

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

## **ЧАСТОТНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Методические указания к выполнению лабораторной работы  
для студентов, обучающихся по направлениям  
210100 «Электроника и наноэлектроника»  
и 201000 «Биотехнические системы и технологии»

*Составитель* **О.С. Вадутов**

Издательство  
Томского политехнического университета  
2014

УДК 621.078

Частотные и временные характеристики звеньев и систем второго порядка: метод. указания к выполнению лаб. работы для студентов, обучающихся по направлениям 210100 «Электроника и нанoeлектроника» и 201000 «Биотехнические системы и технологии» / сост. О.С. Вадутов; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 9 с.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры промышленной и медицинской электроники « 26 » марта 2012 года, протокол № 10.

Зав. кафедрой ПМЭ,  
доктор технических наук,  
профессор

\_\_\_\_\_ *Г.С. Евтушенко*

*Рецензент*

Кандидат технических наук  
доцент кафедры ПМЭ ТПУ  
*А.Ф. Готов*

**Цель работы.** Целью лабораторной работы является изучение частотных и временных характеристик апериодического и колебательного звеньев и системы автоматического управления второго порядка.

## 2.1. Динамические звенья и системы второго порядка

### Апериодическое звено второго порядка

Дифференциальное уравнение, описывающее апериодическое звено второго порядка, записывают в виде

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t),$$

где  $k$  – коэффициент передачи,  $T_1$  и  $T_2$  – постоянные времени. Таким уравнением описывается, например,  $RC$ -цепь, схема которой показана на рис. 2.1, а.

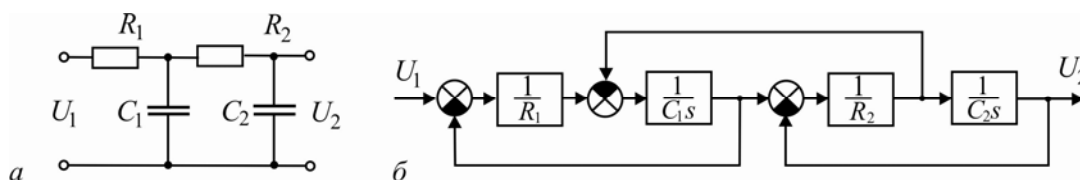


Рис.2.1. Схемы апериодического звена второго порядка:  
а – принципиальная; б – операторно-структурная

Передаточная функция апериодического звена второго порядка имеет вид

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Отсюда видно, что апериодическое звено второго порядка представляет собой последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка и имеет два действительных полюса:  $s_1 = -1/T_1$ ,  $s_2 = -1/T_2$ .

Переходная функция апериодического звена второго порядка определяется выражением

$$h(t) = k \cdot \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right), \quad t \geq 0.$$

График переходной функции, построенный по этому выражению, показан на рис. 2.2.

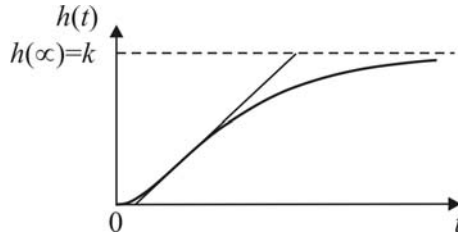


Рис.2.2. Переходная функция аperiodического звена второго порядка

Частотные характеристики аperiodического звена второго порядка описываются формулами:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)};$$

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}}; \varphi(\omega) = -\text{arctg}(T_1\omega) - \text{arctg}(T_2\omega);$$

$$L(\omega) = 20 \lg W(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T_1^2\omega^2} - 20 \lg \sqrt{1 + T_2^2\omega^2}.$$

### Колебательное звено

Колебательное звено содержит два элемента, которые способны запасать энергию двух видов и взаимно обмениваться этими запасами. При этом обычно процесс обмена запасами энергии сопровождается переходом одного вида энергии в другой, например кинетической энергии в потенциальную, и наоборот.

Примерами колебательного звена, например, могут служить: однозвенный  $LC$ -фильтр совместно с нагрузкой, соленоид, состоящий из катушки, якоря и пружины, и механическая система, содержащая массу, пружину и успокоительное устройство (рис. 2.3).

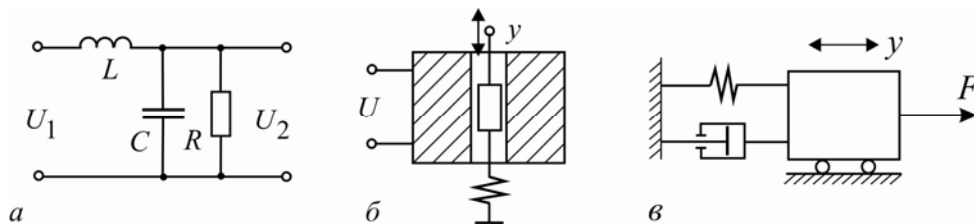


Рис.2.3. Колебательные звенья:

*a* –  $LC$ -фильтр; *б* – соленоид; *в* – механическая система

Дифференциальное уравнение, описывающее колебательное звено, обычно приводится к виду

$$T_0^2 \frac{d^2 y(t)}{dt} + 2\xi T_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (2.1)$$

где  $k$  – коэффициент передачи,  $T_0$  – постоянная времени,  $\xi$  – относительный коэффициент демпфирования ( $0 < \xi < 1$ ).

Уравнению (2.1) соответствует передаточная функция

$$W(s) = \frac{k}{T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1} = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Полюсы колебательного звена являются комплексными:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta,$$

где  $\alpha = \xi/T_0$  – коэффициент затухания;  $\beta = \sqrt{1 - \xi^2}/T_0$  – собственная частота колебаний звена.

Переходная функция колебательного звена определяется формулой

$$h(t) = k \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin\left(\beta t + \arctg \frac{\beta}{\alpha}\right) \right), \quad t \geq 0.$$

График типичной переходной функции, рассчитанной по этой формуле, представлен на рис. 2.4.

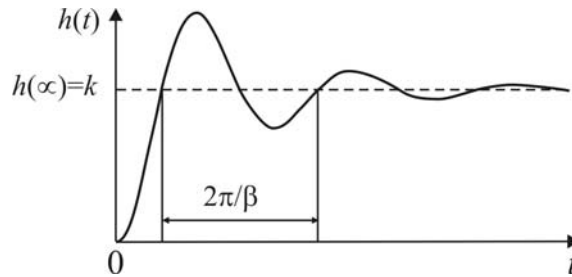


Рис.2.4. Переходная функция колебательного звена

Частотные характеристики колебательного звена описываются функциями:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T_0^2 \omega^2 + j2\xi T_0 \omega};$$

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{[1 - T_0^2 \omega^2]^2 + (2\xi T_0 \omega)^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T_0 \omega}{1 - T_0^2 \omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T_0}, \\ -\pi - \arctg \frac{2\xi T_0 \omega}{1 - T_0^2 \omega^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T_0}, \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \lg W(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{[1 - T_0^2 \omega^2]^2 + (2\xi T_0 \omega)^2};$$

## Следящая система

Рассмотрим следящую систему, упрощенная принципиальная и операторно-структурная схемы которой показаны на рис. 2.5.

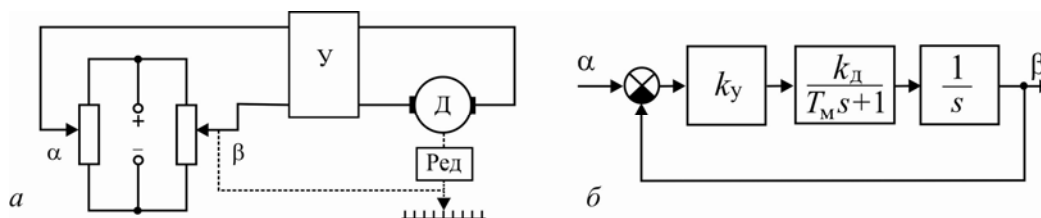


Рис.2.5. Схемы следящей системы:

*а – упрощенная принципиальная; б – операторно-структурная*

Объектом управления в данной системе является двигатель постоянного тока, описываемый передаточной функцией

$$W_o(s) = \frac{k_d}{(T_d s + 1)s}.$$

Пренебрегая инерционностью, примем передаточную функцию электронного усилителя в следующем виде:

$$W_p(s) = k_y.$$

Передаточная функция следящей системы в замкнутом состоянии равна

$$W_3(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k_y k_d}{(T_d s + 1)s + k_y k_d},$$

где  $A(s)$ ,  $B(s)$  – изображения входной и выходной величин.

В зависимости от значений параметров процессы в следящей системе могут иметь апериодический или колебательный характер. Найдём соотношения между параметрами, при которых в системе наблюдается апериодический или колебательный характер переходных процессов. Для этого найдем корни характеристического уравнения

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k_y k_d T_d}}{2T_d}.$$

Если параметры системы таковы, что  $k_y < 1/4k_d T_d$ , то корни будут вещественные, и переходный процесс будет апериодическим. Если выполняется условие  $k_y > 1/4k_d T_d$ , то переходный процесс будет колебательным.

## 2.2. Выполнение лабораторной работы

### Методические указания

Схемы моделирования исследуемых в лабораторной работе звеньев и систем показаны на рис. 2.6.

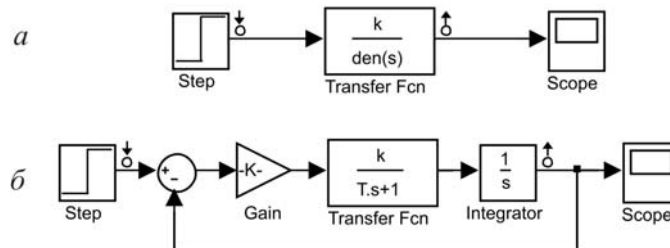


Рис.2.6. Схемы моделирования:

*а* – апериодического и колебательного звеньев; *б* – следящей системы

Для выполнения программы лабораторной работы предлагается использовать инструмент **Simulink LTI-Viewer**.

Параметры исследуемых в лабораторной работе звеньев и систем задаются преподавателем.

### Программа

1. Пронаблюдать частотные характеристики (АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ) апериодического звена второго порядка с заданными значениями  $k$ ,  $T_1$  и  $T_2$ . Определить коэффициент передачи звена на частоте, при которой звено имеет отставание по фазе  $\varphi = -\pi/2$ . Скопировать частотные характеристики.

2. Пронаблюдать переходную функцию апериодического звена второго порядка с заданными значениями  $k$ ,  $T_1$  и  $T_2$ . Определить интервал времени, за которое выходная величина  $y(t)$  достигает значения  $0,95 \cdot y(\infty)$ . Скопировать переходную функцию.

3. Пронаблюдать частотные характеристики (АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ) колебательного звена с заданными значениями  $k$ ,  $\xi$  и  $T_0$ . Определить значения АЧХ  $W(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi(\omega)$  при значениях  $\omega = 0,1/T_0$  рад/с,  $\omega = 1/T_0$  рад/с,  $\omega = 10/T_0$  рад/с. Скопировать частотные характеристики.

4. Пронаблюдать переходную функцию колебательного звена с заданными значениями  $k$ ,  $\xi$  и  $T_0$ . Определить время достижения первого максимума. Определить интервал времени, за которое выходная величина  $y(t)$  входит в интервал  $[0,95 \cdot y(\infty), 1,05 \cdot y(\infty)]$  и в дальнейшем из него не выходит. Скопировать переходную функцию.

5. Изменяя относительный коэффициент затухания  $\xi$  колебательного звена от 0 до 1 при заданных значениях  $k$  и  $T_0$ , найти:

- значения коэффициента передачи (значения АЧХ)  $W(\omega)$  на частоте  $\omega = 1/T_0$  рад/с;

- значения полюсов колебательного звена.

Полученные данные занесите в таблицу. Построить траекторию полюсов на комплексной плоскости. Сделать выводы.

6. Изменяя постоянную времени  $T_0$  колебательного звена от  $0,1T_0$  до  $2T_0$  при заданных значениях  $k$  и  $\xi$ , найти значения полюсов колебательного звена. Полученные данные занести в таблицу. Построить траекторию полюсов на комплексной плоскости. Сделать вывод.

7. Составить модель следящей системы согласно рис. 2.6, б. с заданными значениями параметров  $k_d$  и  $T_d$ . Исследовать влияние параметра  $k_y$  на характер переходных процессов в системе. Сделать вывод.

### 2.3. Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что для апериодического звена второго порядка и колебательного звеньев производная переходной функции  $dh(t)/dt = 0$  при  $t = 0$ .

2. Как связаны корни характеристического уравнения и постоянные времени апериодического звена второго порядка?

3. Как изменяются корни характеристического уравнения и характер переходной функции колебательного звена при изменении относительного коэффициента затухания  $\xi$  от 0 до 1?

4. Как изменится характер переходного процесса на выходе колебательного звена, если увеличить отношение  $\beta/\alpha$  мнимой части комплексного корня к его вещественной части?

5. Как изменится период колебаний  $T$  переходной составляющей на выходе колебательного звена при увеличении относительного коэффициента затухания  $\xi$ ?



Учебное издание

## ЧАСТОТНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Методические указания  
к выполнению лабораторной работы

*Составитель*

**ВАДУТОВ Олег Самигулович**

**Авторская редакция**

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать Хегох. Усл.печ.л. 0,52. Уч.-изд.л. 0,47.

Заказ . Тираж экз.




Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Система менеджмента качества

Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, [www.tpu.ru](http://www.tpu.ru)