(1)=\frac{\pi}{2},$$

в ряд Тейлора.

20.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(1-2x)y''-2xy'+2y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

20.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x)=\begin{cases}-x, & x\in]-\pi,0[;\\ x/2, & x\in]0,\pi[;\end{cases}\qquad \text{б)}\ f(x)=x+1,\quad x\in]-2,4[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

20.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x)=e^{1-x},\quad x\in]0,1[;\qquad \text{б)}\ f(x)=x-2x^2,\quad x\in]0,\pi[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

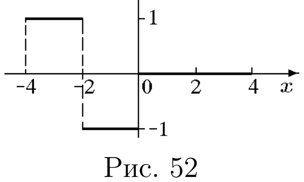


Рис. 52

20.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 52) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

20.26. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}2x, & |x|\leqslant 6;\\ 0, & |x|>6,\end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

20.27.* Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{64 + x^2}.$$

20.28. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in]0, \pi[; \\ 0, & x \notin]0, \pi[, \end{cases}$$

заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 21

21.1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \right]$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

21.2. Исследовать ряд

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \text{б)} \ 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{24} + \frac{9}{120} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

21.3. Исследовать ряд

$$\text{а)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n!}, \qquad \text{б)} \ 2 + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{5}\right)^5 + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

21.4. Исследовать ряд

$$\text{а)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n \ln^2(n+7)}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

на сходимость по интегральному признаку.

21.5. Исследовать ряд

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\sqrt{n}/(n^2-1)} - 1)$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

21.6. Исследовать ряд

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{1 + (-5)^{2n}}, \qquad \text{б)} \ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \frac{\sin n}{n}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

21.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} \right); \quad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}; \quad \text{в)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{(n+1)(n+2)/n};$$

$$\text{г)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt[3]{n^4} + n}; \quad \text{д)} \ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin 2n}{2n + \sin n}; \quad \text{е)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!}.$$

21.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} n^n/(2n-1)!$.

21.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)},\ \alpha=0{,}05; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{(n^2+1)^3},\ \alpha=0{,}001.$$

21.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+5+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

21.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}.$$

21.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n; \quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2+x)(n-1+x)}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

21.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x(x^2+x-1)^n$$

на промежутке $]0,1/2[$, исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}$$

на промежутке $[0,2]$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

21.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-23)^n}{2^n+3^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(3-x)^n\sin\frac{\pi}{3n}.$$

21.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(2\operatorname{tg}x)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{1+3^n}\left(\frac{x}{x+3}\right)^n.$$

21.16. Для функций

$$\text{а)}\ \sin e^x, \qquad \text{б)}\ x^x$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=1$ соответственно.

21.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}, \qquad \text{б)}\ x\sin 2x, \qquad \text{в)}\ \ln\frac{1}{x^2-2x+2}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=\pi/6$, $x_0=1$ соответственно) представить рядами Тейлора.

21.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+8n+5)x^{n+2}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

21.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x[e^{\sin^2 x}-1-\ln(1+x^2/e)]}{2\sin x-\sin 2x},$$

21.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^1 \operatorname{sh}^2\sqrt{x}dx,\quad \sigma=0{,}05.$$

21.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y'=x+y+y^2,\quad y(2)=2,$$

в ряд Тейлора.

1.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1-x^2)y''-4xy'-2y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

21.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функции

$$\text{а)}\ \ f(x)=|\cos x|,\quad x\in]-\pi,\pi[;\qquad \text{б)}\ \ f(x)=x+\operatorname{sign}x,\quad x\in]-2,1[.$$

Построить графики сумм полученных рядов.

21.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ \ f(x)=2-x,\quad x\in]0,\pi[;\qquad \text{б)}\ \ f(x)=\begin{cases}x, & x\in]0,1[;\\ x^2, & x\in]1,2[,\end{cases}$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить графики сумм полученных рядов.

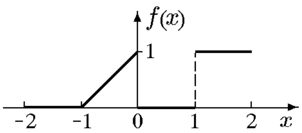


Рис. 53

21.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 53) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

21.26. Функцию

$$f(x)=\begin{cases}A\sin\omega x, & |x|\leqslant 2\pi k/\omega;\\ 0, & |x|>2\pi k/\omega,\end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

21.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\operatorname{sign}(x-1)-\operatorname{sign}(x-2).$$

21.28.* Для функции

$$f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 22

22.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2-n-6/5}$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

22.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+1/n)^n}{n^2},\qquad \text{б)}\ \frac{4}{2}+\frac{4{\cdot}7}{2{\cdot}6}+\frac{4{\cdot}7{\cdot}10}{2{\cdot}6{\cdot}8}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

22.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3,\qquad \text{б)}\ 1+\frac{2}{5}+\frac{6}{25}+\frac{24}{125}+\frac{120}{625}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

22.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+1)},\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{n^3}}$$

на сходимость по интегральному признаку.

22.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

22.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 n}{n}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

22.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+3)}{3n+1};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}[n(\sqrt[n]{4}-1)]^{1+1/n};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}};\quad \text{д)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^5 n}{n}\sin\frac{\pi n}{4};\qquad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

22.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} n^3/4^{n^2}$.

22.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n^2}},\ \alpha=0{,}01;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!},\ \alpha=0{,}001.$$

22.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5+3+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением их сумм.

22.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

22.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

22.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{x}+n)(\sqrt{x}+n+1)}$$

на промежутке $]0,1[$, исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$

на промежутке $[0,\infty[$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

22.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-3)^n}{n} (x+1)^n.$$

22.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \Big(\frac{2-x}{1+2x}\Big)^n, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n (e^x - 1)^n.$$

22.16. Для функций

$$\text{а)}\quad \operatorname{tg}^2 x, \qquad \text{б)}\quad \ln(2 + e^{x-1})$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, где $x_0 = \pi/4$ и $x_0 = 0$ соответственно.

22.17. Функции

$$\text{а)}\quad (x-3)5^{2x}, \qquad \text{б)}\quad x^2 \sin x, \qquad \text{в)}\quad \ln(3+x)$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = 1$, $x_0 = \pi/4$, $x_0 = -2$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

22.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+n+1) x^{n+3}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

22.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x^2 - x \sin x}{1 - \cos x^2}.$$

22.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{1+x^5}}, \qquad \sigma = 0{,}01.$$

22.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' = x + x^2 + y^2, \qquad y(1) = 1,$$

в ряд Тейлора.

22.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(1+3x)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

22.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функции

$$\text{а)}\quad f(x) = |\sin x|, \quad x \in]-\pi, \pi[; \qquad \text{б)}\quad f(x) = 2 + \operatorname{sign} x, \quad x \in]-4, 2[.$$

Построить графики сумм полученных рядов.

22.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\quad f(x) = e^{2x}, \quad x \in]0, \pi[;$$

$$\text{б)}\quad f(x) = \frac{x^2}{2} - 1, \quad x \in]0, 2[,$$

разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

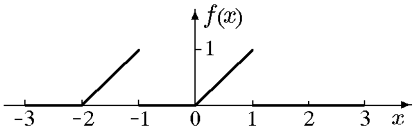


Рис. 54

22.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 54) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

22.26. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 4\left(1 + \dfrac{|x|}{2}\right), & |x| \leqslant 2; \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

22.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-|x|} \cos x.$$

22.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{x}{2(4x^2 + 9)},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 23

23.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3n - 5}{n(n^2 - 1)}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

23.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ 2 + 1 + \frac{8}{27} + \frac{16}{256} + \frac{32}{3125} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

23.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ 1 + \frac{2}{4} + \frac{6}{27} + \frac{24}{256} + \frac{120}{3125} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sin^2 n\varphi,\ 0 < \alpha < 1,$$

на сходимость с помощью признака Коши.

23.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n + 1)}$$

на сходимость по интегральному признаку.

23.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n + 4}} \sin \frac{1}{n - 1/2}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n},$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

23.6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - 3n + 1}\right),$

б) на сходимость ряд, полученный из гармонического, в котором за пятью плюсами следует пять минусов.

23.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n!)^2}};\quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n^2}};$$
$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\cos n\alpha}{n};\quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^2+n-2};\quad \text{з)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(2n)!}.$$

23.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} n^n/(n!)^2$.

23.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с заданной точностью:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-\sqrt{n^3}},\quad \alpha=0{,}05;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n(n+3)^2},\quad \alpha=0{,}01.$$

23.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+7+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением их сумм.

23.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!}.$$

23.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{2}{n}\right);\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-(n-1)x^2}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

23.13. Исследовать на равномерную сходимость на промежутке $]0,l[$ ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{\ln x}}{(1+\sqrt{\ln x})^n},$$

исходя из определения, и на промежутке $[0,\infty[$ ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)},$$

используя признаки Вейерштрасса или Дини.

23.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n[n+(-1)^n]}{\ln(n+4)},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{1+n}{n}}\right).$$

23.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}2^{3n}n^3\sin^{3n}x.$$

23.16. Для функций

$$\text{а)}\ e^{x^2}\cos(x-1),\qquad \text{б)}\ (\operatorname{arctg}x)^2$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=1$ соответственно.

23.17. Функции

$$\text{а)}\ \frac{9}{20-x-x^2},\qquad \text{б)}\ (1-x)e^{2x},\qquad \text{в)}\ \ln\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0 = 0$, $x_0 = 2$, $x_0 = 0$ соответственно) представить рядами Тейлора.

23.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+2)x^{2-n},\quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n(n-1)}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

23.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x - x^2}{x^2\operatorname{tg}^2 x}.$$

23.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_1^2\frac{\ln(1+5x)}{5x}dx,\quad \sigma = 0{,}01.$$

23.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y' - 4x + 2xy^2 = 0,\quad y(1) = 1,$$

в ряд Тейлора.

23.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$\Bigl(1+\frac{x^2}{9}\Bigr)y'' + \frac{4}{9}xy' + \frac{2}{9}y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

23.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = e^{-x/2},\quad x\in]-2,2[;\quad \text{б)}\ f(x) = \sin^2 x,\quad x\in]0,2\pi[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

23.24. Функцию

$$\text{а)}\ f(x) = (x-\pi)^2,\quad x\in]0,\pi[;\qquad \text{б)}\ f(x) = 1-2|x|,\quad x\in]0,1[),$$

заданную на полупериоде, разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и по синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

23.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 55) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

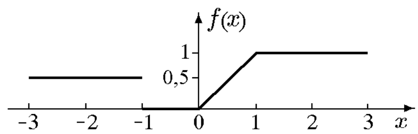


Рис. 55

23.26. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x-4, & -4 < x < -2;\\ x, & -2 < x < 2;\\ -x+4, & 2 < x < 4;\\ 0, & |x| > 4,\end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

23.27. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/4}$.

23.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{1}{3x(9x^2+4)},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 24

24.1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-2}{(n^2-1)(n-2)}$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

24.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}, \qquad \text{б)}\ 10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6} + \frac{10000}{24} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

24.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 5^n}{(n+1)^n}, \qquad \text{б)}\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

24.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}, \qquad \text{б)}\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

на сходимость по интегральному признаку.

24.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+6}{n^5+5}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[\pi/(2n+1)]}{n[3+\sin(\pi n/4)]}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

24.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \pi/n}{n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} (\sqrt[n]{2} - 1)$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

24.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{5n+4}\right)^n \sqrt{n+2}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}; \qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-1)^n}{\sqrt{n(2+n^2)}};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\sqrt[3]{n}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n}{n^2}; \qquad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

24.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} (2n)!!/4^{n^2}$.

24.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^{3/2}(n+1)},\ \alpha = 0{,}05; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^{n^2} n!},\ \alpha = 0{,}001.$$

24.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7+3+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

24.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

24.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{2^n}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n}x^{2n}\sin(5x-\pi n).$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

24.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sin^2 x\cos^{2n} x,$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin x}$$

на промежутке $[0,\pi]$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

24.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\sqrt{3})^n 3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+\sqrt{3}}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}).$$

24.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4+e^x)^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n\sin^n x}.$$

24.16. Для функций

$$\text{а)}\ \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}, \qquad \text{б)}\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{1-x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=-2$ соответственно.

24.17. Функции

$$\text{а)}\ \operatorname{ch}^2(2x^3), \qquad \text{б)}\ \frac{1}{1+x+x^2+x^3}, \qquad \text{в)}\ \sqrt[3]{10-x}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=0$, $x_0=2$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

24.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n+1}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(1-x^2)^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

24.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)(e^{x^2}-1)}{x+\operatorname{arctg}x-2\sin x}.$$

24.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}, \qquad \sigma=0{,}05.$$

24.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y'' = (y')^2 - xy, \quad y(1) = y'(1) = 1,$$

в ряд Тейлора.

24.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$\Big(1 + \frac{x^3}{8}\Big)y'' + \frac{3}{4}x^2y' + \frac{3}{4}xy = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

24.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ \ f(x) = \cos^2 x, \quad x \in]-\pi, \pi[; \qquad \text{б)}\ \ f(x) = |x| + \operatorname{sign} x, \quad x \in]-1, 2[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

24.24. Функцию

$$\text{а)}\ \ f(x) = 1 - e^x, \quad x \in]0, 1[; \qquad \text{б)}\ \ f(x) = \pi - x, \quad x \in]0, \pi[,$$

заданную на полупериоде, разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и по синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

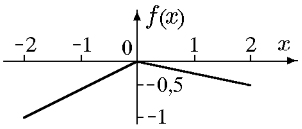


Рис. 56

24.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 56) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

24.26. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant 1; \\ 3x, & 1 < |x| < 2; \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

24.27. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-x^2/2}$.

24.28. Для функции

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 25

25.1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3}$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

25.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \ 1 + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + 4\operatorname{tg}\frac{\pi}{32} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

25.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \ \operatorname{arctg} 5 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{5}{4} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

на сходимость с помощью признака Коши.

25.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^4}, \qquad \text{б)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n}$$

на сходимость по интегральному признаку.

25.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \arccos \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

25.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(3^n+1)}{n3^n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(1-\frac{2}{n}\Big)^n$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

25.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-2)\ln(2n)}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin\frac{1}{n^2}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1});$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\Big); \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{2^{n^2}}.$$

25.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} (5n)^n/(2n+1)!$.

25.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n^5+1)^4},\ \alpha = 0{,}01; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3^n} \sin\Big(\frac{\pi}{2}+\pi n\Big),\ \alpha = 0{,}01.$$

25.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8+3+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

25.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

25.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-n^2 \ln(1+x/n)}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(2x-1).$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

25.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(1+\sqrt{\ln x})^n}$$

на промежутке $]1, e[$, исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{x3^n}$$

на промежутке $[0, \infty[$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

25.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)(x-2)^n, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n x^{2n}}{2^n n!}.$$

25.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n\ln^{n-1}(1+x^2), \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{3}{n}\Big)^n 3^{-n/x^2}.$$

25.16. Для функций

$$\text{а)}\ \sin\frac{\pi}{x}, \qquad \text{б)}\ e^{1/x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=4$ и $x_0=1$ соответственно, с указанием интервала сходимости.

25.17. Функции

$$\text{а)}\ \ln(1+x+x^2+x^3), \qquad \text{б)}\ \sin^2\frac{\pi x}{4}, \qquad \text{в)}\ \frac{x}{\sqrt{4+3x}}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=2$, $x_0=-1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

25.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2nx(2-x^2)^{n-1}, \qquad \text{в)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+2n+1}{2^n}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

25.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 1}\frac{(e^{x-1}-1)(e^{x-1}+1)}{[\ln x-\sin(x-1)][\ln x+\sin(x-1)]}.$$

25.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int_0^{1/2}\frac{(1+x)\operatorname{arctg} x}{x}dx, \qquad \sigma=0{,}05.$$

25.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$y''=xyy', \quad y(0)=y'(0)=2,$$

в ряд Тейлора.

25.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(3+x)y''-6xy'+6y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

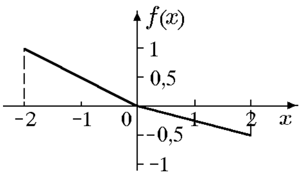


Рис. 57

25.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x)=\begin{cases}\pi, & x\in]-\pi,0[;\\ \pi-x, & x\in]0,\pi[;\end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x)=x^2-1,\ x\in]-1,3[.$$

Построить график суммы полученного ряда.

25.24. Функцию

$$\text{а)}\ f(x)=x\sin x,\ x\in]0,\pi[; \qquad \text{б)}\ f(x)=x^2-x,\ x\in]0,1[,$$

заданную на полупериоде, разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

25.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 57) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

25.26. Функцию
$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant 2; \\ 4 - x^2, & 2 < |x| < 2; \\ 0, & |x| > 3, \end{cases}$$
представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

25.27. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-3|x|} \sin 3x$.

25.28.* Для функции
$$f(x) = \frac{x+1}{4+x^2},$$
заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 26

26.1. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{(2n+3)!!}$$
или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

26.2. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n!}}, \qquad \text{б)}\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} + \ldots$$
на сходимость с помощью признака Даламбера.

26.3. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2-3}{n^2+2}\right)^{n/2}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{24}{10000} + \ldots$$
на сходимость с помощью признака Коши.

26.4. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 3^2 3^{-n^3}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(3n-1)}}$$
на сходимость по интегральному признаку.

26.5. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin(n\pi/4)}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{б)}\ \ln 2 + \frac{\ln 4}{2^3} + \frac{\ln 8}{27} + \frac{\ln 16}{64} + \ldots$$
на сходимость с помощью признаков сравнения.

26.6. Исследовать ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{5n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \sin\frac{\pi n^2}{n+1}$$
на сходимость и абсолютную сходимость.

26.7. Исследовать на сходимость ряд
$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (n + \sqrt[3]{8-n^3}); \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-\sqrt{n^3}}; \qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)};$$
$$\text{г)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 n} \cos\frac{\pi n^2}{n+1}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2-1/2)^{n-3}}{(a^2+1/2)^{n+2}}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$$

26.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} (4n)!/2^{n^2}$.

26.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3},\ \alpha=0{,}05;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!n!},\ \alpha=0{,}001.$$

26.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4+5+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

26.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}.$$

26.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n+1)};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(x+1)/n^2}-1}\operatorname{arctg}^n\frac{x}{n^2+1}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

26.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 x}{(n\cos^2 x+\sin^2 x)(n\cos^2 x+1)},$$

исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-n^2x^2}}{n^3}$$

на промежутке $]-\infty,\infty[$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

26.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(x-\frac{1}{e}\right)^{2n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}(x+2)^{2n}.$$

26.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\sin^n x\arcsin\frac{1}{2^n},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-(1-x^2)n}.$$

26.16. Для функций

$$\text{а)}\ \frac{\ln(2+x)}{\cos x},\qquad \text{б)}\ \sqrt{\arcsin x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=1/2$ соответственно.

26.17. Функции

$$\text{а)}\ \ln(1+x-6x^2),\qquad \text{б)}\ \sin^3 x,\qquad \text{в)}\ x^2 2^x$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=\pi/3$, $x_0=2$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

26.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)(x-1)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^3-1)^{n+1}}{n+1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

26.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)e^{2x}}{e^x(\arcsin x-\operatorname{arctg} x)}.$$

26.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^{10}},\quad \sigma=0{,}05.$$

26.21. Методом последовательного дифференцирования найти семь членов разложения решения задачи Коши

$$y^{(4)}=x^2y+(y')^2x^2,\quad y(1)=y'(1)=y''(1)=y'''(1)=1,$$

в ряд Тейлора.

26.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(16+x^2)y''+4xy'+2y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

26.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

а) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\in]-\pi,0[;\\ 1, & x\in]0,\pi[;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+x,\quad x\in]-\pi/2,3\pi/2[.$

Построить график суммы полученного ряда.

26.24. Функцию

а) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in]0,1[;\\ x^2, & x\in]1,2[,\end{cases}$ б) $f(x)=(\pi-x)^2,\quad x\in]0,\pi[,$

заданную на полупериоде, разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

26.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 58) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

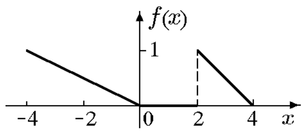


Рис. 58

26.26.* Функцию

$$f(x)=\frac{1}{81+x^4},$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

26.27. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=e^{-2x}\sin\beta x.$$

26.28. Для функции

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\in]0,1[;\\ x, & x\in]1,2[;\\ 0, & x\in]2,\infty[,\end{cases}$$

заданной на $]0,\infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 27

27.1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{(2n+2)!!}$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

27.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots 2n},\qquad \text{б)}\ \frac{1}{\ln^2 2}+\frac{1}{2\ln^2 3}+\frac{1}{6\ln^2 4}+\frac{1}{24\ln^2 5}+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

27.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{2}{n^3}\Big)^{n^4},\qquad \text{б)}\ 2+1+\Big(\frac{4}{5}\Big)^3+\Big(\frac{5}{7}\Big)^4+\ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

27.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ 1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}+\frac{1}{11\sqrt{11}}+\ldots,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n(\ln^6 n+1)}$$

на сходимость по интегральному признаку.

27.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{3^n}}{\sqrt{3^n}},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1+3^n}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

27.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}-(-1)^n]^2},\qquad \text{б)}\ -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

27.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\Big);\qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{(\ln n)^3}};\qquad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(4/n)}{n^2};\qquad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{35n}{3n^2+\sqrt{n^5}}.$$

27.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)!/n^n$.

27.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}},\ \alpha=0{,}1;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n(3n+1)},\ \alpha=0{,}01.$$

27.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5+4+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

27.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{n!}.$$

27.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{ne^n}{\ln^n(x-1)};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\sin\frac{x}{3^n}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

27.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

на промежутке $]-1,1[$, исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{3\sqrt{1+3x}}+\frac{1}{9\sqrt{1+5x}}+\frac{1}{27\sqrt{1+7x}}+\ldots$$

на промежутке $[0,\infty[$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

27.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n^2}}{(n+2)^n}.$$

27.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\Big(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\Big)^n,\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n\operatorname{ctg}x}}.$$

27.16. Для функций

$$\text{а)}\ e^x\cos x,\qquad \text{б)}\ \ln\operatorname{tg}\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=\pi/3$ и $x_0=0$ соответственно.

27.17. Функции

$$\text{а)}\ \sin^2\frac{\pi x}{6},\qquad \text{б)}\ \frac{1}{1+x+x^2+x^3},\qquad \text{в)}\ \frac{1}{x^3}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=2$, $x_0=0$, $x_0=3$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

27.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big)x^{n+2},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^2(x^3-1)^{n-1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

27.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}^3x}{\ln(1+x^2)+x^2-2\sin x}.$$

27.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_2^3 x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx,\qquad \sigma=0{,}05.$$

27.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y'=x^2y^2-2,\qquad y(1)=1,$$

в ряд Тейлора.

27.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+9x^2)y'' + 36xy' + 18y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

27.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x) = -x^2 + 1, \quad x \in]-\pi, \pi[; \qquad \text{б)}\ f(x) = 5x + 2, \quad x \in]-4, 0[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

27.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x) = e^{3x}, \quad x \in]0, 1/3[; \qquad \text{б)}\ f(x) = \frac{x}{\pi}, \quad x \in]0, \pi[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

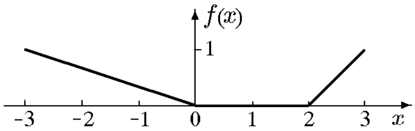


Рис. 59

27.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 59) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

27.26. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \pi; \\ \cos x, & \pi < |x| < 2\pi; \\ 0, & |x| > 2\pi, \end{cases}$$

представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

27.27. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-x^2}$.

27.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{2x}{9 + 25x^2},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 28

28.1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

или установить его расходимость, согласно определению или критерию Коши.

28.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + n}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^3} + \frac{6}{e^4} + \frac{24}{e^5} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

28.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n^2}, \qquad \text{б)}\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{24}} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

28.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \frac{1}{1+4^2} + \ldots$$

на сходимость по интегральному признаку.

28.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + 2n + 4}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 n}{n^3 + 5}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

28.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+\sqrt[3]{n^4}\sqrt[4]{(n+1)^5}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{40}}{n}\cos\frac{\pi n}{4}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

28.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\sin\frac{\pi}{n}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n[n+(-1)^n]}{\ln(n+4)}; \qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n+1)}\cos\frac{\pi n^2}{n+1};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2+n}\cos\frac{n^2}{n^2+1}; \qquad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}; \qquad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}.$$

28.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty}(3n)!/2^{n^2}$.

28.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а}\ \sum_{n=4}^{\infty} n^2 e^{-n},\ \alpha=0{,}05; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{n+2}\Big)^n,\ \alpha=0{,}05.$$

28.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4+7+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

28.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!}.$$

28.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+x^2)+1}{(n+x^2)^2(n+1+x^2)^2}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{4n}\cos(x+\pi n).$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

28.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\operatorname{sh}^2 x)(n+\operatorname{ch}^2 x)}$$

на промежутке $]0,\infty[$, исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{x^n}$$

на промежутке $[2,20]$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

28.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n^4+1}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^{n+1}\Big(\sqrt[4]{n^2+n+1}-\sqrt{n+\frac{1}{2}}\Big).$$

28.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\ln^n(5x-1)},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}e^{n\sin x}.$$

28.16. Для функций

$$\text{а)}\ 3^{\cos^2(x+\pi/4)},\qquad \text{б)}\ \ln^2(1-x)$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=1/2$ соответственно.

28.17. Функции

$$\text{а)}\ \sin\pi(x^2+2x),\qquad \text{б)}\ \frac{1}{(3+x)^2},\qquad \text{в)}\ \frac{x-1}{\sqrt{4+3x}}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=-1$, $x_0=-2$, $x_0=-1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

28.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}n}{(4+x^2)^{n+1}},\qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-n-1)(x^2-1)^n$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

28.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt[3]{1+x}-1)}{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}-x}.$$

28.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{ch}\,x^2\,dx,\quad \sigma=0{,}01.$$

28.21. Методом последовательного дифференцирования найти пять членов разложения решения задачи Коши

$$(1+x^2)y''+xy'-2y=0,\quad y(1)=y'(1)=1,$$

в ряд Тейлора.

28.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(4-x)y''-8xy'+8y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

28.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\ f(x)=\mathrm{sh}\,x,\ x\in]-\pi,\pi[;\qquad \text{б)}\ f(x)=\mathrm{sign}(\cos x),\ x\in]-\pi/2,3\pi/2[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

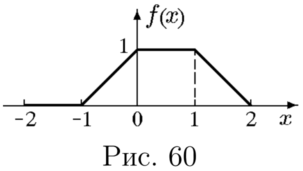


Рис. 60

28.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\ f(x)=\begin{cases}-x, & x\in]0,\pi[;\\ x^2/2, & x\in]\pi,2\pi[;\end{cases}\qquad \text{б)}\ f(x)=2-x,\quad x\in]0,2[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

28.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 60) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

28.26. Функцию $f(x)=e^{(1-x^2)/2}$ представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

28.27. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-|x+2|}$.

28.28.* Для функции

$$f(x)=\frac{x}{4x^2+9},$$

заданной на $]0,\infty[$, найти косинус-преобразование Фурье.

Вариант № 29

29.1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!!}$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

29.2. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{6}{27} + \frac{24}{256} + \frac{120}{3125} + \ldots, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + n}$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

29.3. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2 \frac{1}{3^n}, \qquad \text{б)}\ \frac{2}{\ln 2} + \frac{4}{\ln^2 3} + \frac{8}{\ln^3 4} + \frac{16}{\ln^4 5} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Коши.

29.4. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-\sqrt{n^3}}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

на сходимость по интегральному признаку.

29.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2-\cos \pi n)}{2n^2-1}$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

29.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

29.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^6+6}} \arcsin \frac{3+(-1)^n}{4}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^{n^2}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n; \qquad \text{д)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{(\ln n)^n}; \qquad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!}.$$

29.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+1)/(2n)!!$.

29.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}+1}, \ \alpha = 0{,}01; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n)!!}, \ \alpha = 0{,}001.$$

29.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7 + 4 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

29.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{n!}.$$

29.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+e^x)(n+1+e^x)}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n \operatorname{arctg}\frac{2x}{n+1}.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

29.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(x^2+n)(x^2+n+1)}$$

на промежутке $]-\infty,\infty[$, исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\ln^4\left(1+\frac{x^2}{n\ln n}\right)$$

на промежутке $[-1000, 1000]$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

29.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n^a}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+5}\right)^{n^2}\frac{x^{5n}}{5^n}.$$

29.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)4^{n^2/x}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n \operatorname{tg} x}.$$

29.16. Для функций

$$\text{а)}\ \sin\left(\frac{\arcsin x}{\mu}\right), \qquad \text{б)}\ \sin\frac{\pi|x|}{2}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=-1/2$ соответственно.

29.17. Функции

$$\text{а)}\ (3x-2)\sqrt{9-2x}, \qquad \text{б)}\ \ln(x^2+6x+12), \qquad \text{в)}\ e^{x\sqrt{3}/2}\sin\frac{x}{2}$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=-3$, $x_0=0$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

29.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[2^n+\frac{(-1)^n}{n}\right]x^n, \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

29.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{2\sin x[1-1/(\cos x)]+x^3}.$$

29.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{27-x^3}}, \qquad \sigma=0{,}05.$$

29.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$(1+x^2)y' = x + y, \quad y(1) = 1,$$

в ряд Тейлора.

29.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(1+\frac{x^2}{4}\right)y'' + xy' + \frac{1}{2}y = 0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0 = 0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

29.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{ch} x, \quad x \in]-\pi, \pi[; \qquad \text{б) } f(x) = \operatorname{sign}(\sin \pi x), \quad x \in]-1/2, 3/2[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

29.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а) } f(x) = 2 - x, \quad x \in]0, 2[; \qquad \text{б) } f(x) = (x-\pi)^2, \quad x \in]0, \pi[,$$

разложить в ряд Фурье по синусам (а) и по косинусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

29.25. Заданную на $]-l, l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 61) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

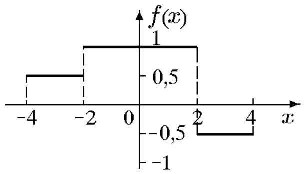


Рис. 61

29.26. Функцию $f(x) = e^{-x^2/2}\cos x$ представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

29.27. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = (2-|x|)e^{-|x|}$.

29.28.* Для функции

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2},$$

заданной на $]0, \infty[$, найти синус-преобразование Фурье.

Вариант № 30

30.1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)$$

или установить его расходимость, исходя из определения или критерия Коши.

30.2. Исследовать ряд

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n}}{n!}, \qquad \text{б) } 1 + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + 4\operatorname{tg}\frac{\pi}{32} + \ldots$$

на сходимость с помощью признака Даламбера.

30.3. Исследовать ряд

$$\text{а) } \frac{3}{2} + 1 + \frac{27}{4^3} + \frac{81}{5^4} + \ldots, \qquad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-2)}$$

на сходимость с помощью признака Коши.

30.4. Исследовать ряд

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}, \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n^4}}$$

на сходимость по интегральному признаку.

30.5. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(1 - \cos\frac{\pi}{n}\Bigr)$$

на сходимость с помощью признаков сравнения.

30.6. Исследовать ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n^4} + n}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln\sqrt{n}} \cos\frac{\pi n}{12}$$

на сходимость и абсолютную сходимость.

30.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7{\cdot}13{\cdot}\cdots(6n+1)}{1{\cdot}8\cdots n^3}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1});$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{3n^2+1}} \sin\frac{\pi}{2\sqrt[3]{n}}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n+\sqrt{n})} \cos\frac{\pi n^2}{n+1}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n^n}.$$

30.8. С помощью признаков сходимости числовых рядов раскрыть неопределённость $\lim\limits_{n\to\infty} (3n)^n/(2n-1)!$.

30.9. Оценить остаток ряда и вычислить его сумму с указанной точностью

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}},\ \alpha = 0{,}01; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)!!},\ \alpha = 0{,}001.$$

30.10.* Найти сумму, разность, произведение (по Коши) и частное рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 + 9 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Сделать проверку. Сумму произведения рядов по Коши сравнить с произведением сумм этих рядов.

30.11.* Найти произведение и частное рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{n!}.$$

30.12. Найти области сходимости (абсолютной и условной) рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\frac{x}{3}\Bigr)^n \sin nx; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \Bigl(\frac{1-x}{1+x}\Bigr)^n.$$

Вычислить сумму одного из рядов, исходя из её определения.

30.13. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+n)(x^2+n+1)}$$

на промежутке $]-\infty, \infty[$, исходя из определения, и ряд

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(x^n + x^{-n})$$

на промежутке $0{,}5 < x < 2$, используя признаки Вейерштрасса или Дини.

30.14. Найти области сходимости степенных рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(3^n+4^n)}, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(2n-1)!!}.$$

30.15. Найти области сходимости обобщенных степенных рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n,\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{e}{n}\Bigr)^n e^{nx}.$$

30.16. Для функций

$$\text{а)}\quad \cos\Bigl(\frac{\arcsin x}{\mu}\Bigr),\qquad \text{б)}\quad x^{2x}$$

записать три первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, где $x_0=0$ и $x_0=1$ соответственно.

30.17. Функции

$$\text{а)}\quad \frac{x}{\sqrt{9+x^2}},\qquad \text{б)}\quad \ln(5x+3),\qquad \text{в)}\quad (x+2e^x)$$

в окрестности точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=-2/5$, $x_0=1$ соответственно) представить рядами Тейлора с указанием интервалов их сходимости.

30.18. Вычислить суммы рядов

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos^{n+1}x}{n(n+1)},\quad \text{б)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n-1)x^{n+1}$$

и указать область сходимости функциональных рядов.

30.19. Пользуясь известными разложениями функций в ряд Тейлора, вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{1-\cos x}.$$

30.20. Вычислить приближенно с заданной погрешностью:

$$\int\limits_0^1(1+x)e^{x^2}dx,\quad \sigma=0{,}05.$$

30.21. Методом последовательного дифференцирования найти четыре члена разложения решения задачи Коши

$$y'=\sin(x+y),\quad y(\pi/6)=\pi/6,$$

в ряд Тейлора.

30.22. Методом неопределенных коэффициентов найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2(1+4x)y''-2xy'+2y=0$$

в виде смешанного ряда с центром в точке $x_0=0$. Сумму полученного ряда выразить через элементарные функции.

30.23. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функцию

$$\text{а)}\quad f(x)=\begin{cases} x, & x\in]0,1[;\\ 1, & x\in]1,2[;\\ 3-x, & x\in]2,3[,\end{cases}\qquad \text{б)}\quad f(x)=x\cos x,\quad x\in]-\pi/2,\pi/2[,$$

Построить график суммы полученного ряда.

30.24. Заданную на полупериоде функцию

$$\text{а)}\quad f(x)=e^{x/2},\quad x\in]0,2[;\qquad \text{б)}\quad f(x)=\frac{\pi}{4},\quad x\in]0,\pi[,$$

разложить в ряд Фурье по косинусам (а) и по синусам (б). Построить график суммы полученного ряда.

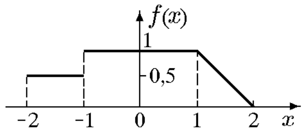


Рис. 62

30.25. Заданную на $]-l,l[$ графически функцию $f(x)$ (рис. 62) представить рядом Фурье в комплексной форме, записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

30.26. Функцию $f(x)=\operatorname{sign}(x-3)-\operatorname{sign}(x-4)$ представить интегралом Фурье в любой форме, предварительно обосновав возможность такого представления.

30.27.* Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1-e^{-3x}}{x}.$$

30.28. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}2\sin 4x, & |x|\leqslant \pi n/2;\\ 0, & |x|>\pi n/2.\end{cases}$$

Список литературы

1. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям.* – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. I: *Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.
3. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. II, ч. 1: *Специальные функции.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 352 с.
4. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. II, ч. 2: *Уравнения математической физики.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 646 с.
5. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Элементы современной математической физики.* — Томск: Изд-во ТПУ, 2004. — 182 с.
6. Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* – М.: Наука, 1985.
7. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. *Краткий курс математического анализа.* – М.: Наука, 1971.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Задачник.* – М.: Наука, 1987.
10. Будак Б.М., Фомин С.В. *Кратные интегралы и ряды.* – М.: Наука, 1965.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* Т. 2. – М.: Наука, 1980. – 366 с.
12. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967.
13. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* – М.: Наука, 1977.
14. Ефимов А.В. *Математический анализ* (*специальные разделы*): Ч. I. – М.: Высшая школа, 1980.
15. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. *Математический анализ* (*специальные разделы*): Ч. II. – М.: Высшая школа, 1980. – 296 с.
16. Зельдович Я.В., Яглом И.М. *Высшая математика для начинающих физиков и техников.* – М.: Наука, 1982. – 512 с.
17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа* (в 2-х томах). – М.: Наука, 1971 (т. 1), 1973 (т. 2).
18. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержев В.Ф. *Специальный курс высшей математики.* – М.: Высшая школа, 1976. – 400 с.
19. Каплан И.А. *Практические занятия по высшей математике* (в 3-х томах). – Харьков: Изд-во ХГУ, т. 1- 1965, т. 2-1971, т. 3- 1972.
20. Клементьев З.И. *Лекции по математическому анализу* (в 5 вып.) – Томск: Изд-во ТГУ, 1987.
21. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1981 (т. 1), 1982 (т. 2).
22. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Курс высшей математики.* – М.: Наука, 1971.

23. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Краткий курс высшей математики.* – М.: Наука, 1986.
24. Кузнецов Л.А. *Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики.* – М.: Наука, 1984.
25. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. *Математический анализ в примерах и задачах* (в 2-х т.). – Киев: Вища школа, т. 1. – 1975, т. 2. – 1977.
26. Мышкис А.Д. *Математика для ВТУЗОВ* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1971 (т. 1), 1973 (т. 2).
27. Романовский П.И. *Ряды Фурье.* – М.: Наука, 1964.
28. *Сборник задач по математике для втузов* / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. — В 3-х т. – М.: Наука, 1986.
29. Толстов Г.П. *Ряды Фурье.* – М.: Наука, 1980.
30. Шмелев П.А. *Теория рядов в задачах и упражнениях.* – М.: Высшая школа, 1983.
31. Фихтенгольц Г.М. *Основы математического анализа* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1964 (т. 1), 1968 (т. 2).
32. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (в 3-х т.). – М.: Наука, 1966.
33. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. *Ряды Фурье.* – М.: Физматгиз, 1962. – 156 с.

Учебное издание

ЗАДОРОЖНЫЙ Валерий Николаевич
ЗАЛЬМЕЖ Владимир Феликсович
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич
ШАПОВАЛОВ Александр Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА для технических университетов Часть IV. Ряды

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*
Компьютерная верстка *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе *TEX – LATEX*
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати . .2011. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать . Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. .
Заказ . Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru