Лекция №2

Метод контурных токов.

Метод узловых потенциалов

Лектор: к.т.н., доцент Васильева Ольга Владимировна

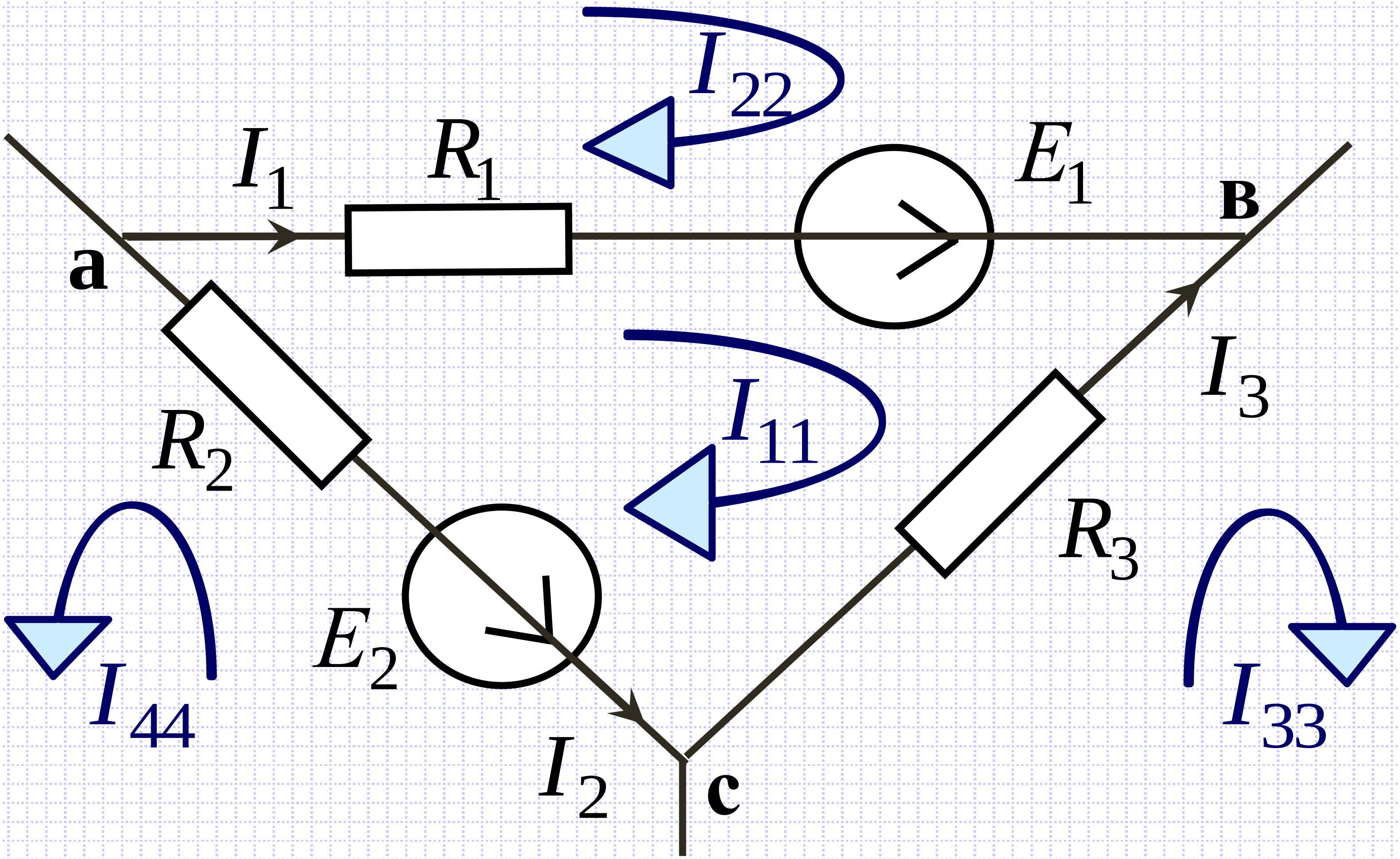
Методы расчета доказываются при помощи законов Ома и Кирхгофа

Методы расчета рассмотрим для резистивных цепей с постоянными напряжениями и токами

Метод контурных токов

В расчет вводятся *контурные токи* – это фиктивные токи, которые замыкаются в независимых замкнутых контурах, отличающихся друг от друга наличием хотя бы одной новой ветви.

Например:



$$\boldsymbol{I}_{11}, \boldsymbol{I}_{22}, \boldsymbol{I}_{33}, \boldsymbol{I}_{44} -$$

контурные токи

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_{11} - \boldsymbol{I}_{22}$$

$$\boldsymbol{I}_2 = -\boldsymbol{I}_{11} - \boldsymbol{I}_{44} \quad -$$

$$\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{I}_{33} - \boldsymbol{I}_{11}$$

токи ветвей контура

По второму закону Кирхгофа:

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_{11} - R_1 I_{22} -$$

$$-R_3 I_{33} + R_2 I_{44} = E_1 - E_2$$

$$\boxed{R_{\kappa\kappa} I_{\kappa\kappa} + \sum \pm R_{\kappa m} I_{mm} = E_{\kappa\kappa}}$$

$R_{кк}$ – **суммарное сопротивление *к*-контура**

$I_{кк}$ – **контурный ток *к*-контура**

R_{km} – **общее сопротивление между *к*-контуром и *m* -контуром**

I_{mm} – **соседний контурный ток *m*-контура**

E_{kk} – **суммарная ЭДС *к*-контура**

Контурный ток рассматриваемого контура умножается на сумму сопротивлений своего контура, причем перед этим произведением ставится знак “+” .

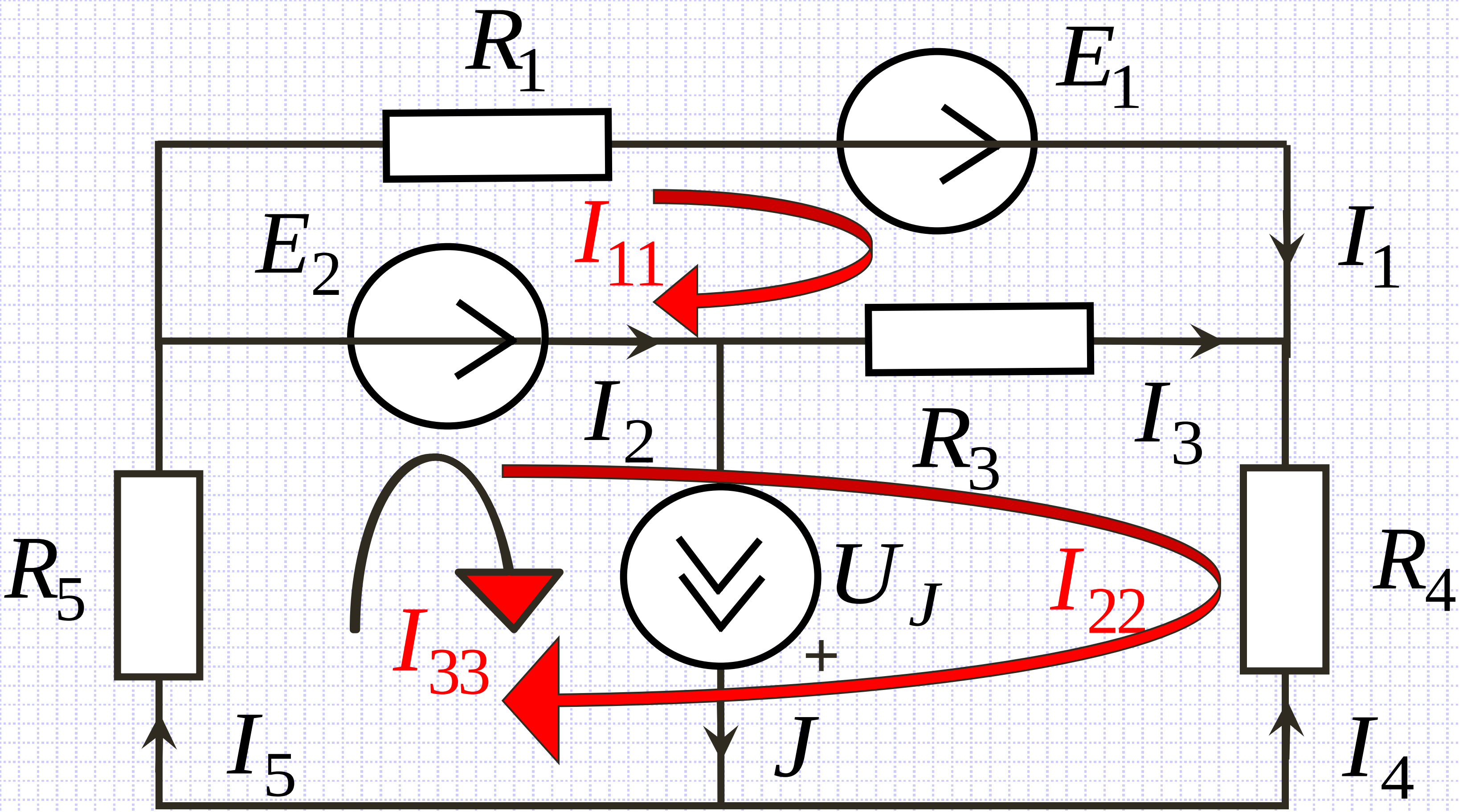
Соседний контурный ток умножается на общее сопротивление между соседним и рассматриваемым контурными токами, причем перед этим произведением ставится знак “+”, если направления этих контурных токов в общем сопротивлении совпадают между собой и ставится знак “-”, если направления их не совпадают.

В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма ЭДС рассматриваемого контура, причем со знаком “+” берутся те ЭДС, направления которых совпадают с направлением рассматриваемого контурного тока.

Для контура с источником тока контурное уравнение не составляется, так как контурный ток этого контура известен и равен току источника тока, причем через источник тока должен проходить только один контурный ток.

Сколько независимых замкнутых контуров в схеме, столько и должно быть контурных токов.

Пример



Дано:

***E*1=100 В, *E*2=150 В, *J*=2 А, *R*1=100 Ом, *R*3=150 Ом, *R*4=50 Ом, *R*5=90 Ом.**

Определить:

Токи ветвей и напряжение на источнике тока.

$$I_{33} = J$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_{11} - R_3 I_{22} - 0 \cdot I_{33} = E_1 - E_2 \\ -R_3 I_{11} + (R_5 + R_3 + R_4) I_{22} + R_5 I_{33} = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (R_1+R_3) & (-R_3) \\ (-R_3) & (R_5+R_3+R_4) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1-E_2 \\ E_2-R_5J \end{pmatrix}$$

матрица симметрична относительно главной диагонали

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_{11}$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_{22} + \boldsymbol{I}_{33} - \boldsymbol{I}_{11}$$

$$\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{I}_{22} - \boldsymbol{I}_{11}$$

$$I_4 = -I_{22}$$

$$I_5 = I_{22} + I_{33}$$

$$U_J = R_4 I_4 - R_3 I_3$$

- по 2 закону Кирхгофа

Ответ:

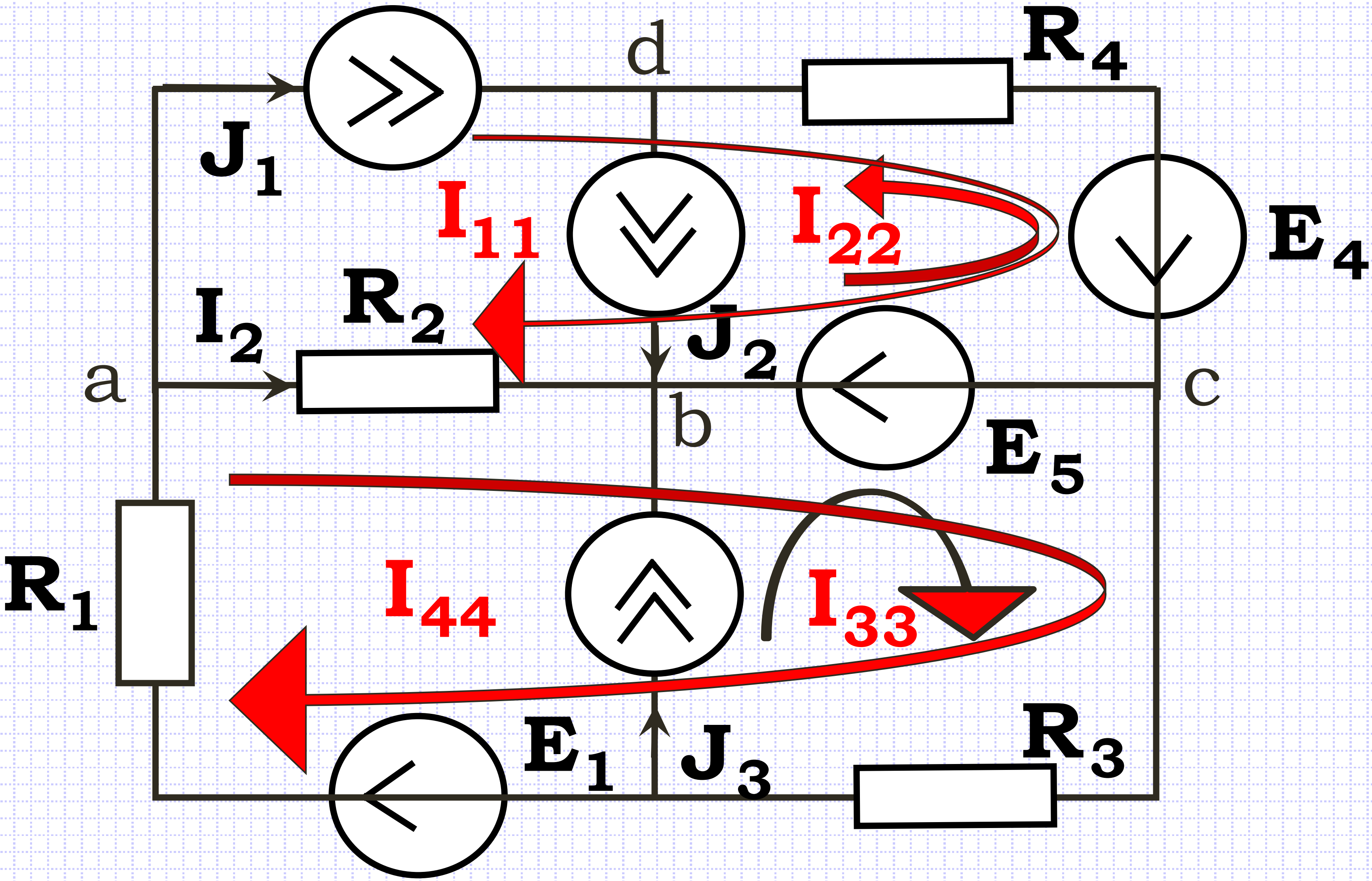
I_{11}=-0.38 A, I_{22}=-0.3 A,

I_1= -0.38 A, I_2=2.08 A,

I_3=0.08 A, I_4=0.3 A,

I_5=1.7 A, U_j=3 B.

Пример 2



$$
\begin{cases}
\boldsymbol{I}_{11} = \boldsymbol{J}_1 \qquad \boldsymbol{I}_{22} = \boldsymbol{J}_2 \qquad \boldsymbol{I}_{33} = \boldsymbol{J}_3 \\
(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_3)\boldsymbol{I}_{44} - \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{I}_{11} + 0 \cdot \boldsymbol{I}_{22} + \\
+\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{I}_{33} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_5
\end{cases}
$$

$$\boldsymbol{I}_{44} = \frac{\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_5 + \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{J}_3\boldsymbol{R}_3}{\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_3}$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_{44} - \boldsymbol{I}_{11} = \boldsymbol{I}_{44} - \boldsymbol{J}_1$$

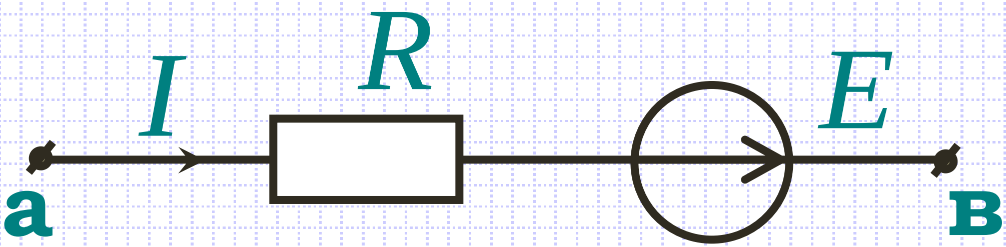
Таким образом, по методу контурных токов необходимо решить значительно меньше уравнений по сравнению с методом законов Кирхгофа.

Метод узловых потенциалов

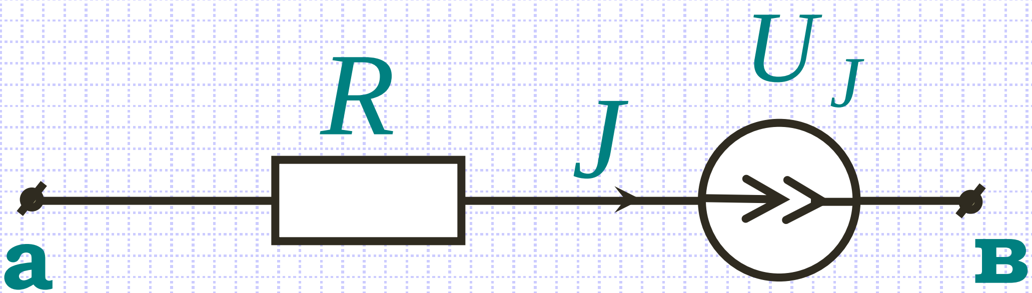
Метод узловых потенциалов используется для расчета сложных схем замещения

Расчетные уравнения данного метода могут быть доказаны при помощи законов Кирхгофа и обобщенного закона Ома

Обобщенный закон Ома

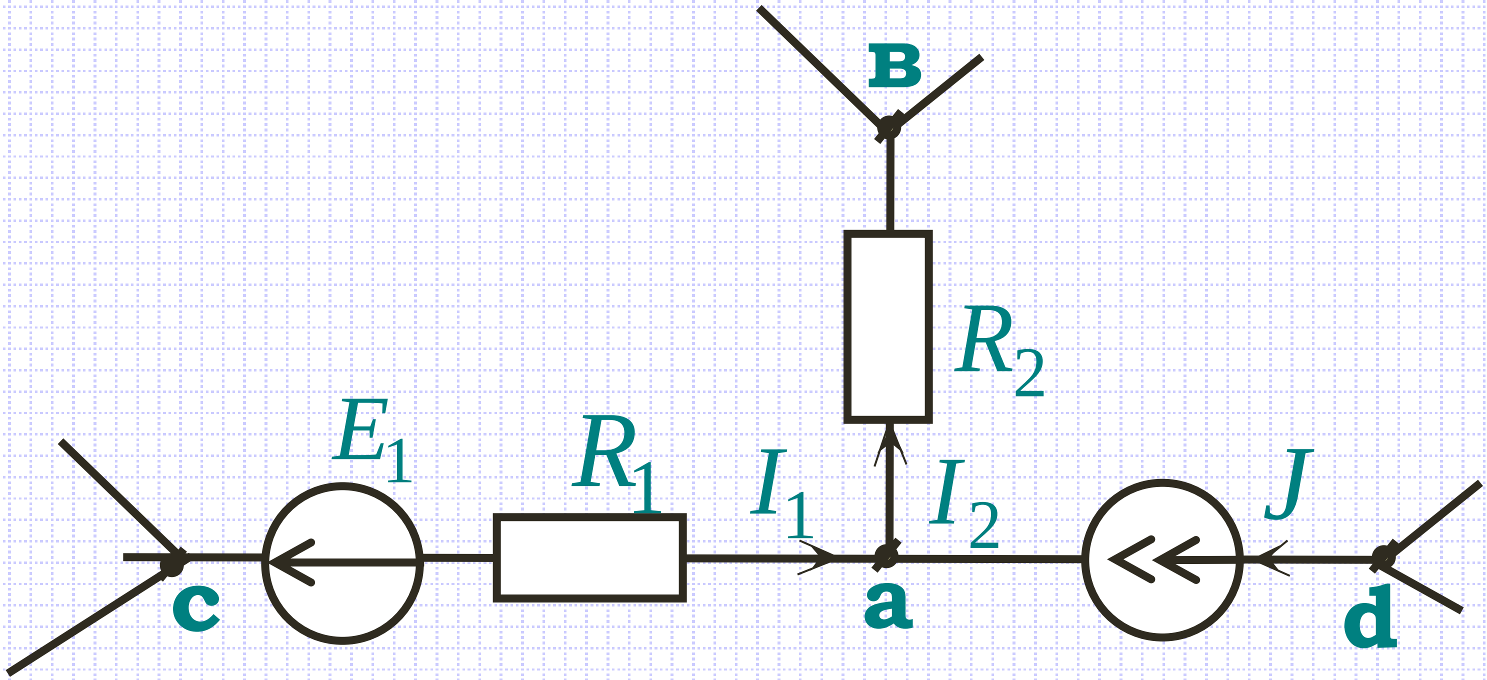


$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_в + E}{R}$$



$$U_J = \varphi_в - \varphi_a + RJ$$

Получим расчетное уравнение метода узловых потенциалов для узла “а” некоторой схемы:



в
R_2
E_1
R_1
I_1
I_2
J
c
a
d

По обобщенному закону Ома

$$\boxed{I_1 = (\varphi_c - \varphi_a - E_1) \cdot g_1}$$

$$\boxed{I_2 = (\varphi_a - \varphi_в) \cdot g_2}$$

где $g_1 = {}^{1}\!/_{R_1}$ $g_2 = {}^{1}\!/_{R_2}$

- проводимости ветвей

Для узла а:

$$\boxed{(g_1+g_2)\cdot\varphi_a - g_2\varphi_в - g_1\varphi_c = -E_1 g_1 + J}$$

Т.е. в общем виде для к- узла:

$$\boxed{g_{кк}\cdot\varphi_к - \sum g_{mк}\cdot\varphi_m = I_к^{(y)}}$$

$g_{кк}$ – **узловая проводимость к - узла;**

$\varphi_к$ – **потенциал к - узла;**

φ_m – **потенциал соседнего m - узла;**

g_{mk} – **проводимость ветви, соединяющей к и m узлы;**

$$\boxed{I_{\kappa}^{(y)} = \sum \pm E_q g_q + \sum \pm J_q}$$

- **узловой ток к - узла;**

Таким образом, потенциал рассматриваемого к-узла умножается на сумму проводимостей ветвей подходящих к этому узлу, причем перед этим произведением всегда ставится знак “+” и проводимость ветви с источником тока равна нулю.

Потенциал φ_m соседнего m-узла умножается на проводимость ветви, соединяющей рассматриваемый к-узел с m-узлом, причем перед этим произведением всегда ставится знак “-”.

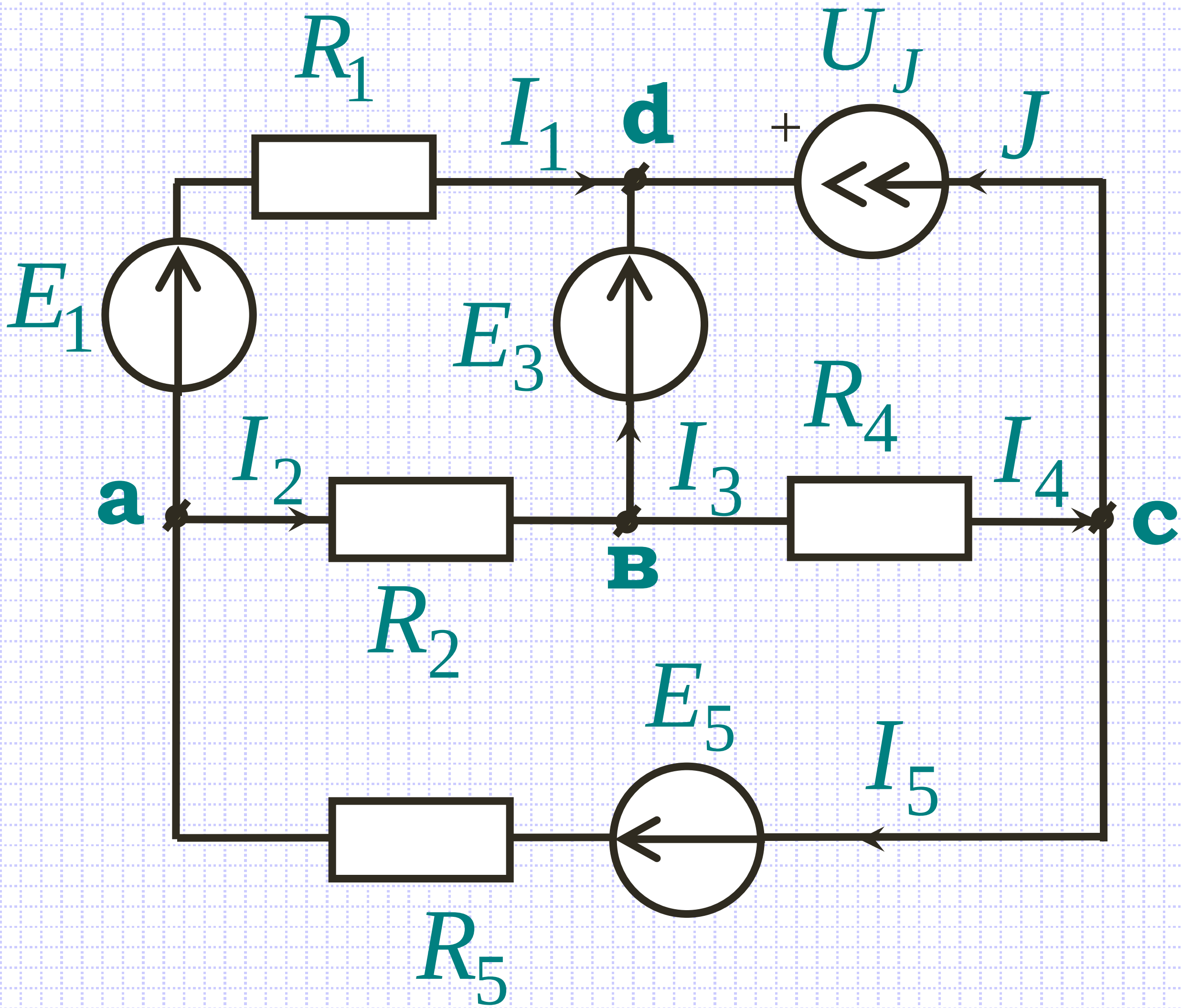
В правой части уравнения записывается узловой ток рассматриваемого к-узла, равный алгебраической сумме подходящих к этому узлу токов источников тока и произведений подходящих к этому узлу ЭДС на проводимости своих ветвей.

В узловом токе со знаком “+” берутся те слагаемые, у которых источники тока и ЭДС направлены в рассматриваемый к-узел.

Потенциал одного из узлов принимается равным нулю, причем за такой узел принимается узел, соединенный с корпусом или "землей", или один из узлов, к которому подходит ветвь с нулевым сопротивлением и ЭДС (особая ветвь).

Таким образом, для схемы с $n_У$ узлами по методу узловых потенциалов составляется система, содержащая не более $n_1 = n_У - 1$ уравнений, из решения которых определяются потенциалы узлов, а затем по обобщенному закону Ома рассчитываются токи и напряжения в ветвях схемы.

Пример



Дано:

E_1=100 В, E_3=150 В, E_5=50 В, J=4 А,

R_1=50 Ом, R_2=150 Ом, R_4=75 Ом, R_5=80 Ом.

Определить:

Токи ветвей и напряжение на источнике тока.

$$
\begin{cases}
\varphi_{\boldsymbol{в}} = 0 \qquad\qquad \varphi_{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{E}_3 \\
(\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_5)\cdot\varphi_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{g}_1\varphi_{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{g}_5\varphi_{\boldsymbol{c}} = -\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{E}_5\boldsymbol{g}_5 \\
-\boldsymbol{g}_5\varphi_{\boldsymbol{a}} + (\boldsymbol{g}_4 + \boldsymbol{g}_5)\cdot\varphi_{\boldsymbol{c}} = -\boldsymbol{E}_5\boldsymbol{g}_5 - \boldsymbol{J}
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} (\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_5) & (-\boldsymbol{g}_5) \\ (-\boldsymbol{g}_5) & (\boldsymbol{g}_4 + \boldsymbol{g}_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\boldsymbol{a}} \\ \varphi_{\boldsymbol{c}} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{E}_5\boldsymbol{g}_5 + \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{g}_1 \\ -\boldsymbol{E}_5\boldsymbol{g}_5 - \boldsymbol{J} \end{bmatrix}
$$

$$I_1 = (\varphi_a - \varphi_d + E_1)\cdot g_1$$

$$I_2 = (\varphi_a - \varphi_в)\cdot g_2$$

$$I_3 = -I_1 - J \qquad\qquad U_J = \varphi_d - \varphi_c$$

$$I_4 = (\varphi_в - \varphi_c)\cdot g_4$$

$$I_5 = (\varphi_c - \varphi_a + E_5)\cdot g_5$$

Ответ:

$\varphi_1 = -18.5$ **В**, $\varphi_2 = -188$ **В**,

I_1= **-1.37 А**, I_2=**-0.12 А**,

I_3=**-2.63 А**, I_4=**2.51 А**,

I_5=**-1.49 А**, U_j=**338 В.**