Методические указания к заданию «Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях 2 порядка»

Цепь II-го порядка

• Классический метод расчета.

При постоянном воздействии $E = U_0$ определим классическим методом (см. рис. 1) ток индуктивности $i_{\mathrm{L}}(t)$ и напряжение на емкости $U_{\mathrm{C}}(t)$.

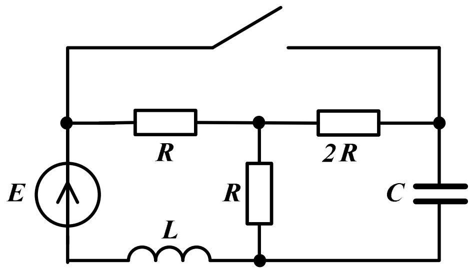


Рисунок 1. Схема электрической цепи II-го порядка

Дано:

$R = 35\,\text{Ом}; L = 0.6\,\text{Гн}; \text{C=500мкФ}; \text{E=200В}$

1) Ищем решения в виде:

$$i_{\mathrm{L}}(t) = i_{\mathrm{Lсв}}(t) + i_{\mathrm{Lпр}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + i_{\mathrm{L}}(\infty)$$

$$U_{\mathrm{C}}(t) = U_{\mathrm{Ссв}}(t) + U_{\mathrm{Спр}} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + U_{\mathrm{C}}(\infty)$$

2) $i_{\mathrm{Lпр}} = i_{\mathrm{L}}(\infty); U_{\mathrm{Спр}} = U_{\mathrm{C}}(\infty)$ *(см. рис. 2) определяем принуждённую составляющую в схеме после коммутации (индуктивность заменяется на закоротку, емкость-разрыв):*

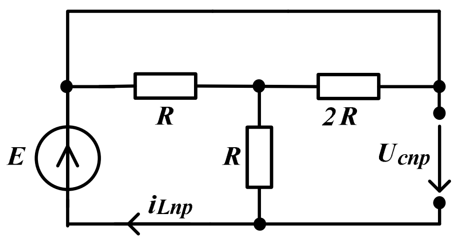


Рисунок 2. Схема для определения принужденной составляющей

По закону Ома найдем ток $i_{\mathrm{Lпр}}$:

$$i_{\mathrm{Lпр}} = \frac{E}{R + \dfrac{2 \cdot R \cdot R}{2 \cdot R + R}} = 3.429\,\text{А}$$

По методу разброса определим ток $i_{\mathrm{Rпр}}$:

$$i_{\mathrm{Rпр}} = i_{\mathrm{Lпр}} \cdot \frac{R}{2 \cdot R + R} = 1.143\,\text{А}$$

По II закону Кирхгофа определим напряжение $U_{\mathrm{Спр}}$:

$U_{\text{Cпр}} = i_{\text{Lпр}} \cdot R + i_{\text{Rпр}} \cdot 2 \cdot R = 200\,\text{В}$ или $U_{\text{Cпр}} = E = 200\,\text{В}$

3) Определяем корень характеристического уравнения p *(см. рис. 3) через входное сопротивление* $Z(p) = 0$ *в схеме после коммутации (источник ЭДС заменяется на закоротку, источник тока - разрыв):*

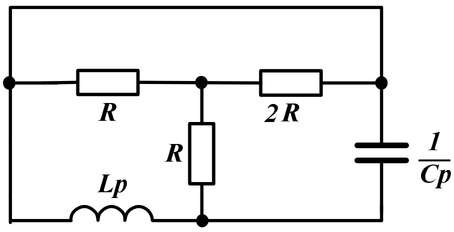


Рисунок 3. Схема для определения корня характеристического уравнения

$$Z(p) = \frac{R \cdot 2 \cdot R}{3 \cdot R} + R + \frac{L \cdot p \cdot \dfrac{1}{C \cdot p}}{L \cdot p + \dfrac{1}{C \cdot p}} = 0;$$

$p_1 = -17.14 - j55.13\ \text{с}^{-1}$; $p_2 = -17.14 + j55.13\ \text{с}^{-1}$

- корни комплексно-сопряженные, процесс колебательный.

4) Определяем константы интегрирования A_1 и A_2; B_1 и B_2 *из начальных условий:*

4.1) Определяем ННУ (см. рис. 4) в схеме до коммутации (индуктивность заменяется на закоротку, емкость - разрыв):

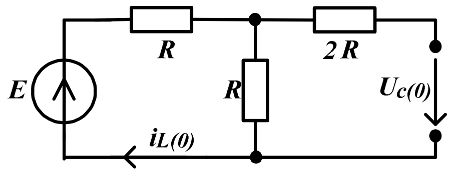


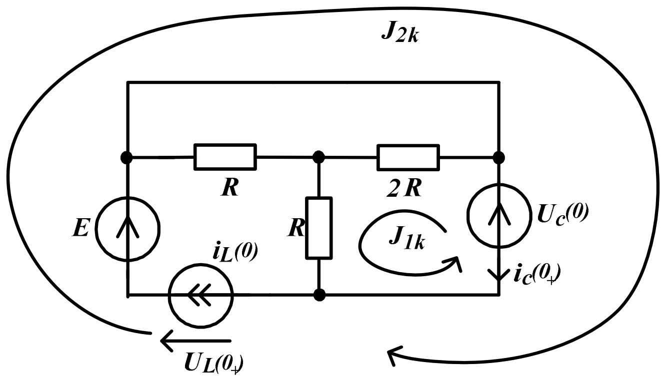
Рисунок 4. Схема для определения ННУ

По закону Ома определяем $i_{\text{L}}(0)$ и $U_{\text{C}}(0)$:

$$i_{\text{L}}(0) = \frac{E}{2 \cdot R} = 2.857\,\text{А}$$

$$U_{\text{C}}(0) = i_{\text{L}}(0) \cdot R = 100\,\text{В}$$

4.2) Определяем ЗНУ $i_{\text{C}}(0+), U_{\text{L}}(0+)$ *(см. рис. 5) в схеме после коммутации (индуктивность заменяется на источник тока, емкость - источник ЭДС):*



или

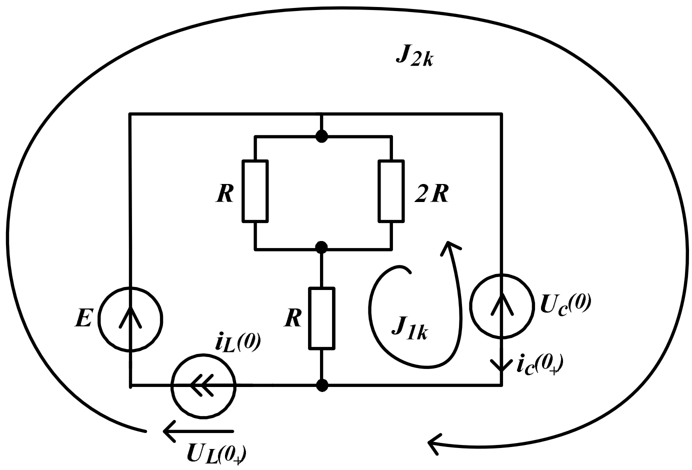


Рисунок 5. Схема для определения ЗНУ

По методу контурных токов определим ток $i_{\text{C}}(0+)$:

$i_{\text{C}}(0+) = -J_{1\text{K}} + J_{2\text{K}} = 1.143\,\text{А}$,

где $J_{1\text{K}} = \dfrac{U_{\text{C}}(0)}{\dfrac{R\cdot 2\cdot R}{3\cdot R} + R} = 1.714\,\text{А}$; $J_{2\text{K}} = i_{\text{L}}(0) = 2.857\,\text{А}$

По II закону Кирхгофа определим напряжение $U_{\text{L}}(0+)$ (по внешнему контуру):

$U_{\text{L}}(0+) = E - U_{\text{C}}(0) = 100\,\text{В}$

Для того, чтобы определить постоянные интегрирования A_1, A_2, B_1, B_2 составим системы уравнений:

$$\begin{cases} i_{\text{L}}(0) = A_1 + A_2 + i_{\text{Lпр}} \\ \dfrac{U_{\text{L}}(0+)}{L} = A_1\cdot p_1 + A_2\cdot p_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} U_{\text{C}}(0) = B_1 + B_2 + U_{\text{Cпр}} \\ \dfrac{i_{\text{C}}(0+)}{C} = B_1\cdot p_1 + B_2\cdot p_2 \end{cases}$$

Далее составляем матрицы:

$$Zi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},\ Xi = \begin{pmatrix} i_{\text{L}}(0) - i_{\text{Lпр}} \\ \dfrac{U_{\text{L}}(0+)}{L} \end{pmatrix},\ A = Zi^{-1}\cdot Xi = \begin{pmatrix} -0.286 + j1.423 \\ -0.286 - j1.423 \end{pmatrix}\text{А}$$

где Zi - матрица коэффициентов для постоянных интегрирования тока в индуктивности, Xi - матрица правых частей, A - постоянные интегрирования для тока $i_L(t)$.

$$ZU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},\ XU = \begin{pmatrix} U_C(0) - U_{Cпр} \\ \dfrac{i_C(0+)}{C} \end{pmatrix},\ B = ZU^{-1} \cdot XU = \begin{pmatrix} -50 + j5.188 \\ -50 - j5.188 \end{pmatrix} \text{В}$$

где ZU - матрица коэффициентов для постоянных интегрирования напряжения на емкости, XU - матрица правых частей, B - постоянные интегрирования для напряжения $U_C(t)$.

5) Записываем окончательное решение и строим график $i_L(t), U_C(t)$ (см. рис. 6, 7):

$$i_L(t) = 2 \cdot \mathrm{Re}(A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t}) + i_{Lпр},$$

$$U_C(t) = 2 \cdot \mathrm{Re}(B_1 \cdot e^{p_1 \cdot t}) + U_{Cпр}$$

Постоянная времени:

$$\tau = \frac{1}{|\max(\mathrm{Re}(p_1))|} = 0.058\text{с}$$

Шаг:

$$t = 0, 0.01 \cdot \tau .. 4 \cdot \tau$$

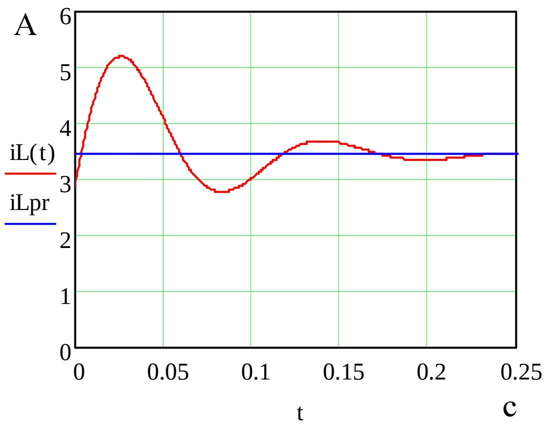


Рисунок 6. График тока через индуктивность $i_L(t)$

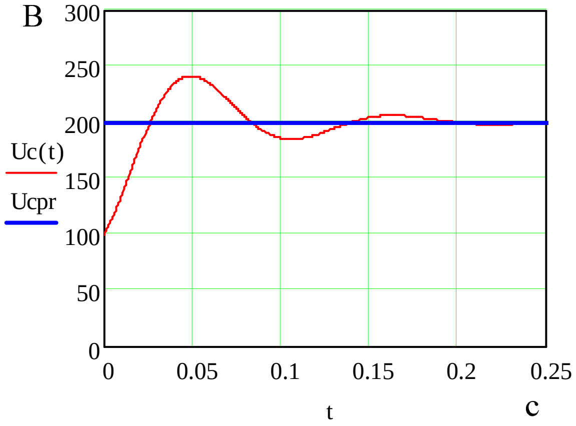


Рисунок 7. График напряжения на конденсаторе $U_C(t)$

• Метод переменных состояния.

При постоянном воздействии $E = U_0$ определим методом переменных состояния (см. рис. 8) ток индуктивности $i_{\mathrm{L}}(t)$ и напряжение на емкости $U_{\mathrm{C}}(t)$.

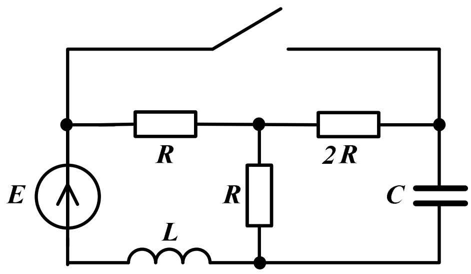


Рисунок 8. Схема электрической цепи II-го порядка

Используется схема после коммутации (см. рис. 9), обозначим токи и напряжения $i_{\mathrm{L}}(t), i_{\mathrm{C}}(t), U_{\mathrm{L}}(t), U_{\mathrm{C}}(t)$.

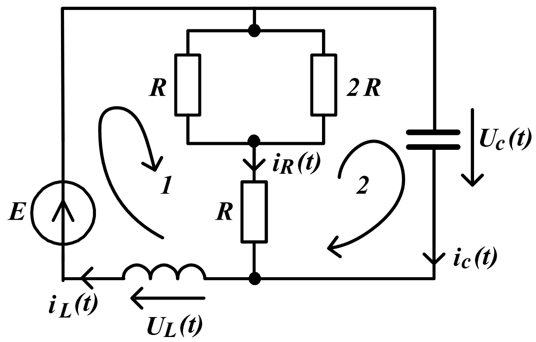


Рисунок 9. Схема для составления уравнений по законам Кирхгофа

Сложим сопротивления во второй ветви и получим $R_{\text{Э}} = \dfrac{2 \cdot R \cdot R}{2 \cdot R + R} + R = 58.33\text{Ом}$.

По I и II законам Кирхгофа составляем уравнения:

$i_{\mathrm{R}}(t) = i_{\mathrm{L}}(t) - i_{\mathrm{C}}(t)$

$U_{\mathrm{L}}(t) + i_{\mathrm{R}}(t) \cdot R_{\text{Э}} = E$

$-i_{\mathrm{R}}(t) \cdot R_{\text{Э}} + U_{\mathrm{C}}(t) = 0$

Далее с помощью специальных функций Given и Find решаем систему дифференциальных уравнений первого порядка, записанную в форме Коши, и находим необходимые токи и напряжения. Переменные состояния – это ток $i_{\mathrm{L}}(t)$ и напряжение $U_{\mathrm{C}}(t)$.

Матрица состояния A и вектор правых частей B:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{R_{\text{Э}} \cdot C} & \dfrac{1}{C} \\ \dfrac{-1}{L} & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{E}{L} \end{pmatrix}.$$

Проверка принужденных составляющих $i_{\text{Lпр}}, U_{\text{Спр}}$:

$$-A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 200 \\ 3.429 \end{pmatrix}$$

Как видим, принужденные составляющие совпали с классическим методом.

Проверка корней характеристического уравнения p_1, p_2:

$$\lambda = eigenvals(A) = \begin{pmatrix} -17.143 + j55.131 \\ -17.143 - j55.131 \end{pmatrix}$$

где λ - собственные числа матрицы A.

Записываем уравнение состояния $D(t,x)$:

$$D(t,x) = A \cdot x + B$$

Количество точек:

$$N = 1000$$

Матрица начальных условий:

$$x\text{o} = \begin{pmatrix} U_{\text{C}}(0) \\ i_{\text{L}}(0) \end{pmatrix}$$

Постоянная времени:

$$\tau = \frac{1}{\left|\max(\text{Re}(\lambda_1))\right|} = 0.058\text{с}$$

Период:

$$T = 4 \cdot \tau$$

По методу Рунге-Кутта ищем решение в виде:

$$\text{x} := \text{rkfixed}(\text{xo}, 0, \text{T}, \text{N}, \text{D})$$

Время:

$$\text{t} := \text{x}^{\langle 0 \rangle}$$

$$\begin{pmatrix} \text{iC}_\text{i} \\ \text{UL}_\text{i} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{C} & 0 \\ 0 & \text{L} \end{pmatrix} \cdot \text{D}\left[\text{t}_\text{i}, \begin{bmatrix} \left(\text{x}^{\langle 1 \rangle}\right)_\text{i} \\ \left(\text{x}^{\langle 2 \rangle}\right)_\text{i} \end{bmatrix}\right]$$

Далее строим графики $U_{\text{L}}(t), i_{\text{C}}(t), U_{\text{C}}(t), i_{\text{L}}(t)$ (см. рис. 10-13):

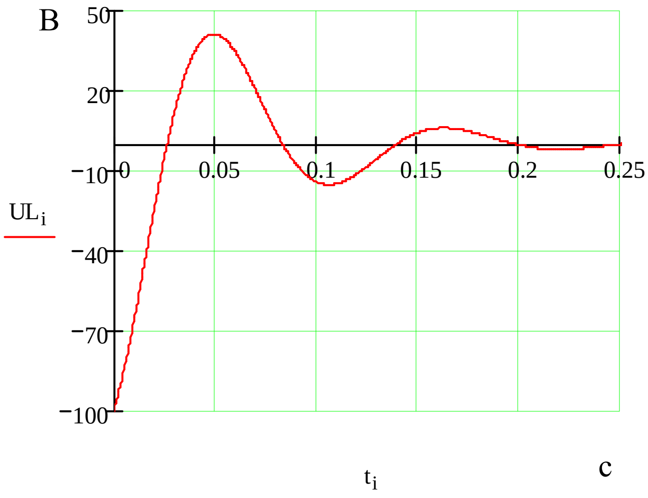


Рисунок 10. График напряжения на индуктивности $U_L(t)$

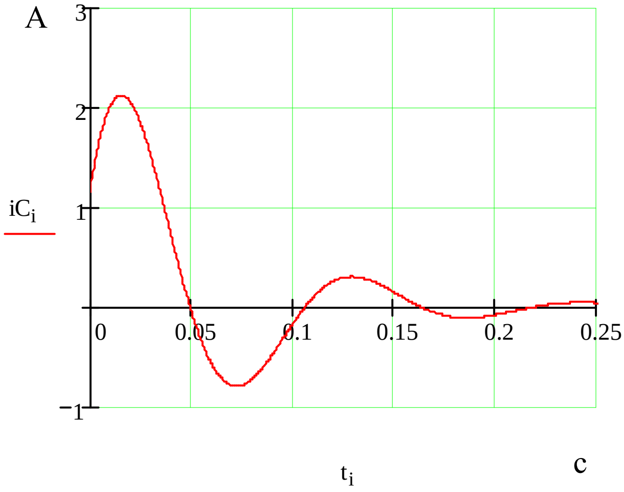


Рисунок 11. График тока через емкость $i_C(t)$

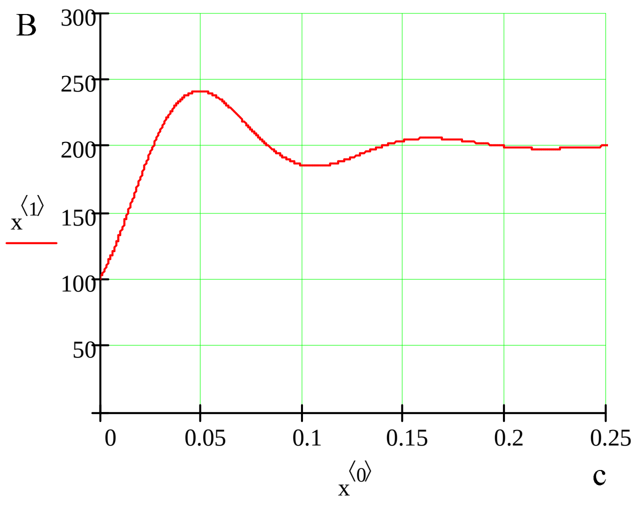


Рисунок 12. График напряжения на емкости $U_C(t)$

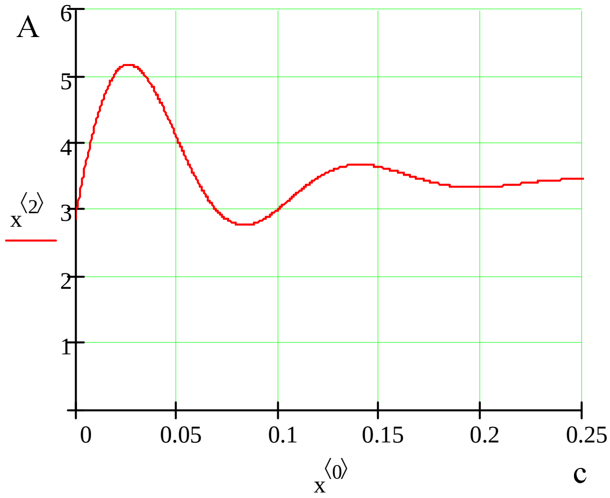


Рисунок 13. График тока через индуктивность $i_L(t)$

где: $x^{\langle 0 \rangle}$ - время, $x^{\langle 1 \rangle}$ - напряжение на емкости, $x^{\langle 2 \rangle}$ - ток в индуктивности.