

# Лекция №3

## Символический метод

© 2020 Томский политехнический университет, ОЭЭ ИШЭ

Лектор: к.т.н., доцент Васильева Ольга Владимировна

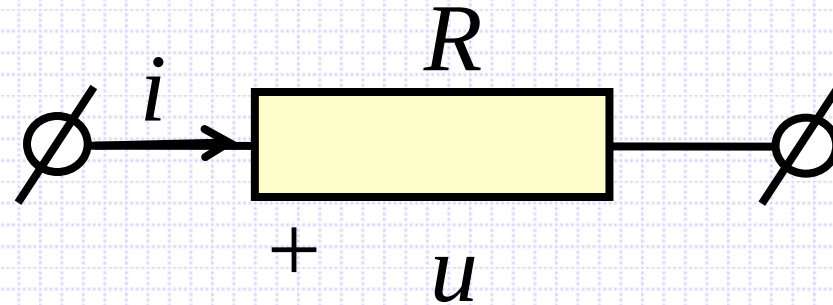
**Действующие значения тока  
и напряжения характеризуют  
тепловое действие в линейном  
резистивном элементе  
с сопротивлением  $R$**

**При токе и напряжении:**

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$

**$i(t)$ ,  $u(t)$  - мгновенные значения тока  
и напряжения или функции  
времени**



**ПО ЗАКОНУ ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА:**

$$W(t) = \int_0^T i(t)^2 R dt = I^2 R T, \text{ Дж}$$

**ПО ЗАКОНУ ОМА:**

$$u(t) = R \cdot i(t), \text{ В}$$

$$T = 2\pi / \omega, \text{ с}$$

Действующее значение тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Действующее значение напряжения:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = U_m / \sqrt{2}$$

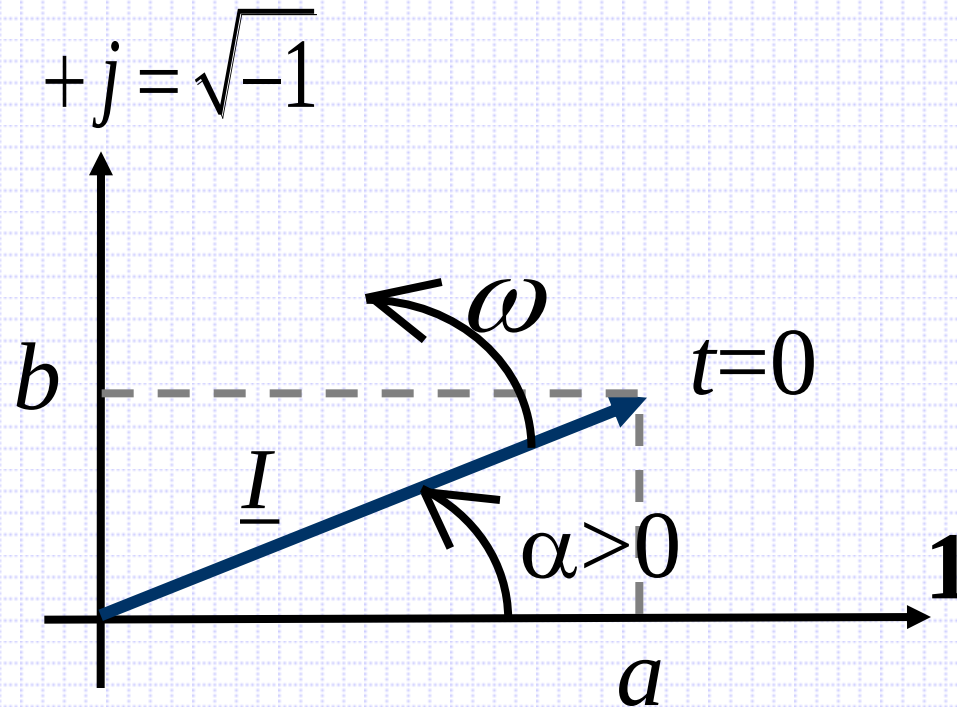
**Действующее значение  
гармонического тока  $i(t)$   
численно равно такому  
постоянному току  $I$ , который за  
время  $T$  в том же сопротивлении  
 $R$  выделяет такое же количество  
тепла  $W$**

**Символический метод  
применяется для расчета линейных  
цепей с гармоническими токами  
и напряжениями.**

**Этот метод основан на изображении  
гармонических величин  
комплексными числами.**



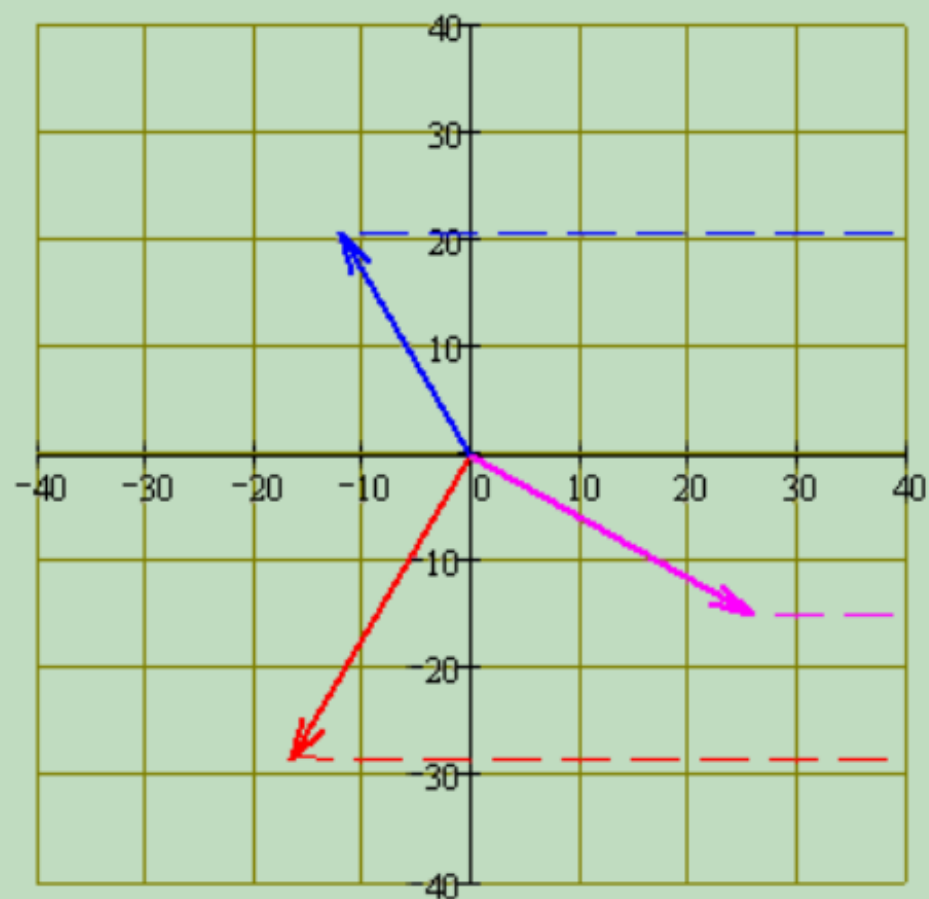
**Синусоидальная величина  
может быть изображена  
вращающимся вектором на  
комплексной плоскости, причем  
этот вектор записывается в  
показательной,  
тригонометрической  
и алгебраической формах**



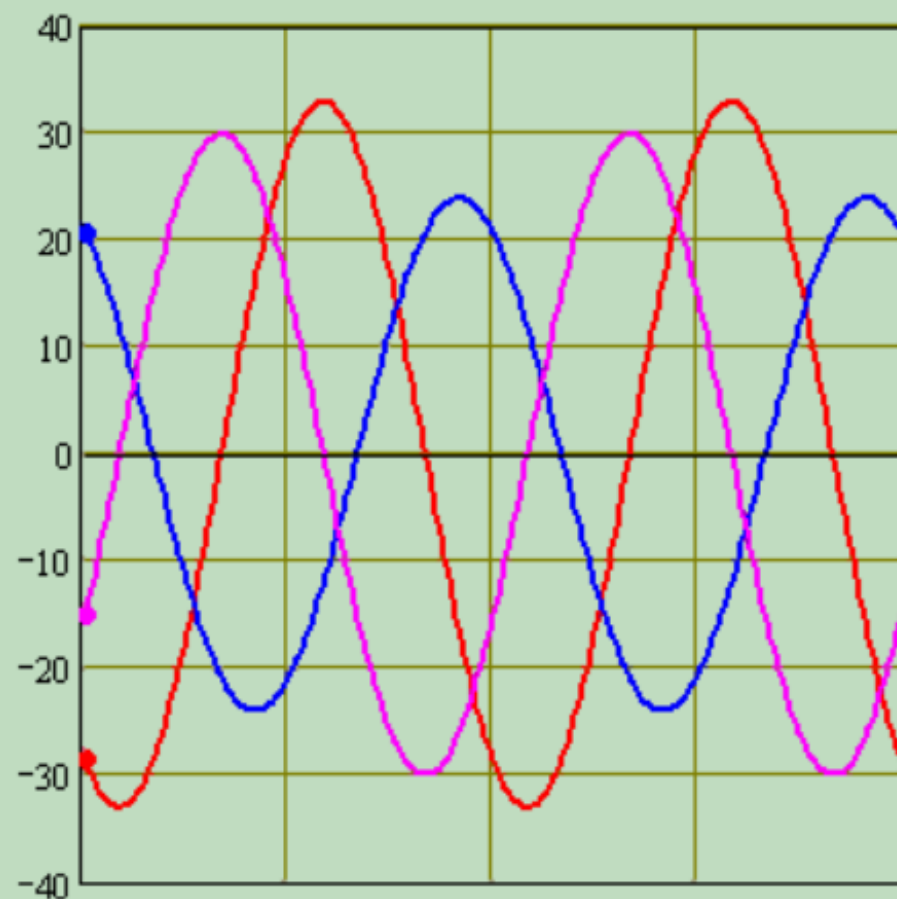
$\underline{I}$  — комплекс действующего значения тока

$\underline{I}_m = \underline{I} \cdot \sqrt{2}$  — комплекс амплитуды тока

Векторная диаграмма напряжений



Осциллограмма напряжений



**Таким образом:**

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \alpha) = \\ &= \operatorname{Im}[\sqrt{2} I e^{j(\omega t + \alpha)}] = \operatorname{Im}[\sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{I} = I e^{j\alpha} = I \cos \alpha + j I \sin \alpha = \\ &= a + jb \end{aligned}$$

$\operatorname{Im}[\sqrt{2} I e^{j(\omega t + \alpha)}]$  — мнимая составляющая  
вращающегося вектора

$j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица

**Например, мгновенному значению тока:**

$$i(t) = 2.82 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ), \text{ A}$$

**соответствует комплекс действующего значения:**

$$\underline{I} = \dot{I} = \frac{2.82}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30^\circ}, \text{ A}$$

**При этом, например, комплексу  
действующего значения  
напряжения:**

$$\underline{U} = \dot{U} = 100 \cdot e^{j45^\circ}, \text{ В}$$

**соответствует синусоидальная  
функция времени:**

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ В}$$

# **Действия с комплексными числами**

Где:

$$\underline{F} = F \cdot e^{j\alpha} = a + jb \quad \text{- комплексное число}$$

$F$  - модуль

$\alpha$  - аргумент (фаза)

$a$  - вещественная (реальная)  
составляющая

$b$  - мнимая составляющая



# **1. Переход от алгебраической формы записи к показательной форме**

$$a + jb \Rightarrow Fe^{j\alpha}$$

$$F = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = (180) + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

**При этом 180 градусов  
учитывается при  $a < 0$**

## **2. Переход от показательной формы записи к алгебраической форме**

$$F e^{j\alpha} \Rightarrow a + jb$$

$$a = F \cos \alpha$$

$$b = F \sin \alpha$$

**Сложение и вычитание  
комплексных чисел  
осуществляется только в  
алгебраической форме, а  
умножение и деление - в  
показательной.**

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

$$1/j = -j$$

$$j^3 = -j$$

$$j = e^{j90^\circ}$$

$$-j = e^{-j90^\circ}$$

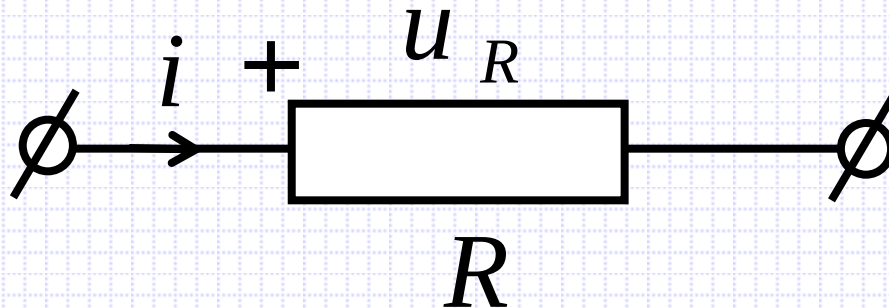
$$1 = e^{j0^\circ}$$

$$-1 = e^{j180^\circ}$$



# **Линейные элементы схем замещения**

# 1. Резистивный элемент



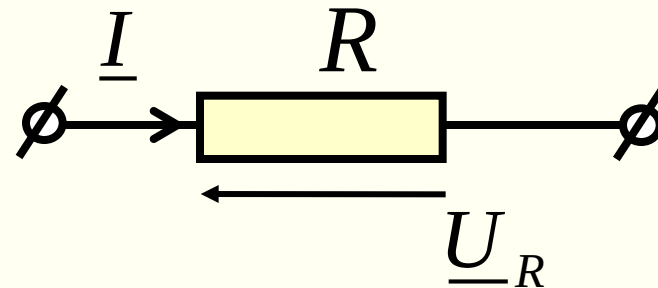
**Закон Ома:  $i(t) = u_R(t) / R = g u_R(t)$  (А)**

**Закон Джоуля-Ленца:**

$$P(t) = i(t)^2 R = u_R(t)^2 / R \text{ (Вт)}$$

**Резистивные элементы  
необратимо преобразуют  
электромагнитную энергию  
в тепло, причем величина  
сопротивления  $R$  (Ом)  
постоянна**

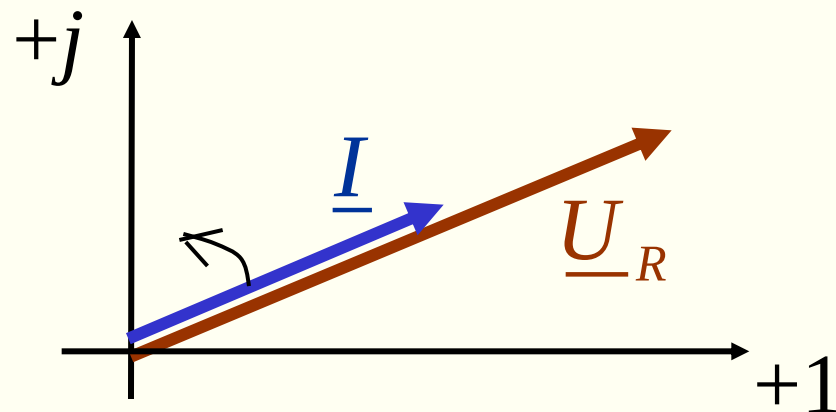
**Резистивный  
элемент**



**Комплекс  
напряжения**

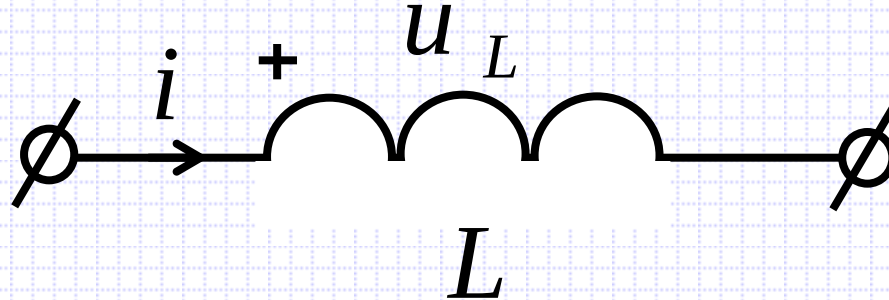
$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$$

**Вектора  
напряжения и  
тока**



**На комплексной плоскости  
вектор напряжения  
резистивного элемента  
совпадает по направлению  
с вектором своего тока**

## 2. Индуктивный элемент



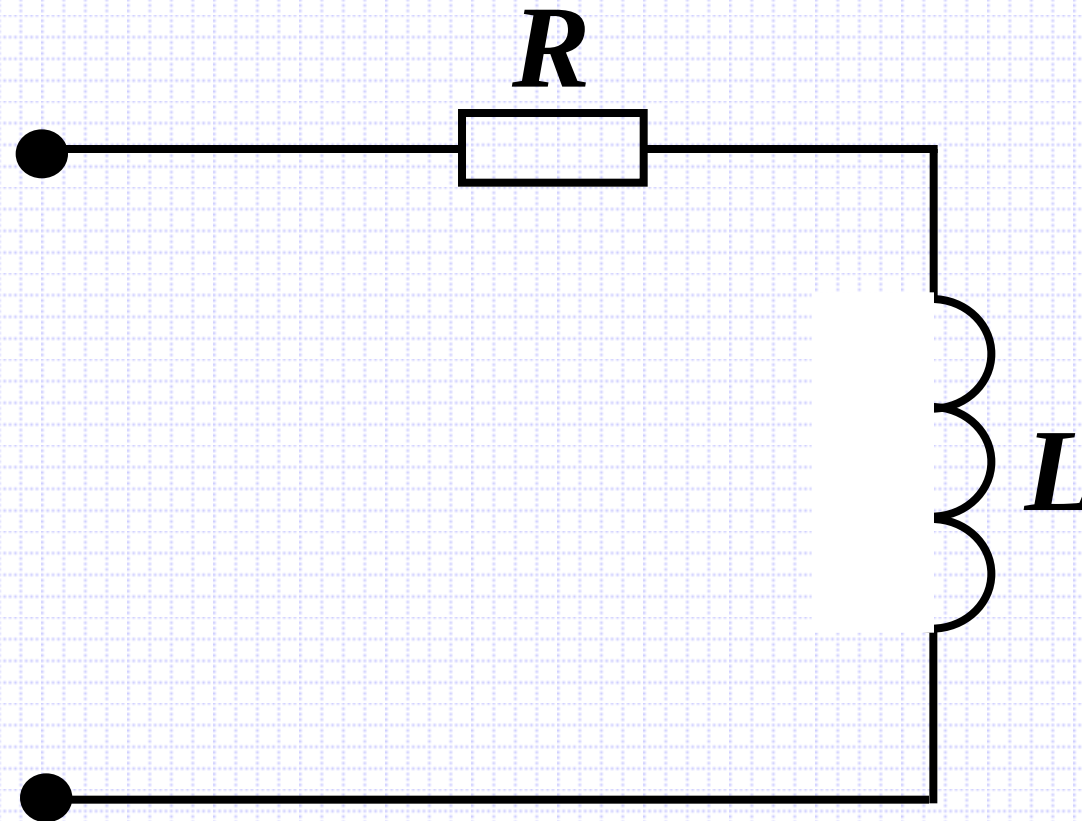
Напряжение:  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ (В)}$

Ток:  $i(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt \text{ (А)}$

Энергия:  $W(t) = \frac{L i(t)^2}{2} \text{ (Дж)}$

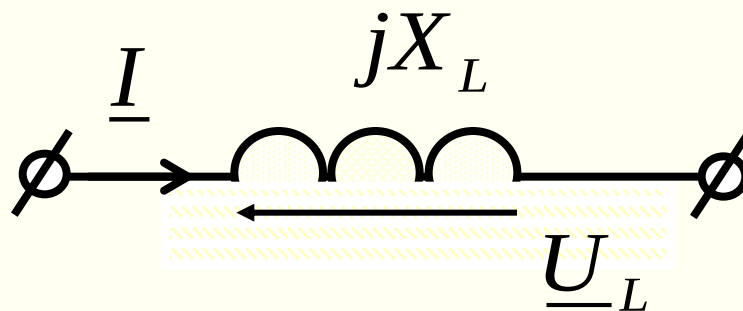
**Индуктивные элементы запасают  
электромагнитную энергию  
 $W$  в магнитном поле,  
причем величина индук-  
тивности  $L$  (Гн) постоянна**

# Схема замещения катушки





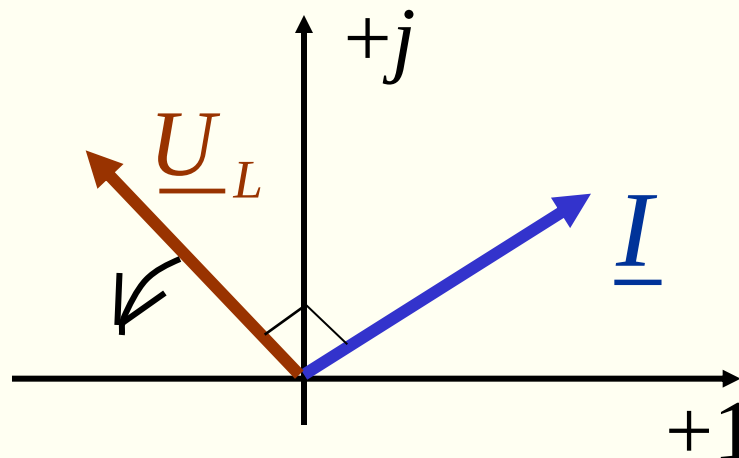
**Индуктивный  
элемент**



**Комплекс  
напряжения**

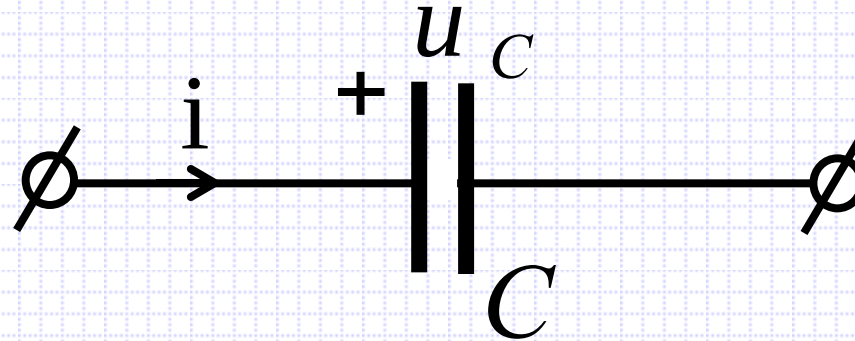
$$\underline{U}_L = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I}$$

**Вектора  
напряжения и  
тока**



**На комплексной плоскости  
вектор напряжения  
индуктивного элемента  
опережает по направлению  
вектор своего тока  
на 90 градусов**

### 3. Емкостный элемент



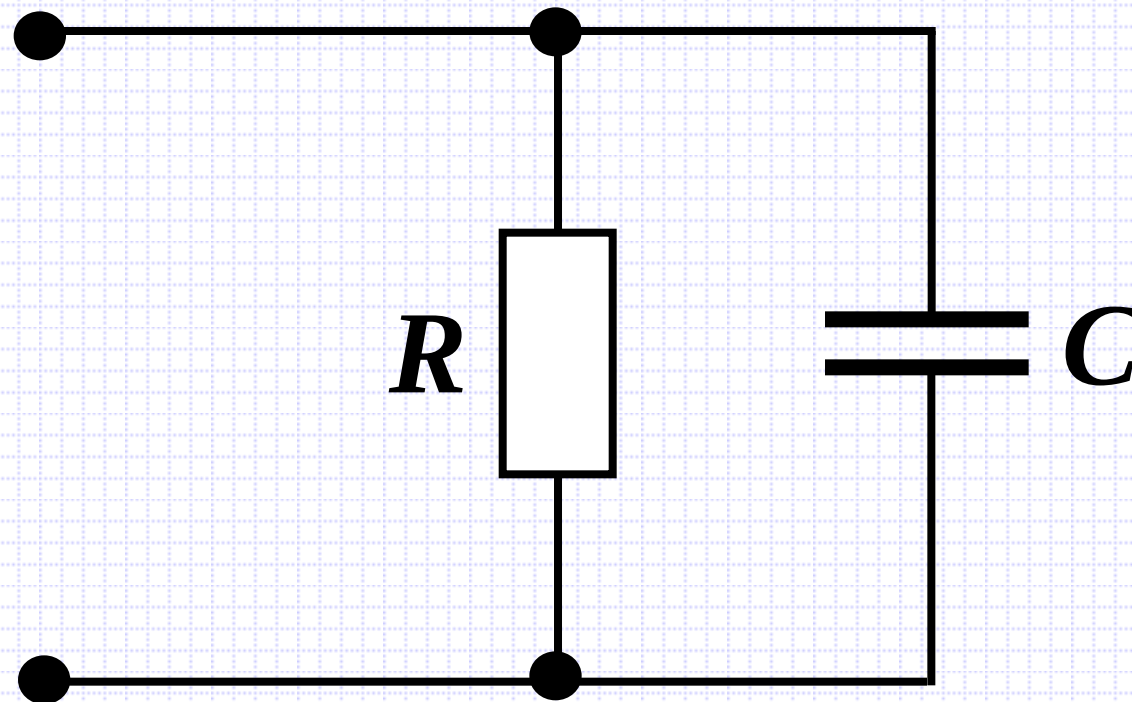
Ток: 
$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \text{ (А)}$$

Напряжение: 
$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \text{ (В)}$$

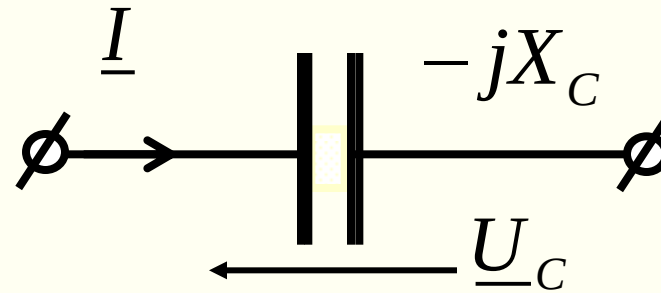
Энергия: 
$$W(t) = \frac{C u_c(t)^2}{2} \text{ (Дж)}$$

**Емкостные элементы запасают  
электромагнитную энергию  
 $W$  в электрическом поле,  
причем величина емкости  
 $C$  (Ф) постоянна**

# Схема замещения конденсатора



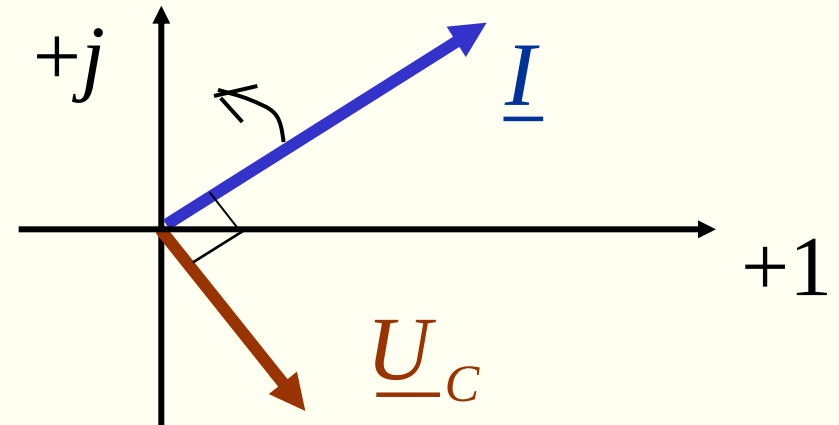
**Емкостный  
элемент**



**Комплекс  
напряжения**

$$\underline{U}_C = -\frac{j}{\omega C} \underline{I} = -jX_C \underline{I}$$

**Вектора  
напряжения и  
тока**



**На комплексной плоскости  
вектор напряжения  
емкостного элемента  
отстает по направлению  
от вектора своего тока  
на 90 градусов**

**Где:**

$X_L = \omega L$  - **индуктивное  
сопротивление (Ом)**

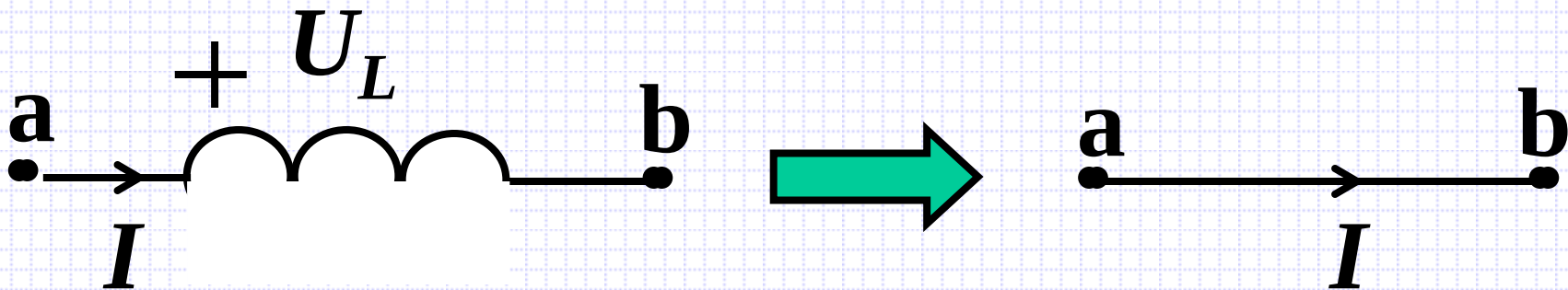
$X_C = \frac{1}{\omega C}$  - **емкостное  
сопротивление (Ом)**



# Примечания

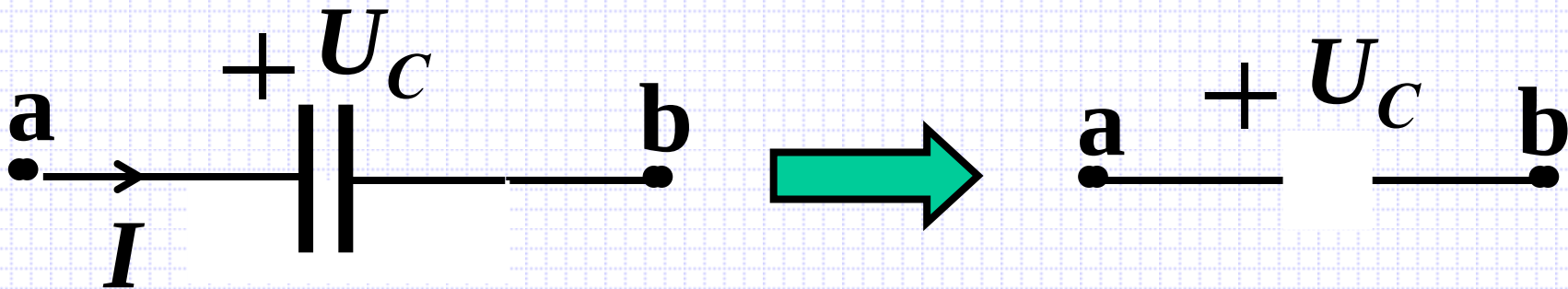
## 1. При постоянном токе индуктивный элемент - “закоротка”:

Так как  $U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0$  , то



## 2. При постоянном напряжении емкостный элемент - “разрыв”:

Так как  $i(t) = C \frac{dU_c(t)}{dt} = 0$ , то



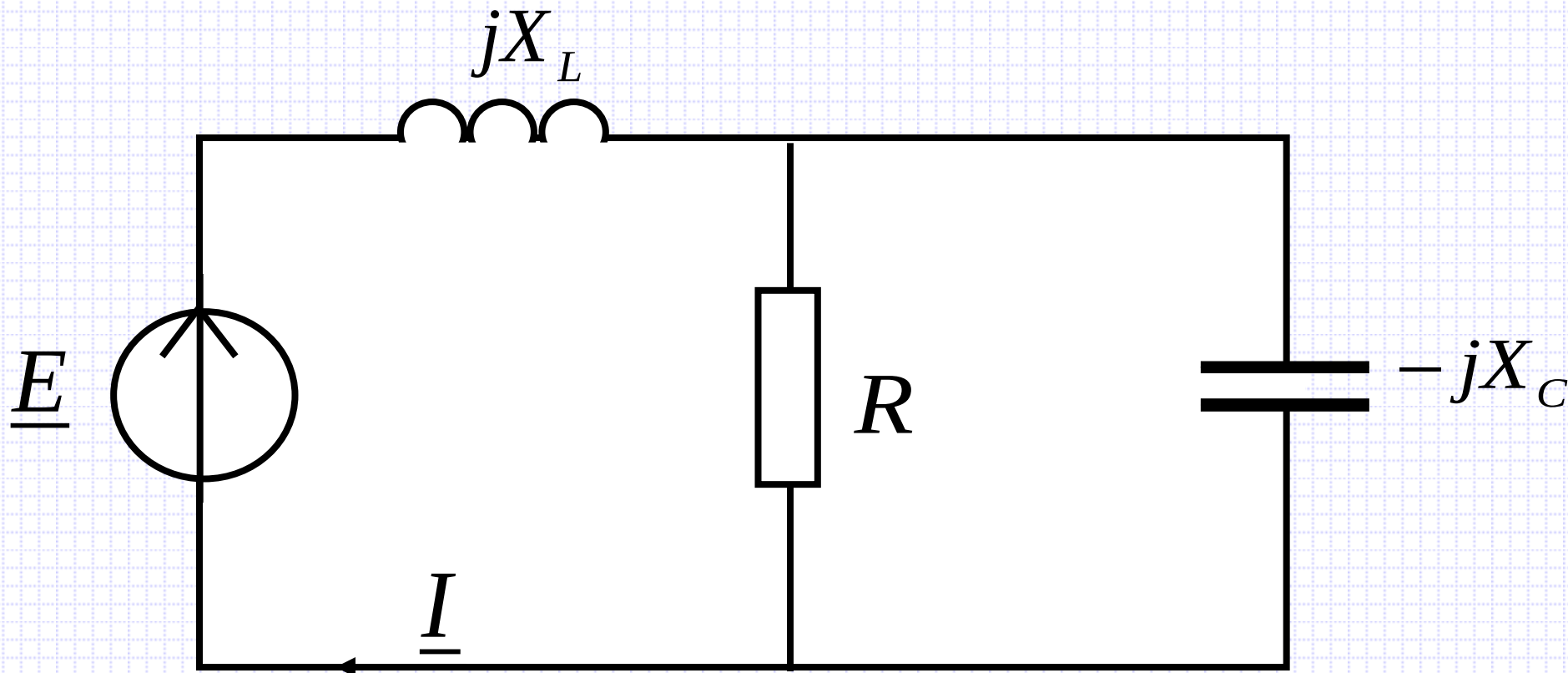
**Закон Ома в комплексной форме  
основан на символическом методе  
и справедлив для линейных цепей  
с гармоническими напряжениями  
и токами. Этот закон следует из  
физической взаимосвязи  
между током и напряжением  
отдельных элементов цепи**

**Закон Ома в комплексной форме  
для отдельных элементов аналогичен  
закону Ома для резистивного элемента  
на постоянном токе.**

**Для символического метода  
необходимо составить комплексную  
схему замещения с комплексными  
сопротивлениями и с комплексами  
действующих значений токов и  
напряжений**

# Например, комплексная схема

замещения цепи:



$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}}$$

**Где:**

$$\underline{Z} = R_{\Sigma} + jX_{\Sigma} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

**– эквивалентное комплексное  
сопротивление цепи (Ом)**

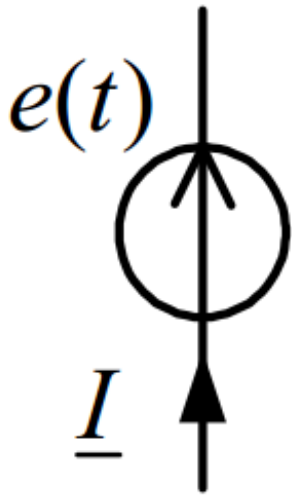
$$Z = \sqrt{R_{\Sigma}^2 + X_{\Sigma}^2}$$

**- модуль сопротивления (Ом)**

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}$$

**-аргумент (фаза)  
сопротивления (Град)**

## Идеальный источник ЭДС:



$$\underline{\underline{E}} = \text{const}$$

$$R_E = 0$$

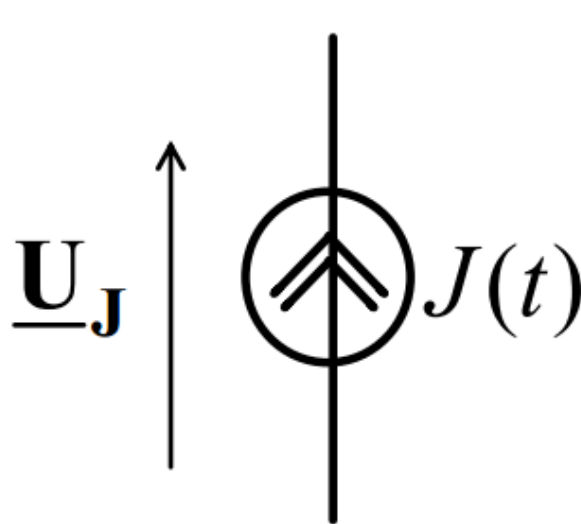
$$S = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{I}}^* = P + jQ \text{ ВА}$$

Активная  
мощность  
Вт

Реактивная  
мощность  
ВАр



## Идеальный источник тока:



$$\underline{J} = \text{const}$$

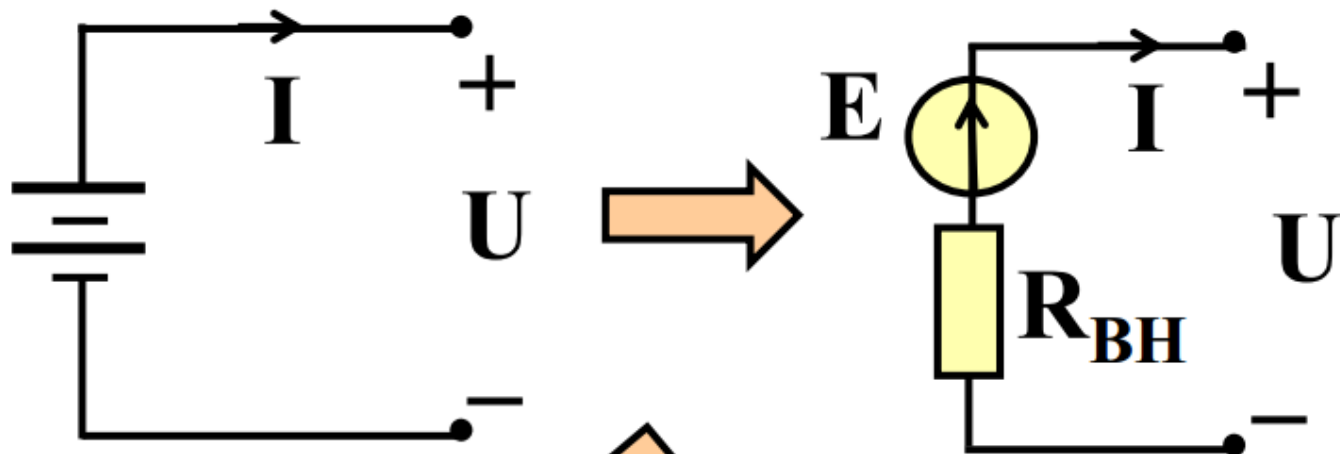
$$R_J = \infty$$

$$S = \underline{U}_J \underline{J}^* = P + jQ \text{ ВА}$$

Активная  
мощность  
Вт

Реактивная  
мощность  
ВАр

Например, схема замещения аккумулятора:



$$E = U_{XX} \quad (I=0)$$

$$J = I_{K3} = E / R_{BH} \quad (U=0)$$