

Лекция №3

Символический метод

© 2020 Томский политехнический университет, ОЭЭ ИШЭ

Лектор: к.т.н., доцент Васильева Ольга Владимировна

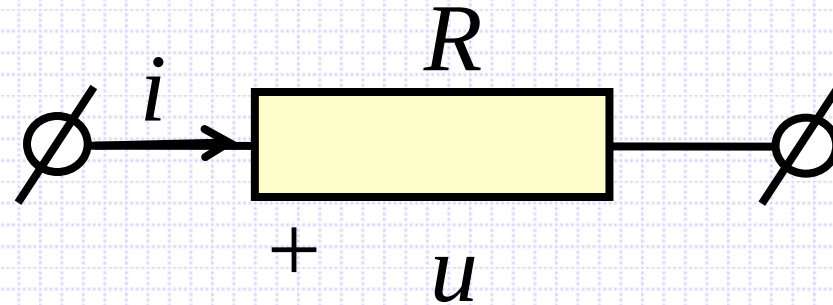
**Действующие значения тока
и напряжения характеризуют
тепловое действие в линейном
резистивном элементе
с сопротивлением R**

При токе и напряжении:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$

**$i(t)$, $u(t)$ - мгновенные значения тока
и напряжения или функции
времени**



ПО ЗАКОНУ ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА:

$$W(t) = \int_0^T i(t)^2 R dt = I^2 R T, \text{ Дж}$$

ПО ЗАКОНУ ОМА:

$$u(t) = R \cdot i(t), \text{ В}$$

$$T = 2\pi / \omega, \text{ с}$$

Действующее значение тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Действующее значение напряжения:

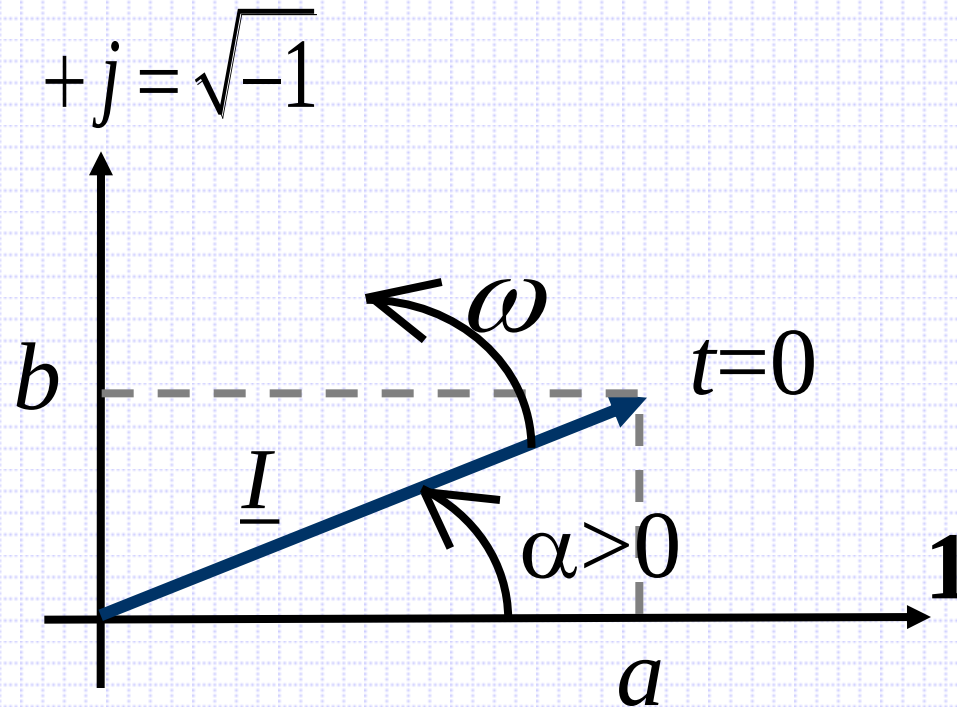
$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = U_m / \sqrt{2}$$

**Действующее значение
гармонического тока $i(t)$
численно равно такому
постоянному току I , который за
время T в том же сопротивлении
 R выделяет такое же количество
тепла W**

**Символический метод
применяется для расчета линейных
цепей с гармоническими токами
и напряжениями.**

**Этот метод основан на изображении
гармонических величин
комплексными числами.**

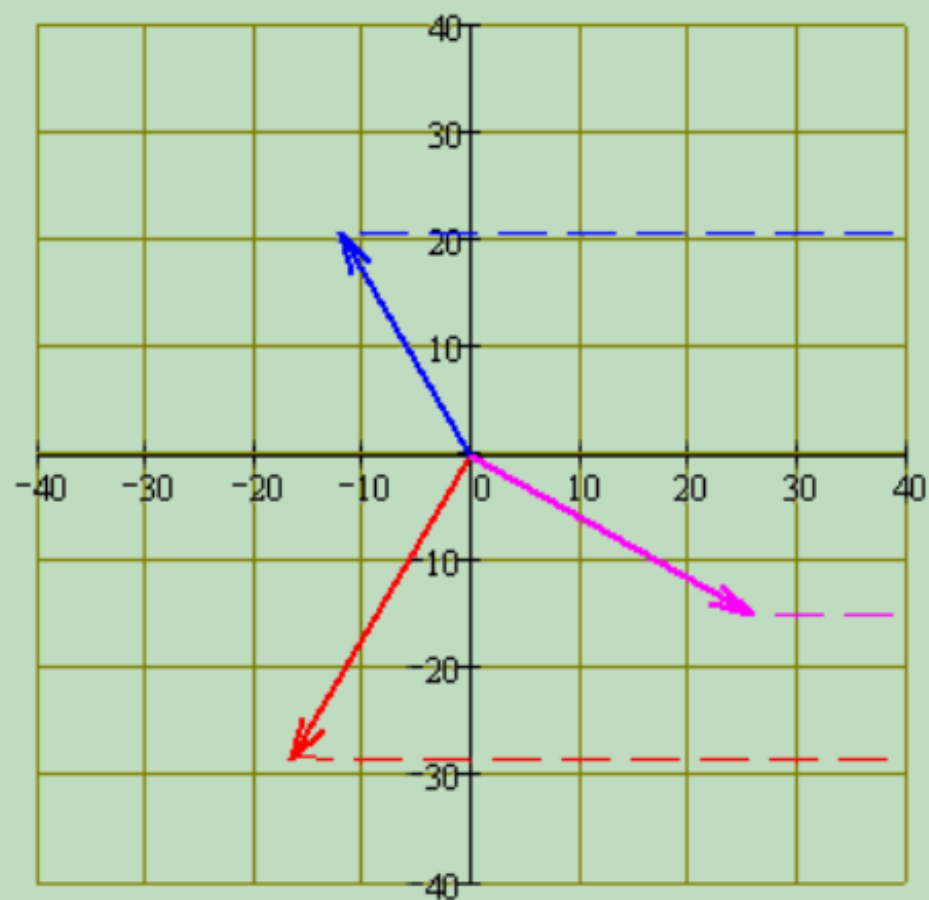
**Синусоидальная величина
может быть изображена
вращающимся вектором на
комплексной плоскости, причем
этот вектор записывается в
показательной,
тригонометрической
и алгебраической формах**



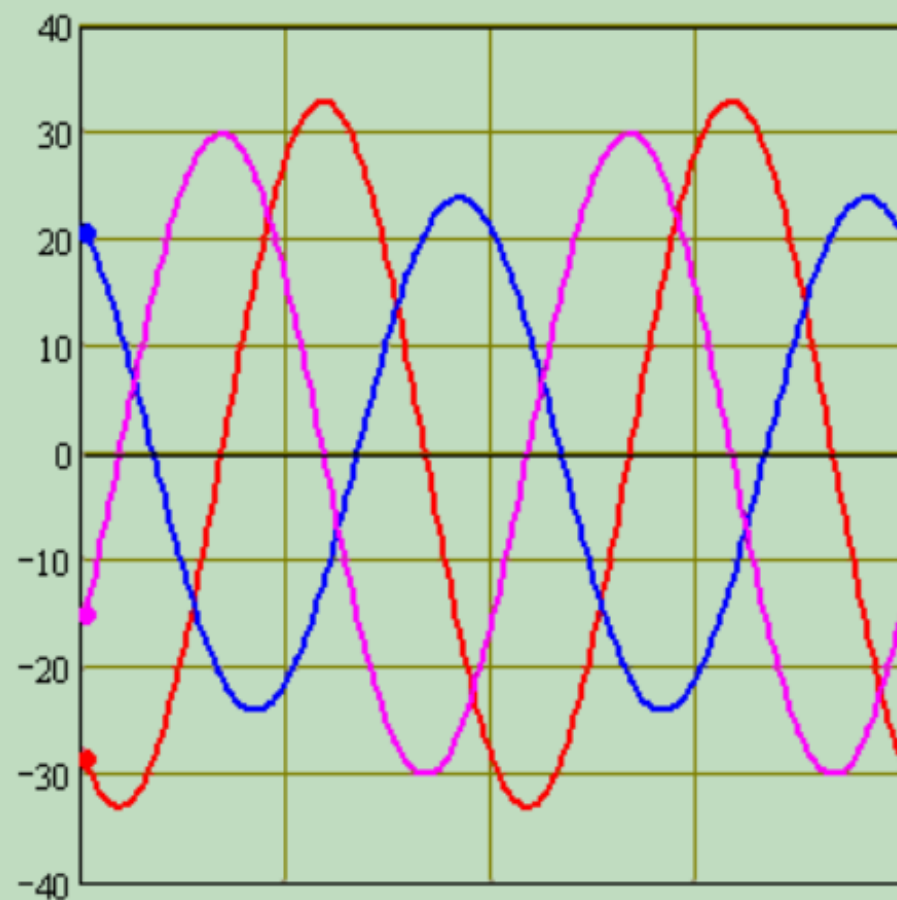
$\underline{I}$ — комплекс действующего значения тока

$\underline{I}_m = \underline{I} \cdot \sqrt{2}$ — комплекс амплитуды тока

Векторная диаграмма напряжений



Осциллограмма напряжений



Таким образом:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \alpha) = \\ &= \operatorname{Im}[\sqrt{2} I e^{j(\omega t + \alpha)}] = \operatorname{Im}[\sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{I} = I e^{j\alpha} = I \cos \alpha + j I \sin \alpha = \\ &= a + jb \end{aligned}$$

$\operatorname{Im}[\sqrt{2} I e^{j(\omega t + \alpha)}]$ — мнимая составляющая
вращающегося вектора

$j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица

Например, мгновенному значению тока:

$$i(t) = 2.82 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ), \text{ A}$$

соответствует комплекс действующего значения:

$$\underline{I} = \dot{I} = \frac{2.82}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30^\circ}, \text{ A}$$

**При этом, например, комплексу
действующего значения
напряжения:**

$$\underline{U} = \dot{U} = 100 \cdot e^{j45^\circ}, \text{ В}$$

**соответствует синусоидальная
функция времени:**

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ В}$$

Действия с комплексными числами

Где:

$$\underline{F} = F \cdot e^{j\alpha} = a + jb \quad \text{- комплексное число}$$

F - модуль

α - аргумент (фаза)

a - вещественная (реальная)
составляющая

b - мнимая составляющая

1. Переход от алгебраической формы записи к показательной форме

$$a + jb \Rightarrow Fe^{j\alpha}$$

$$F = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = (180) + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

**При этом 180 градусов
учитывается при $a < 0$**

2. Переход от показательной формы записи к алгебраической форме

$$F e^{j\alpha} \Rightarrow a + jb$$

$$a = F \cos \alpha$$

$$b = F \sin \alpha$$

**Сложение и вычитание
комплексных чисел
осуществляется только в
алгебраической форме, а
умножение и деление - в
показательной.**

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

$$1/j = -j$$

$$j^3 = -j$$

$$j = e^{j90^\circ}$$

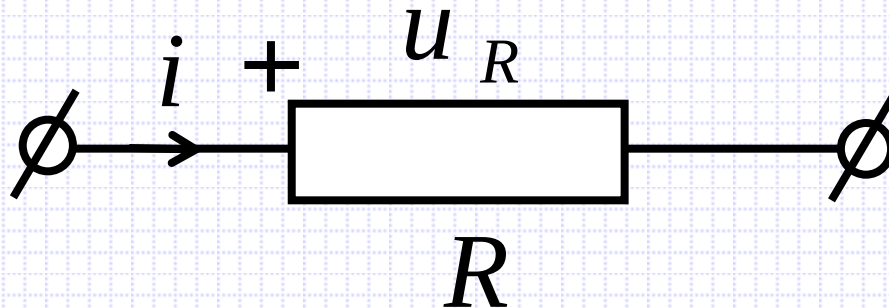
$$-j = e^{-j90^\circ}$$

$$1 = e^{j0^\circ}$$

$$-1 = e^{j180^\circ}$$

Линейные элементы схем замещения

1. Резистивный элемент



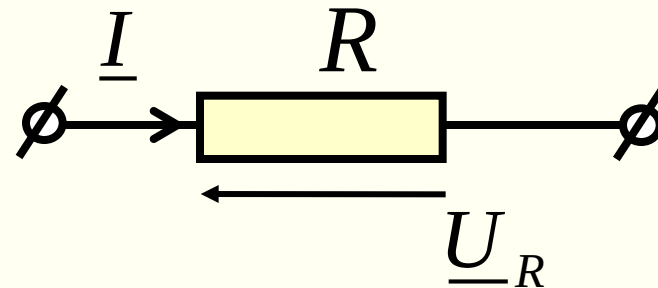
Закон Ома: $i(t) = u_R(t) / R = g u_R(t)$ (А)

Закон Джоуля-Ленца:

$$P(t) = i(t)^2 R = u_R(t)^2 / R \text{ (Вт)}$$

**Резистивные элементы
необратимо преобразуют
электромагнитную энергию
в тепло, причем величина
сопротивления R (Ом)
постоянна**

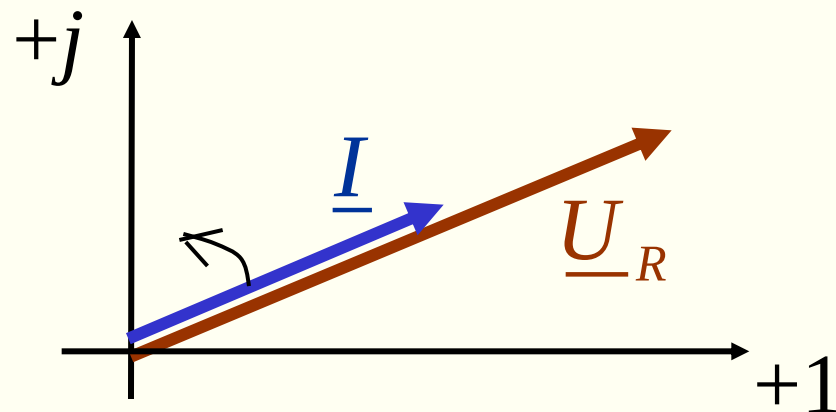
**Резистивный
элемент**



**Комплекс
напряжения**

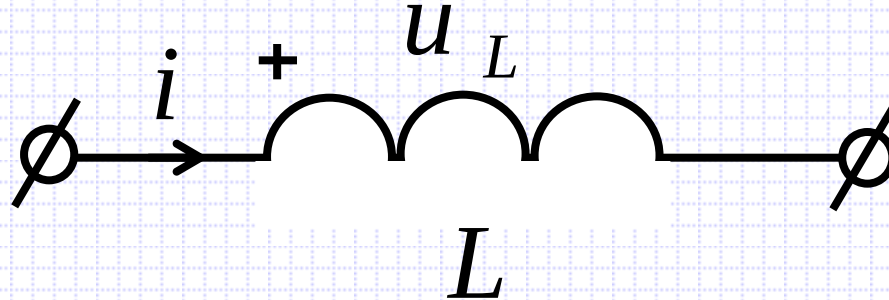
$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$$

**Вектора
напряжения и
тока**



**На комплексной плоскости
вектор напряжения
резистивного элемента
совпадает по направлению
с вектором своего тока**

2. Индуктивный элемент



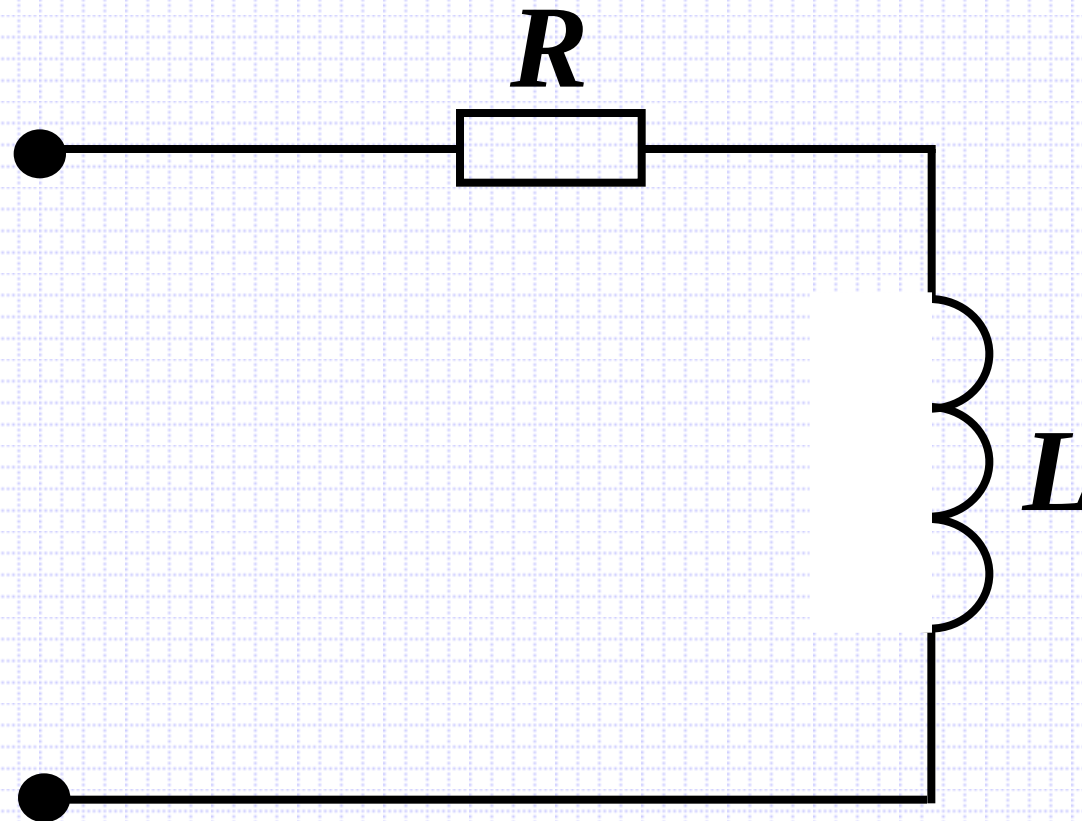
Напряжение: $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ (В)}$

Ток: $i(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt \text{ (А)}$

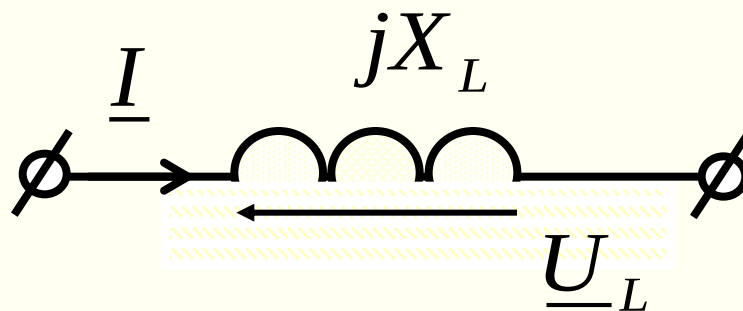
Энергия: $W(t) = \frac{L i(t)^2}{2} \text{ (Дж)}$

**Индуктивные элементы запасают
электромагнитную энергию
 W в магнитном поле,
причем величина индук-
тивности L (Гн) постоянна**

Схема замещения катушки



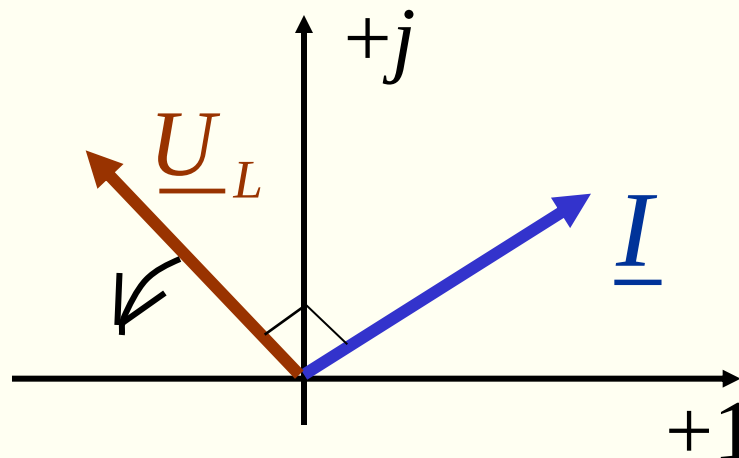
**Индуктивный
элемент**



**Комплекс
напряжения**

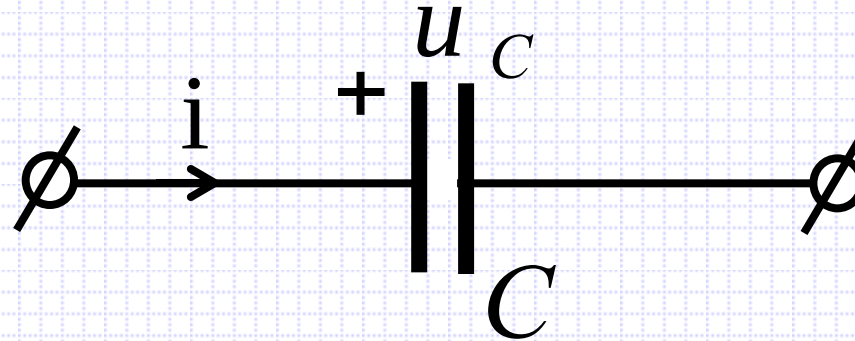
$$\underline{U}_L = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I}$$

**Вектора
напряжения и
тока**



**На комплексной плоскости
вектор напряжения
индуктивного элемента
опережает по направлению
вектор своего тока
на 90 градусов**

3. Емкостный элемент



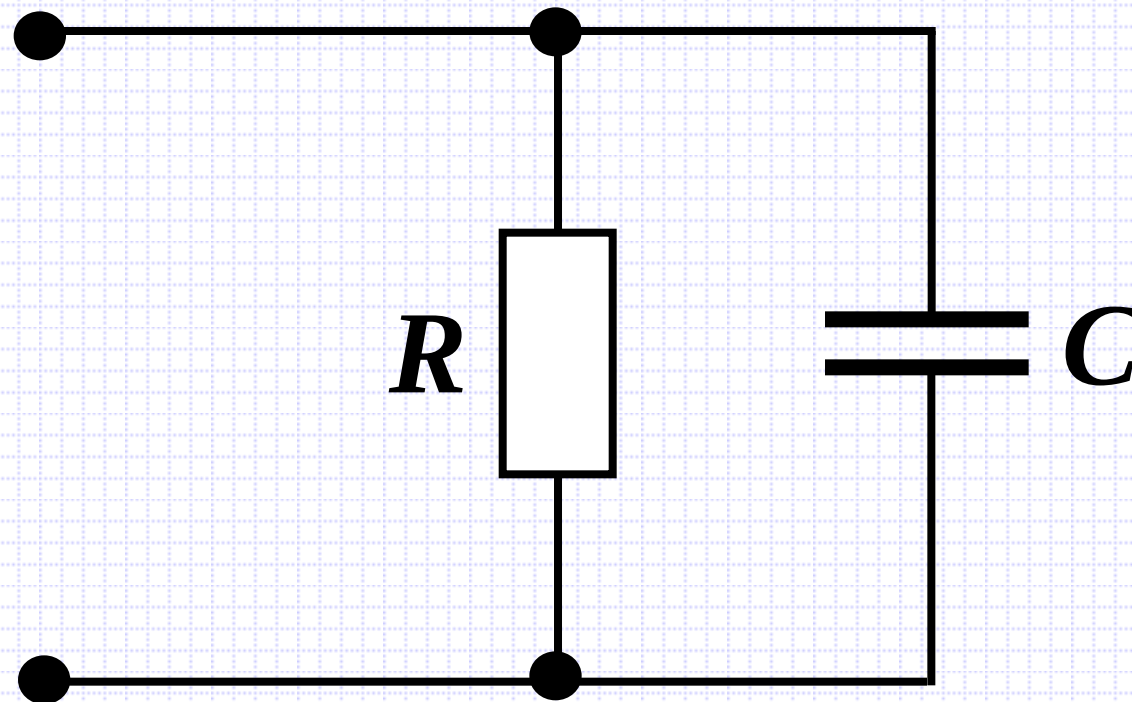
Ток:
$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \text{ (А)}$$

Напряжение:
$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \text{ (В)}$$

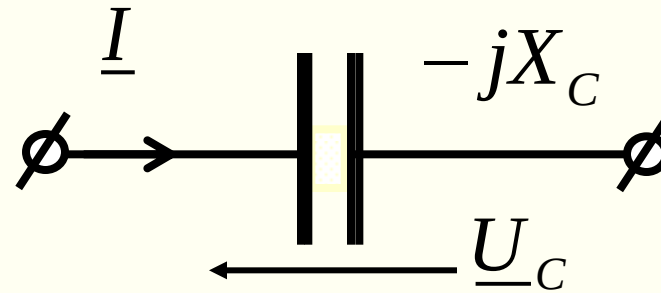
Энергия:
$$W(t) = \frac{C u_c(t)^2}{2} \text{ (Дж)}$$

**Емкостные элементы запасают
электромагнитную энергию
 W в электрическом поле,
причем величина емкости
 C (Ф) постоянна**

Схема замещения конденсатора



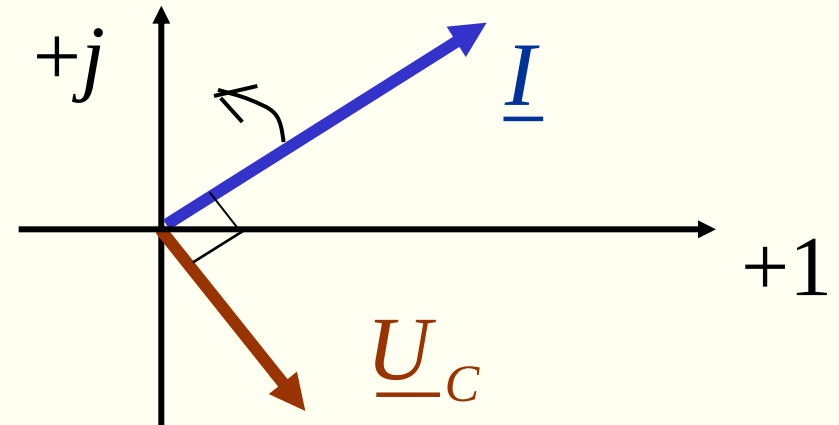
**Емкостный
элемент**



**Комплекс
напряжения**

$$\underline{U}_C = -\frac{j}{\omega C} \underline{I} = -jX_C \underline{I}$$

**Вектора
напряжения и
тока**



**На комплексной плоскости
вектор напряжения
емкостного элемента
отстает по направлению
от вектора своего тока
на 90 градусов**

Где:

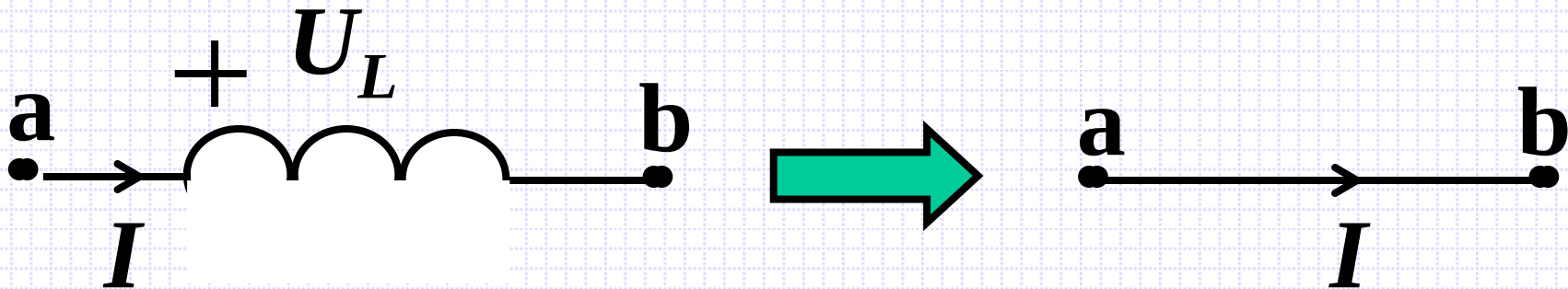
$X_L = \omega L$ - **индуктивное
сопротивление (Ом)**

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ - **емкостное
сопротивление (Ом)**

Примечания

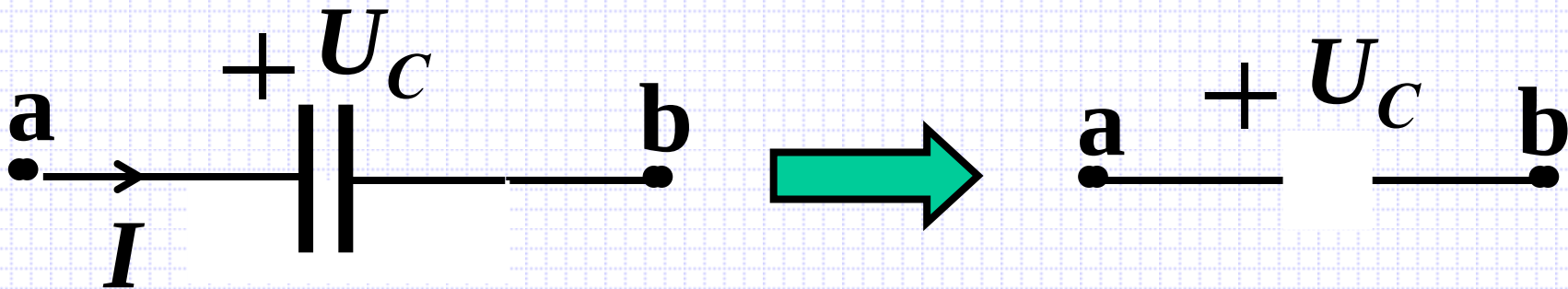
1. При постоянном токе индуктивный элемент - “закоротка”:

Так как $U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0$, то



2. При постоянном напряжении емкостный элемент - “разрыв”:

Так как $i(t) = C \frac{dU_c(t)}{dt} = 0$, то



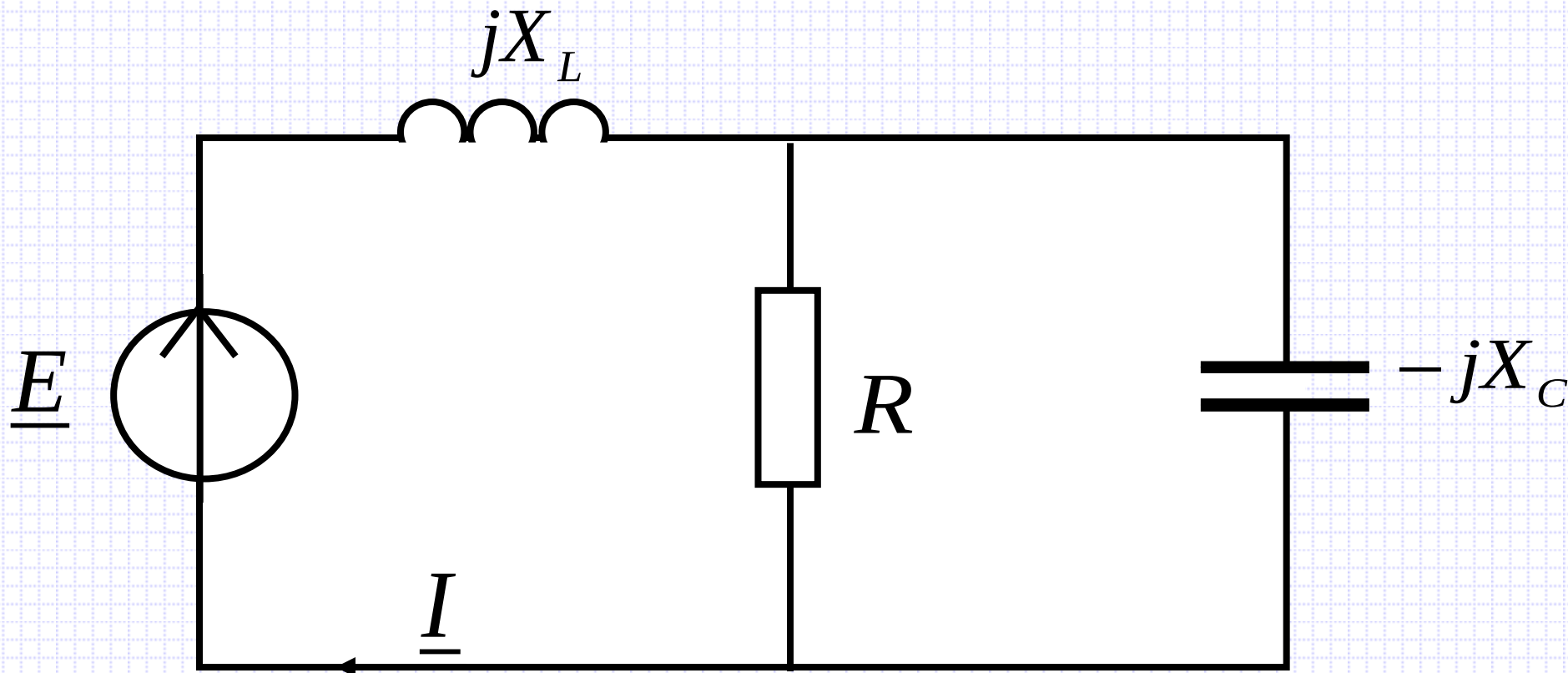
**Закон Ома в комплексной форме
основан на символическом методе
и справедлив для линейных цепей
с гармоническими напряжениями
и токами. Этот закон следует из
физической взаимосвязи
между током и напряжением
отдельных элементов цепи**

**Закон Ома в комплексной форме
для отдельных элементов аналогичен
закону Ома для резистивного элемента
на постоянном токе.**

**Для символического метода
необходимо составить комплексную
схему замещения с комплексными
сопротивлениями и с комплексами
действующих значений токов и
напряжений**

Например, комплексная схема

замещения цепи:



$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}}$$

Где:

$$\underline{Z} = R_{\Sigma} + jX_{\Sigma} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

**– эквивалентное комплексное
сопротивление цепи (Ом)**

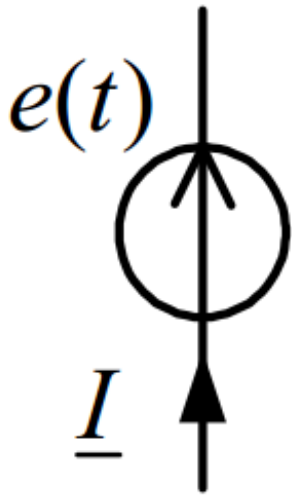
$$Z = \sqrt{R_{\Sigma}^2 + X_{\Sigma}^2}$$

- модуль сопротивления (Ом)

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}$$

**-аргумент (фаза)
сопротивления (Град)**

Идеальный источник ЭДС:



$$\underline{E} = \text{const}$$

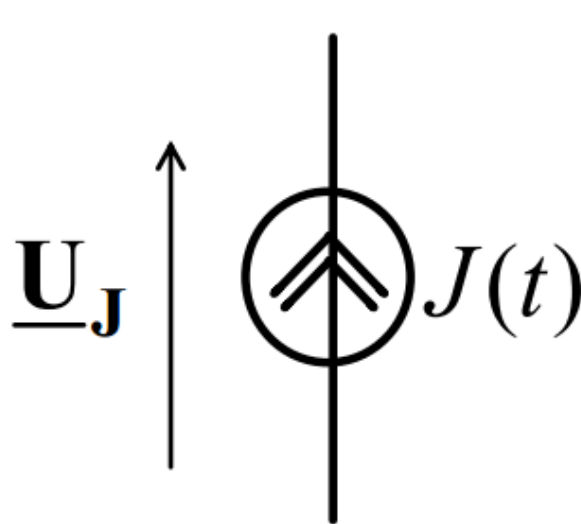
$$R_E = 0$$

$$S = \underline{E} \underline{I}^* = P + jQ \text{ ВА}$$

Активная
мощность
Вт

Реактивная
мощность
ВАр

Идеальный источник тока:



$$\underline{J} = \text{const}$$

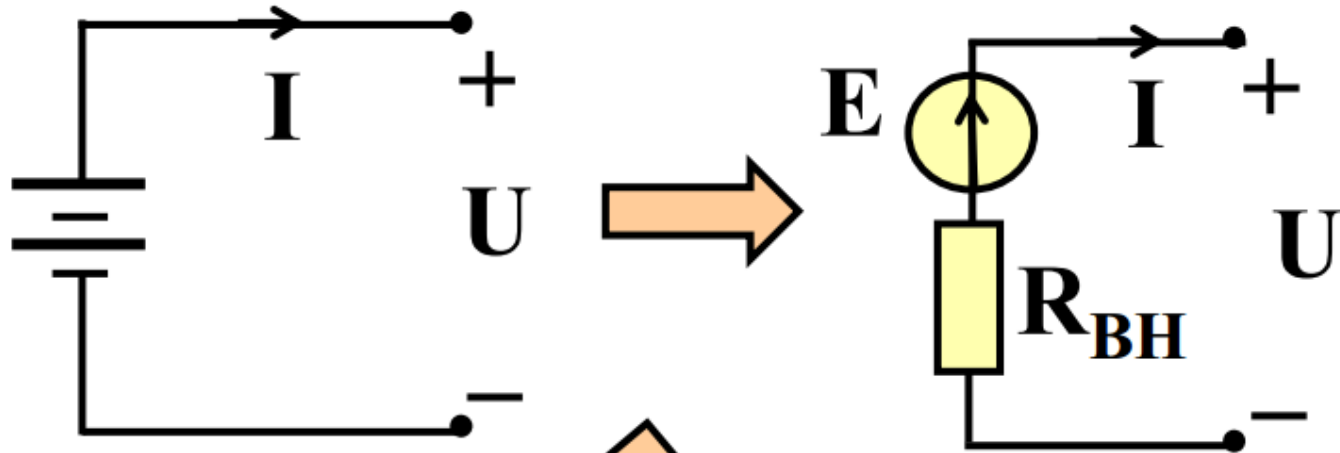
$$R_J = \infty$$

$$S = \underline{U}_J \underline{J}^* = P + jQ \text{ ВА}$$

Активная
мощность
Вт

Реактивная
мощность
ВАр

Например, схема замещения аккумулятора:



$$E = U_{XX} \quad (I=0)$$

$$J = I_{K3} = E / R_{BH} \quad (U=0)$$