Тема 1 Математические методы и основные классы задач оптимизации

Стариков Виталий Иванович,
д.ф.-м..н., профессор кафедры Информационных систем
Юргинский технологический институт (филиал)
Томского политехнического университета

652050, г. Юрга, Россия

ул. Ленинградская, 26, тел. (38451)64942,
E-mail: vstarikov@tpu.ru

1. Общая постановка математической модели задач оптимизации

Пусть *f(x)* – функция, определённая на множестве *V*, а *Щ* - некоторое подмножество множества *V*.

Оптимизационная задача задается тройкой *(V, F, Щ)*. При этом функция *f(x)* называется целевой функцией, а *Щ* – допустимым множеством (множеством допустимых значений) оптимизационной задачи.

Оптимизационные задачи бывают двух типов: задачи минимизации и задачи максимизации. Задача минимизации (максимизации) *(V, F, Щ)* состоит в отыскивании наименьшего (наибольшего) значения целевой функции *f(x)* на допустимом множестве *Щ*.

Общая постановка математической модели задач оптимизации

Для того, чтобы решить задачу минимизации (максимизации) *(V, F, Щ)*, достаточно найти её оптимальное решение,

т.е. указать $x \in Щ$ такое, что $f(x0) \le f(x1,\ldots,xn) = f(x)$ (или $f(x0) \ge f(x)$) при любом $x \in Щ$.

Общая постановка математической модели задач оптимизации

Оптимизационная задача называется неразрешимой, если она не имеет оптимального решения. В частности, задача минимизации (максимизации) *(V, F, Щ)* будет неразрешимой, если целевая функция *f(x)* не ограничена снизу (сверху) на допустимом множестве *Щ*.

Решить оптимизационную задачу – значит либо найти её оптимальное решение, либо установить неразрешимость этой задачи.

Любая задача максимизации *(V, F, Щ)* сводится к задаче минимизации *(V, -F, Щ)*: эти задачи либо обе неразрешимы, либо имеют одно и тоже оптимальное решение.

Две задачи минимизации (максимизации) называются эквивалентными, если они имеют одно и тоже множество допустимых решений. На любом допустимом решении значения целевых функций этих задач совпадают. Эквивалентные оптимизационные задачи либо обе неразрешимы, либо имеют одно и тоже оптимальное решение.

Методы решения оптимизационных задач, в которых целевая функция является функцией *n* переменных, часто называют методами **математического программирования**.

Термин "программирование" в данном случае обусловлен тем, что в задачах имеется некоторая программа действий, это не программирование на ЭВМ.

В зависимости от вида целевой функции, которая может быть линейной или нелинейной,

в математическом программировании выделяют основные разделы: *линейное программирование* и *нелинейное (выпуклое программирование).*

В общем виде математическая постановка задачи оптимизации состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x1\ldots,xn)$ при условиях $gi(x1\ldots,xn)\le bi$ $(i=1,\ldots,m)$,

где f и gi - заданные функции,

а bi - некоторые действительные числа.

Если все f и gi линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования.

Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

Пусть $z=f(x1,x2,\ldots,xn)$. Тогда мы можем записать:

$z \longrightarrow \max$ (min)

$gi\ (x1\ldots,xn)$ Є bi ,$i=1,\ldots,m$.

Интерпретировать эту модель можно следующим образом к проблемам выбора наилучших вариантов экономического поведения:

z - оптимизационная цель экономической системы;

$f(x1,\ldots,xn)$ - соответствующая ей целевая функция;

$x1,x2,\ldots,xn$ - показатели степени использования средств достижения цели, могут характеризовать выпуск продукции разных видов, загрузку оборудования, использование ресурсов и т.п.

$gi(x1\ldots,xn)$ - функция совокупных затрат средств i-й группы, используемых для достижения целей;

bi - лимиты, предельные границы совокупных затрат средств i-й группы, фиксируются ограничением на $gi(x)$ сверху

Сведение экономических задач к моделям оптимизации решений, являющихся конкретизацией общей задачи математического программирования, основано на ряде исходных предпосылок о характере анализируемых экономических процессов и о выборе наилучших решений.

Среди этих предпосылок основными являются следующие:

1. наличие единого критерия оптимизации качества экономических решений, который может быть количественно измерен;
2. признание ограниченности ("дефицитности") средств достижения целей;
3. наличие взаимозаменяемости средств и многовариантность их использования для достижения одних и тех же целей.

Для предприятия наиболее обоснованным с точки зрения теории оптимизации является критерий оптимальности в виде максимума прибыли (разницы между результатом и затратами) или минимума затрат, где затраты и результаты измеряются в стоимостных единицах. Вместе с тем, следует иметь в виду многоцелевой характер деятельности предприятия

Ограничениями в общей модели задач оптимизации, как правило, являются ресурсы (средства): людские, материальные, денежные и т.п.

. Соответственно в моделях выбора необходимо прямо или косвенно измерять и учитывать все виды ограниченных ресурсов и с точки зрения их расходования оценивать любые варианты хозяйственной деятельности.

Многовариантность экономических решений, с одной стороны, связана с ограниченностью, с другой – с взаимозаменяемостью ресурсов и способами их использования

Наряду с этим целесообразно выделение косвенной взаимозаменяемости средств, когда они взаимозаменяемы опосредованно, через другие средства.

Именно наличие как прямой, так и косвенной взаимозаменяемости средств в экономической системе создаёт огромное количество взаимопереплетающихся вариантов хозяйственных стратегий и решений, что делает проблему оптимального выбора настолько нетривиальной, что она во многих случаях не может быть решена без применения *экономико-математических моделей и методов оптимизации.*

Даже если в системе выбора экономического решения объективно существует единая цель деятельности, ограниченность и взаимозаменяемость средств её достижения, такая система может быть сведена к задаче оптимизации лишь при выполнении ещё трёх важных условий:

- условие полной рационализации – цель деятельности осознаётся с высокой степенью конкретности как единая количественно измеримая категория;
- условие всестороннего знания – все альтернативные возможности достижения целей заранее известны и хорошо описаны, остаётся лишь сравнить и оценить их;
- условие безграничности вычислительных возможностей – ресурсы, предназначенные для реализации самого процесса исследования по отысканию наилучшего решения (мощность ЭВМ, численность групп специалистов, срок выдачи рекомендаций и др.), не лимитируют возможности получения этого решения

Применительно к общей модели математического программирования функция $gi(x)$ должна быть известна, то есть зависимость расхода или выпуска ресурса i-го вида от переменных должна быть известна.

Величина bi есть наличие или возможность получения ресурса i-го вида и должна быть задана.

В каждом из ограничений вида $gi(x) \le bi$ может иметь место в принципе любой из знаков $\le$, $=$, $\ge$.

Ограничение вида $gi(x) \ge bi$ может быть приведено к каноническому (классическому) виду следующим образом: $-gi(x) \le -bi$. Различные ограничения могут иметь различные знаки. Соотношение между числом неизвестных n и числом ограничений m может быть любым: $m < n$; $m = n$; $m > n$. Когда $m = 0$, то ищется максимум или минимум целевой функции без ограничений, т. е. решается задача на нахождение безусловного экстремума.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ