

Лекция №2

Метод контурных токов.

Метод узловых потенциалов

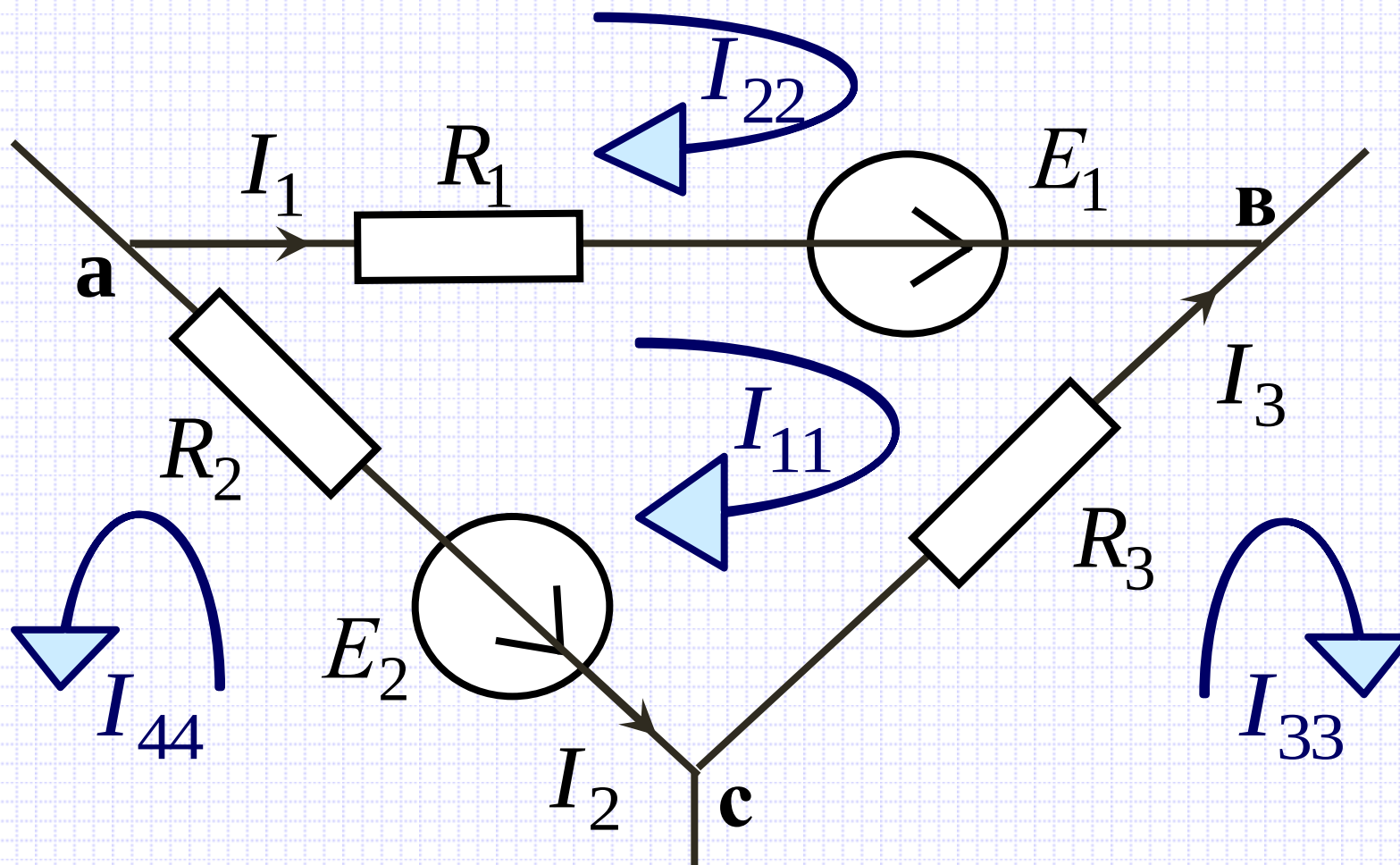
**Методы расчета
доказываются при
помощи законов
Ома и Кирхгофа**

Методы расчета рассмотрим для резистивных цепей с постоянными напряжениями и токами

Метод контурных токов

**В расчет вводятся
контурные токи — это фиктивные
токи, которые замыкаются
в независимых замкнутых контурах,
отличающихся друг от друга
наличием хотя бы одной новой
ветви.**

Например:



$I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{44}$ –
контурные токи

$$I_1 = I_{11} - I_{22}$$

$$I_2 = -I_{11} - I_{44} -$$

$$I_3 = I_{33} - I_{11}$$

**токи ветвей
контура**

По второму закону Кирхгофа:

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_{11} - R_1I_{22} - \\ - R_3I_{33} + R_2I_{44} = E_1 - E_2$$

$$\mathbf{R}_{\kappa\kappa}\mathbf{I}_{\kappa\kappa} + \sum \pm \mathbf{R}_{\kappa m}\mathbf{I}_{mm} = \mathbf{E}_{\kappa\kappa}$$

**R_{kk} — суммарное сопротивление
 k -контура**

I_{kk} — контурный ток k -контура

R_{kt} — общее сопротивление
между k -контуром и
 t -контуром

I_{tt} — соседний контурный ток
 t -контура

E_{kk} — суммарная ЭДС k -контура

Контурный ток рассматриваемого контура умножается на сумму сопротивлений своего контура, причем перед этим произведением ставится знак “+” .

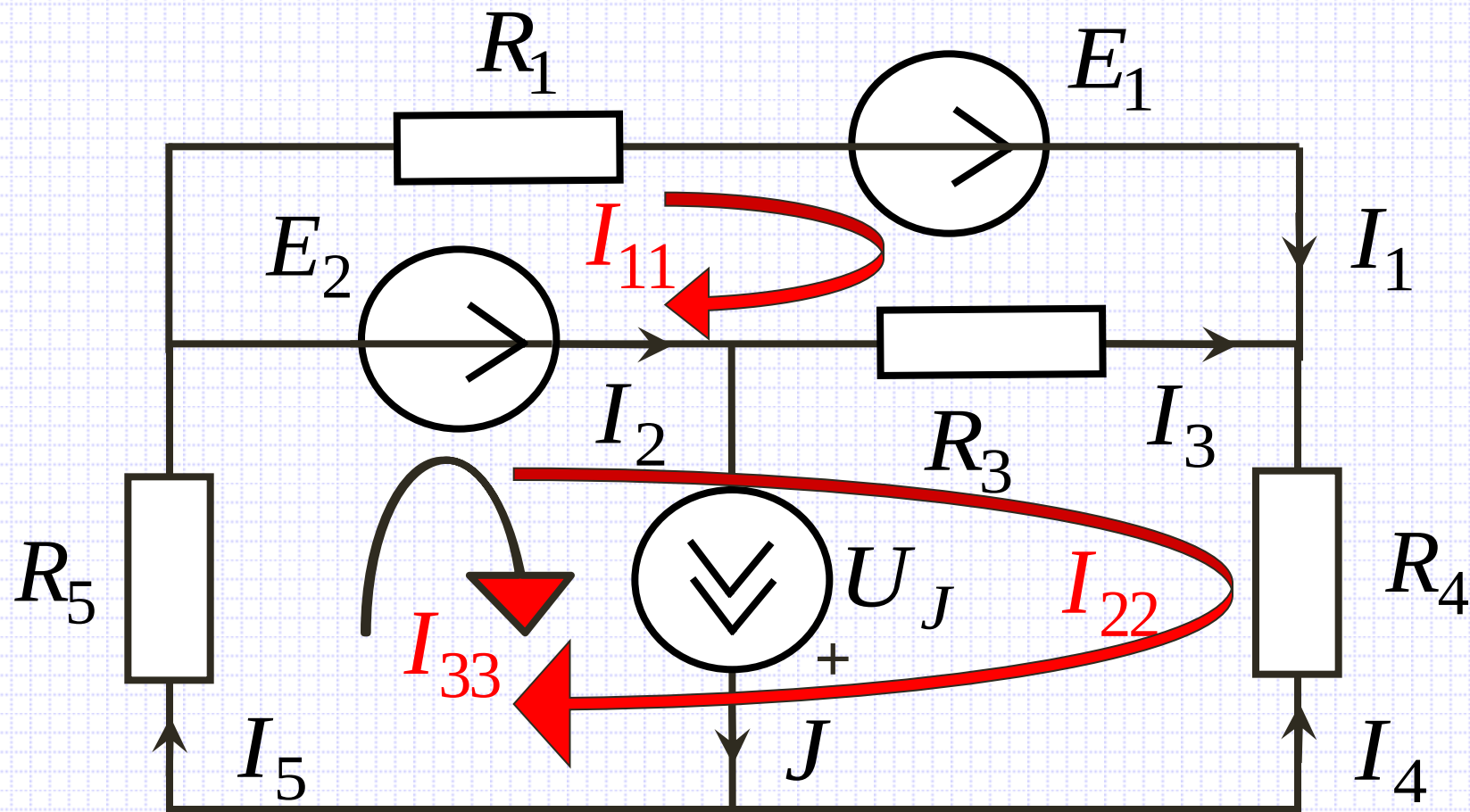
**Соседний контурный ток
умножается на общее сопротивление
между соседним и рассматриваемым
контурными токами, причем
перед этим произведением ставится
знак “+”, если направления
этих контурных токов в общем
сопротивлении совпадают между
собой и ставится знак “-”,
если направления их не совпадают.**

В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма ЭДС рассматриваемого контура, причем со знаком “+” берутся те ЭДС, направления которых совпадают с направлением рассматриваемого контурного тока.

**Для контура с источником тока
контурное уравнение не составляется,
так как контурный ток этого контура
известен и равен току источника
тока, причем через источник тока
должен проходить только
один контурный ток.**

Сколько независимых замкнутых контуров в схеме, столько и должно быть контурных токов.

Пример



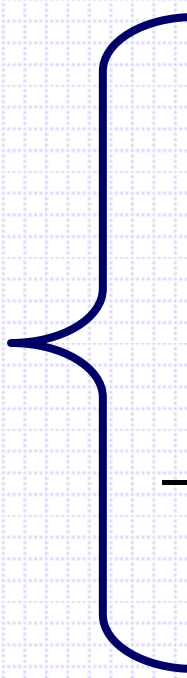
Дано:

**$E_1=100\text{ В}, E_2=150\text{ В}, J=2\text{ А}, R_1=100\text{ Ом},$
 $R_3=150\text{ Ом}, R_4=50\text{ Ом}, R_5=90\text{ Ом}.$**

Определить:

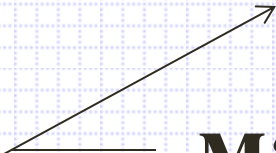
***Токи ветвей и напряжение на источнике
тока.***

$$\mathbf{I}_{33} = \mathbf{J}$$


$$(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3)\mathbf{I}_{11} - \mathbf{R}_3\mathbf{I}_{22} - 0 \cdot \mathbf{I}_{33} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$$

$$-\mathbf{R}_3\mathbf{I}_{11} + (\mathbf{R}_5 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4)\mathbf{I}_{22} + \mathbf{R}_5\mathbf{I}_{33} = \mathbf{E}_2$$

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_3) & (-R_3) \\ (-R_3) & (R_5 + R_3 + R_4) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ E_2 - R_5 J \end{bmatrix}$$


**матрица симметрична
относительно главной диагонали**

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{11}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{22} + \mathbf{I}_{33} - \mathbf{I}_{11}$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_{22} - \mathbf{I}_{11}$$

$$I_4 = -I_{22}$$

$$I_5 = I_{22} + I_{33}$$

$$U_J = R_4 I_4 - R_3 I_3$$

- по 2 закону Кирхгофа

Ответ:

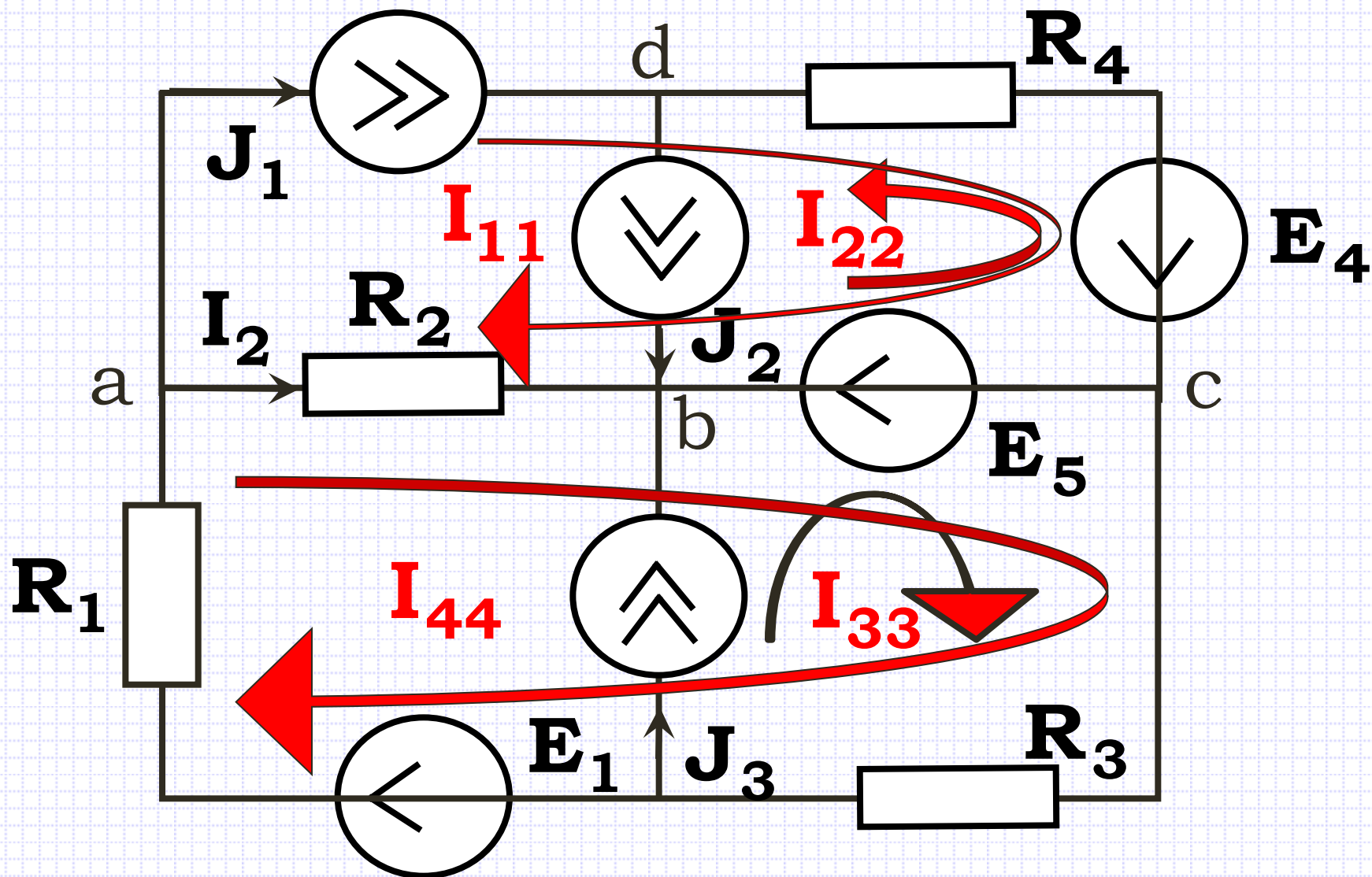
$$I_{11} = -0.38 \text{ A}, I_{22} = -0.3 \text{ A},$$

$$I_1 = -0.38 \text{ A}, I_2 = 2.08 \text{ A},$$

$$I_3 = 0.08 \text{ A}, I_4 = 0.3 \text{ A},$$

$$I_5 = 1.7 \text{ A}, U_j = 3 \text{ B}.$$

Пример 2



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_{11} = \mathbf{J}_1 \quad \mathbf{I}_{22} = \mathbf{J}_2 \quad \mathbf{I}_{33} = \mathbf{J}_3 \\ (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3)\mathbf{I}_{44} - \mathbf{R}_2\mathbf{I}_{11} + 0 \cdot \mathbf{I}_{22} + \\ + \mathbf{R}_3\mathbf{I}_{33} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_5 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{I}_{44} = \frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_5 + \mathbf{J}_1 \mathbf{R}_2 - \mathbf{J}_3 \mathbf{R}_3}{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{44} - \mathbf{I}_{11} = \mathbf{I}_{44} - \mathbf{J}_1$$

**Таким образом, по методу
контурных токов
необходимо решить значительно
меньше уравнений по
сравнению с методом
законов Кирхгофа.**

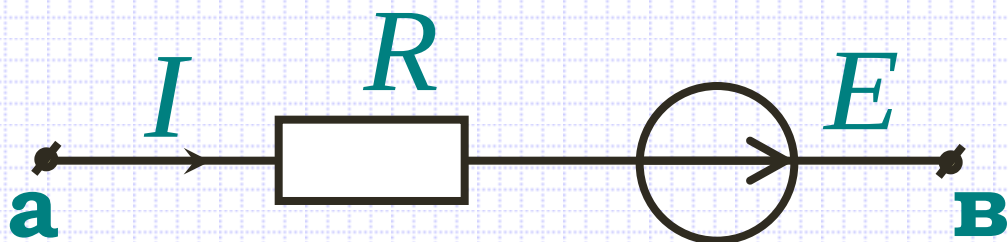
Метод

узловых потенциалов

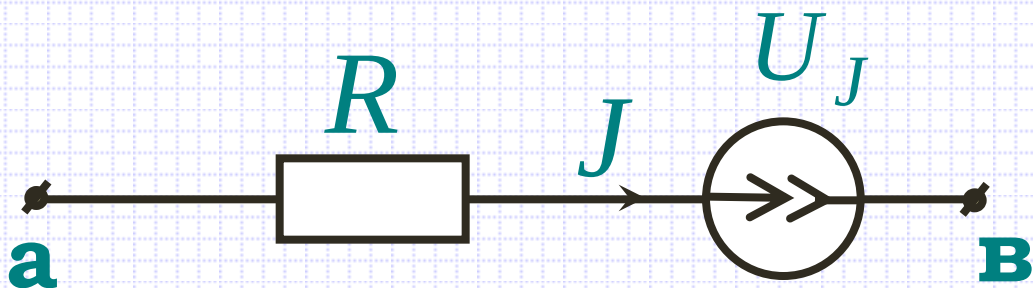
**Метод узловых потенциалов
используется для расчета сложных
схем замещения**

**Расчетные уравнения данного метода
могут быть доказаны при помощи
законов Кирхгофа и обобщенного
закона Ома**

Обобщенный закон Ома

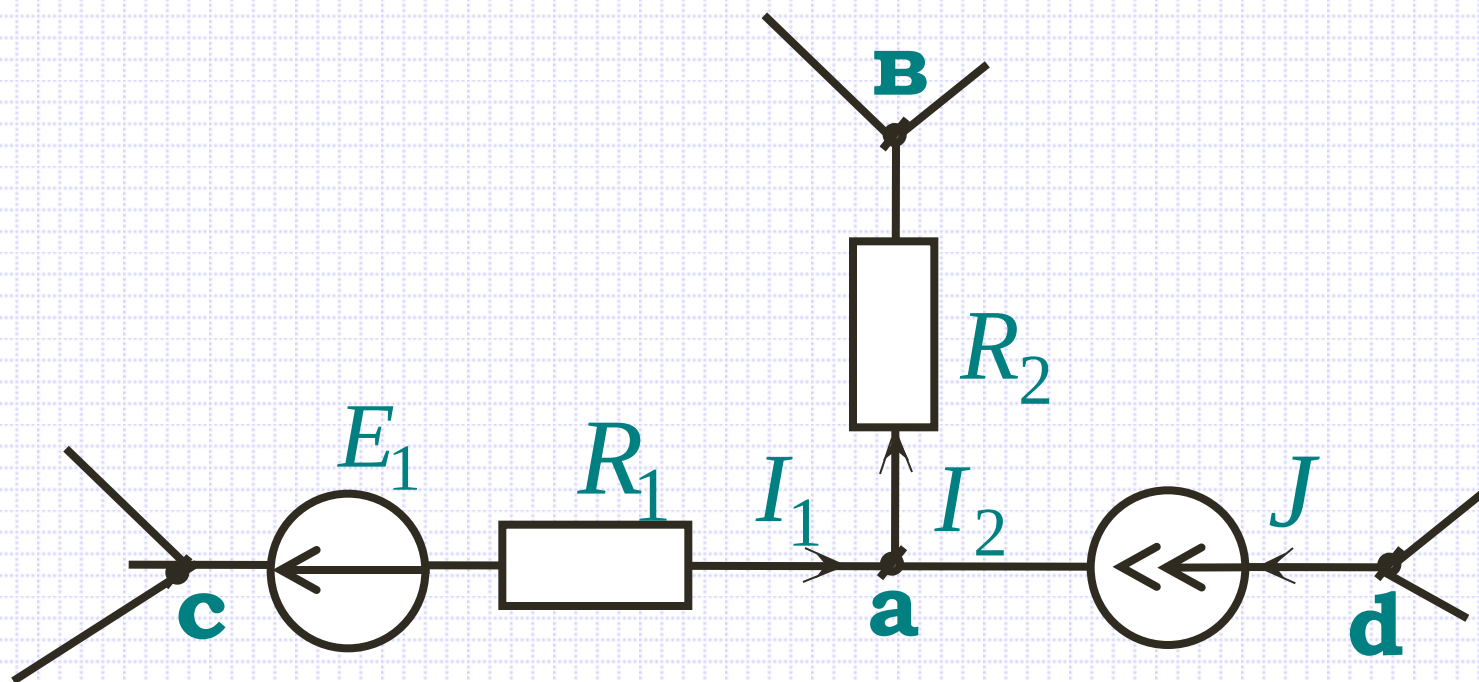


$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E}{R}$$



$$U_J = \varphi_b - \varphi_a + RJ$$

**Получим расчетное уравнение
метода узловых потенциалов
для узла “а” некоторой схемы:**



По обобщенному закону Ома

$$I_1 = (\varphi_c - \varphi_a - E_1) \cdot g_1$$

$$I_2 = (\varphi_a - \varphi_e) \cdot g_2$$

где $g_1 = \frac{1}{R_1}$ $g_2 = \frac{1}{R_2}$

- проводимости ветвей

Для узла а:

$$(g_1 + g_2) \cdot \varphi_a - g_2 \varphi_v - g_1 \varphi_c = -E_1 g_1 + J$$

Т.е. в общем виде для к- узла:

$$g_{kk} \cdot \varphi_k - \sum g_{mk} \cdot \varphi_m = I_k^{(y)}$$

g_{kk} — узловая проводимость к - узла;

φ_k — потенциал к - узла;

φ_m — потенциал соседнего m - узла;

**g_{tk} — проводимость ветви,
соединяющей k и t узлы;**

$$I_k^{(y)} = \sum \pm E_q g_q + \sum \pm J_q$$

- узловой ток k - узла;

Таким образом, потенциал рассматриваемого к-узла умножается на сумму проводимостей ветвей подходящих к этому узлу, причем перед этим произведением всегда ставится знак “+” и проводимость ветви с источником тока равна нулю.

**Потенциал φ_m соседнего
m-узла умножается на проводимость
ветви, соединяющей
рассматриваемый k-узел с m-узлом,
причем перед этим произведением
всегда ставится знак “-”.**

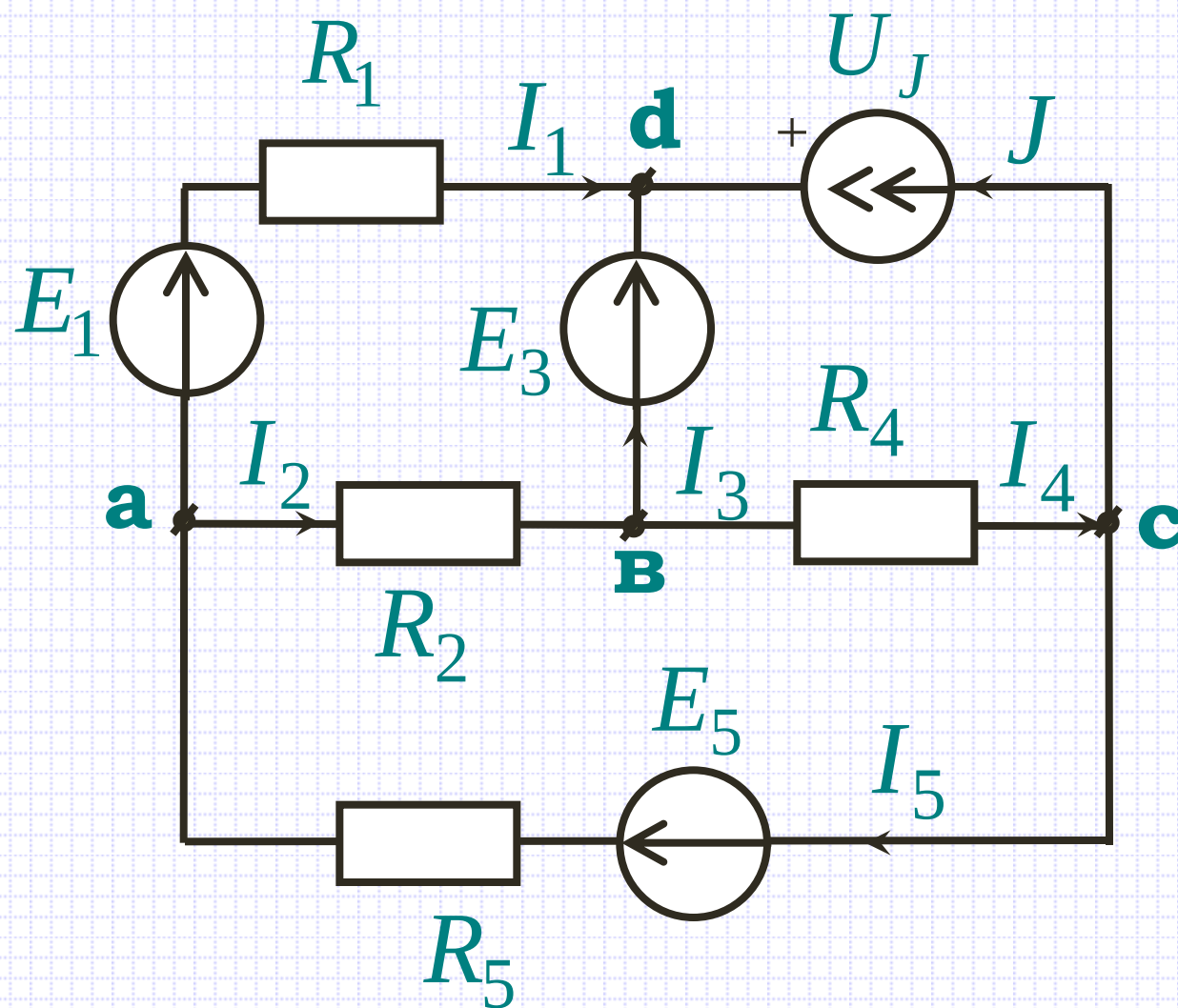
**В правой части уравнения
записывается узловой ток
рассматриваемого k -узла, равный
алгебраической сумме
подходящих к этому узлу токов
источников тока и произведений
подходящих к этому узлу
ЭДС на проводимости своих
ветвей.**

**В узловом токе со знаком “+”
берутся те слагаемые, у которых
источники тока и ЭДС
направлены в рассматриваемый
к-узел.**

**Потенциал одного из узлов
принимается равным нулю,
причем за такой узел принимается
узел, соединенный с корпусом
или “землей”, или один из узлов,
к которому подходит ветвь с
нулевым сопротивлением и ЭДС
(особая ветвь).**

**Таким образом, для схемы с
 n_y узлами по методу
узловых потенциалов составляется
система, содержащая
не более $n_1 = n_y - 1$ уравнений,
из решения которых определяются
потенциалы узлов, а затем
по обобщенному закону Ома
рассчитываются токи и напряжения
в ветвях схемы.**

Пример



Дано:

$$E_1=100 \text{ В}, E_3=150 \text{ В}, E_5=50 \text{ В}, J=4 \text{ А},$$

$$R_1=50 \text{ Ом}, R_2=150 \text{ Ом}, R_4=75 \text{ Ом}, R_5=80 \text{ Ом}.$$

Определить:

Токи ветвей и напряжение на источнике тока.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\boldsymbol{e}} = 0 \qquad \varphi_{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{E}_3 \\ (\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_5) \cdot \varphi_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{g}_1 \varphi_{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{g}_5 \varphi_{\boldsymbol{c}} = -\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{E}_5 \boldsymbol{g}_5 \\ -\boldsymbol{g}_5 \varphi_{\boldsymbol{a}} + (\boldsymbol{g}_4 + \boldsymbol{g}_5) \cdot \varphi_{\boldsymbol{c}} = -\boldsymbol{E}_5 \boldsymbol{g}_5 - \boldsymbol{J} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} (\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_5) & (-\boldsymbol{g}_5) \\ (-\boldsymbol{g}_5) & (\boldsymbol{g}_4 + \boldsymbol{g}_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\boldsymbol{a}} \\ \varphi_{\boldsymbol{c}} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{E}_5 \boldsymbol{g}_5 + \boldsymbol{E}_3 \boldsymbol{g}_1 \\ -\boldsymbol{E}_5 \boldsymbol{g}_5 - \boldsymbol{J} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{I}_1 = (\varphi_{\boldsymbol{a}} - \varphi_{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{E}_1) \cdot \boldsymbol{g}_1$$

$$\boldsymbol{I}_2 = (\varphi_{\boldsymbol{a}} - \varphi_{\boldsymbol{e}}) \cdot \boldsymbol{g}_2$$

$$\boldsymbol{I}_3 = -\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{J} \qquad \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{J}} = \varphi_{\boldsymbol{d}} - \varphi_{\boldsymbol{c}}$$

$$\boldsymbol{I}_4 = (\varphi_{\boldsymbol{e}} - \varphi_{\boldsymbol{c}}) \cdot \boldsymbol{g}_4$$

$$\boldsymbol{I}_5 = (\varphi_{\boldsymbol{c}} - \varphi_{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{E}_5) \cdot \boldsymbol{g}_5$$

Ответ:

$$\varphi_1 = -18.5 \text{ В}, \varphi_2 = -188 \text{ В},$$

$$I_1 = -1.37 \text{ А}, I_2 = -0.12 \text{ А},$$

$$I_3 = -2.63 \text{ А}, I_4 = 2.51 \text{ А},$$

$$I_5 = -1.49 \text{ А}, U_j = 338 \text{ В}.$$