

Лекция №8

Негармонические периодические напряжения и токи в линейных цепях

© 2020 Томский политехнический университет, ОЭЭ ИШЭ

Лектор: к.т.н., доцент Васильева Ольга Владимировна

Негармонические периодические напряжения и токи

**Негармонические периодические
напряжения и токи как функции
времени $f(t)$ с периодом T могут
быть представлены в виде
тригонометрического ряда Фурье**

Ряд Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} B_{\kappa} \sin \kappa \omega t + \sum_{\kappa=1}^{\infty} C_{\kappa} \cos \kappa \omega t =$$

$$= A_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{m\kappa} \sin(\kappa \omega t + \Psi_{\kappa})$$

Где

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- постоянная составляющая

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k \omega t) dt$$

- амплитуда синусной
составляющей k - гармоники

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k \omega t) dt$$

- амплитуда косинусной
составляющей k - гармоники

$$\mathbf{A}_{m\kappa} = \sqrt{\mathbf{B}_{\kappa}^2 + \mathbf{C}_{\kappa}^2}$$

- амплитудное значение

κ - гармоники

$$\Psi_k = (\pm 180^\circ) + \arctg \frac{C_k}{B_k}$$

- начальная фаза k –гармоники,
причем 180 градусов
учитывается при $B_k < 0$

$$k = 1, 2, 3 \dots \infty$$

- порядковый номер гармоники

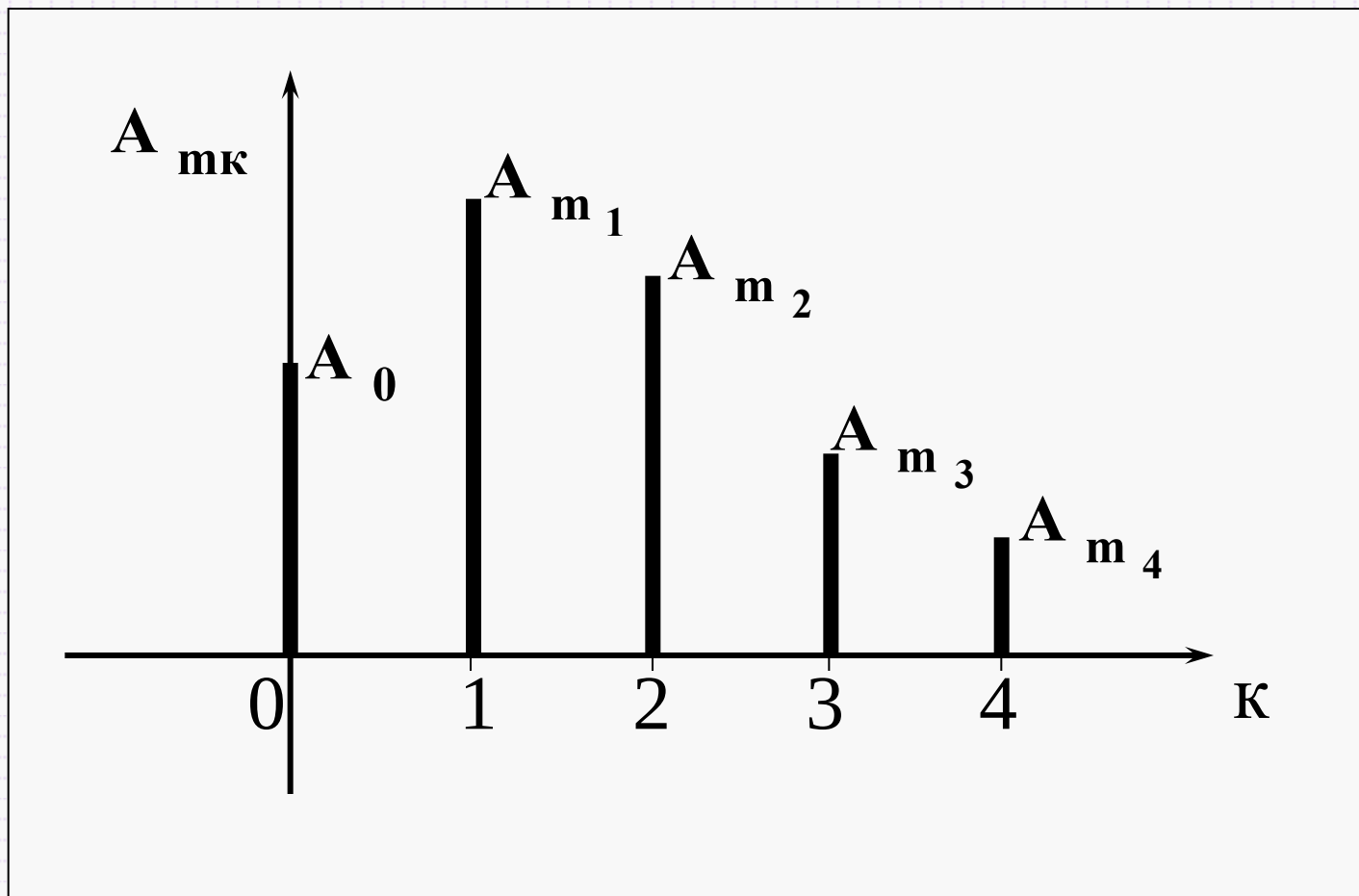
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \frac{1}{\text{с}}$$

- угловая частота *первой*
(основной) гармоники

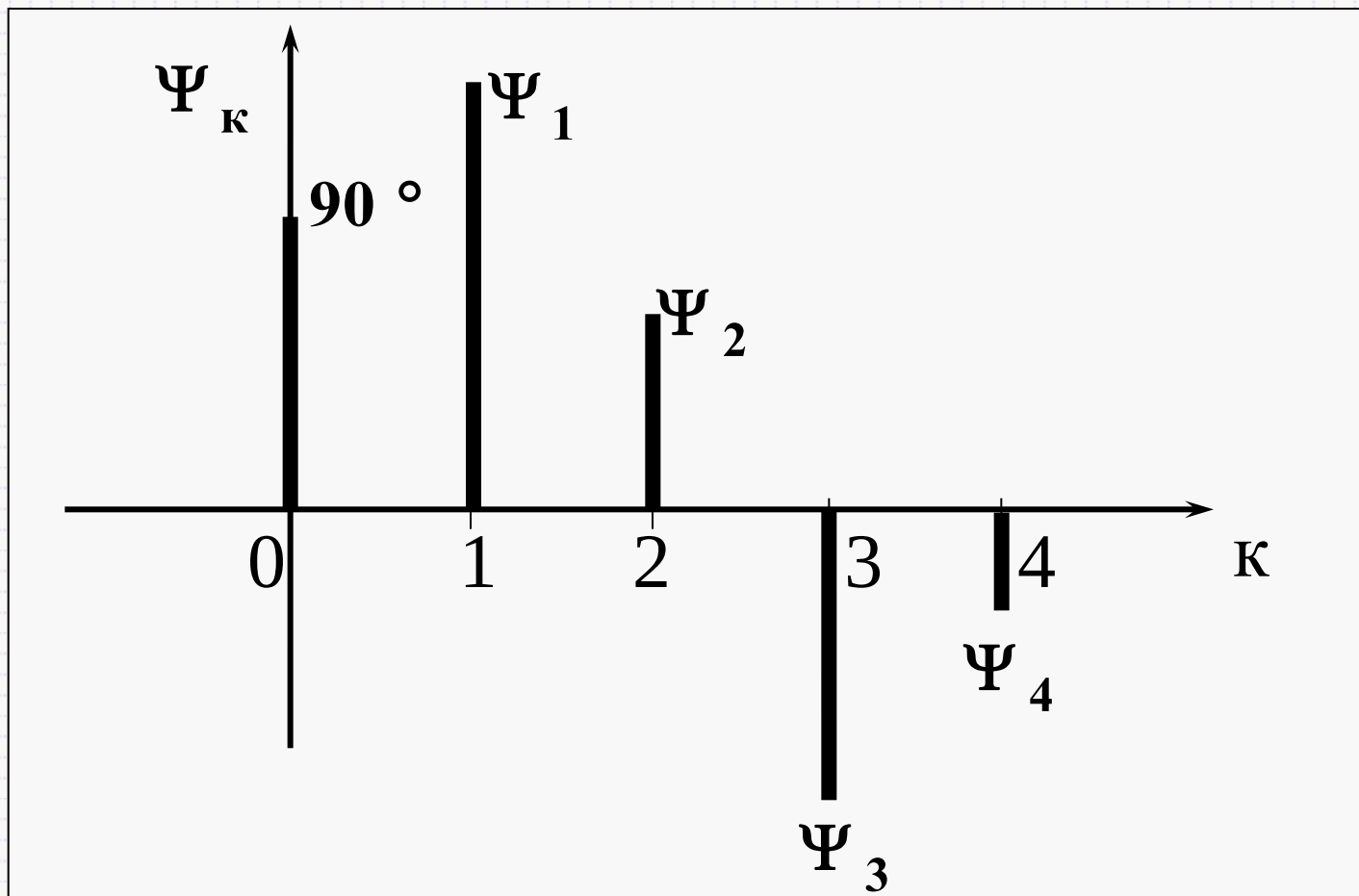
**Гармонический состав $f(t)$
можно задать при помощи
дискретных спектров амплитуд
и фаз, причем разложение в ряд
Фурье $f(t)$ может
осуществляться аналитически,
приближенно по специальным
формулам и при помощи ЭВМ**

**После разложения $f(t)$ в ряд
Фурье учитываются постоянная
составляющая и несколько
наибольших по амплитуде
гармоник, а остальные
гармоники отбрасываются**

а) спектр амплитуд



б) спектр фаз



Пример

$$u(t) = 1 + 2 \sin \omega t + 1 \sin(2\omega t + 90^\circ), \text{ В}$$

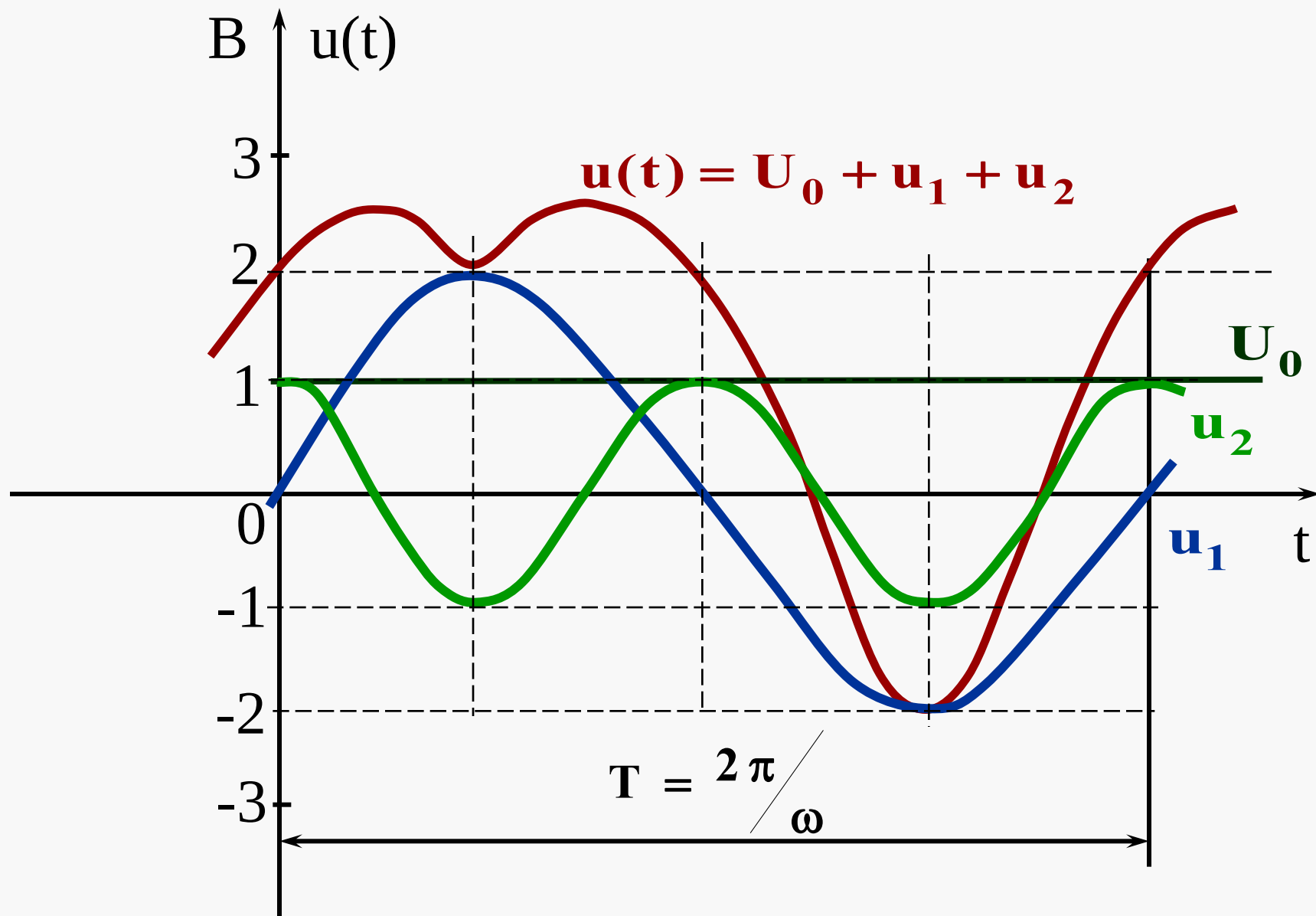
где $U_0 = 1 \text{ В}$

$$\Psi_1 = 0$$

$$U_{m_1} = 2 \text{ В}$$

$$\Psi_2 = 90^\circ$$

$$U_{m_2} = 1 \text{ В}$$



Значения негармонических периодических напряжений и токов

Представленных в виде

$$f(t) = A_0 + A_{m1} \sin(\omega t + \Psi_1) + \\ + A_{m2} \sin(2\omega t + \Psi_2) + \dots$$

1. Среднее за период значение

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- ЭТО ПОСТОЯННАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ

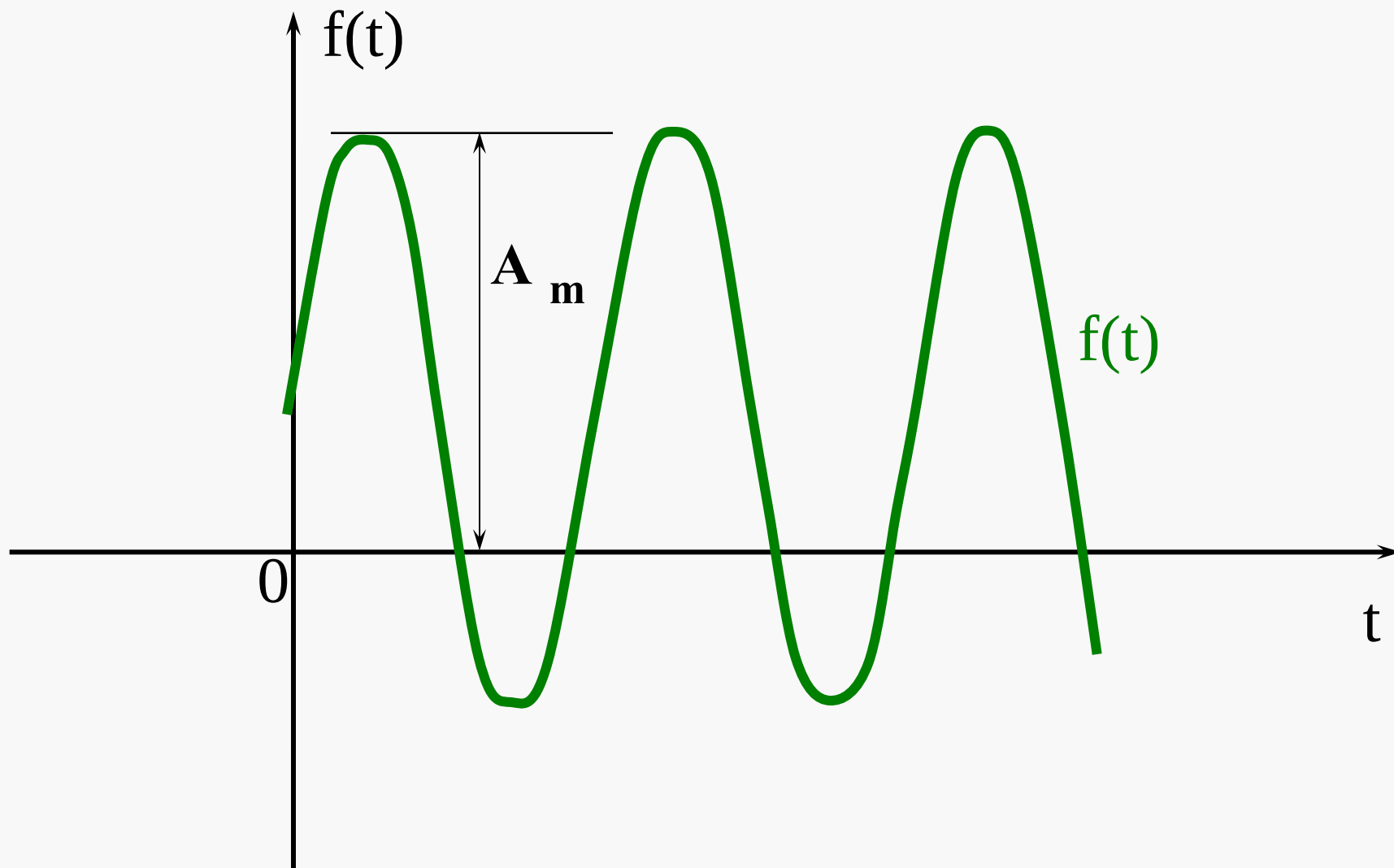
2. Среднее по модулю значение

$$A_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt$$

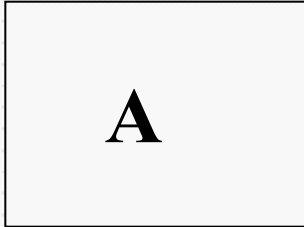
3. Максимальное значение

$$A_m$$

- это наибольшее по модулю значение $f(t)$



4. Действующее значение



A

- это среднеквадратичное
значение $f(t)$ за период T

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}^2(t) dt} = \sqrt{\mathbf{A}_0^2 + \frac{\mathbf{A}_{m1}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}_{m2}^2}{2} + \dots} = \\
 &= \sqrt{\mathbf{A}_0^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \dots}
 \end{aligned}$$

Где

$$A_1 = \frac{A_{m1}}{\sqrt{2}}, \quad A_2 = \frac{A_{m2}}{\sqrt{2}} \dots$$

- действующие значения
отдельных гармоник

Например:

$$i(t) = 6 + 8\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) + 7.07 \sin(3\omega t - 60^\circ), \text{ A}$$

$$I = \sqrt{6^2 + 8^2 + \frac{7.07^2}{2}} = 11.18 \text{ A}$$

$$\mathbf{u(t) = 3 + 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ), B}$$

$$\mathbf{U = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 B}$$

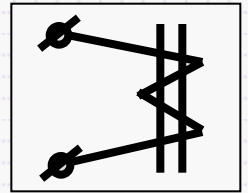
Действующие значения тока (I)
и напряжения (U)
характеризуют тепловую
мощность в R:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \text{ Вт}$$

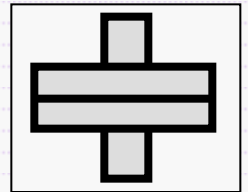
Измерения величин периодических напряжений и токов

1. Действующие значения
могут быть измерены
вольтметрами и
амперметрами следующих
систем:

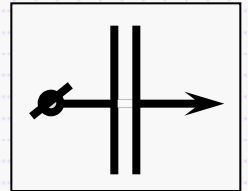
- Электромагнитной



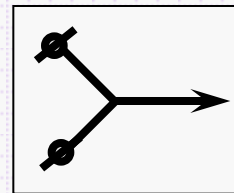
- Электродинамической



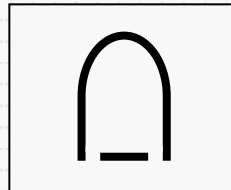
- Электростатической



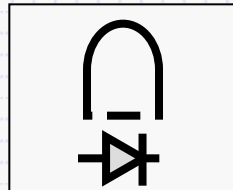
- Тепловой



**2. Постоянные
составляющие** измеряются
**вольтметрами и
амперметрами**
магнитоэлектрической
системы:



3. Средние по модулю значения напряжений и токов фиксируются при помощи **вольтметров** и **амперметров** магнитоэлектрической системы с выпрямителем:



**4. Максимальные и
мгновенные значения
(функции времени)
напряжений и токов
измеряются при помощи
осциллографов**

Коэффициенты негармонических периодических напряжений и токов

**Коэффициенты периодических
напряжений и токов
используются для оценки
отличия их от
гармонических функций**

1. Коэффициент формы

$$K_{\phi} = \frac{A}{A_{cp}}$$

для синусоиды $K_{\phi} = 1,11$

2. Коэффициент амплитуды

$$K_a = \frac{A_m}{A}$$

для синусоиды $K_a = \sqrt{2} = 1,41$

3. Коэффициент искажения

$$K_{\text{и}} = \frac{A_1}{A} = \frac{A_{m1}}{\sqrt{2}A}$$

для синусоиды $K_{\text{и}} = 1$

4. Коэффициент гармоник ($A_0 = 0$)

$$K_{\Gamma} = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots}}{A_1}$$

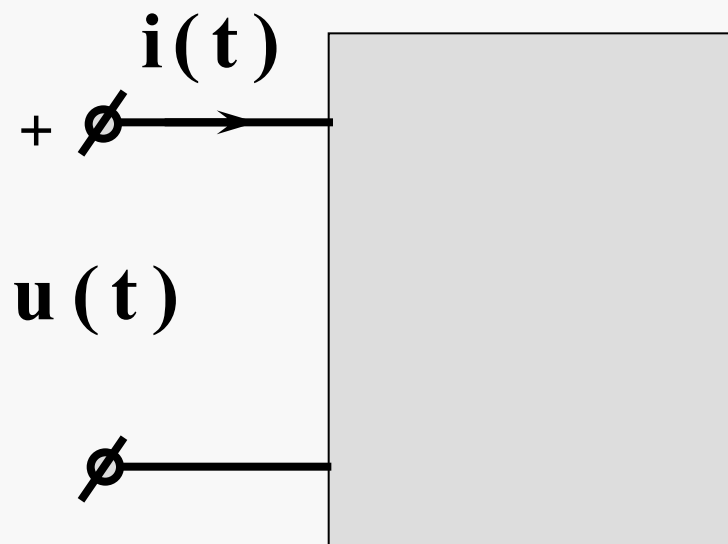
для синусоиды $K_{\Gamma} = 0$

Для практически
синусоидальных токов и
напряжений:

$$K_{\Gamma} \leq 0,05$$

Мощность при периодических напряжениях и токах

Рассмотрим двухполюсник:



Напряжение и ток двухполюсника

$$u(t) = U_0 + \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \\ + \sqrt{2}U_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \beta_1) + \\ + \sqrt{2}I_2 \sin(2\omega t + \beta_2) + \dots$$

1. Активная мощность P

характеризует тепловую энергию

$$W = P \cdot t = P \cdot n \cdot T, \text{ Дж}$$

где $n = 1, 2, 3 \dots$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

При этом

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots = U_0 I_0 + \\ + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots, \text{ Вт}$$

где

$$\varphi_1 = \alpha_1 - \beta_1$$
$$\varphi_2 = \alpha_2 - \beta_2$$

2. Реактивная мощность Q (условная величина):

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots =$$

$$= U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots, \text{ вар}$$

3. Полная мощность S (условная величина):

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \times \\ \times \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}, \text{ ВА}$$

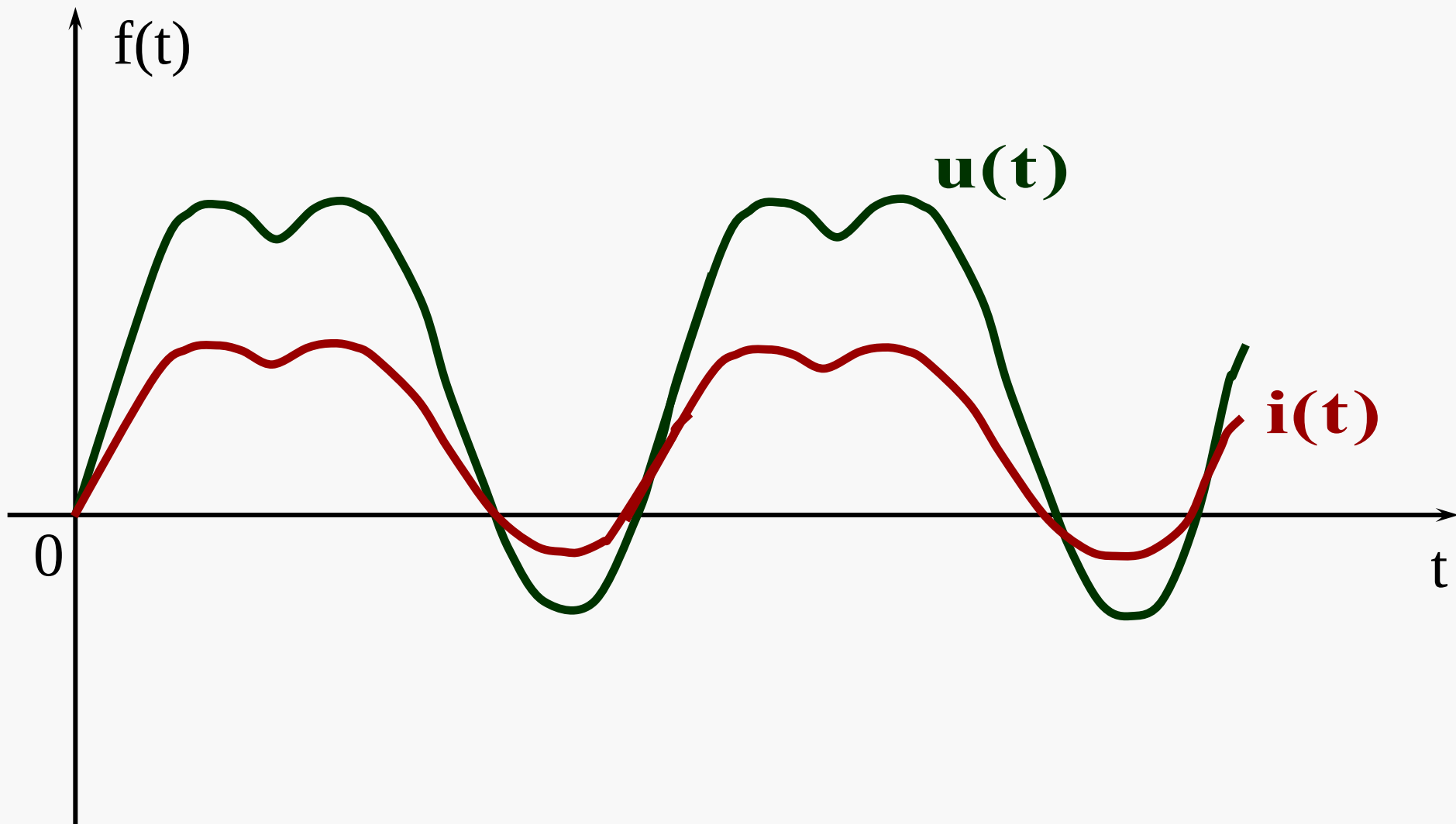
Причем
в большинстве случаев для
негармонических функций

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Если

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

то формы $u(t)$ и $i(t)$
одинаковы



4. Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \leq 1$$

$$\text{где } \varphi = \pm \arccos \left(\frac{P}{S} \right)$$

Причем

при $Q > 0$ $\varphi > 0$

при $Q < 0$ $\varphi < 0$

Эквивалентные синусоиды

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha_1)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi)$$

где: $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$

Расчет линейных цепей при периодических напряжениях и токах

После разложения периодических ЭДС и токов источников тока в ряд Фурье линейную цепь можно рассчитывать методом наложения, т.е. рассчитывать постоянную составляющую и каждую гармонику напряжений и токов по отдельности

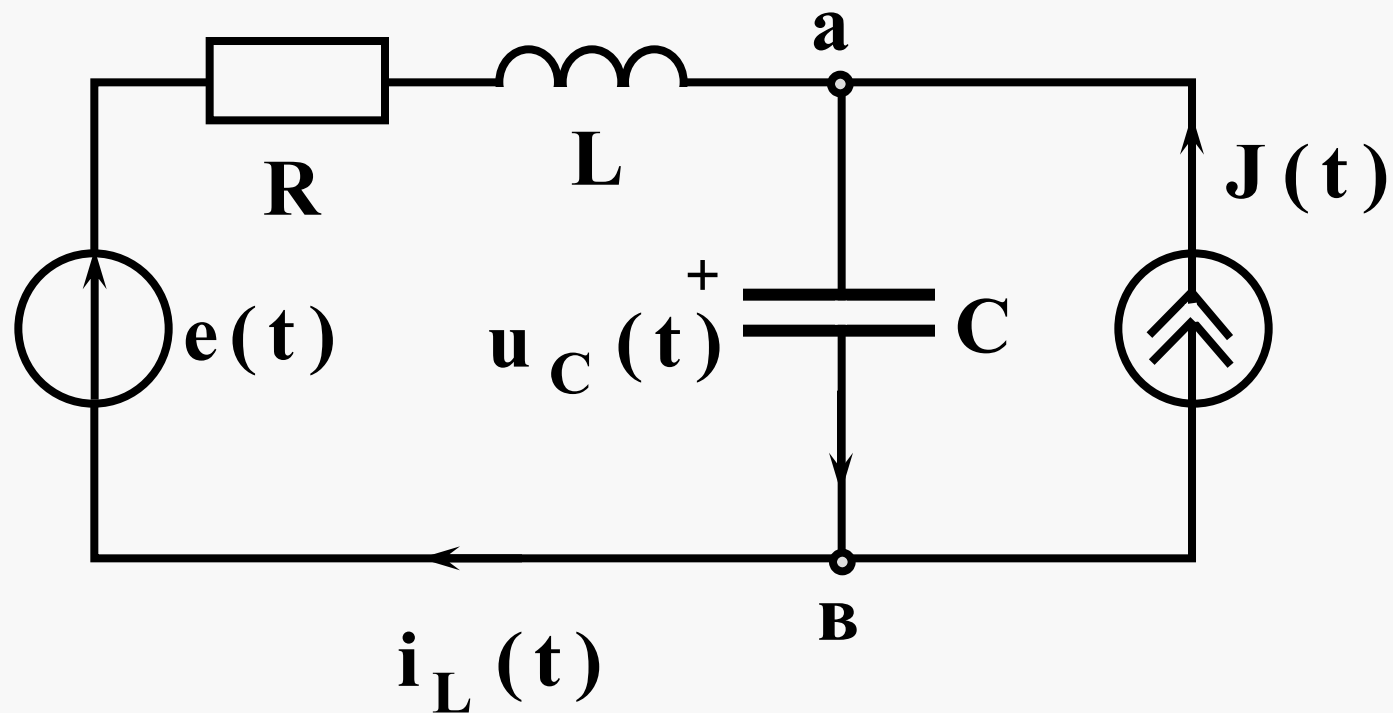
При этом $R=\text{const}$ и:

$$X_L^{(\kappa)} = \kappa X_L = \kappa \omega L$$

$$X_C^{(\kappa)} = \frac{X_C}{\kappa} = \frac{1}{\kappa \omega C}$$

$$X_M^{(\kappa)} = \kappa X_M = \kappa \omega M$$

Пример



Дано:

$$e(t) = E_0 + \sqrt{2}E_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

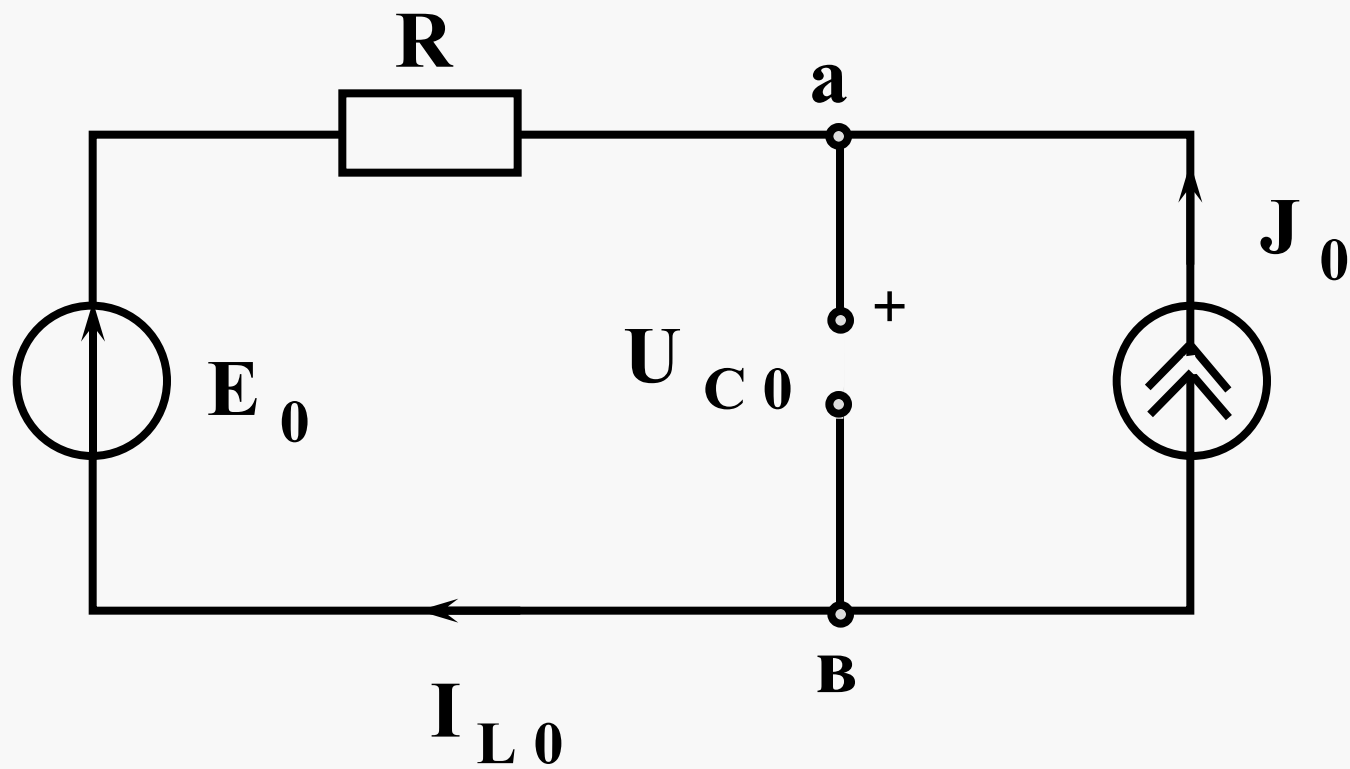
$$J(t) = J_0 + \sqrt{2}J_2 \sin(2\omega t + \beta_2)$$

$$\omega, R, L, C$$

Определить:

$$i_L(t) \quad , \quad u_C(t)$$

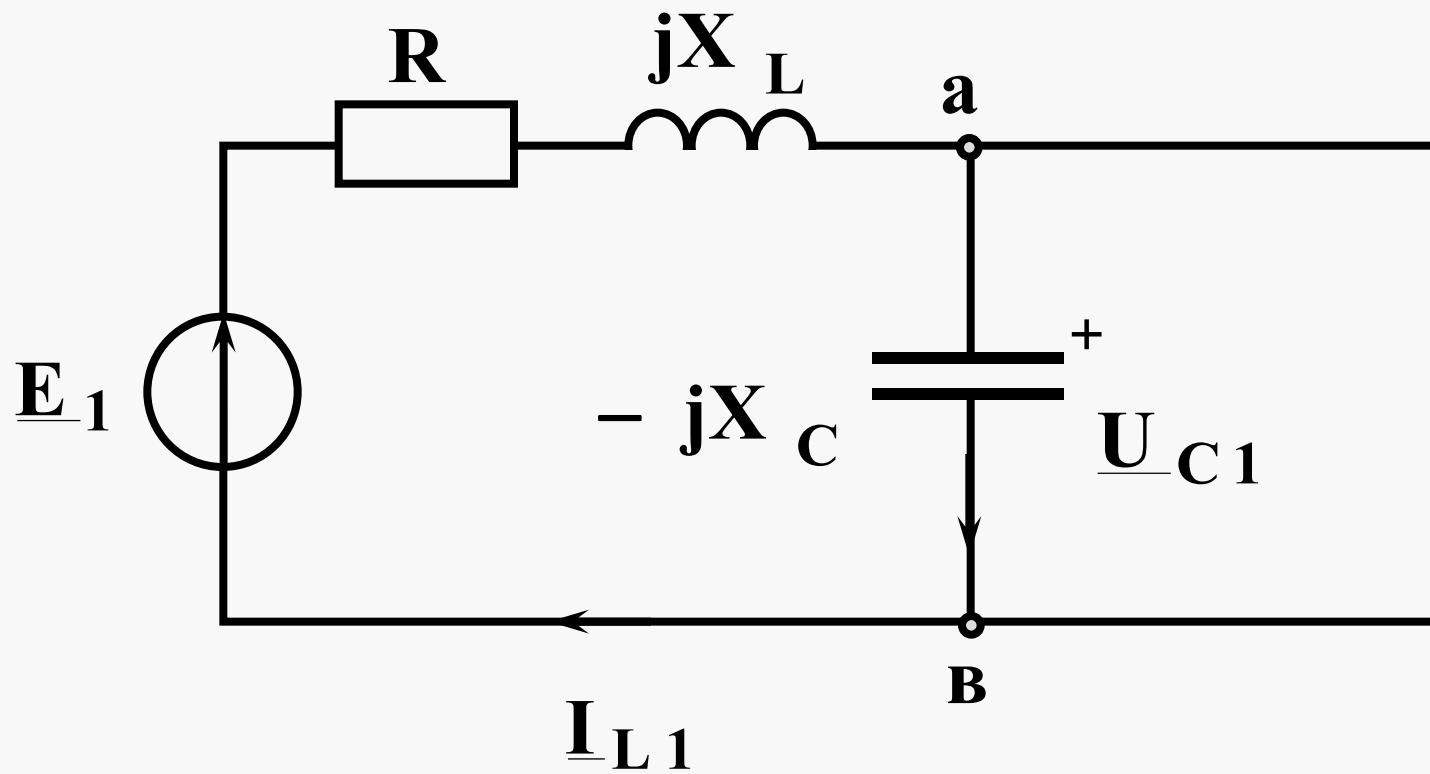
1. Расчет постоянных составляющих ($k=0$)



$$\mathbf{I}_{L0} = -\mathbf{J}_0$$

$$\mathbf{U}_{C0} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{I}_{L0}\mathbf{R} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{J}_0\mathbf{R}$$

2. Расчет первых гармоник ($\kappa=1$)

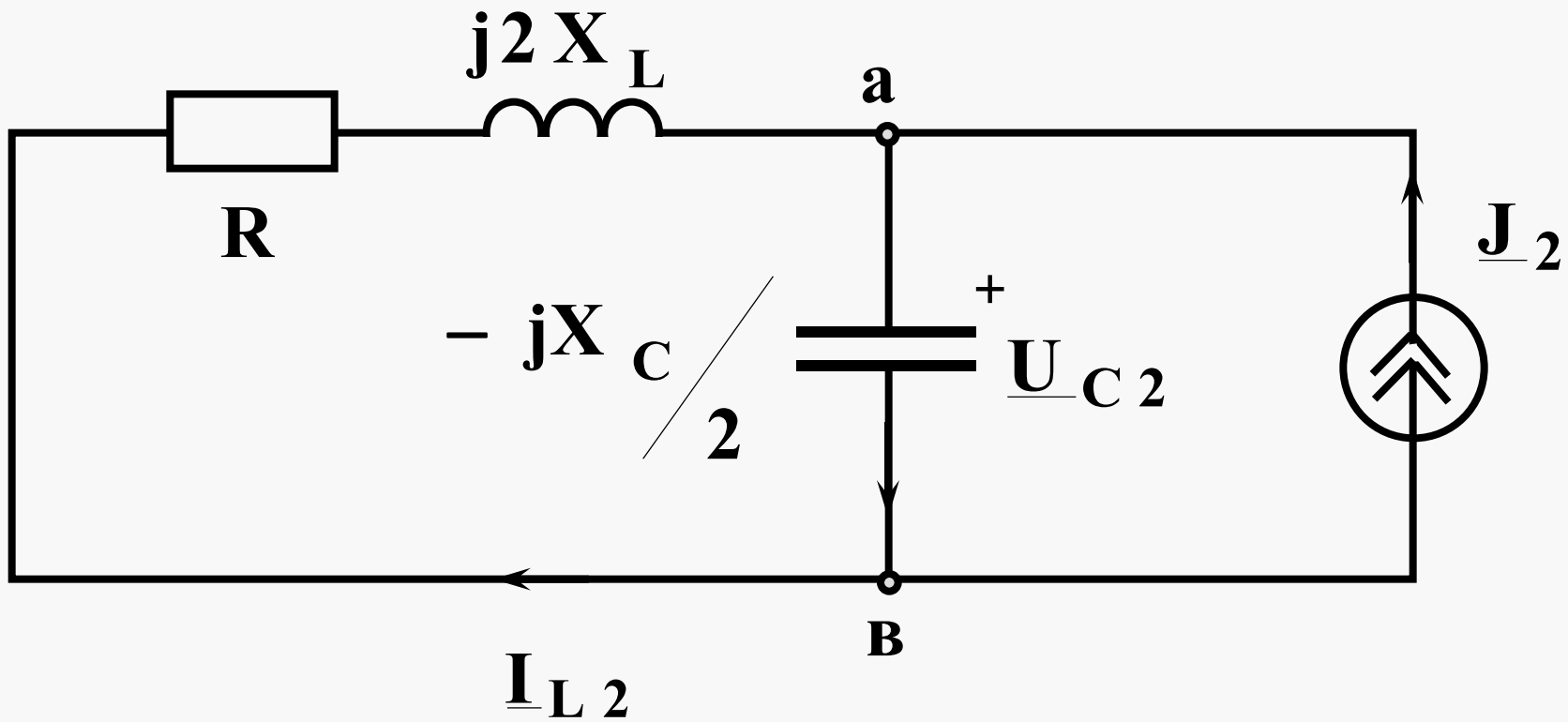


$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_1 e^{j\alpha_1}; \quad \mathbf{X}_C = \frac{1}{\omega C}; \quad \mathbf{X}_L = \omega L$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{L1} = \frac{\underline{\mathbf{E}}_1}{\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L - j\mathbf{X}_C} = \mathbf{I}_{L1} e^{j\Theta_1}, \text{ A}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{C1} = \underline{\mathbf{I}}_{L1} (-j\mathbf{X}_C) = \mathbf{U}_{C1} e^{j\lambda_1}, \text{ B}$$

3. Расчет вторых гармоник ($\kappa=2$)



$$\underline{\mathbf{J}}_2 = \mathbf{J}_2 e^{j\beta_2}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{L2} = -\underline{\mathbf{J}}_2 \frac{-j\mathbf{X}_C/2}{\mathbf{R} + j2\mathbf{X}_L - j\mathbf{X}_C/2} = \mathbf{I}_{L2} e^{j\Theta_2}, \mathbf{A}$$

$$\underline{U}_{C_2} = \underline{J}_2 \frac{(\mathbf{R} + j2X_L) \left(\frac{-jX_C}{2} \right)}{\mathbf{R} + j2X_L - \frac{jX_C}{2}} =$$

$$= U_{C_2} e^{j\lambda_2}, \mathbf{B}$$

Окончательный результат

$$\mathbf{i}_L(t) = -J_0 + \sqrt{2}I_{L1} \sin(\omega t + \Theta_1) + \\ + \sqrt{2}I_{L2} \sin(2\omega t + \Theta_2), \text{ A}$$

$$\mathbf{u}_C(t) = U_{C0} + \sqrt{2}U_{C1} \sin(\omega t + \lambda_1) + \\ + \sqrt{2}U_{C2} \sin(2\omega t + \lambda_2), \text{ B}$$

Резонансные явления при периодических напряжениях и токах

**Резонансные явления могут
наблюдаться при наличии в цепи
индуктивностей и емкостей, причем
резонанс может возникать на одной
или нескольких гармониках
напряжений и токов**

При этом входное сопротивление или входная проводимость цепи для этих гармоник становится вещественной (активной) и может быть близкой к 0 или ∞ . Различают для k -гармоник резонансы напряжений и токов, а также резонансы в сложной цепи

**Резонансные явления могут
использоваться в специальных
цепях (фильтрах) для пропускания в
нагрузку определенных гармоник
тока и напряжения.**

**Рассмотрим такие цепи без учета
активных сопротивлений катушек**

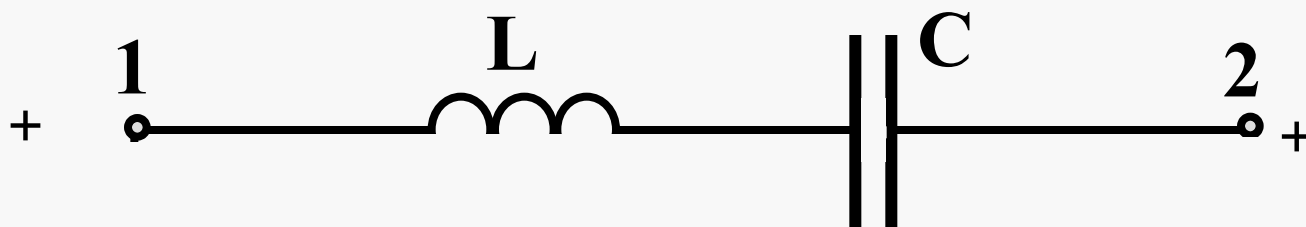
Пример 1:

дано

$$u_1(t) = U_0 + \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

нужно получить

$$u_2(t) = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$



$u_1(t)$

$u_2(t)$



$$\underline{Z}_{12}^{(1)} = jX_L^{(1)} - jX_C^{(1)} = j\omega L - \frac{j}{\omega C} = 0$$

- резонанс напряжений 1 гармоника

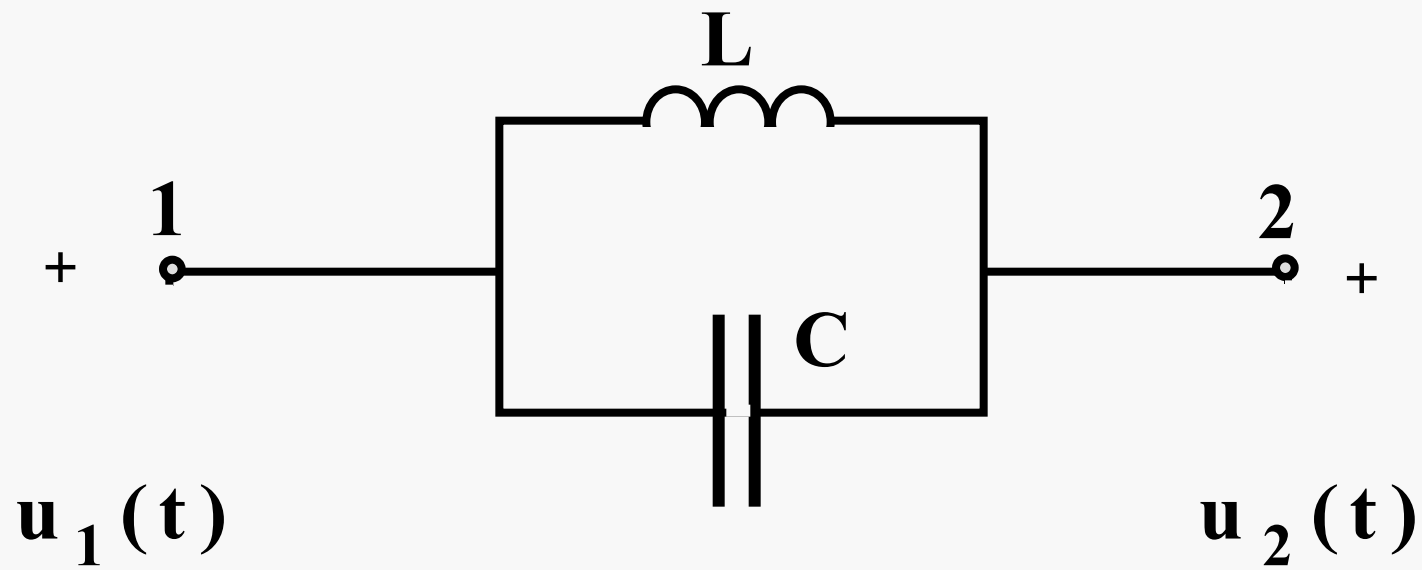
Пример 2:

дано

$$u_1(t) = U_0 + \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

нужно получить

$$u_2(t) = U_0$$



$$\underline{Z}_{12}^{(1)} = \frac{jX_L^{(1)} [-jX_C^{(1)}]}{jX_L^{(1)} - jX_C^{(1)}} = \infty$$

- резонанс токов 1 гармоника

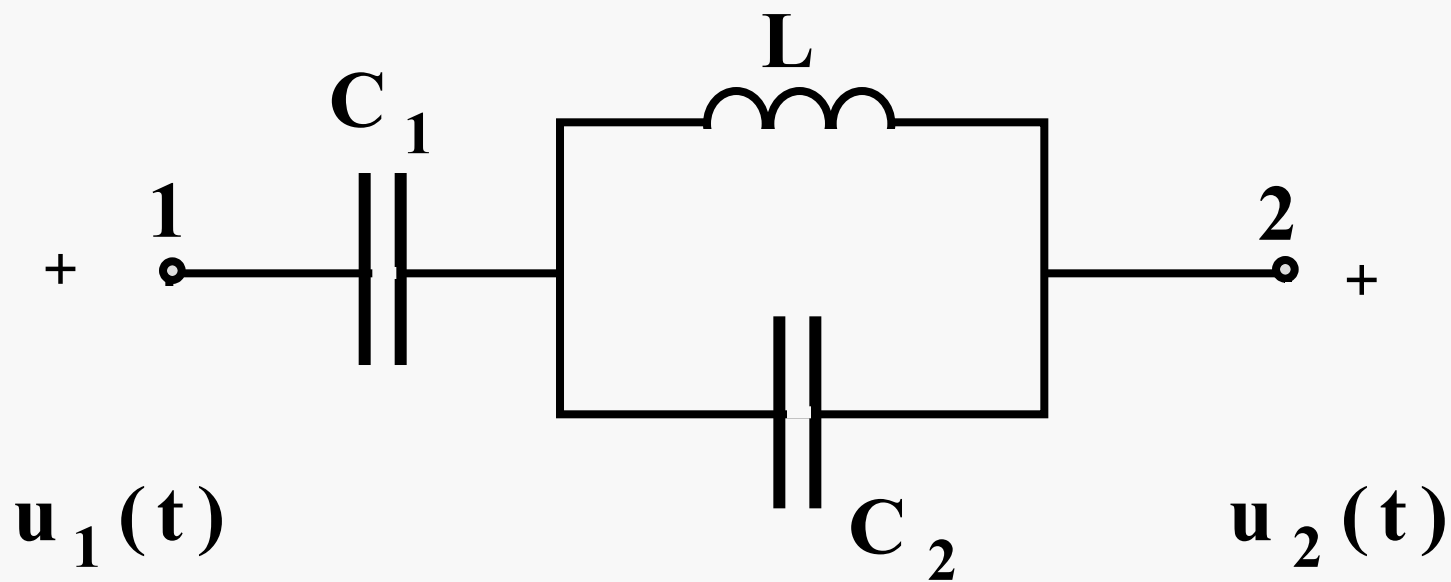
Пример 3:

дано

$$u_1(t) = U_0 + \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \\ + \sqrt{2}U_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

нужно получить

$$u_2(t) = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$



а) C_1 задерживает U_0

$$\text{б) } 2\omega L = \frac{1}{2\omega C_2} -$$

задерживается 2 гармоника
(резонанс токов 2 гармоники)

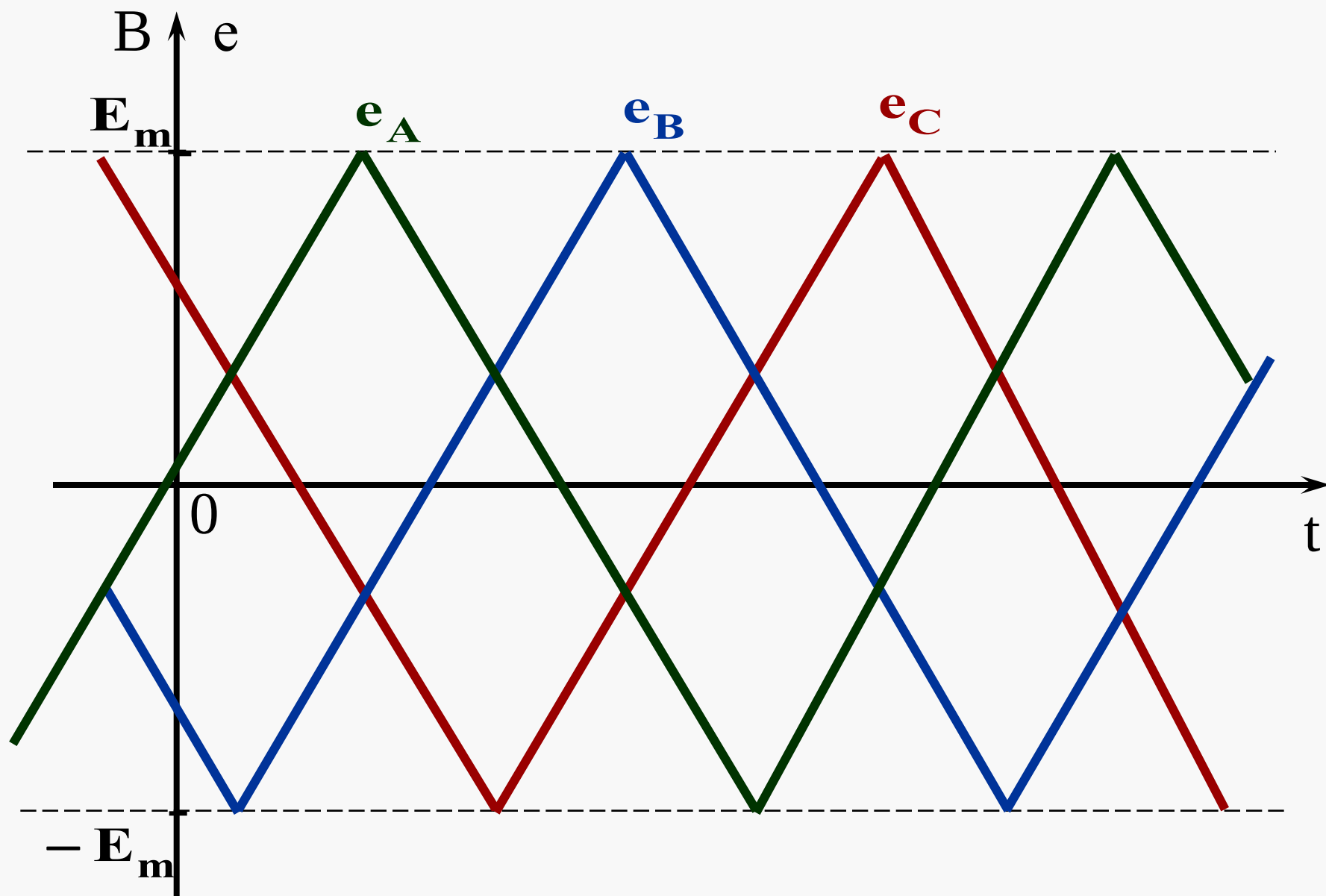
В)

$$\underline{Z}_{12}^{(1)} = -\frac{j}{\omega C_1} + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}} = 0$$

-1 гармоника проходит без
изменения (резонанс
напряжений 1 гармоники)

Высшие гармоники в трехфазных цепях

**Высшие гармоники в трехфазных
цепях появляются за счет
негармонических фазных ЭДС
генераторов и трансформаторов,
которые обычно одинаковы по
форме, сдвинуты на треть периода и
симметричны относительно оси
времени**



Фазные ЭДС содержат нечетные гармоники

$$\begin{aligned} e_A = & \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \\ & + \sqrt{2} E_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \\ & + \sqrt{2} E_5 \sin(5\omega t + \alpha_5) + \dots \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_B = & \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \alpha_1 - 120^\circ) + \\ & + \sqrt{2} E_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \\ & + \sqrt{2} E_5 \sin(5\omega t + \alpha_5 + 120^\circ) + \dots \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_C = & \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + 120^\circ) + \\ & + \sqrt{2} E_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \\ & + \sqrt{2} E_5 \sin(5\omega t + \alpha_5 - 120^\circ) + \dots \end{aligned}$$

Таким образом

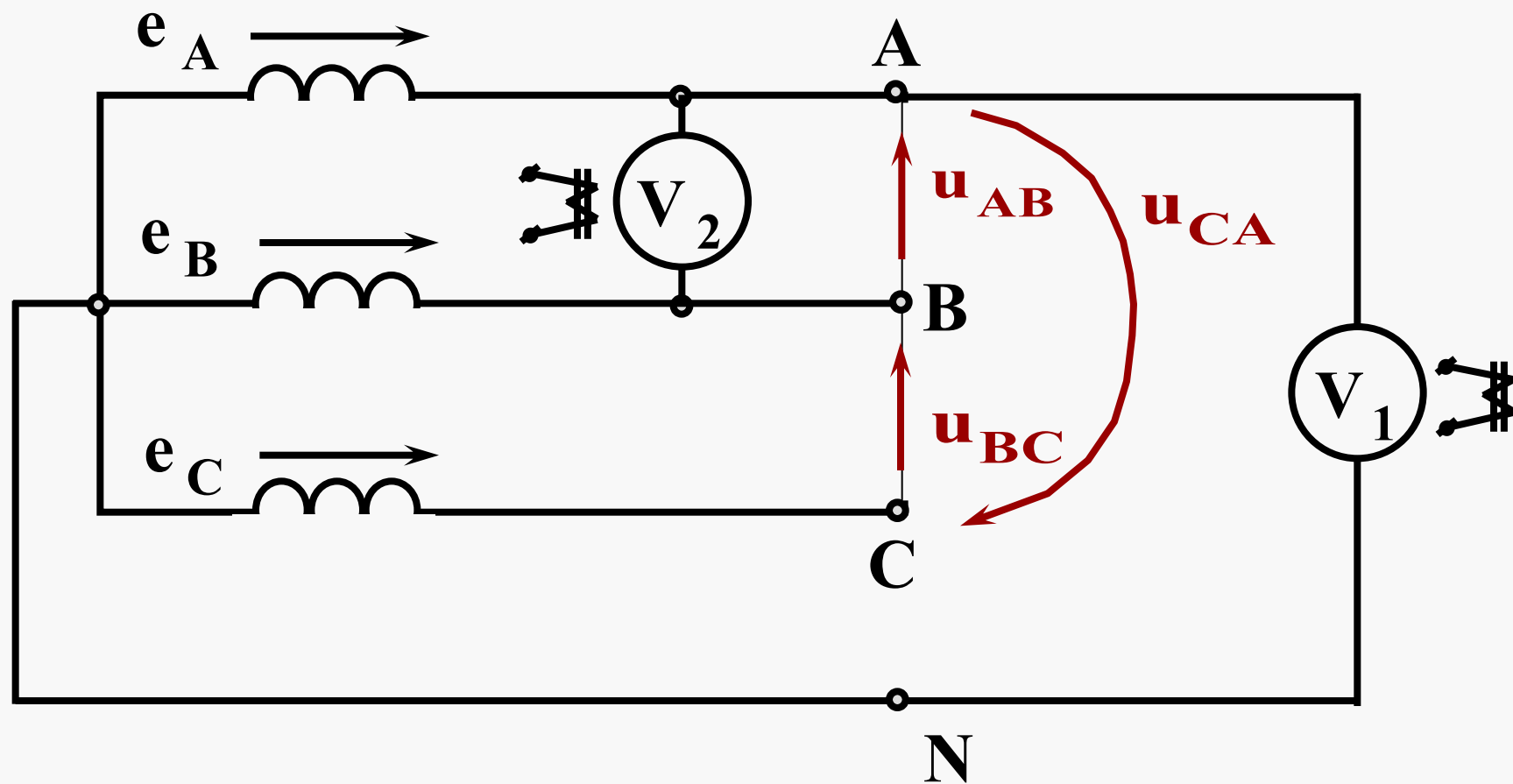
гармоники $k = 1, 7, 13 \dots$

образуют прямую

последовательность

Гармоники $k = 5, 11, 17 \dots$
образуют обратную
последовательность

Гармоники $k = 3, 9, 15 \dots$
образуют нулевую
последовательность



Линейное напряжение

$$\begin{aligned} u_{AB} &= e_A - e_B = \\ &= \sqrt{3} \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + 30^\circ) + \\ &+ \sqrt{3} \sqrt{2} E_5 \sin(5\omega t + \alpha_5 - 30^\circ) + \dots \end{aligned}$$

Линейное напряжение

$$u_{BC} = e_B - e_C =$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \alpha_1 - 90^\circ) +$$

$$+ \sqrt{3} \sqrt{2} E_5 \sin(5\omega t + \alpha_5 + 90^\circ) + \dots$$

Линейное напряжение

$$u_{CA} = e_C - e_A =$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + 150^\circ) +$$

$$+ \sqrt{3} \sqrt{2} E_5 \sin(5\omega t + \alpha_5 - 150^\circ) + \dots$$

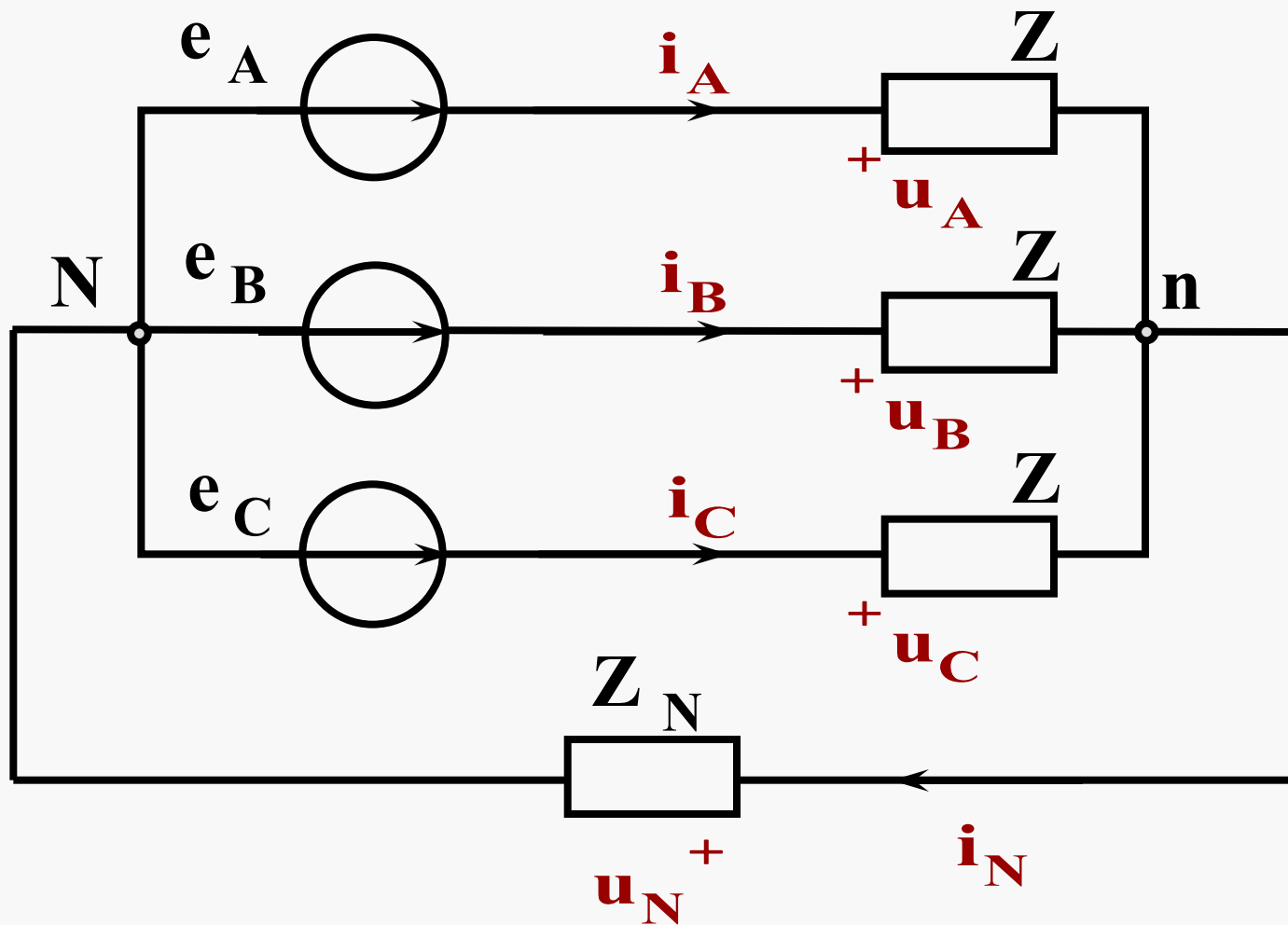
Действующие значения

$$U_{V1} = E_A = E_\Phi = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \dots}$$

$$U_{V2} = U_{AB} = U_L = \sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + \dots}$$

причем $\frac{U_{V2}}{U_{V1}} = \frac{U_L}{E_\Phi} \leq \sqrt{3}$

**Линейные напряжения не содержат
гармоник кратных трем, причем
расчет симметричного режима
ведется на одну фазу методом
наложения для каждой гармоники
отдельно**



Дано:

$$e_A(t) = e_B\left(t + \frac{T}{3}\right) = e_C\left(t - \frac{T}{3}\right),$$

$$\omega, T = \frac{2\pi}{\omega}, \underline{Z}^{(1,3,5)}, \underline{Z}_N^{(3)}$$

Определить

$\mathbf{i}_A$, $\mathbf{u}_A$, $\mathbf{i}_N$, $\mathbf{u}_N$

1. Расчет комплексов 1 гармоники фазы А

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 e^{j\alpha_1}}{\underline{Z}^{(1)}} = I_1 e^{j\beta_1}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}^{(1)} \underline{I}_1 = E_1 e^{j\alpha_1}$$

2. Расчет комплексов 3 гармоники фазы А

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_3 e^{j\alpha_3}}{\underline{Z}^{(3)} + 3 \underline{Z}_N} = \underline{I}_3 e^{j\beta_3}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{Z}^{(3)} \underline{I}_3 = \underline{U}_3 e^{j\lambda}$$

Тогда

$$\underline{\mathbf{U}}_N = 3 \underline{\mathbf{Z}}_N^{(3)} \underline{\mathbf{I}}_3 = \underline{\mathbf{U}}_N e^{j\Theta}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_N = 3 \underline{\mathbf{I}}_3 = \underline{\mathbf{I}}_N e^{j\beta_3}$$

3. Расчет комплексов 5 гармоники фазы А

$$\underline{I}_5 = \frac{E_5 e^{j\alpha_5}}{\underline{Z}^{(5)}} = I_5 e^{j\beta_5}$$

$$\underline{U}_5 = \underline{Z}^{(5)} \underline{I}_5 = E_5 e^{j\alpha_5}$$

4. Функции времени

$$\begin{aligned} i_A = & \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \beta_1) + \\ & + \sqrt{2} I_3 \sin(3\omega t + \beta_3) + \\ & + \sqrt{2} I_5 \sin(5\omega t + \beta_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_A = & \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \\
 & + \sqrt{2} U_3 \sin(3\omega t + \lambda) + \\
 & + \sqrt{2} E_5 \sin(5\omega t + \alpha_5)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{i}_N = \sqrt{2} \mathbf{I}_N \sin(3 \omega t + \beta_3)$$

$$\mathbf{u}_N = \sqrt{2} \mathbf{U}_N \sin(3 \omega t + \Theta)$$

Примечание:

если $\underline{Z}_N^{(3)} = \infty$,

то $\underline{I}_3 = \underline{I}_N = \mathbf{0}$, $\underline{U}_3 = \mathbf{0}$,

$$\underline{U}_N = E_3 e^{j\alpha_3}$$