

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправленное и дополненное

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор
заведующий кафедрой ТОЭ ТУСУРа

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук, профессор кафедры
медицинской и биологической кибернетики СибГМУ

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2011

© Вадутов О.С., 2011

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2014

*Я слышу и забываю.
Я вижу и запоминаю.
Я делаю и понимаю.*
Конфуций

Всё, абсолютно всё, что я понимаю,
я понимаю только потому, что люблю.
Лев Николаевич Толстой

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для успешной работы в области цифровой обработки сигналов современный специалист по электронной технике должен обладать знаниями и навыками практической работы по следующим разделам науки и техники:

- цифровая электроника и микропроцессорная техника;
- теория сигналов и алгоритмы их цифровой обработки;
- языки программирования для микроконтроллеров.

Дисциплина «Математические основы обработки сигналов» имеет своей целью сформировать общие представления, первичные знания, умения и навыки студентов по основам теории сигналов и методам их обработки. В соответствии с учебным планом по направлению 210100 «Электроника и нанoeлектроника» данная дисциплина изучается раньше, чем дисциплины по электронике и микропроцессорной технике. Этим в основном объясняется содержание самой дисциплины.

Данное учебное пособие представляет практикум по дисциплине «Математические основы обработки сигналов». Пособие содержит методические указания к четырнадцати работам, которые можно разделить на две части. Первые шесть работ посвящены методам анализа и преобразования непрерывных сигналов. В остальных восьми работах рассматриваются методы анализа дискретных моделей и методы цифровой обработки сигналов. Целью работ является изучение математических методов анализа и преобразования сигналов.

Методические указания к каждой работе включают теоретический материал, необходимый для выполнения работы, и указания по его использованию при выполнении программы работы. По каждой работе даны контрольные вопросы, которые могут служить руководством при подготовке к ней и углублению знаний по рассматриваемому вопросу.

В пособии приведен список литературы, которую рекомендуется использовать при подготовке к работам и выполнении отчетов по ним.

Все работы выполняются на персональном компьютере с помощью системы программирования MathCAD. Ее популярность в научной среде обеспечена рядом достоинств:

- сравнительной простотой за счет использования традиционных для математики способов записи функций и выражений;
- отсутствием особых требований к пользователю как к программисту;
- широким набором встроенных функций для решения любых математических задач и инструментами построения графиков различных типов;
- возможностью создания текстовых комментариев и формирования отчетов, статей и докладов в текстовом редакторе.

При формировании математических моделей исследуемых сигналов и алгоритмов цифровой обработки сигналов применяются стандартные функции и операторы, имеющиеся в системе MathCAD.

Учебное пособие рекомендуется использовать для самостоятельного изучения соответствующих разделов и организации лабораторного практикума по дисциплине «Математические основы обработки сигналов». При использовании пособия для проведения лабораторного практикума заключительным этапом работы является подготовка отчета и собеседование с преподавателем. Отчет по работе должен содержать:

- 1) цель работы;
- 2) основные формулы, таблицы с данными расчета, графики и выводы по всем пунктам задания;
- 3) выводы и оценку результатов по работе в целом.

1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1.1. Цель работы

В настоящее время при формировании математической модели сигнала наибольшее распространение получила система, в которой базис образуют ортогональные гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Это объясняется тем, что гармоническая функция является единственной, которая сохраняет свою форму при прохождении через линейную электрическую цепь. Представление произвольного сигнала в виде суммы гармонических колебаний называют *спектральным разложением* этого сигнала в базисе гармонических функций, или *гармоническим анализом* сигнала.

Целью работы является определение коэффициентов ряда Фурье и построение аппроксимирующей функции для периодического сигнала, образованного из импульсов заданной формы.

1.2. Основные понятия и расчетные формулы

Пусть исследуемый сигнал описывается периодической функцией времени $x(t)$, которая в пределах периода T ее изменения удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда функцию $x(t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right], \quad (1.1)$$

коэффициенты которого определяются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt; \quad (1.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt; \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt. \quad (1.4)$$

Таким образом, в общем случае периодический сигнал $x(t)$ содержит в себе не зависящую от времени постоянную составляющую $a_0/2$ и бесконечный набор гармонических составляющих с частотами $\omega_n = n 2\pi/T$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), кратными *основной* частоте $\omega_1 = 2\pi/T$ периодического сигнала.

Распространена и другая форма записи ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right), \quad (1.5)$$

где амплитуды A_n и фазы φ_n гармонических составляющих вычисляются по формулам:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \arg(a_n - jb_n).$$

Гармоническую составляющую

$$x_1(t) = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right)$$

называют *основной гармоникой*, а гармоническую составляющую

$$x_n(t) = A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right)$$

– n -й гармоникой.

Совокупности величин A_n и φ_n ($n = 1, 2, \dots$) называют соответственно *амплитудным* и *фазовым* частотными спектрами сигнала или, иначе, спектром амплитуд и спектром фаз. Частотные спектры являются функциями, зависящими от номера гармоники n как независимой переменной. Графически частотные спектры изображают в виде отрезков A_n и φ_n , проведенных перпендикулярно к оси, на которую наносятся значения $\omega = n \omega_1$ (рис. 1.1). Графическое изображение амплитудного и фазового частотных спектров принято называть *амплитудной* и *фазовой спектральными диаграммами*.

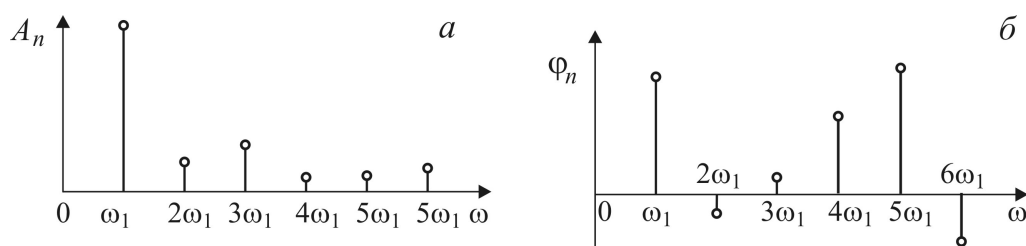


Рис. 1.1. Амплитудная и фазовая спектральные диаграммы

Ряд Фурье обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратической погрешности приближение к исходной функции. Это означает, что если число членов ряда Фурье ограничено и исходный сигнал $x(t)$ аппроксимирован функцией

$$x_N^*(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right),$$

то наименьшая средняя квадратическая ошибка

$$\sigma^2 = \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t) - x_N^*(t)]^2 dt \quad (1.6)$$

имеет место в том случае, когда коэффициенты ряда Фурье определены по формулам (1.2)–(1.4).

При увеличении числа членов ряда Фурье до бесконечности средняя квадратическая ошибка σ^2 стремится к нулю. Однако это вовсе не означает, что ряд точно стремится к функции при любом значении времени t . Например, если функция $x(t)$ имеет разрыв в точке t_1 , то есть

$$x(t_1 - 0) \neq x(t_1 + 0),$$

то ряд Фурье в этой точке, согласно теореме Дирихле, сходится к среднеарифметическому значению:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N^*(t_1) = \frac{x(t_1 - 0) + x(t_1 + 0)}{2}.$$

Таким образом, сходимость ряда Фурье во многом зависит от аналитических свойств разлагаемой функции. Более гладкой функции $x(t)$ соответствует лучшая сходимость ее ряда Фурье.

Средняя мощность периодического сигнала

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (1.7)$$

если известен амплитудный спектр сигнала, может быть рассчитана, согласно теореме Парсеваля, по формуле

$$P_{\text{cp}} = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Для сигнала, описываемого усеченным рядом Фурье, можно найти приближенное значение средней мощности

$$P_{\text{cp}}^* = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2. \quad (1.8)$$

1.3. Методические указания

В настоящей работе проводится гармонический анализ периодического сигнала, образованного из импульсов заданной формы (см. приложение П.1). На рис. 1.2 для примера изображен график сигнала, полученного из периодическим повторением одиночных импульсов.

При расчете коэффициентов ряда Фурье требуется задать начальный момент t_0 периода интегрирования в формулах (1.2)–(1.4). Как правило, значение t_0 выбирают из условия упрощения вычислений. Для ис-

следующих в работе сигналов рекомендуем принять $t_0 = 0$. При этом нижний и верхний пределы интегрирования в формулах (1.2)–(1.4) будут соответственно равны 0 и T_c .

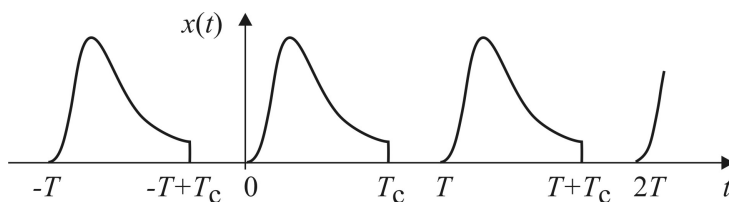


Рис. 1.2. Пример периодического сигнала

Обращаем внимание на то, что стандартная функция $\arctg x$ в системе программирования MatchCAD определяет главные значения, ограниченные пределами:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctg x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому, если при определении фазы гармоники использовать рекомендуемую в литературе формулу

$$\varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n},$$

можно получить неверные результаты.

Чтобы получить правильные результаты при использовании функции $\arctg x$, следует учесть знаки коэффициентов a_n, b_n и внести необходимые поправки в расчетные формулы.

При выполнении работы предлагаем использовать имеющуюся в системе MatchCAD функцию

$$\varphi_n = \arg(a_n - jb_n),$$

которая определяет значения φ_n от $-\pi$ до π .

1.4. Программа работы

1. Получить аналитические выражения для коэффициентов a_0, a_n, b_n разложения в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. 1.3). Рассчитать значения A_n, φ_n первых пяти гармоник для произвольных τ, T .

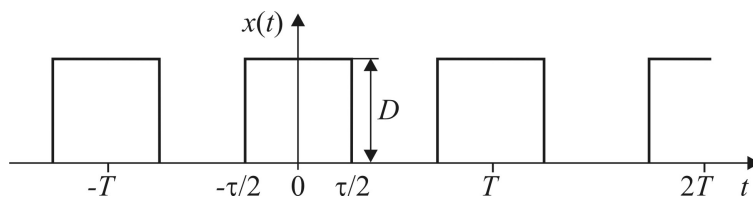


Рис. 1.3. Последовательность прямоугольных импульсов

Примечание. Даны пункт программы выполняется при подготовке к лабораторному занятию.

2. Сформировать в среде MathCAD математическую модель периодического сигнала $x(t)$, заданного для анализа в данной лабораторной работе. Построить график сигнала.

Примечание. Форма исследуемого сигнала и значения параметров сигнала задаются преподавателем (возможные варианты сигналов приведены в приложении П.1).

3. Составить программу для расчета коэффициентов a_n, b_n, A_n, φ_n ($n = 0, 1, \dots, 20$) ряда Фурье для сигнала $x(t)$. Рассчитать значения этих коэффициентов. По полученным данным построить амплитудный и фазовый спектральные диаграммы.

4. Образовать аппроксимирующий сигнал $x_N^*(t)$ путем суммирования постоянной составляющей и заданного числа N первых гармоник. Построить на одном рисунке графики исходного $x(t)$ и аппроксимирующего $x_N^*(t)$ сигналов для $N = 5, N = 10$ и $N = 20$. Сделать выводы.

5. Построить графики сигналов ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - x_N^*(t)$ для $N = 5, N = 10$ и $N = 20$.

6. По формуле (1.6) рассчитать значения средней квадратической ошибки для $N = 5, N = 10$ и $N = 20$. Сделать выводы о влиянии количества учитываемых гармоник на величину средней квадратической ошибки.

7. По формуле (1.7) рассчитать среднюю мощность исследуемого сигнала. По формуле (1.8) рассчитать среднюю мощность периодического сигнала, описываемого усеченным рядом Фурье, для $N = 5, N = 10$ и $N = 20$. Сделать выводы о влиянии количества учитываемых гармоник на величину средней мощности сигнала.

1.5. Контрольные вопросы и задания

1. Опишите основные свойства периодических сигналов.
2. Изобразите графики нескольких первых базисных функций ряда Фурье.
3. Поясните особенности разложения нечетных и четных функций в ряд Фурье.
4. Запишите формулы, связывающие коэффициенты тригонометрического и комплексного рядов Фурье.
5. Как отразится изменение положения отсчета времени $t = 0$ периодического сигнала на значениях A_n и φ_n ряда Фурье?

6. Как изменится спектр периодического сигнала, если изменить масштаб по оси времени?

7. Как изменится спектр последовательности прямоугольных импульсов, если уменьшить длительность τ и период T импульсов в два раза?

8. Почему разрывные функции не могут иметь точного приближения рядами Фурье?

9. В чем состоит эффект Гиббса?

2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

2.1. Цель работы

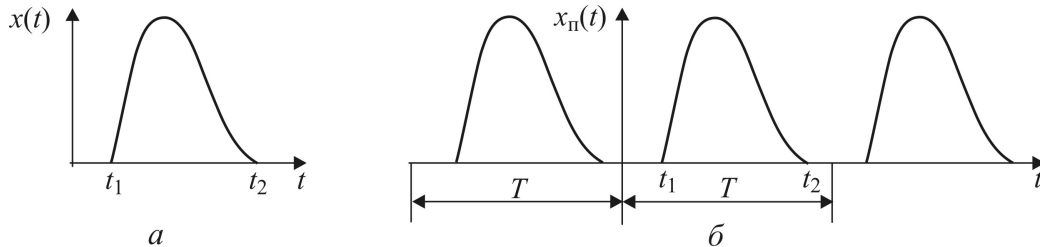
Большинство сигналов, подвергающихся обработке, имеет непериодический характер. Особенностью гармонического анализа непериодических сигналов является то, что связь между временной функцией $x(t)$ и ее образом $X(j\omega)$ в области частот определяется интегральными соотношениями, составляющими пару преобразований Фурье.

Целью работы является изучение прямого и обратного преобразований Фурье и приобретение практических навыков их использования для расчета спектральной характеристики $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$ и восстановления функции $x(t)$ по спектральной характеристике $X(j\omega)$.

2.2. Основные понятия и расчетные формулы

Пусть сигнал описывается функцией времени $x(t)$, заданной на интервале (t_1, t_2) (рис. 2.1, а). Для функции выполняется условие абсолютной интегрируемости

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt = M < \infty.$$



*Рис. 2.1. Образование вспомогательной периодической функции:
а – непериодическая функция; б – периодическая функция*

Путем повторения функции $x(t)$ с периодом $T > t_2 - t_1$ образуем вспомогательную периодическую функцию

$$x_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT).$$

Фрагмент функции $x_n(t)$ показан на рис. 2.1, б. Очевидно, что

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_n(t).$$

Периодическую функцию $x_{\text{п}}(t)$ можно описать с помощью ряда Фурье в комплексной форме:

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.1)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$, а коэффициенты c_n рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x_{\text{п}}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.2)$$

Подставив (2.2) в (2.1) и заменив $T = 2\pi/\omega_1$, получим

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} x_{\text{п}}(\tau) e^{-jn\omega_1 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_1 t} \omega_1 \quad (2.3)$$

В пределе при $T \rightarrow \infty$ угловая частота $\omega_1 = 2\pi/T$ превращается в бесконечно малое приращение частоты $d\omega$, частота n -ой составляющей ряда $n\omega_1$ – в текущую частоту ω , а операция суммирования переходит в операцию интегрирования. При этом расстояние между спектральными линиями, равное основной частоте ω_1 , становится бесконечно малым, а спектр – сплошным.

Таким образом, при $T \rightarrow \infty$ из формулы (2.3) будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] d\omega.$$

С учетом, что значения t_1 и t_2 не определены, введем обозначение

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.4)$$

Тогда

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.5)$$

Формулы (2.4) и (2.5) устанавливают однозначное соответствие между представлением $x(t)$ сигнала во временной области и его представлением $X(j\omega)$ в области частот. Формула (2.4) осуществляет прямое преобразование и позволяет найти спектральную характеристику $X(j\omega)$, соответствующую сигналу $x(t)$. Символически это записывается следующим образом:

$$X(j\omega) = \mathfrak{F} \{x(t)\}.$$

При известной спектральной характеристике $X(j\omega)$ по формуле (2.5) выполняется обратное преобразование и вычисляется мгновенное значение сигнала $x(t)$. Символически это можно записать так:

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1} \{X(j\omega)\}.$$

Установлено, что сигналу $x(t)$ можно сопоставить его спектральную характеристику $X(j\omega)$ в том случае, если этот сигнал описывается абсолютно интегрируемой функцией, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Это условие существенно снижает класс допустимых сигналов. Однако имеются математические приемы, с помощью которых удается получать спектральные характеристики неинтегрируемых сигналов. Эти спектральные характеристики являются обобщенными функциями.

Спектральную характеристику $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$, используя известную формулу Эйлера, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= X(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \cdot dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \cdot dt = a(\omega) - jb(\omega). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Действительная часть

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \cdot dt \quad (2.7)$$

спектральной характеристики является четной функцией частоты, а мнимая часть

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \cdot dt \quad (2.8)$$

– нечетной функцией частоты. Отсюда следует, что модуль спектральной характеристики

$$|X(\omega)| = |X(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

является четной функцией частоты, а аргумент спектральной характеристики

$$\varphi(\omega) = \arg X(j\omega) = \arg[a(\omega) - jb(\omega)]$$

– нечетной функцией частоты.

Спектральную характеристику $X(j\omega)$ можно изобразить на комплексной плоскости в виде годографа (рис. 2.2, а). Чаще же спектральную характеристику $X(j\omega)$ представляют в виде амплитудно-частотной $X(\omega)$ и фазо-частотной $\varphi(\omega)$ спектральных характеристик (рис. 2.2, б, в). Учитывая симметричность спектральных характеристик при положительных и отрицательных значениях частоты ω , как правило, их строят только в интервале положительных значений частоты ω .

Формула (2.5) обратного преобразования Фурье предполагает интегрирование комплексных функций и поэтому не всегда удобна для непосредственных вычислений. При помощи формулы Эйлера и выражения (2.6) формулу обратного преобразования можно привести к следующему виду:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (2.9)$$

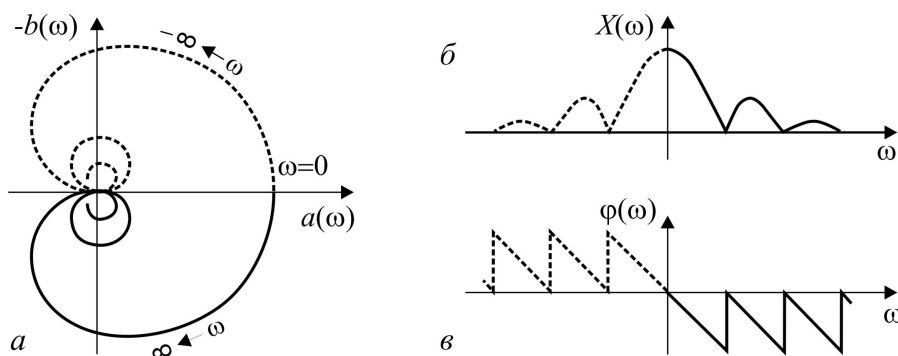


Рис. 2.2. Спектральные характеристики: а – годограф; б – амплитудная; в – фазовая

Энергия сигнала равна

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt.$$

С помощью формулы Парсеваля энергию сигнала можно выразить через его спектральную характеристику:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.10)$$

2.3. Методические указания

Программа работы предусматривает определение спектральной характеристики заданного сигнала $x(t)$ с помощью формул прямого преобразования Фурье и восстановление сигнала по спектральной характеристике с помощью формулы обратного преобразования Фурье.

Предлагаемый для исследования сигнал представляет собой одиночный импульс, заданный на интервале времени $[0, T_c]$ (см. приложение П.1). Его спектральная характеристика вычисляется по формуле (2.4), либо по формулам (2.7), (2.8), в которых нижний и верхний пределы интегрирования принимаются соответственно равными 0 и T_c . Для достижения необходимой точности вычисления спектральной характеристики на интервале $[0, T_c]$ определения сигнала берется не менее

50 отсчетов заданного сигнала. Правая граница частотного интервала $[0, \omega_c]$, на котором рассчитывается спектральная характеристика, подбирается так, чтобы амплитуды отбрасываемых гармонических составляющих не превышали 5% от максимального значения.

Для восстановления сигнала $x(t)$ по его спектральной характеристике $X(j\omega)$ используется формула (2.9) обратного преобразования Фурье. Точное восстановление заданного сигнала согласно формуле (2.9) требует интегрирования на полубесконечном интервале $[0, \infty)$. На практике интегрирование осуществляют на ограниченном интервале $[0, \omega_c]$, вследствие чего появляется ошибка восстановления. Чем больше ω_c , тем меньше ошибка.

Оценка энергии сигнала рассчитывается по формуле

$$E_x^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

2.4. Программа работы

1. Сформировать в среде MathCAD математическую модель $x(t)$ сигнала, представляющего собой импульс заданной формы.

Примечание: Форма и параметры импульса задаются преподавателем (возможные варианты сигналов приведены в приложении П.1).

2. Составить программу вычисления спектральной характеристики $X(j\omega)$ данного сигнала $x(t)$ по формулам прямого преобразования Фурье. Выбрать интервал $[0, \omega_c]$. Построить амплитудную $X(\omega)$ и фазовую $\varphi(\omega)$ спектральные характеристики.

3. Составить программу восстановления сигнала $x(t)$ по полученной спектральной характеристике $X(j\omega)$ с помощью формулы обратного преобразования Фурье. Построить графики исходного $x(t)$ и восстановленного $x_v(t)$ сигналов. Сравнить их между собой и сделать качественные выводы по результатам восстановления.

4. Изменить интервал интегрирования $[0, \omega_c]$ и повторить процедуру восстановления. Сравнить с результатами, полученными в п. 3.

5. Определить энергию сигнала

$$E_x = \int_0^{T_c} x^2(t) dt.$$

6. Рассчитать оценку энергии сигнала с помощью амплитудной спектральной характеристики при различных значениях ω_c . Сравнить рассчитанные значения со значением, полученным в п. 5. Сделать выводы.

2.5. Контрольные вопросы и задания

1. Поясните отличие между понятиями ряда и интеграла Фурье.
2. При каких условиях можно пользоваться формулой прямого преобразования Фурье?
3. Справедлив ли принцип суперпозиции для преобразования Фурье?
4. Дана функция $x(t) = \delta(t + \tau) + \delta(t - \tau)$. Запишите формулу для спектральной характеристики $X(j\omega)$.
5. Поясните отличие между односторонним и двусторонним преобразованиями Фурье.
6. Назовите особенности спектральных характеристик сигналов, описываемых нечетной и четной функциями.
7. Какая связь существует между спектром одиночного импульса и спектром периодического сигнала, образованного из таких импульсов?
8. Пусть $X(j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$. Запишите формулу для спектральной характеристики $Y(j\omega)$ сигнала $y(t) = k \cdot x(t - \tau)$, если $\tau = \text{const}$.
9. Что происходит со спектральной характеристикой при сжатии (растяжении) сигнала?
10. Как при помощи преобразования Фурье вычислить энергию сигнала?

3. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

3.1. Цель работы

Вейвлет-преобразование, появившись в результате решения конкретной задачи, связанной с обработкой сейсмических сигналов, за короткий отрезок времени завоевало популярность и в настоящее время используется в качестве инструмента прикладных исследований во всех естественных науках и многих областях техники. Разработаны непрерывный и дискретный варианты вейвлет-преобразования. Непрерывное вейвлет-преобразование нашло широкое применение в таких задачах, связанных с обработкой сигналов, как распознавание сигналов, обработка биомедицинских данных, анализ сейсмической информации и т.д. Дискретное вейвлет-преобразование позволило создать эффективные алгоритмы сжатия изображений, которые, в частности, использованы в стандарте JPEG2000. Специальные пакеты расширения по вейвлетам включены в последние версии систем MathCAD и MATLAB.

Целью работы является знакомство с основными понятиями непрерывного вейвлет-анализа, сравнение спектров тестовых сигналов, полученных с помощью преобразования Фурье и вейвлет-преобразования.

3.2. Оконное преобразование Фурье

На протяжении многих десятилетий основным средством анализа реальных физических процессов, в том числе случайных, являлся гармонический анализ. Преобразование Фурье устанавливает факт наличия в сигнале гармонической составляющей определенной частоты, но не дает возможности определить интервал времени, на котором существует эта гармоническая составляющая.

Использование оконного преобразования Фурье является одним из способов получения информации о поведении спектра сигнала во времени. Формула прямого преобразования Фурье при этом записывается в следующем виде:

$$X(j\omega, b) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)w(t-b)e^{-i\omega t} dt,$$

где $w(t-b)$ – оконная функция, которая определена на интервале времени длительностью τ и равна нулю за пределами этого интервала.

Для того чтобы получить представление об изменении спектральной характеристики $X(j\omega, b)$ по времени, параметру сдвига b задают

последовательно значения $0, \tau, 2\tau, \dots$. При этом оконная функция перемещается дискретно вдоль оси времени и получается набор спектральных характеристик, позволяющий судить об изменении спектра сигнала во времени. При выборе оконной функции используются критерии максимума энергии в окне или уменьшения уровня боковых составляющих в спектре.

3.3. Определение вейвлет-функции

Сам термин «вейвлет» ввели J. Morlet и A. Grossman в своей статье, опубликованной в 1984 г. Они занимались исследованиями сейсмических сигналов с помощью базиса, который назвали вейвлетом. Некоторые идеи теории вейвлетов были известны раньше. Например, А. Хаар разработал в 1909 г. систему базисных функций с локальной областью определения. Сегодня эти функции называют вейвлетами Хаара.

Вейвлет-преобразование имеет много общего с преобразованием Фурье. Отличие состоит в том, что в качестве базисных выбираются функции, хорошо локализованные во временной и частотной областях. Базисные функции (вейвлеты) создаются с помощью специальных функций – материнских вейвлетов $\psi(t)$, задающих их вид и свойства. Локализация функции $\psi(t)$ обеспечивается путём изменения масштаба и смещения в области времени.

На основе функции $\psi(t)$ строится двухпараметрическое семейство вейвлет-функций

$$\psi(t, a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (3.1)$$

Они образуются из материнского (исходного) вейвлета $\psi(t)$ за счёт сдвига во времени на величину b и изменения масштаба по времени с коэффициентом a . Множитель $1/\sqrt{a}$ обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа a .

Таблица 1.1

Материнские вейвлеты

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная характеристика $\Psi(\omega)$
МНАТ «мексиканская шляпа»	$(1-t^2)e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}(j\omega)^2 e^{-\omega^2/2}$
DOG (Difference of Gaussians)	$e^{-t^2/2} - \frac{1}{2}e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}(e^{-\omega^2/2} - e^{-\omega^2/8})$
Морле (Morlet)	$e^{j\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\sigma(\omega)e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$

В табл. 1.1 приведены некоторые материнские вейвлеты (вейвлетообразующие функции): вейвлеты МНАТ и DOG, относящиеся к группе вещественных непрерывных вейвлетов и вейвлет Морле, относящийся к комплексным вейвлетам.

На рис. 3.1 и 3.2 показаны временные и частотные характеристики вейвлетов МНАТ – «мексиканская шляпа» и DOG (Difference of Gaussians).

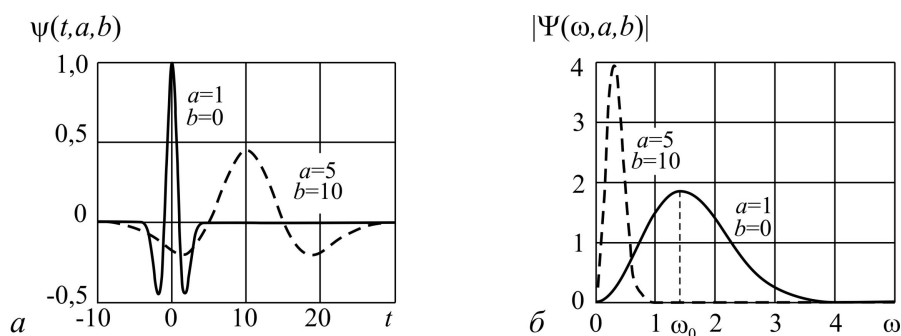


Рис. 3.1. Характеристики вейвлета МНАТ – «мексиканская шляпа»: а – вейвлет; б – амплитудная спектральная характеристика

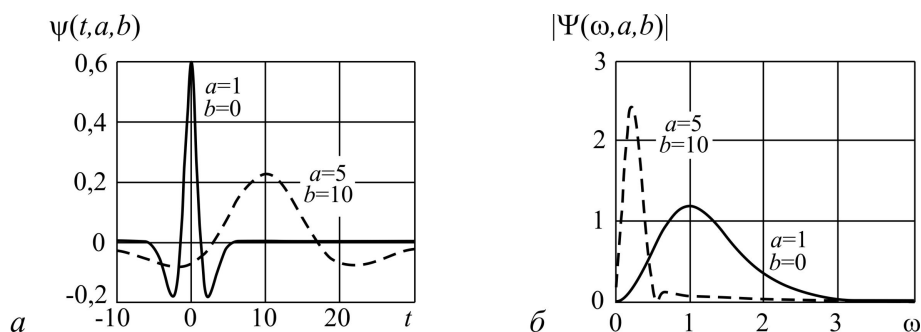


Рис. 3.2. Характеристики вейвлета DOG (Difference of Gaussians): а – вейвлет; б – амплитудная спектральная характеристика

Как видно из графиков, вейвлеты локализованы как во временной, так и частотной областях.

Чтобы функцию $\psi(t)$ можно было рассматривать в качестве вейвлета, она должна обладать следующими свойствами:

Автомодельность. Все вейвлеты $\psi(t, a, b)$ семейства имеют то же число колебаний, что и материнский вейвлет $\Psi(t)$, так как получены из него при помощи масштабных преобразований и сдвига.

Ограниченность. Квадрат нормы функции должен быть конечным:

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

Локализация. Функция должна быть локализована во времени и по частоте. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$|\psi(t)| \leq \frac{C}{(1+|t|)^\alpha}, \quad |\Psi(\omega)| \leq \frac{C}{(1+|\omega|)^\alpha}.$$

Например, дельта-функция $\delta(t)$ и гармоническая функция не удовлетворяют необходимому условию одновременной локализации во временной и частотной областях.

Нулевое среднее. Среднее значение вейвлет-функции должно быть равно нулю:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

3.4. Вейвлет-преобразование

В общем случае формула прямого вейвлет-преобразования функции $x(t)$ записывается в виде

$$W_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi(t, a, b) dt.$$

С учетом (3.1) эту формулу записывают так:

$$W_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Функция $W_x(a, b)$ называется вейвлет-спектром. В отличие от спектральной характеристики, полученной с помощью преобразования Фурье, вейвлет-спектр является функцией двух аргументов. Он отображается в виде поверхности в трехмерном пространстве и называется вейвлет-спектрограммой. Для отображения вейвлет-спектра используют либо поверхность $W_x(a, b)$, либо ее проекцию на плоскость (a, b) в виде линий уровня, либо картину уровней локальных экстремумов этой поверхности, называемую скелетоном (skeleton).

Обратное вейвлет-преобразование определяется так:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(a, b) \psi(t, a, b) da db, \quad (3.2)$$

где нормирующий коэффициент равен

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Здесь $\Psi(j\omega)$ – спектральная характеристика вейвлета $\psi(t)$.

Математический аппарат вейвлет-анализа к настоящему времени хорошо разработан. Однако выбор вейвлета, наиболее подходящего для анализа конкретного сигнала или последовательности, представляет собой скорее искусство, чем формализованную процедуру.

3.5. Методические указания

Для того чтобы изучить основные отличия между гармоническим анализом и вейвлет-анализом, в лабораторной работе предлагается построить спектральные характеристики и вейвлет-спектрограммы тестовых сигналов, описываемых функциями:

$$x_1(t) = \begin{cases} D_1 \sin(2\pi/T_1), & 0 \leq t \leq 10T_1; \\ D_2 \sin(2\pi/T_2), & 10T_1 \leq t \leq 20T_1. \end{cases}$$

$$x_2(t) = D_1 \sin(2\pi/T_1) + D_2 \sin(2\pi/T_2).$$

Для анализа данных сигналов в лабораторной работе используются рассмотренные выше вейвлеты МНАТ и DOG. Для построения вейвлет-функций необходимо определить пределы изменения параметров a , b и интервалы их дискретизации. Чёткие рекомендации по выбору указанных параметров дать трудно. Обычно они подбираются в процессе анализа с учётом сохранения возможности восстановления сигнала из его вейвлет-спектрограммы.

Ниже показан пример формирования вейвлетов

$$\theta := -5, -4.9..5 \quad \text{МНАТ}(\theta) := (1 - \theta^2) \cdot \exp\left(\frac{-\theta^2}{2}\right)$$

$$a := 1..20 \quad b := 0..40 \quad \Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a \cdot 5}} \cdot \text{МНАТ}\left(\frac{t - b \cdot 2}{a \cdot 5}\right)$$

Для построения вейвлет-спектрограмм используется компонента 3DPlot в режиме Surface Plot.

3.6. Программа работы

1. Записать в среде MathCAD функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, описывающие заданные сигналы. Построить графики сигналов на заданном интервале.

Примечание. Параметры D_1, D_2, T_1 и T_2 сигналов задаются преподавателем.

2. С помощью преобразования Фурье получить амплитудные $X_1(\omega) = |X_1(j\omega)|$, $X_2(\omega) = |X_2(j\omega)|$ и фазовые $\varphi_1(\omega) = \arg[X_1(j\omega)]$, $\varphi_2(\omega) = \arg[X_2(j\omega)]$ спектральные характеристики сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Построить соответствующие спектральные характеристики сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на одном графике.

3. Записать в среде MathCAD формулы для материнского вейвлета $\psi(t)$ и вейвлетов $\psi(t, a, b)$. Построить графики вейвлетов для ряда значений a, b .

Примечание. Вариант вейвлета (МНАТ или DOG) задаётся преподавателем.

4. Построить вектор-спектрограммы сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в виде поверхности с использованием 3-D графики. Сравнить вектор-спектрограммы сигналов и сделать выводы.

3.7. Контрольные вопросы и задания

1. Поясните принцип формирования вейвлетов.
2. Какими свойствами должна обладать функция, чтобы её можно было использовать в качестве вейвлета?
3. В чем преимущество вейвлетов перед рядами Фурье?
4. Объясните основные отличия вейвлет-преобразования от оконного преобразования Фурье?
5. Какие варианты визуализации результатов вейвлет-анализа используются на практике?
6. Назовите области применения вейвлетов.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

4.1. Цель работы

С развитием вычислительной техники стали чаще в качестве базисных использоваться кусочно-постоянные функции, имеющие постоянные значения на фиксированных интервалах времени. При вычислении коэффициентов ряда производится умножение функции на постоянный, единый для данного интервала, множитель. Это проще, чем умножение на меняющиеся от точки к точке значения непрерывных базисных функций. Основными среди таких функций являются функции Уолша и Хаара. Функции Уолша, которым посвящена данная работа, используются при обработке речевых сигналов, сигналов в биологии и медицине, при цифровой обработке изображений, в цифровой голографии и многих других областях.

Целью работы является изучение системы ортогональных функций Уолша, разложение сигнала заданной формы и исследование влияния числа членов ряда на погрешность аппроксимации.

4.2. Основные понятия и расчетные формулы

Функции Уолша (J. Walsh) были разработаны в 1923 г. как развитие известной к тому времени системы функций Радемахера путем добавления в нее новых функций. Функции Радемахера образуются из синусоидальных функций:

$$rad_0(\theta) \equiv 1; \quad rad_i(\theta) = \text{sign}[\sin(2^i \pi \theta)]; \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где θ – относительное время, изменяющееся в интервале $[0, 1)$. Символом sign (сигнум-функция) обозначается функция

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

В соответствии с формулами (4.1) и (4.2) функции Радемахера принимают значения $+1$ или -1 и имеют вид, показанный на рис. 4.1.

Функции Радемахера являются ортогональными, но не составляют полную систему. На том же интервале $[0, 1)$ существуют другие функции, связанные условиями ортогональности с функциями Радемахера. Поэтому система функций Радемахера не может эффективно использоваться для разложения произвольно заданных функций.

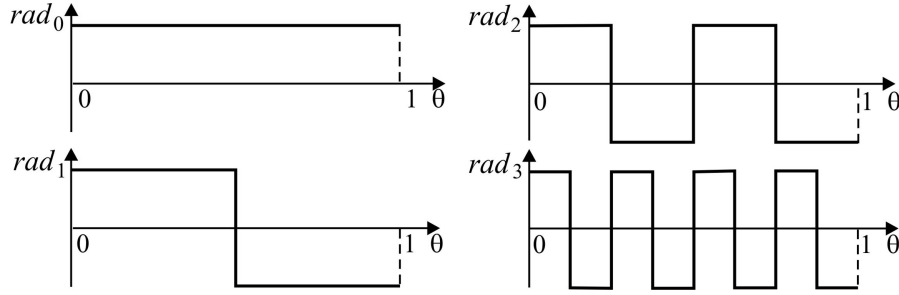


Рис. 4.1. Функции Радемахера

Функции Уолша формируются из функций Радемахера с помощью следующего соотношения:

$$wal_0(\theta) \equiv 1; \quad wal_n(\theta) = \prod_{k=1}^m [rad_k(\theta)]^{n_k}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где n – номер функции Уолша, n_k – значение (0 или 1) k -го разряда номера функции Уолша n , записанного в виде m -разрядного двоичного кода Грея. Отсюда легко видеть, что количество функций в системе Уолша оказывается равным $N = 2^m$, где m – целое число.

Последовательность образования функций Уолша может быть такой. Сначала записывается код номера n функции Уолша в двоичном коде. Затем этот номер представляется в коде Грея. Код Грея связан с обычным двоичным кодом следующим образом. Если в обычной двоичной системе счисления для данного номера имеем

$$n = a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0,$$

то в коде Грея это число записывается в виде

$$n = b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0,$$

где

$$b_0 = a_0 \oplus a_1, \quad b_1 = a_1 \oplus a_2, \dots, \dots, \quad b_{m-2} = a_{m-2} \oplus a_{m-1}, \quad b_{m-1} = a_{m-1}.$$

Здесь \oplus – знак суммирования по модулю 2. При суммировании по модулю 2 имеем:

$$0 \oplus 0 = 0; \quad 0 \oplus 1 = 1; \quad 1 \oplus 0 = 1; \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

Например, пусть $n = 4$. В двоичном коде будем иметь $n = 100$, в коде Грея – $n = 110$. Функция Уолша запишется так:

$$wal_4(\theta) = [rad_3(\theta)]^1 \cdot [rad_2(\theta)]^1 \cdot [rad_1(\theta)]^0 = rad_3(\theta) \cdot rad_2(\theta).$$

Таким образом, функция Уолша $wal_4(\theta)$ представляет собой произведение функций Радемахера $rad_2(\theta)$ и $rad_3(\theta)$.

На рис. 4.2 представлены функции Уолша для $N = 8$.

Полученная система функций оказывается полной и ортогональной, поэтому она пригодна для разложения сигналов произвольного вида с конечным интервалом определения. Функции Уолша являются ку-

сочно-постоянными. Интервал определения функций можно рассматривать состоящим из $N = 2^m$ равных подынтервалов. На каждом из них функции Уолша принимают значения $+1$ или -1 . В точках разрыва функции непрерывны справа.

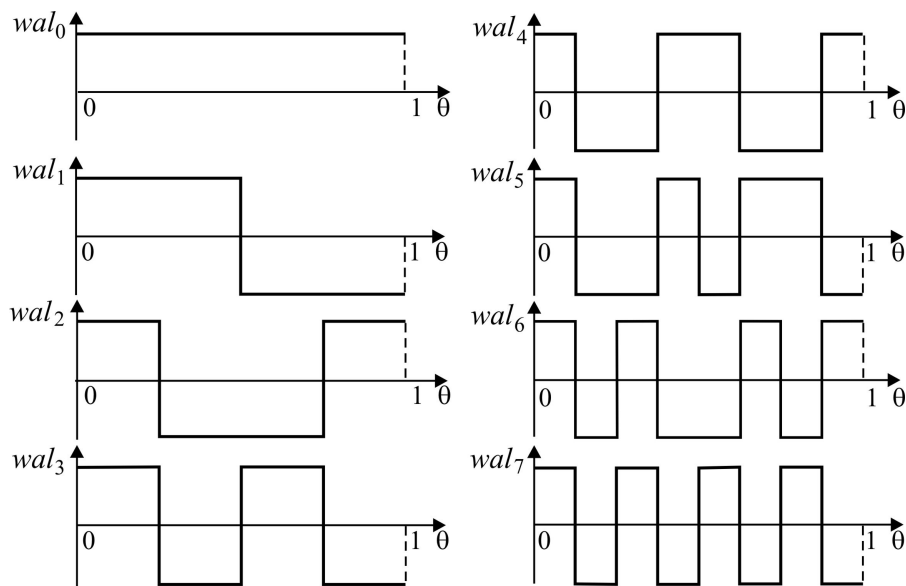


Рис. 4.2. Система Уолша, состоящая из $N = 2^3 = 8$ функций

Функции Уолша ортогональны и нормированы, так как

$$\int_0^1 wal_n(\theta) wal_k(\theta) d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k. \end{cases}$$

Среднее значение функций Уолша для всех $n \neq 0$ равно нулю:

$$\int_0^1 wal_n(\theta) d\theta = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Функции Уолша обладают свойством *мультипликативности*, то есть произведение двух функций Уолша равно новой функции Уолша из этой же системы:

$$wal_n(\theta) \cdot wal_k(\theta) = wal_p(\theta).$$

Умножение любой функции Уолша самой на себя дает функцию с нулевым номером $wal_0(\theta)$:

$$wal_n(\theta) \cdot wal_n(\theta) = wal_0(\theta).$$

4.3. Разложение сигналов по функциям Уолша

Для разложения сигналов, заданных на интервале $[0, T)$, удобно использовать функции Уолша, которые после преобразования их аргумента записываются в виде $wal_n(t/T)$.

Ряд Уолша одномерного сигнала $x(t)$, $t \in [0, T)$, будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{wal}_n\left(\frac{t}{T}\right),$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \text{wal}_n\left(\frac{t}{T}\right) dt.$$

Так как функции Уолша на интервалах дискретности принимают значения $+1$ или -1 , при вычислении коэффициентов c_n не требуется производить операцию умножения. Поэтому спектральный анализ по Уолшу связан с меньшими затратами машинного времени, чем анализ с использованием гармонических функций.

Усеченные ряды Уолша

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \text{wal}_n\left(\frac{t}{T}\right)$$

обладают равномерной, среднеквадратической сходимостью и сходимостью в среднем и могут быть использованы для аппроксимации сигналов, описываемых интегрируемыми функциями. Графики функций $x_N^*(t)$ имеют ступенчатый характер.

4.4. Методические указания

Чтобы составить программу, пригодную для анализа функций на интервалах различной длительности, функции Уолша рекомендуется построить сначала на интервале $[0, 1)$ относительного времени. На этом интервале, учитывая разрывный характер функций, размещается не менее 1000 отсчетов. Функции Радемахера, описываемые формулой (4.1), можно сформировать, применив, условный оператор *if*. Например, для функции Радемахера $rad_3(t)$ получим

$$rad_3(t) = \text{if}(\sin(8\pi t) > 0, 1, -1).$$

Систему функций Радемахера рекомендуется записать в виде вектор-функции, составляющие которой есть функции Радемахера $rad_i(t)$, $i = 1, \dots, m$.

Система функций Уолша может быть записана в виде вектор-функции, элементы которой являются функциями Уолша и выражены через функции Радемахера. Для удобства все функции рекомендуется записать относительного времени θ , изменяющегося в интервале $[0, 1)$. Чтобы получить функции Уолша для заданного интервала $[0, T]$, в вектор-функции выполняется подстановка $t = t/T$. В приложении П.6 дан пример формирования таким способом системы функций Хаара.

4.5. Программа работы

1. Составить программу моделирования функций Уолша $wal_n(t)$, $t \in [0, T)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, для $N = 16$. Пронаблюдать графики функций Уолша и проверить, что они сформированы правильно.

2. Убедиться в том, что функции Уолша удовлетворяют условию ортогональности. Для этого вычислить значения интегралов

$$\frac{1}{T} \int_0^T wal_n\left(\frac{t}{T}\right) \cdot wal_m\left(\frac{t}{T}\right) \cdot dt$$

при нескольких произвольных значениях $n = m$ и $n \neq m$ ($n, m = 0, 1, \dots, N-1$).

3. Сформировать в среде MathCAD заданную функцию $x(t)$, $t \in [0, T)$. Построить ее график.

Примечание. Сигнал $x(t)$ задается преподавателем или определяется из приложения П.1 согласно заданному варианту. Длительность сигнала выбирается произвольно: $T = T_c \neq 1$ с.

4. Рассчитать значения коэффициентов c_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, разложения заданной функции $x(t)$ в базисе функций Уолша.

5. Составить программу вычисления функции

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot wal_n\left(\frac{t}{T}\right), \quad t \in [0, T).$$

6. Построить спектральную диаграмму и сделать выводы о спектральном составе исследуемого сигнала $x(t)$.

7. Построить график ошибки аппроксимации

$$\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N^*(t).$$

Проанализировать характерные признаки ошибки аппроксимации.

8. Образовать аппроксимирующий сигнал $x_N^*(t)$ путем суммирования первых восьми членов ряда ($N = 8$). Построить график ошибки аппроксимации $\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N^*(t)$. Сделать выводы.

9. Рассчитать значения средней квадратической ошибки

$$\sigma^2 = \int_0^T [x(t) - x_N^*(t)]^2 dt$$

для $N = 8$ и $N = 16$. Сделать выводы.

4.6. Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключаются преимущества применения функций Уолша перед другими?
2. Запишите при помощи функций Радемахера функцию Уолша $wal_{21}(\theta)$.
3. Покажите, что функции Уолша ортогональны.
4. Покажите, что произведение любых двух функций Уолша является также функцией Уолша. Как это свойство называется?
5. Образуйте функцию $wal_2(\theta) \cdot wal_6(\theta)$. Определите номер функции Уолша, получившейся в результате данного действия.
6. Изучите графики функций Уолша на рис. 4.2 и найдите закономерность, которой подчинены значения функций на последнем интервале постоянства.
7. Назовите и поясните существующие способы упорядочения функций Уолша.
8. Укажите особенность функций Уолша, благодаря которой упрощается расчет коэффициентов ряда.
9. Как из системы дискретных функций Уолша для $N = 16$ образовать аналогичную систему для $N = 8$?

5. РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ ХААРА

5.1. Цель работы

Современные высокоэффективные алгоритмы сжатия при обработке изображений базируются в основном на методах вейвлет-анализа, среди которых заметное место занимает классический ортогональный базис Хаара. Функции Хаара, как и функции Уолша, относятся к классу кусочно-постоянных функций. Их отличие от функций Уолша заключается в том, что они локализованы на отдельных частях изучаемого интервала. Поэтому функции Хаара, которые позволяют оценить локальные свойства исследуемых сигналов, часто называют вейвлетами Хаара.

Целью работы является изучение системы ортогональных функций Хаара, разложение сигнала заданной формы и исследование влияния числа членов ряда на погрешность аппроксимации.

5.2. Основные понятия и расчетные формулы

Функции Хаара

Рассматриваемую в работе систему впервые построил и начал изучать в 1909 г. А. Хаар. Система Хаара состоит из кусочно-постоянных функций, заданных на интервале $[0, 1)$. Для функций Хаара наряду с одинарной (порядковой) нумерацией широко используется и двойная нумерация. Двойная нумерация соответствует групповому принципу формирования функций Хаара.

Первая функция системы Хаара постоянна:

$$\chi_0(\theta) \equiv 1, \quad \theta \in [0, 1).$$

Остальные функции системы Хаара удобно строить по группам: группа с номером m содержит 2^m функций $\chi_{mk}(\theta)$, $m = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$.

В первую группу ($m = 0$) входит одна функция:

$$\chi_1(\theta) = \chi_{00}(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1, & \theta \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Вторая группа ($m = 1$, $k = 0, 1$) состоит из двух функций: $\chi_2(\theta) = \chi_{10}(\theta)$ и $\chi_3(\theta) = \chi_{11}(\theta)$; третья группа ($m = 2$, $k = 0, 1, 2, 3$) – из четырех функций: $\chi_4(\theta) = \chi_{20}(\theta)$, $\chi_5(\theta) = \chi_{21}(\theta)$, $\chi_6(\theta) = \chi_{22}(\theta)$, $\chi_7(\theta) = \chi_{23}(\theta)$ и т. д.

Для формирования функций Хаара используется следующая формула:

$$\chi_{mk}(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \theta \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1/2}{2^m} \right); \\ -\sqrt{2^m}, & \theta \in \left[\frac{k+1/2}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right); \\ 0, & \theta \notin \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right). \end{cases}$$

На рис. 5.1 изображены первые восемь функций системы Хаара. Легко видеть, что первые две функции Хаара – такие же, как и соответствующие функции Уолша, упорядоченные по Уолшу или по Пэли. Остальные функции Хаара имеют локальный характер области определения.

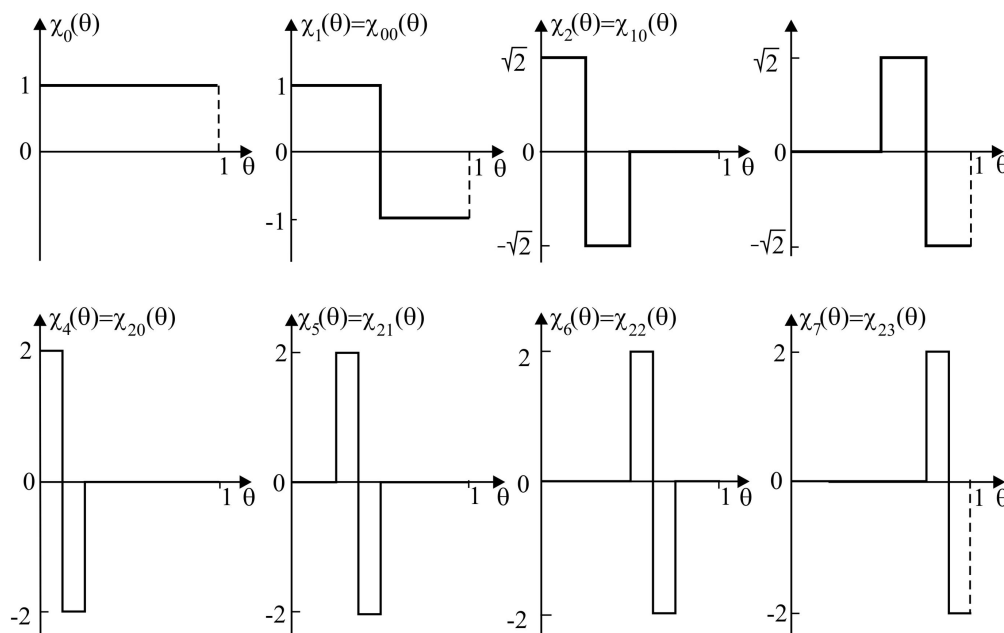


Рис. 5.1. Графики первых восьми функций Хаара

В настоящее время функции Хаара называют и вейвлетами Хаара, поскольку они могут быть описаны с помощью формальных правил, принятых в теории вейвлет-анализа. Скейлинг-функция и «материнский вейвлет» Хаара совпадают соответственно с первой и второй функциями рассмотренной системы, то есть:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \chi_0(\theta) \equiv 1, \quad \theta \in [0, 1); \\ \psi(\theta) &= \varphi(2\theta) - \varphi(2\theta-1) = \chi_1(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1, & \theta \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Функции системы Хаара определяются согласно теории вейвлетов путем масштабных преобразований и переносов «материнского вейвлета»:

$$\chi_{mk}(\theta) = \sqrt{2^m} \psi(2^{-m}\theta - k); \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, 2^m - 1. \quad (5.2)$$

При использовании одинарной нумерации, как легко показать, номер функции Хаара, начиная с $n = 1$, определяется по значениям m и k с помощью формулы

$$n = 2^m + k; \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, 2^m - 1.$$

Иногда функции Хаара определяются иначе. На интервалах, где функции отличаются от нуля, значения их принимаются равными $+1$ или -1 . Определенные таким образом функции Хаара ортогональны, но не нормированы. Такие ненормированные функции Хаара удобно использовать при анализе и синтезе логических функций.

Разложение непрерывных сигналов в базисе Хаара

Систему ортогональных функций Хаара можно использовать в качестве базисной при разложении в равномерно сходящийся ряд Хаара непрерывного сигнала, заданного на отрезке $[0, T)$.

При использовании функций Хаара в качестве базисных для аппроксимации сигнала $x(t)$ на отрезке $[0, T]$ безразмерный аргумент t необходимо заменить на αt , где коэффициент $\alpha = 1/T$ задает необходимый временной масштаб функций и имеет размерность времени в минус первой степени.

Ряд Хаара одномерного сигнала $x(t)$, $t \in [0, T)$ будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n\left(\frac{t}{T}\right),$$

где коэффициенты рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \chi_n\left(\frac{t}{T}\right) dt.$$

Усеченные ряды Хаара

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \chi_n\left(\frac{t}{T}\right)$$

обладают равномерной, среднеквадратической сходимостью и сходимостью в среднем. Они могут быть использованы для аппроксимации сигналов, описываемых интегрируемыми функциями.

Средняя квадратическая погрешность аппроксимации при конечном числе ортогональных составляющих ряда Хаара рассчитывается по формуле

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[x(t) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n \chi_n\left(\frac{t}{T}\right) \right]^2 dt.$$

При использовании двойной нумерации ряд Хаара записывается следующим образом:

$$x(t) = c_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^m-1} c_{mk} \chi_{mk} \left(\frac{t}{T} \right).$$

Особенностью функций Хаара является сравнительная простота их получения (генерирование в радиоустройствах). Базисную систему функций Хаара целесообразно использовать для анализа и синтеза импульсных сигналов конечной длительности.

Применение функций Хаара наиболее эффективно для анализа сигналов с сильно выраженными локальными особенностями в виде кратковременных всплесков и колебаний. Это объясняется тем, что аппроксимация этих всплесков и колебаний осуществляется ограниченным числом составляющих ряда, расположенных в соответствующей части интервала $[0, T)$.

5.3. Методические указания

Программа работы предусматривает разложение в ряд Хаара сигнала, описываемого на заданном интервале $[0, T)$ функцией $x(t)$. Чтобы составить программу, пригодную для анализа функций на интервалах различной длительности, функции Хаара рекомендуется сформировать сначала на интервале $[0, 1)$ относительного времени. При составлении программы моделирования функций Хаара предлагается использовать «материнский вейвлет», описываемый функцией (5.1). Получить «материнский вейвлет» в масштабе относительного времени, в частности, можно с помощью условного оператора if:

$$h(t) := \text{if}(t \leq 0, 0, 1) - 2 \text{if}(t \leq 0.5, 0, 1) + \text{if}(t \leq 1, 0, 1).$$

Один из возможных способов получения системы функций Хаара заключается в том, что формируется вектор-функция, каждая составляющая которого записывается согласно формуле (5.2) в масштабе относительного времени и с соблюдением одинарной нумерации. Чтобы получить функции Хаара для заданного интервала $[0, T]$, в вектор-функции выполняется указанная выше подстановка $t = t/T$.

Пример формирования вектор-функции Хаара приведен в приложении П.6.

5.4. Программа работы

1. Составить программу моделирования функций Хаара $\chi_n(t)$, $t \in [0, T)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, для $N = 16$. Пронаблюдать графики функций Хаара и проверить их правильность.

2. Убедиться в том, что функции Хаара удовлетворяют условию ортогональности. Для этого вычислить значения интегралов

$$\frac{1}{T} \int_0^T \chi_n\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \chi_m\left(\frac{t}{T}\right) \cdot dt$$

для нескольких произвольных значений $n = m$ и $n \neq m$ ($n, m = 0, 1, \dots, N-1$).

3. Сформировать в среде MathCAD заданную функцию $x(t)$, $t \in [0, T)$. Построить ее график.

Примечание. Сигнал $x(t)$ задается преподавателем (возможные варианты сигналов приведены в приложении П.1). Длительность сигнала выбирается произвольно: $T = T_c \neq 1$ с.

4. Рассчитать значения коэффициентов c_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, разложения заданной функции $x(t)$ в базисе функций Хаара.

5. Составить программу вычисления функции

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \chi_n\left(\frac{t}{T}\right), \quad t \in [0, T).$$

6. Построить спектральную диаграмму и сделать выводы о спектральном составе исследуемого сигнала $x(t)$.

7. Построить график ошибки аппроксимации

$$\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N^*(t).$$

Проанализировать характерные признаки ошибки аппроксимации.

8. Образовать аппроксимирующий сигнал $x_N^*(t)$ путем суммирования первых восьми членов ряда ($N = 8$). Построить график ошибки аппроксимации $\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N^*(t)$. Сделать выводы.

9. Рассчитать значения средней квадратической ошибки

$$\sigma^2 = \int_0^T [x(t) - x_N^*(t)]^2 dt$$

для $N = 8$ и $N = 16$. Сделать выводы.

5.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение функций Хаара.
2. Изобразите график функции $x(\theta) = \chi_3(\theta) + \chi_7(\theta)$.
3. Изобразите график функции $x(t) = \chi_2\left(\frac{t}{T}\right) + \chi_6\left(\frac{t}{T}\right)$, если $T = 0,1$ с.
4. Сколько функций образуют систему Хаара, если в ней использовано четыре группы?
5. Сколько функций Хаара входит в группу $m=6$?
6. К какой группе m принадлежит функция Хаара $\chi_{15}(\theta)$? Изобразите ее график.
7. Покажите, что функции Хаара ортогональны.
8. Найдите энергию функции Хаара $\chi_3(t)$ при $T = 2$ с.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГОВЫХ ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ЧАСТОТ

6.1. Цель работы

Решение задачи аппроксимации характеристик идеальных фильтров нижних и верхних частот (ФНЧ и ФВЧ) при помощи устойчивой и физически реализуемой передаточной функции привело к созданию целого семейства типовых фильтров. Наибольшую известность среди них, благодаря простоте, приобрели фильтры Баттерворта и Чебышева.

Целью работы является изучение методов расчета ФНЧ и ФВЧ Баттерворта и Чебышева по заданным требованиям к амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) и построение характеристик рассчитанных фильтров.

6.2. Основные понятия и расчетные формулы

Нормированные аналоговые фильтры нижних частот

Нормированные передаточные функции фильтров Баттерворта и Чебышева (см. приложение П.2) могут быть представлены в виде

$$H_{\text{на}}(s) = \frac{b_0}{A(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}. \quad (6.1)$$

Свойства этих фильтров подробно описаны в литературе. Существуют и другие фильтры, имеющие передаточные функции вида (6.1) и сочетающие свойства фильтров Баттерворта и Чебышева. Например, фильтр Лежандра имеет в полосе затухания наклон АЧХ такой же крутой, как и фильтр Чебышева, и монотонную АЧХ в полосе пропускания, как фильтр Баттерворта.

Обычно фильтр реализуют в виде последовательного соединения звеньев первого и второго порядка. Поэтому знаменатель передаточной функции (6.1) можно представить в виде произведения сомножителей не выше второго порядка. Тогда

$$A(s) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}) & \text{при четных } n, \\ (s - \alpha_0) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}) & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Фильтр Баттерворта

АЧХ фильтра Баттерворта описывается выражением

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}}, \quad (6.2)$$

где ω_c – граничная частота, n – порядок фильтра.

Фильтры Баттерворта имеют максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задерживания. АЧХ фильтров Баттерворта для $n = 2, 4$ и 8 показаны на рис. 6.1.

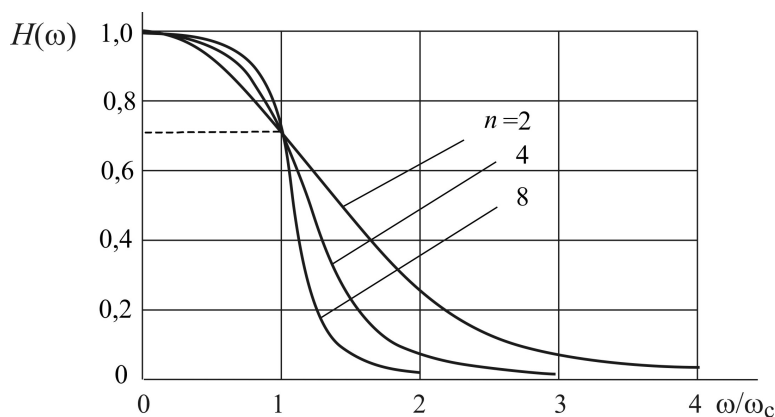


Рис. 6.1. АЧХ нормированных фильтров Баттерворта

По мере возрастания порядка n фильтра Баттерворта коэффициент передачи в полосе пропускания все в большей степени приближается к единице, переходная область все в большей степени сужается, а в полосе задерживания функция передачи все ближе и ближе подходит к нулю. При $n \rightarrow \infty$ АЧХ фильтра Баттерворта приближается к идеальной.

Фильтр Баттерворта имеет следующие свойства.

1. При любом n справедливы соотношения:

$$H(0) = 1; \quad H(\omega_c) = 1/\sqrt{2}; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 0.$$

2. Функция $H(\omega)$ фильтров Баттерворта монотонно убывает при $\omega \geq 0$. Следовательно, АЧХ имеет максимальное значение при $\omega = 0$.

3. Все производные функции (6.2) по частоте ω от первой до $(n-1)$ -й включительно при $\omega = 0$ равны нулю. Именно по этой причине фильтр Баттерворта называют фильтром с максимально плоской АЧХ.

4. Крутизна АЧХ фильтра Баттерворта n -го порядка на высоких частотах составляет $20n$ дБ/дек.

Таким образом, n и ω_c являются теми параметрами, выбор которых позволяет удовлетворить заданный набор требований к фильтру в полосе пропускания и полосе задерживания.

Передаточная функция фильтра Баттерворта не имеет нулей, а ее n полюсов располагаются в левой полуплоскости на окружности с радиусом, равным ω_c .

Фильтр Чебышева первого рода

Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ Чебышева первого рода определяется выражением:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega/\omega_c)}},$$

где V_n – полином Чебышева порядка n , который может быть образован с помощью рекуррентной формулы

$$V_{n+1}(x) - 2xV_n(x) + V_{n-1}(x) = 0.$$

Здесь первые два полинома принимаются равными: $V_0(x) = 1$; $V_1(x) = x$.

На рис. 6.2 показаны АЧХ фильтра Чебышева первого рода. АЧХ имеет равновеликие пульсации в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задержания. Размах пульсации АЧХ равен

$$\delta = 1 - 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}.$$

Таким образом, ε представляет собой свободный параметр, который устанавливает величину неравномерности передачи в полосе пропускания. Чем меньше значение ε , тем меньше ширина полосы, в которой колеблется АЧХ в полосе пропускания.

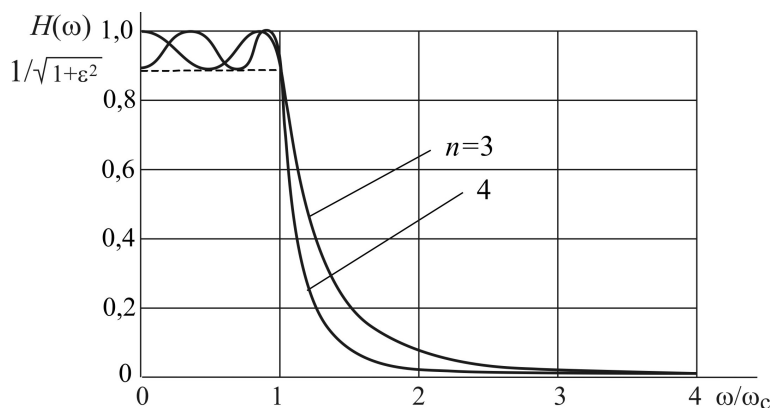


Рис.6.2. АЧХ нормированных фильтров Чебышева первого типа ($\varepsilon = 0.765$)

Фильтр Чебышева имеет следующие свойства:

1. АЧХ удовлетворяет условиям:

$$H(\omega_c) = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2};$$

$$H(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

2. На интервале $[0, \omega_c]$ значения функции $H(\omega)$ лежат в пределах от $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ до 1. В общей сложности, на этом интервале имеется n критических точек, в которых функция $H(\omega)$ достигает минимального значения $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$, или максимального значения, равного 1.

3. При $\omega \geq \omega_c$ функция $H(\omega)$ монотонно убывает и стремится к нулю. Крутизна спада на высоких частотах составляет $20n$ дБ/дек.

Выбирая значения n и ε , можно удовлетворить заданный набор требований к фильтру в полосе пропускания и полосе задерживания. Передаточная функция фильтра Чебышева первого рода не имеет нулей. Полюсы размещены в левой полуплоскости на эллипсе, большая ось которого располагается на оси ординат, а малая – на оси абсцисс.

Денормирование и трансформация фильтров

Проектирование ФНЧ и ФВЧ начинается с определения передаточной функции *нормированного* ФНЧ. Под нормированным фильтром при этом подразумевается фильтр с частотой среза полосы пропускания $\omega_c = 1$. Передаточные функции фильтров с заданными частотами среза получают с помощью операций *денормирования* (масштабирования по частоте) и *трансформации* (преобразование типа фильтра).

Для получения передаточной функции ФНЧ с требуемой частотой среза используется операция *денормирования (масштабирования по частоте)*. В передаточной функции нормированного ФНЧ оператор s заменяется на оператор s/ω_c , то есть искомая передаточная функция ФНЧ будет равна

$$H_{\text{фнч}}(s) = H_n(s/\omega_c).$$

Для того чтобы получить передаточную функцию ФВЧ с требуемой частотой среза, одновременно проводятся операции денормирования и трансформации. Указанные операции осуществляются путем замены оператора s в передаточной функции нормированного ФНЧ на оператор ω_c/s . Передаточная функция ФВЧ определится так:

$$H_{\text{фвч}}(s) = H_n(\omega_c/s).$$

6.3. Методические указания

В работе исследуются частотные и временные характеристики фильтров нижних и верхних частот второго и третьего порядков. Исследование начинается с определения передаточных функций фильтров.

Частотные характеристики рассчитываются непосредственно по частотной передаточной функции

$$H(j\omega) = H(s)_{s=j\omega}.$$

Частоту ω при построении частотных характеристик рекомендуется менять в диапазоне от 0 до $3\omega_c$.

Амплитудно-частотная характеристика рассчитывается по формуле

$$H(\omega) = |H(j\omega)|, \quad 0 \leq \omega \leq 3\omega_c.$$

При расчёте и построении фазо-частотной характеристики фильтров для получения правильных результатов необходимо учесть особенности расчёта комплексных чисел в системе MathCAD. Например, можно использовать условный оператор:

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \text{if}(\text{Im}(H(j\omega)) \leq 0, \arg(H(j\omega)), \arg(H(j\omega)) - 2\pi).$$

Импульсная переходная функция определяется как обратное преобразование Лапласа передаточной функции $H(s) = B(s)/A(s)$:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(s)e^{st} ds.$$

С учетом, что полюсы исследуемых в работе фильтров простые и ненулевые, импульсная переходная функция может быть определена в следующем виде:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{s_i t},$$

где s_i – полюсы фильтра; C_i – постоянные, вычисляемые по формуле

$$C_i = \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}.$$

Для расчета полюсов фильтра используются имеющиеся в системе MathCAD функции **root(f(x),x)** или **polyroots(v)**. Пример определения корней полинома с помощью функции **polyroots(v)** приведен в приложении П.6.

6.4. Программа работы

1. Рассчитать коэффициенты передаточных функций ФНЧ и ФВЧ 2-го и 3-го порядка заданных типов (см. табл. 6.1) и с заданным значением частоты среза.

Примечание. Вариант исследуемых фильтров и значение частоты среза задаются преподавателем.

Таблица 6.1

Тип фильтра	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Тип ФНЧ	Бат	Чеб1	Бат	Чеб2	Бат	Чеб3	Бат	Чеб4
Тип ФВЧ	Чеб1	Бат	Чеб2	Бат	Чеб3	Бат	Чеб4	Бат

2. Составить программы для расчета АЧХ $H(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ фильтров.

3. Построить АЧХ $H(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ фильтров. Сравнить характеристики однотипных фильтров различных порядков и сделать выводы.

3. Рассчитать полюсы исследуемых фильтров и показать расположение полюсов на комплексной плоскости. Сравнить расположение полюсов однотипных фильтров различных порядков и сделать выводы.

4. Рассчитать и построить импульсные переходные функции $w(t)$ фильтров. Сравнить характеристики однотипных фильтров и сделать выводы.

6.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение амплитудно-частотной характеристики.

2. Поясните понятия полосы пропускания и полосы задерживания фильтра.

3. Дайте понятия фильтров нижних и верхних частот.

4. Найдите значение ε , при котором величина неравномерности передачи в полосе пропускания у фильтра Чебышева равна 0,1.

4. Объясните смысл операции денормирования.

5. Объясните смысл операции трансформации.

6. Поясните, каким образом преобразовать передаточную функцию ФНЧ в передаточную функцию ФВЧ.

7. Как отличаются АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева в полосе пропускания?

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ПРИ ПОМОЩИ РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА

7.1. Цель работы

Первым этапом цифровой обработки сигналов является дискретизация. В результате дискретизации непрерывный сигнал заменяется отсчетами, взятыми через определенные, обычно равные интервалы времени. При этом очень важным оказывается выбор интервала дискретизации. При большом интервале дискретизации быстрые изменения непрерывного сигнала могут остаться незамеченными. Выбор малого интервала дискретизации ведет к увеличению числа отсчетов и тем самым к увеличению времени обработки. Задача о выборе интервала дискретизации наиболее просто решается при помощи теоремы, доказанной В. А. Котельниковым в 1933 году. Эта теорема устанавливает условия точного восстановления мгновенных значений сигнала по его отсчетам, взятым через равные промежутки времени.

Целью работы является определение периода дискретизации по спектральной характеристике заданного сигнала и оценка погрешности восстановления сигнала при помощи ряда Котельникова.

7.2. Основные понятия и расчетные формулы

Сигнал $x(t)$ и спектральная характеристика $X(j\omega)$ взаимно однозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt ; \quad (7.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega . \quad (7.2)$$

Пусть спектральная характеристика $X(j\omega)$ равна нулю при $\omega < -\omega_b$ и $\omega > \omega_b$. В этом случае ее можно преобразовать в периодическую с периодом $W = 2\omega_b$ и представить в виде комплексного ряда Фурье. Заменяя в формуле комплексного ряда Фурье переменную t на ω и период T на $W = 2\omega_b$ получим

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn \frac{2\pi}{W} \omega} , \quad (7.3)$$

где коэффициенты разложения

$$A_n = \frac{2}{W} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} X(j\omega) e^{-jn \frac{2\pi}{W} \omega} d\omega = \frac{1}{\omega_b} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} X(j\omega) e^{-jn \frac{\pi}{\omega_b} \omega} d\omega . \quad (7.4)$$

Сравнивая правые части выражений (7.2) и (7.4), замечаем, что

$$A_n = \frac{2\pi}{\omega_B} x(-n\pi/\omega_B) = 2T x(-nT),$$

где

$$T = \pi/\omega_B. \quad (7.5)$$

При этом спектральная характеристика (7.3) примет вид

$$X(j\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-nT) e^{jnT\omega} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jnT\omega}. \quad (7.6)$$

Подставим формулу (7.6) под знак интеграла в (7.2). Меняя порядок действия интегрирования и суммирования в полученном выражении и вычисляя интегралы, найдём

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jnT\omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} x(nT) e^{j\omega(t-nT)} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{\pi} x(nT) \frac{\sin \omega_B(t-nT)}{\omega_B(t-nT)}. \end{aligned}$$

С учетом (7.5) окончательно получим

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \omega_B(t-nT)}{\omega_B(t-nT)}. \quad (7.7)$$

На основании изложенного В.А. Котельниковым была сформулирована следующая

Теорема. Любую функцию $x(t)$, содержащую гармонические составляющие с частотами от 0 до ω_B , можно представить в виде ряда (7.7) и, наоборот, любая функция, представленная формулой (7.7), содержит лишь гармонические составляющие с частотами от 0 до ω_B .

Полученную формулу (7.7) можно рассматривать как разложение сигнала $x(t)$ по функциям

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_B(t-nT)}{\omega_B(t-nT)}, \quad (7.8)$$

причем в качестве коэффициентов ряда выступают значения сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени $t_n = nT$, $n \in (-\infty, \infty)$.

Функция $\varphi_n(t)$, называемая отсчетной функцией, отображает собой колебания с максимальным значением при $t_n = nT$ (на рис. 7.1, а представлен график отсчетной функции для $n=4$). В другие дискретные моменты времени функция равна нулю. Легко проверить, что отсчетные функции ортогональны на интервале времени, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} d_n & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

где

$$d_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \omega_B (t - nT)}{\omega_B (t - nT)} \right]^2 dt = \frac{\pi}{\omega_B} = T.$$

Представление функции $x(t)$ рядом (7.7) показано на рис. 7.1, б. В каждой точке $t = nT$ только один член ряда, стоящего в правой части выражения (7.7), отличен от нуля и этот член равен $x(nT)$. Следовательно, в точках $t = nT$ справедливость формулы (7.7) очевидна. В промежутках между указанными точками точное значение функции $x(t)$ обеспечивается суммированием бесконечного числа функций вида (7.8).

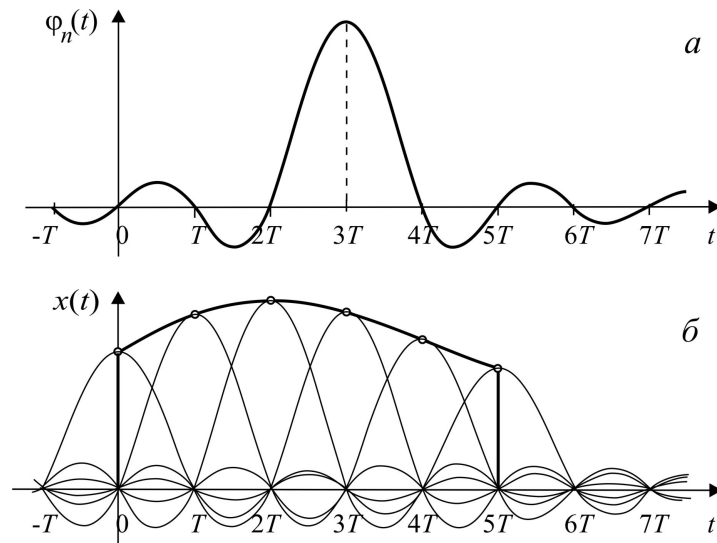


Рис. 7.1. Представление сигнала в виде ряда Котельникова:
а – отсчетная функция; б – составляющие ряда

Таким образом, функция $x(t)$ с ограниченным спектром, с одной стороны, может быть полностью задана множеством ее мгновенных значений, взятых через равные промежутки времени T . С другой стороны, если имеются числовые значения функции $x(nT)$ для всех n , то она может быть полностью восстановлена по формуле (7.7).

При практическом использовании теоремы Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам необходимо учитывать следующее. Сигналы с ограниченным спектром, для которых справедлива теорема, бесконечны во времени. Реальные же сигналы ограничены по времени интервалом $[0, T_c]$ и обладают, следовательно, неограниченным по времени спектром. Однако всегда можно выделить интервал частот $[0, \omega_B]$, в котором заключена основная часть энергии сигнала, а на долю составляющих спектра с частотой $\omega > \omega_B$ приходится малая часть энергии сигнала.

Сигнал, ограниченный по времени, приближенно описывается рядом (7.7), состоящим из конечного числа членов:

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^N x(nT) \frac{\sin \omega_B (t - nT)}{\omega_B (t - nT)}. \quad (7.9)$$

При суммировании членов ряда (7.9) сигнал $x(t)$ воспроизводится точно только в точках отсчета $t_n = nT$. В промежутках между отсчетами возникает ошибка аппроксимации, величина которой зависит от отбрасываемой части спектра сигнала. Чтобы уменьшить ошибку, интервал дискретизации T рекомендуют принимать в 2–5 раз меньше величины, определяемой по формуле (7.5). Ряд Котельникова для восстановления сигналов используется редко. Он имеет скорее теоретическое значение, позволяя получить полезные выводы. Для восстановления же сигналов по дискретным отсчетам на практике чаще используются другие методы, например методы линейной и квадратичной интерполяции.

7.3. Методические указания

В работе исследуется сигнал $x(t)$, представляющий собой одиночный импульс заданной формы (см. приложение П.1). Программа работы предусматривает дискретизацию заданного сигнала, восстановление его по дискретным отсчетам и оценку погрешности восстановления.

Период дискретизации T находится по формуле (7.5). Для определения граничной частоты ω_B , которая используется в формуле (7.5), строится амплитудная спектральная характеристика $X(j\omega) = |X(j\omega)|$ сигнала. По этой характеристике определяется граница интервала ω_B , в котором заключена основная часть энергии сигнала (рис. 7.2). Значение ω_B находится из условия, что при $\omega > \omega_B$ выполняется неравенство

$$X(\omega) \leq A,$$

где A – заданная величина.

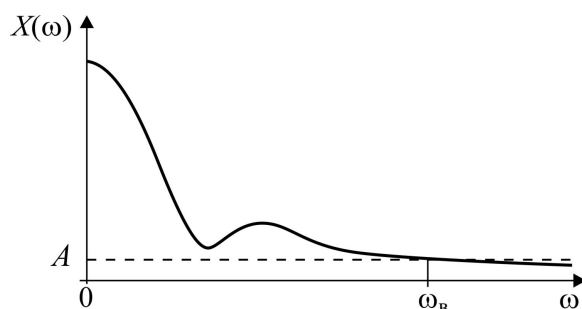


Рис. 7.2. Определение границы частотного интервала

При составлении программы восстановления сигнала по формуле (7.9) надо принять во внимание, что входящие в нее отсчетные функции

(7.8) имеют неопределенность при $t = nT$. Если используемая версия системы MatchCAD автоматически не устраняет эту неопределенность, в программе для устранения неопределенности можно использовать условный оператор. Программа вычисления функции

$$y(x) = \sin x/x$$

с помощью условного оператора может быть записана в следующем виде

$$y(x) := \text{if}(x \approx 0, 1, \sin x/x) .$$

Как отмечалось выше, ряд (7.7) точно воспроизводит сигнал $x(t)$ в точках отсчета $t_n = nT$. Следовательно, в этих точках ошибка аппроксимации равна нулю, максимумы же ошибки следует ожидать примерно посередине интервалов между соседними точками отсчета. Поэтому для быстрой оценки погрешности аппроксимации можно вычислить значения ошибки $\varepsilon(nT + 0.5T)$.

7.4. Программа работы

1. Найти спектральную характеристику отсчетной функции

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_b(t - nT)}{\omega_b(t - nT)} .$$

Построить ее для произвольного значения n и $T = \pi/\omega_b = 1$.

2. Сформировать в среде MatchCAD математическую модель сигнала $x(t)$, заданного преподавателем (варианты сигналов приведены в приложении П.1). Построить график функции $x(t)$.

3. Составить программу расчета спектральной характеристики

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

заданного сигнала $x(t)$. Построить амплитудную спектральную характеристику $X(\omega) = |X(j\omega)|$.

4. По амплитудной спектральной характеристике $X(\omega)$ определить значение частоты ω_b из условия, что $X(\omega) \leq 0,05 \max_{\omega} X(\omega)$ при $\omega \geq \omega_b$.

5. Определить интервал дискретизации Котельникова $T = \pi/\omega_b$ и сформировать дискретную последовательность

$$x(n) = x(nT) , n = 0, 1, \dots, N = T_c/T ,$$

где T_c – интервал определения заданного сигнала $x(t)$.

6. Составить программу расчета сигнала $x_N^*(t)$, восстанавливаемого из дискретной последовательности $x(nT)$, $n = 0, 1, \dots, N$, при помощи

ряда Котельникова. Построить на одном рисунке графики функций $x(t)$ и $x_N^*(t)$.

7. Сформировать сигнал ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - x_N^*(t)$. Определить максимальную абсолютную ошибку

$$\varepsilon_{\max} = \max_t |\varepsilon(t)|.$$

8. Повторить пункты 4–6 программы, уменьшив период дискретизации T в 2–5 раз.

7.5. Контрольные вопросы и задания

1. Как осуществляется дискретизация непрерывного сигнала по времени?

2. Покажите, что отсчетные функции $\varphi_n(t)$ ортогональны на интервале времени $(-\infty, \infty)$.

3. Как изменяются отсчетные функции $\varphi_n(t)$ при уменьшении (увеличении) периода дискретизации?

4. Как выглядит спектральная характеристика отсчетной функции?

5. Что понимают под числом степеней свободы сигнала $x(t)$?

6. Какие методы, кроме ряда Котельникова, используются для восстановления сигнала по его отсчетам в дискретные моменты времени?

8. ДИСКРЕТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

8.1. Цель работы

В задачах обработки сигналов часто возникает необходимость преобразования сигналов путем их интегрирования и дифференцирования. Например, в системах управления с целью улучшения процесса управления вводятся воздействия по производной и интегралу. В медицинских информационных системах получение диагностических показателей основано на интегрировании или дифференцировании сигналов. Для таких систем необходимы алгоритмы цифрового интегрирования и дифференцирования, реализуемые в режиме реального времени.

Целью работы является изучение некоторых алгоритмов цифрового интегрирования и дифференцирования сигналов, представленных в виде конечных дискретных последовательностей.

8.2. Основные понятия и расчетные формулы

Дискретное интегрирование

Интегрирование непрерывного сигнала описывается уравнением

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (8.1)$$

Для приближенной реализации интегрирования в дискретной форме имеется ряд алгоритмов. Ограничим класс рассматриваемых алгоритмов дискретного интегрирования алгоритмами, которые можно описать разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) + \delta y[x(n), x(n-1), T], \quad (8.2)$$

где $y(n)$ – выходная последовательность, представляющая собой оценку интеграла, $\delta y[x(n), x(n-1), T]$ – величина приращения на очередном интервале дискретизации, зависящая от применяемого способа интегрирования.

Интегрирование по методу прямоугольников. Величина приращения в уравнении (8.1) находится как площадь прямоугольника (рис. 8.1, а). Разностное уравнение интегратора принимает вид

$$y(n) = y(n-1) + T \cdot x(n-1). \quad (8.3)$$

Подвергнув уравнение z -преобразованию, получим передаточную функцию дискретного интегратора

$$H_n(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (8.4)$$

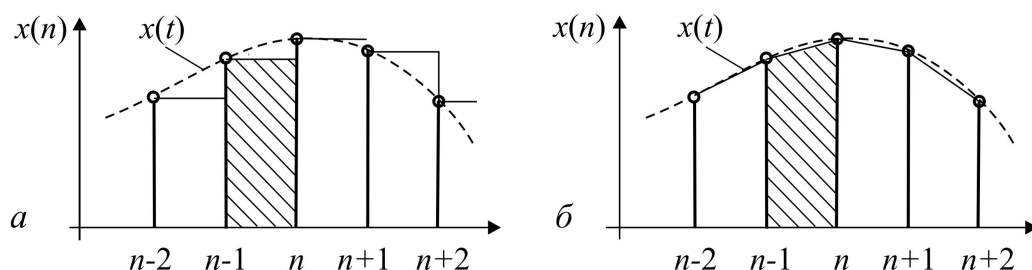


Рис.8.1. Геометрическое представление интегрирования:
 а – по методу прямоугольников, б – по методу трапеций

Интегрирование по методу трапеций. Приращение интеграла в уравнении (8.1) численно равно площади трапеции, показанной на рис. 8.1, б). Дискретный интегратор, реализующий интегрирование по методу трапеций, описывается разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) + \frac{T}{2} \cdot [x(n-1) + x(n)].$$

Подвергнув это уравнение z -преобразованию, найдем передаточную функцию дискретного интегратора

$$H_T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (8.5)$$

Интегрирование по комбинированному методу. АЧХ дискретных интеграторов, реализующих интегрирование по методам прямоугольников и трапеций, располагаются соответственно выше и ниже АЧХ идеального интегратора. Поэтому было предложено¹ аппроксимировать АЧХ идеального интегратора путем взвешенной комбинации указанных дискретных интеграторов:

$$H_K(z) = \frac{3}{4} \cdot H_P(z) + \frac{1}{4} \cdot H_T(z).$$

После подстановки (8.4) и (8.5) получим

$$H_K(z) = \frac{T}{8} \cdot \frac{1+7z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (8.6)$$

Интегрирование по методу параболической аппроксимации. Идея метода состоит в том, что интегрируемая функция $x(t)$ на интервале $[(n-2)T, nT]$ аппроксимируется параболой по имеющимся трем значениям $x(n-2)$, $x(n-1)$ и $x(n)$ сигнала. Приращение в формуле (8.2) находится интегрированием аппроксимирующей функции на интервале $[(n-1)T, nT]$.

¹ Al-Alaoui M. A. Novel digital integrator and differentiator // Electronics Letters. – 1993. – Vol. 29. № 4. – P. 376–378.

Разностное уравнение такого дискретного интегратора имеет вид

$$y(n) = y(n-1) + T \cdot \left[\frac{5}{12} x(n) + \frac{8}{12} x(n-1) - \frac{1}{12} x(n-2) \right].$$

Передаточная функция интегратора равна

$$H_{\text{пар}}(z) = \frac{T}{12} \cdot \frac{5 + 8z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1}}. \quad (8.7)$$

Дискретное дифференцирование

Идеальное дифференцирование непрерывного сигнала определяется выражением

$$y(t) = \frac{d x(t)}{d t}.$$

Как известно, операторы дифференцирования s и сдвига z связаны соотношением

$$s = \frac{1}{T} \ln z. \quad (8.8)$$

Функция (8.8) может быть разложена в ряд тремя способами. Первые слагаемые этих разложений можно было бы рассматривать как варианты описания алгоритмов дифференцирования. Однако одно из этих разложений приводит к неустойчивому алгоритму дифференцирования, а другое – к алгоритму дифференцирования, который не может быть реализован в системах, работающих в реальном времени. Третий способ разложения приводит к двум следующим алгоритмам.

Дифференцирование по методу простой разности. Запишем функцию (8.8) в виде ряда:

$$s = \frac{1}{T} \left[(1 - z^{-1}) - \frac{1}{2} (1 - z^{-1})^2 + \frac{1}{3} (1 - z^{-1})^3 - \dots \right]. \quad (8.9)$$

Удержав в (8.9) первое слагаемое, получим передаточную функцию цифрового дифференциатора

$$H_{\text{дп}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{T} (1 - z^{-1}). \quad (8.10)$$

Отсюда найдем разностное уравнение

$$y(n) = \frac{1}{T} [x(n) - x(n-1)]. \quad (8.11)$$

Дифференцирующий нерекурсивный фильтр. Если в (8.9) учесть два первых члена ряда, то после преобразований получим

$$H_{\text{дн}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2T} (3 - 4z^{-1} + z^{-2}). \quad (8.12)$$

Передаточной функции (8.10) соответствует разностное уравнение

$$y(n) = \frac{1}{2T} [3 \cdot x(n) - 4 \cdot x(n-1) + x(n-2)].$$

Дифференцирующий рекурсивный фильтр. Считая дифференцирование как действие, обратное интегрированию, рассмотрим фильтр, передаточная функция которого получена инвертированием (8.6). Этот фильтр неустойчив, так как имеет полюс $z_1 = 7$. Чтобы получить устойчивый фильтр, предлагается² отобразить неустойчивый полюс в область внутри единичной окружности и изменить коэффициент передачи. В результате передаточная функция дискретного дифференциатора принимает вид

$$H_{\text{др}}(z) = \frac{8}{7T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{7}z^{-1}}. \quad (8.13)$$

Отсюда получим разностное уравнение

$$y(n) = -\frac{1}{7}y(n-1) + \frac{8}{7T} \cdot [x(n) - x(n-1)].$$

8.3. Методические указания

В работе проводится исследование описанных выше алгоритмов дискретного интегрирования и дифференцирования на соответствие их характеристик идеальным. Для этого предлагается провести два вида исследования:

- построение АЧХ и ФЧХ дискретных интеграторов и дифференциаторов и сравнение этих характеристик с соответствующими характеристиками идеальных интегратора и дифференциатора;
- расчет реакции дискретных интеграторов и дифференциаторов на входную тестовую последовательность и сравнение с реакцией идеальных интегратора и дифференциатора.

АЧХ $H(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ и ФЧХ $\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega T}))$ рекомендуется строить в интервале $[0, \pi]$ нормированной частоты $\tilde{\omega} = \omega T$.

Идеальный интегратор имеет АЧХ и ФЧХ, определяемые выражениями:

$$H_{\text{и}}(\omega) = \left| \frac{1}{j\omega} \right| = \frac{1}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

² Там же.

АЧХ и ФЧХ идеального дифференциатора описываются формулами:

$$H_d(\omega) = |j\omega| = \omega; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

В качестве тестовой последовательности для исследования дискретных интеграторов и дифференциаторов во временной области используется гармоническая дискретная последовательность

$$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{M}n\right).$$

Дискретная последовательность $y(n)$ на выходе дискретного интегратора (или дифференциатора) рассчитывается непосредственно по разностному уравнению. Рассчитанная последовательность сравнивается с дискретной последовательностью, которая могла бы быть получена в результате дискретизации выходного сигнала идеального интегратора (или дифференциатора). Легко показать, что указанные последовательности описываются выражениями:

$$y_{\text{ин}}(n) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{M}n\right),$$
$$y_{\text{ид}}(n) = \frac{M}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{M}n\right).$$

Сравнивая соответствующие последовательности, следует учесть наличие переходного процесса.

8.4. Программа работы

1. Составить программы расчета АЧХ $H(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ дискретных интеграторов, реализующих интегрирование по методам прямоугольников и трапеций. Построить АЧХ и ФЧХ интеграторов и сравнить их с одноименными характеристиками идеального интегратора, построенными на тех же графиках.

2. Составить программы расчета дискретной последовательности $y(n)$ на выходе дискретных интеграторов, реализующих интегрирование по методам прямоугольников и трапеций. Построить графики $y(n)$ и сравнить их с графиками $y_{\text{ин}}(n)$ идеального интегратора.

3. Составить программы расчета АЧХ $H(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ дискретного дифференциатора, реализующего метод простой разности. Построить АЧХ и ФЧХ дифференциатора и сравнить их с одноименными характеристиками идеального дифференциатора, построенными на тех же графиках.

4. Составить программы расчета дискретной последовательности $y(n)$ на выходе дискретного дифференциатора, реализующего метод простой разности. Построить графики $y(n)$ и сравнить их с графиками $y_{ид}(n)$ идеального дифференциатора.

5. По аналогичной программе исследовать:

- дискретные интеграторы, описываемые передаточными функциями (8.6) и (8.7);
- дискретные дифференциаторы, описываемые передаточными функциями (8.12) и (8.13).

8.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дан гармонический сигнал $x(t) = 10 \cdot \sin(0,5 \cdot t)$. Осуществлена дискретизация сигнала с периодом $T = 0,05$ с. Запишите $x(n)$.

2. На вход дискретного интегратора, описываемого уравнением (8.3), подано воздействие $x(n) = \delta(n)$. Найдите $y(n)$, если $y(0) = 0$ и $T = 0,5$ с.

3. На вход дискретного дифференциатора, описываемого уравнением (8.11), подано ступенчатое воздействие $x(n) = 1(n)$. Найдите $y(n)$, если $T = 0,25$ с.

4. Нарисуйте структурную схему дискретного интегратора, реализующего интегрирование по методу прямоугольников (трапеций).

5. Запишите разностное уравнение дискретного интегратора, реализующего интегрирование по методу прямоугольников, если на вход интегратора подан сигнал $x(t) = 2t$ и $T = 0,2$ с.

6. Запишите разностное уравнение дискретного интегратора, реализующего интегрирование по методу трапеций, если на вход интегратора подан сигнал $x(t) = 1(t)$ и $T = 0,5$ с.

9. СГЛАЖИВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

9.1. Цель работы

При исследовании реальных процессов, как правило, вместо истинной физической величины регистрируется случайная величина $x(n)$, представляющая собой аддитивную смесь самой величины $v(n)$ и помехи $r(n)$, то есть $x(n) = v(n) + r(n)$. Помеха $r(n)$ может генерироваться непосредственно в исследуемом объекте, попадать в него извне или быть случайной наводкой в цепях измерения и регистрации.

Наличие помехи в последовательности $x(n)$, затрудняет получение достоверной информации об исследуемом процессе. Поэтому последовательность $x(n)$ подвергают первичной обработке, целью которой является сглаживание, то есть полное или частичное устранение помехи $r(n)$. Сглаживание дискретной последовательности $x(n)$ осуществляется при помощи специальных алгоритмов.

Целью работы является изучение алгоритмов сглаживания экспериментальных данных, представленных в виде конечных дискретных последовательностей.

9.2. Основные понятия и расчетные формулы

Изучаемые в работе алгоритмы сглаживания данных описываются линейными разностными уравнениями. Следовательно, их можно рассматривать как цифровые фильтры, которые преобразуют исходную последовательность $x(n)$ в последовательность $y(n)$, являющуюся оценкой полезной составляющей $v(n)$.

Сглаживание скользящим усреднением

Суть этого метода сглаживания состоит в последовательном осреднении ординат $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, на интервале $[n-L/2, n+L/2]$, где L – целое четное число. Значения сглаженной последовательности $y(n)$ определяются по формуле

$$y\left(n + \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{L+1} \sum_{\lambda=0}^L x(n+\lambda), \quad n = 0, 1, \dots, N-L-1. \quad (9.1)$$

Согласно этой формуле значение $y(n+L/2)$ находится как среднее арифметическое $L+1$ значений $x(n)$, $x(n+1)$, ..., $x(n+L)$. При этом усредняются значения, расположенные слева и справа от текущего номера

дискретной последовательности. Например, при $L = 4$ каждый элемент последовательности $y(n)$ вычисляется как среднее пяти значений входной последовательности $x(n-2), x(n-1), x(n), x(n+1), x(n+2)$.

Передаточная функция фильтра, реализующего скользящее усреднение, находится по разностному уравнению (9.1):

$$H_{cy}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{L+1} \sum_{\lambda=0}^L z^{\lambda - \frac{L}{2}}.$$

Фильтр существенно ослабляет гармонические составляющие, частоты которых выше $\omega = 2\pi / (T \cdot L)$. Правильный выбор значения L определяет качество отделения высокочастотной помехи $r(n)$ от более низкочастотной составляющей $v(n)$. Уменьшение L ведет к недостаточному выравниванию экспериментальных данных, а завышение – к искажению существенных особенностей последовательности $v(n)$. Поскольку частотные спектры последовательностей $v(n)$ и $r(n)$ заранее неизвестны, величину L обычно подбирают экспериментально. Обычно процедуру сглаживания начинают со значений $L = 2 - 4$ и увеличивают в случае необходимости после анализа полученных результатов сглаживания.

Сглаживание четвертыми разностями

Сглаживание четвертыми разностями производится путем аппроксимации пяти соседних значений последовательности $x(n)$ параболой с помощью метода наименьших квадратов. В качестве элемента сглаженной последовательности $y(n)$ принимается точка параболы, наилучшим образом аппроксимирующей значения сглаживаемой последовательности $x(n)$ в пяти точках (рис. 9.1)

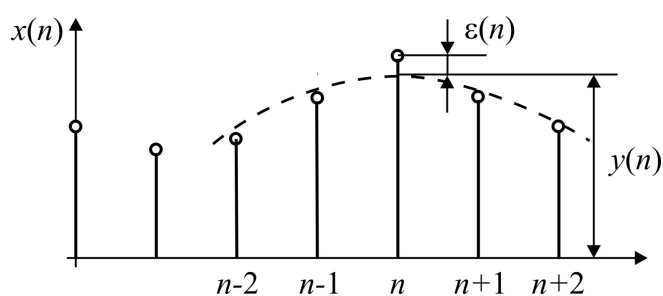


Рис. 9.1. Аппроксимация последовательности в пяти точках

Как показано с помощью метода наименьших квадратов, значение этого элемента вычисляется по формуле

$$y(n) = x(n) - \varepsilon(n), \quad (9.2)$$

где поправка $\varepsilon(n)$ пропорциональна смещенной обратной или прямой разности четвертого порядка:

$$\varepsilon(n) = \frac{3}{35} \Delta^4 x(n+2) = \frac{3}{35} \Delta^4 x(n-2).$$

Используя известные соотношения для расчета прямых и обратных разностей, легко убедиться в том, что

$$\varepsilon(n) = \frac{3}{35} [x(n-2) - 4 \cdot x(n-1) + 6 \cdot x(n) - 4 \cdot x(n+1) + x(n+2)]. \quad (9.3)$$

Подставив (9.3) в (9.2), найдем формулу, которая позволяет непосредственно рассчитать ординату выходной последовательности:

$$y(n) = \frac{1}{35} [-3 \cdot x(n-2) + 12 \cdot x(n-1) + 17 \cdot x(n) + 12 \cdot x(n+1) - 3 \cdot x(n+2)].$$

Из этого уравнения определим передаточную функцию фильтра

$$H_{\text{чп}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{35} (-3z^{-2} + 12z^{-1} + 17 + 12z - 3z^2).$$

Экспоненциальное сглаживание

Экспоненциальное сглаживание – один из простейших и распространенных приемов выравнивания последовательностей. В его основе лежит расчет экспоненциальных средних. Алгоритм экспоненциального сглаживания описывается разностным уравнением

$$y(n) = (1 - \alpha) \cdot y(n-1) + \alpha \cdot x(n), \quad (9.4)$$

где α – постоянный коэффициент ($0 < \alpha < 1$), называемый *постоянной сглаживания*.

Передаточная функция фильтра, осуществляющего экспоненциальное сглаживание, согласно уравнению (9.4) имеет вид

$$H_{\text{эс}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}}.$$

Из выражения (9.4) следует, что текущее значение сглаженной последовательности $y(n)$ равно предыдущему ее значению плюс некоторая доля (α) разности между текущим значением входной последовательности и предыдущим значением сглаженной выходной последовательности.

Если последовательно использовать соотношение (9.4), то экспоненциальную среднюю $y(n)$ можно выразить через значения входной последовательности $x(v)$, $v = 0, \dots, n$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \alpha \cdot x(n) + (1 - \alpha) \cdot y(n-1) = \\ &= \alpha \cdot x(n) + \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot x(n-1) + (1 - \alpha)^2 \cdot y(n-2) = \dots \\ &\dots = \alpha \sum_{v=0}^{n-1} (1 - \alpha)^v \cdot x(n-v) + (1 - \alpha)^n \cdot x(0). \end{aligned}$$

Таким образом, величина $y(n)$ оказывается взвешенной суммой всех членов последовательности $x(n)$, причем веса падают экспоненциально в зависимости от удаления элемента входной последовательности. Если, например, $\alpha = 0,3$, то текущий элемент последовательности будет иметь вес 0,3, а веса предшествующих элементов составят соответственно 0,21; 0,147; 0,1029 и т.д.

Постоянная сглаживания α принимает значения от 0 до 1. Предельное значение $\alpha = 0$ соответствует случаю $L = \infty$ при сглаживании скользящим усреднением. При этом $y(n) = y(n-1)$. Предельное значение $\alpha = 1$ означает, что предыдущие значения вообще не учитываются. Как показывает практика, значение постоянной сглаживания α следует принимать в пределах от 0,01 до 0,3.

9.3. Методические указания

Для исследования описанных выше алгоритмов сглаживания формируется тестовая дискретная последовательность

$$x(n) = v(n) + r(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

в которой полезная составляющая $v(n)$ состоит из двух гармонических последовательностей с различными частотами:

$$v(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{M_1}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{M_2}n\right),$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную последовательность, генерируемую при помощи стандартных функций MathCAD.

Центрированная случайная последовательность $r(n)$ формируется в виде разности

$$r(n) = r1(n) - \text{mean}(r1).$$

Здесь нецентрированная случайная последовательность образуется при помощи стандартной функции $\text{rnd}(x)$, то есть

$$r1(n) = \text{rnd}(b),$$

где b – верхняя граница интервала разброса случайных чисел, а $\text{mean}(r1)$ – среднее значение, определяемое средствами системы MathCAD или непосредственно по формуле

$$\text{mean}(r1) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r1(n).$$

Таким образом, тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{M_1}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{M_2}n\right) + r(n).$$

Для оценки качества сглаживания различных алгоритмов в работе используется сумма

$$J = \sum_{n=10}^{N-10} [y(n) - v(n)]^2. \quad (9.5)$$

Пределы изменения n в (9.5) приняты такими, чтобы при сравнении алгоритмов сглаживания с некоторым запасом исключить влияние начального и конечного участков, на которых алгоритмы сглаживания не работают.

9.4. Программа работы

1. Сформировать полезную и случайную составляющие сглаживаемой последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ($N \approx 500$). Пронаблюдать полезную и случайную составляющие, а также сглаживаемую последовательность в целом.

Примечание. Параметры сглаживаемой последовательности (M_1 , M_2 и b) задаются преподавателем.

2. Составить программу сглаживания последовательности $x(n)$ по методу скользящего усреднения и вычисления значения критерия (9.5), характеризующего качество сглаживания. Пронаблюдать сглаженные последовательности и рассчитать значение критерия при $L = 2, 4, 6, 8$. Значения критерия при различных L занести в таблицу и оценить влияние параметра L на качество сглаживания.

3. Составить программу сглаживания последовательности $x(n)$ по методу четвертых разностей. Пронаблюдать сглаженную последовательность и вычислить значение критерия качества.

4. Составить программу экспоненциального сглаживания последовательности $x(n)$. Пронаблюдать сглаженную последовательность и вычислить значения критерия качества при $\alpha = 0,1; 0,2; \dots; 0,9$. Данные занести в таблицу и построить график зависимости критерия качества сглаживания от коэффициента α . Определить оптимальное значение коэффициента α .

5. Сравнить значения критериев качества сглаживания, полученные для различных алгоритмов сглаживания, и сделать выводы.

6. Записать частотные передаточные функции $H(e^{j\omega T})$ для всех алгоритмов сглаживания, исследуемых в работе.

7. Составить программы расчета АЧХ и ФЧХ всех исследуемых фильтров сглаживания в масштабе относительной частоты $r = \omega T / 2\pi$ при $0 \leq r \leq 0.5$. Построить соответственно АЧХ и ФЧХ всех фильтров на одном рисунке. Сравнить исследуемые фильтры сглаживания по частотным свойствам.

9.5. Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях рекомендуется использовать процедуру сглаживания экспериментальных данных?

2. Почему при сглаживании скользящим усреднением увеличение L приводит к искажению полезной составляющей?

3. Как изменится АЧХ алгоритма скользящего усреднения при увеличении L ?

4. Поясните геометрически идею сглаживания четвертыми разностями.

5. В чем заключается аппроксимация по методу наименьших квадратов?

6. Покажите, что уравнения фильтра, полученные через обратную и прямую разности четвертого порядка, эквивалентны.

7. Найдите статический коэффициент передачи фильтра, реализующего сглаживание четвертыми разностями.

8. Почему в уравнении (9.4) должно выполняться условие $0 < \alpha < 1$?

9. Найдите статический коэффициент передачи экспоненциального фильтра.

10. Как изменяются АЧХ и ФЧХ экспоненциального фильтра при изменении α ?

11. Какие алгоритмы сглаживания, кроме рассмотренных, Вам известны?

10. РЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ЧАСТОТ

10.1. Цель работы

Для рекурсивных цифровых фильтров, имеющих прототипы среди аналоговых фильтров, задача определения передаточной функции, удовлетворяющей заданным требованиям, часто решается путем определения передаточной функции аналогового фильтра-прототипа и последующего ее преобразования. Из всех известных методов такого преобразования в настоящее время чаще применяется метод билинейного преобразования.

Целью работы является: а) изучение метода определения передаточной функции рекурсивных цифровых фильтров нижних и верхних частот с помощью билинейного преобразования; б) построение и анализ особенностей частотных характеристик цифровых фильтров нижних и верхних частот; в) определение и анализ реакции фильтров на тестовую дискретную последовательность.

10.2. Основные понятия и расчетные формулы

Нормированные аналоговые фильтры нижних частот

В работе рассматриваются фильтры, нормированные передаточные функции которых не содержат нулей и могут быть представлены в виде

$$H_{\text{на}}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}. \quad (10.1)$$

Обычно фильтр реализуют в виде последовательного соединения звеньев первого и второго порядка. Поэтому знаменатель передаточной функции (10.1) представляют в виде произведения сомножителей не выше второго порядка. Тогда

$$A(s) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}) & \text{при четных } n, \\ (s - \alpha_0) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}) & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Параметры нормированных передаточных функций ФНЧ, исследуемых в работе, приведены в приложении П.2.

Билинейное преобразование

Передаточная функция цифрового фильтра может быть получена путем преобразования передаточной функции аналогового фильтра. Для

этих целей, как правило, используется метод билинейного преобразования, имеющий некоторые преимущества перед другими методами. Основу метода составляет конформное отображение s -плоскости в z -плоскость при помощи соотношения

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (10.2)$$

Каждой точке комплексной плоскости $s = \delta + j\omega$ выражение (10.2) ставит в соответствие определенную точку на плоскости $z = \exp[(\delta + j\omega)T]$ и при этом отображает:

- 1) открытую левую s -полуплоскость в область, расположенную внутри единичного круга ($|z| < 1$);
- 2) мнимую ось s -плоскости в единичную окружность ($|z| = 1$);
- 3) открытую правую полуплоскость s в область, расположенную вне единичного круга ($|z| > 1$).

Подстановкой (10.2) в передаточную функцию $H_a(s)$ аналогового фильтра получают передаточную функцию $H(z)$ цифрового фильтра

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}.$$

Однако соотношение между частотой Ω аналогового фильтра и частотой ω цифрового фильтра оказывается существенно нелинейным. Действительно, из формулы (10.2) при $s = j\Omega$ и $z = \exp(j\omega T)$ следует, что

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \quad \text{или} \quad \omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\Omega T}{2} \right).$$

При переходе от частоты Ω к частоте ω ширина полос пропускания и задерживания частотных интервалов деформируются. Но все максимумы и минимумы АЧХ аналогового фильтра сохраняются и в АЧХ цифрового фильтра. Сохраняются и основные свойства фильтров (тип, неравномерность АЧХ для соответствующих диапазонов частот и др.). Деформация шкалы частот проявляется и в искажениях ФЧХ фильтра.

Все полюса аналогового фильтра, расположенные в левой половине s -плоскости, при билинейном преобразовании отображаются во внутреннюю область единичного круга, поэтому цифровой фильтр будет устойчивым, если устойчив аналоговый прототип.

Определение передаточной функции ФНЧ и ФВЧ

Нормированные ФНЧ (см. приложение П.2), имеют частоту среза $\Omega_c = 1$. Переход от передаточной функции $H_n(s)$ нормированного ФНЧ к передаточной функции $H_{\text{цнч}}(z)$ цифрового ФНЧ с заданной частотой среза ω_c выполняется в три этапа:

1) определение частоты среза Ω_c аналогового фильтра-прототипа

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right); \quad (10.3)$$

2) определение передаточной функции $H_{\text{анч}}(s)$ аналогового фильтра-прототипа с помощью процедуры денормирования:

$$H_{\text{анч}}(s) = H_{\text{н}}(s) \Big|_{s=\frac{s}{\Omega_c}};$$

3) определение передаточной функции $H_{\text{цнч}}(z)$ цифрового ФНЧ с помощью билинейного преобразования:

$$H_{\text{цнч}}(z) = H_{\text{анч}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

Пусть требуется получить передаточную функцию цифрового ФНЧ Баттерворта первого порядка с частотой среза $\omega_c = 5$ рад/с и периодом $T = 0,2$ с. Определим частоту среза аналогового фильтра-прототипа

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) = 10 \cdot \operatorname{tg}(0,5) = 5,463 \text{ рад/с.}$$

Согласно таблице, приведенной в приложении П.2, запишем передаточную функцию нормированного ФНЧ заданного типа:

$$H_{\text{н}}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

После денормирования с помощью подстановки $s = s/\Omega_c$ получим передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа

$$H_{\text{анч}}(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} = \frac{5,463}{s + 5,463}.$$

Выполнив билинейное преобразование $H_{\text{анч}}(s)$, найдем передаточную функцию искомого цифрового ФНЧ

$$H_{\text{цнч}}(z) = H_{\text{анч}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1}},$$

где $a_0 = \Omega_c + 2/T$; $a_1 = \Omega_c - 2/T$; $b_0 = b_1 = \Omega_c$.

Подставив численные значения, получим

$$H_{\text{цнч}}(z) = \frac{5,463 + 5,463z^{-1}}{15,463 - 4,537z^{-1}} = \frac{0,353(1 + z^{-1})}{1 - 0,293z^{-1}}.$$

Передаточная функция $H_{\text{цнч}}(z)$ цифрового ФВЧ с заданной частотой среза Ω_c определяется в те же три этапа:

1) определение частоты среза Ω_c по формуле (10.3);

2) определение передаточной функции $H_{\text{авч}}(s)$ аналогового фильтра-прототипа с помощью процедуры трансформации:

$$H_{\text{авч}}(s) = H_{\text{н}}(s) \Big|_{s=\frac{\Omega_c}{s}}$$

3) определение передаточной функции $H_{\text{цвч}}(z)$ цифрового ФВЧ с помощью билинейного преобразования:

$$H_{\text{цвч}}(z) = H_{\text{авч}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Пусть требуется получить передаточную функцию цифрового ФВЧ Чебышева ($\varepsilon = 0,153$) первого порядка с частотой среза $\omega_c = 5$ рад/с и периодом дискретизации $T = 0,2$ с. Частота среза аналогового фильтра-прототипа будет той же: $\Omega_c = 5,463$ рад/с. В приложении П.2 найдем передаточную функцию нормированного ФНЧ заданного типа:

$$H_{\text{н}}(s) = \frac{6,552}{s + 6,552}$$

Денормирование и трансформация путем подстановки $s = \Omega_c/s$ дает передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа

$$H_{\text{авч}}(s) = \frac{6,552s}{6,552s + \Omega_c} = \frac{s}{s + 0,834}$$

Выполнив билинейное преобразование $H_{\text{авч}}(s)$, найдем передаточную функцию $H_{\text{цвч}}(z)$ искомого цифрового ФВЧ

$$H_{\text{цвч}}(z) = H_{\text{авч}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1}},$$

где $a_0 = \Omega_c + 6,552 \cdot \frac{2}{T}$; $a_1 = \Omega_c - 6,552 \cdot \frac{2}{T}$; $b_0 = -b_1 = 6,552 \cdot \frac{2}{T}$.

Подставив численные значения, будем иметь

$$H_{\text{цвч}}(z) = \frac{65,52 + 65,52z^{-1}}{70,985 - 60,057z^{-1}} = \frac{0,923(1 - z^{-1})}{1 - 0,846z^{-1}}$$

10.3. Методические указания

В работе исследуются цифровые фильтры второго порядка. Передаточные функции исследуемых фильтров определяются по описанной выше методике. Все исследования проводятся по полученным передаточным функциям.

Частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) цифровых фильтров рассчитываются по передаточной функции и строятся с учетом их периодичности в интервале частот $[0, \pi/T]$.

Для проверки фильтрующих свойств цифрового фильтра формируется входная дискретная последовательность

$$x(n) = \sin(\omega_1 T \cdot n) + \cos(\omega_2 T \cdot n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (N \approx 500), \quad (10.4)$$

где значение ω_1 выбирается из полосы пропускания фильтра, а значение ω_2 – из полосы задерживания фильтра.

Выходной сигнал $y(n)$ цифрового фильтра рассчитывается по разностному уравнению, полученному из передаточной функции.

10.4. Программа работы

1. Получить в общем виде передаточную функцию $H_{\text{цнч}}(z)$ цифрового ФНЧ второго порядка по аналоговому прототипу заданного типа.

Примечание. Тип фильтра задается преподавателем по табл. 10.1. Нормированные передаточные функции аналоговых прототипов приведены в приложении П.2.

Таблица 10.1

Тип фильтра	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Тип ФНЧ	Бат	Чеб1	Бат	Чеб2	Бат	Чеб3	Бат	Чеб4
Тип ФВЧ	Чеб1	Бат	Чеб2	Бат	Чеб3	Бат	Чеб4	Бат

2. Составить программу расчета коэффициентов передаточной функции цифрового ФНЧ. Рассчитать коэффициенты передаточной функции фильтра для заданных значений ω_c и T .

Примечание. Значения частоты среза ω_c и периода дискретизации T задаются преподавателем.

3. Составить программу расчета АЧХ и ФЧХ цифрового ФНЧ при $\omega \in [0, \pi/T]$. Построить АЧХ и ФЧХ цифрового фильтра.

4. Сформировать по формуле (10.4) дискретную последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, ($N \approx 500$).

5. По найденной ранее передаточной функции записать разностное уравнение цифрового фильтра и составить программу расчета выходной последовательности $y(n)$ цифрового фильтра при входной последовательности $x(n)$. Пронаблюдать на экране дискретные последовательности $x(n)$, $y(n)$ и сделать вывод о работе фильтра.

6. Повторить пункты 1–5 для заданного цифрового ФВЧ.

7. Уменьшить значение периода дискретизации T на 20 %. С помощью составленной программы рассчитать коэффициенты передаточной функции, АЧХ и ФЧХ цифровых ФНЧ и ФВЧ. Сравнить АЧХ и ФЧХ при двух значениях периода дискретизации и сделать вывод.

10.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте понятие цифрового фильтра.
2. Чем отличается деление цифровых фильтров по признакам «нерекурсивный и рекурсивный» и «конечная и бесконечная импульсные характеристики»?
3. Какие методы используются для преобразования передаточной функции аналогового фильтра-прототипа в передаточную функцию цифрового фильтра?
4. Каким условиям должна удовлетворять процедура преобразования передаточной функции аналогового прототипа в передаточную функцию цифрового фильтра?
5. Поясните основной недостаток билинейного преобразования.
6. Объясните смысл операции денормирования передаточной функции ФНЧ.
7. Объясните смысл операции трансформации передаточной функции ФНЧ.
8. Как отличаются АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева в полосе пропускания?
9. Чем обусловлены ограничения на нижний и верхний пределы изменения периода дискретизации T цифрового фильтра?
10. Объясните причину периодичности частотных характеристик цифрового фильтра.

11. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ

11.1. Цель работы

Одной из наиболее важных особенностей нерекурсивных цифровых фильтров является то, что при соответствующем выборе параметров они могут иметь строго линейную фазо-частотную характеристику (ФЧХ). Это свойство является, например, определяющим, если требуется обеспечить неискаженное преобразование сигналов. Нерекурсивные цифровые фильтры используются и в тех случаях, когда предъявляемые требования не могут быть реализованы при помощи фильтров Баттерворта и Чебышева, например для выполнения дифференцирования и интегрирования сигналов.

Целью работы является изучение особенностей нерекурсивных цифровых ФНЧ с линейной ФЧХ, освоение способа расчета его коэффициентов методом взвешивания и исследование влияния порядка N и периода дискретизации T на частотные характеристики фильтра.

11.2. Основные понятия и расчетные формулы

Нерекурсивные цифровые ФНЧ с линейной ФЧХ

Нерекурсивные цифровые фильтры описываются разностным уравнением

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} b_v x(n-v). \quad (11.1)$$

Передаточная функция, полученная в результате применения прямого z -преобразования к уравнению (11.1), имеет вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{v=0}^{N-1} b_v z^{-v}.$$

Как известно, передаточная функция цифрового фильтра может быть определена как прямое z -преобразование импульсной характеристики $h(n)$, то есть

$$H(z) = Z \{h(n)\} = \sum_{v=0}^{N-1} h(n) z^{-v}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты передаточной функции (разностного уравнения) и отсчеты импульсной характеристики нерекурсивных цифровых фильтров совпадают.

Если в разностном уравнении (11.1) произвести замену $b_v = h(v)$, $v = 0, 1, \dots, N-1$, то получим

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} h(v) x(n-v). \quad (11.2)$$

Это есть не что иное, как свертка функций $x(n)$ и $h(n)$. Следовательно, в случае нерекурсивных цифровых фильтров разностное уравнение и уравнение свертки совпадают.

Алгоритм функционирования нерекурсивных цифровых фильтров может быть представлен в виде структурной схемы, показанной на рис. 11.1.

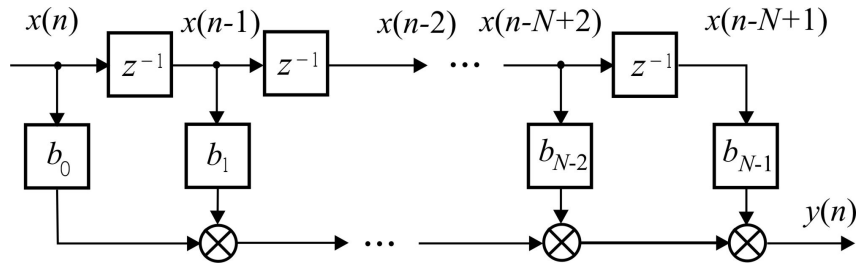


Рис. 11.1. Структурная схема нерекурсивного цифрового фильтра

Частотная передаточная функция нерекурсивных цифровых фильтров определяется выражением

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{v=0}^{N-1} h(v) e^{-j\omega T v}. \quad (11.3)$$

Нерекурсивные цифровые фильтры с линейной ФЧХ, в зависимости от числа N и вида симметрии отсчетов импульсной характеристики, делятся на четыре типа. Для реализации ФНЧ с линейной ФЧХ пригодны два из них. Частотные передаточные функции этих фильтров имеют следующий вид:

1) для типа 1 (N – нечетное, симметричные коэффициенты $b_v = b_{N-v-1}$):

$$H_1(e^{j\omega T}) = e^{-jK\omega T} \sum_{m=0}^K c_m \cos(m\omega T), \quad (11.4)$$

где $K = (N-1)/2$; $c_0 = b_K$; $c_m = 2b_{K-m}$, $m = 1, 2, \dots, K$;

2) для типа 2 (N – четное, симметричные коэффициенты $b_v = b_{N-v-1}$):

$$H_2(e^{j\omega T}) = e^{-j(K+0.5)\omega T} \sum_{m=0}^K c_m \cos((m+0.5)\omega T),$$

где $K = (N-1)/2$; $c_m = 2b_{K-m}$, $m = 0, 1, \dots, K$.

Данные фильтры имеют $N - 1$ нулей и $N - 1$ нулевых полюсов, поэтому для получения частотной характеристики с крутым срезом необходимо брать большое N . При этом реализация фильтров требует большого числа элементов задержки. Из-за того, что все полюсы равны нулю, эти фильтры всегда устойчивы.

Расчет коэффициентов нерекурсивного ФНЧ методом взвешивания

Для расчета коэффициентов нерекурсивных цифровых фильтров разработан ряд методов. Одним из часто применяемых является метод взвешивания. Здесь требования к частотной характеристике цифрового ФНЧ задаются в виде функции

$$H_d(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\omega T(N-1)/2} & \text{при } |\omega| \leq \omega_c, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (11.5)$$

Согласно (11.5) желаемые АЧХ и ФЧХ фильтра определяются соответственно формулами:

$$H_d(\omega) = |H_d(e^{j\omega T})| = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \omega_c, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = \arg H_d(e^{j\omega T}) = -\omega(N-1)T/2.$$

Импульсную характеристику $h_d(n)$ можно получить путем вычисления коэффициентов ряда Фурье функции (11.5), продолженной периодически с периодом $\omega_n = 2\pi/T$:

$$h_d(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega T(n-(N-1)/2)} d\omega. \quad (11.6)$$

После преобразований (11.6) будем иметь

$$h_d(n) = \frac{\sin [\omega_c(n-(N-1)/2) T]}{\pi(n-(N-1)/2)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11.7)$$

Очевидно, $h_d(n)$ имеет бесконечную длину. Одним из возможных способов получения нерекурсивного цифрового фильтра состоит в усечении бесконечного ряда (11.7) путем отбрасывания отсчетов, соответствующих $n \geq N$, то есть в качестве импульсной характеристики фильтра принимается функция

$$h(n) = h_d(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Однако простое усечение функции (11.7) из-за явления Гиббса не дает хороших результатов. Амплитудная частотная характеристика фильтра при использовании простого усечения имеет выбросы и пульсации большого уровня до и после точки разрыва аппроксимируемой частотной характеристики. Например, при аппроксимации идеальной характе-

ристики ФНЧ (11.5) максимальная амплитуда пульсаций частотной характеристики составляет около 9 %, причем с увеличением длины импульсной характеристики она не уменьшается.

Широко распространенный способ устранения вредного влияния явления Гиббса заключается во взвешивании функции $h_d(n)$ при помощи функции $w(n)$. Импульсную характеристику нерекурсивного цифрового фильтра находят в виде

$$h(n) = h_d(n) w(n).$$

Дискретную функцию $w(n)$, заданную на интервале $[0, N-1]$, называют оконной функцией (окном). Кстати, простое усечение функции $h_d(n)$ эквивалентно применению прямоугольного окна

$$w(n) = 1, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Наиболее часто используются следующие оконные функции: Бартлетта, Хэнна, Хэмминга, Блэкмана (приложение П.3). Использование оконных функций приводит, во-первых, к уменьшению уровня боковых лепестков и, как следствие, к меньшим пульсациям частотной характеристики в полосе пропускания и лучшему подавлению в полосе задерживания фильтра. Во-вторых, оконная функция увеличивает ширину главного лепестка частотной характеристики.

11.3. Методические указания

Программа работы предусматривает расчет импульсной и частотных характеристик нерекурсивного цифрового ФНЧ, их сравнение при различных значениях порядка фильтра N и периода дискретизации T , а также расчет реакции фильтра при заданном входном воздействии.

Импульсная характеристика фильтра $h_d(n)$ рассчитывается по формуле (11.7). При этом надо помнить, что при $n = (N-1)/2$ может проявиться себя неопределенность типа $0/0$. Чтобы устранить эту неопределенность, следует использовать условный оператор if.

Частотные характеристики цифрового фильтра рассчитываются по формуле (11.3) и с учетом их периодичности в интервале частот $[0, \pi/T]$.

При подготовке отчета характеристики, соответствующие различным значениям N и T , рекомендуется для удобства сопоставления строить на одном рисунке.

Расчет выходной последовательности фильтра $y(n)$ при заданном входном воздействии $x(n)$ осуществляется по формуле (11.2).

11.4. Программа работы

1. Рассчитать по формуле (11.7) импульсную характеристику $h_d(n)$. Построить график $h_d(n)$, $n = -10, -9, \dots, 50$. Составить программу расчета импульсной характеристики $h(n)$ нерекурсивного цифрового фильтра с помощью прямоугольного окна (простого усечения $h_d(n)$) при $N = 21$.

Примечание. Параметры фильтра (частота среза ω_c и период дискретизации T) задаются преподавателем.

2. Составить программу расчета импульсной характеристики $h(n)$ нерекурсивного цифрового фильтра с помощью заданной оконной функции $w(n)$ при $N = 21$.

Примечание. Вид оконной функции задается преподавателем. Аналитические выражения оконных функций $w(n)$ приведены в приложении П.3.

3. Построить на одном рисунке импульсные характеристики нерекурсивных фильтров, соответствующих прямоугольному и заданному варианту окна.

5. Составить программу расчета частотных характеристик нерекурсивных цифровых фильтров, соответствующих прямоугольному и заданному варианту окна. Построить и сравнить АЧХ и ФЧХ этих фильтров.

6. Сформировать дискретную последовательность $x(n)$, состоящую из двух синусоидальных составляющих

$$x(n) = \sin(\omega_1 T \cdot n) + \sin(\omega_2 T \cdot n), \quad n = 0, 1, \dots, 500,$$

выбрав значения ω_1 и ω_2 в полосе пропускания фильтра. Пронаблюдать эту последовательность.

7. Рассчитать дискретную последовательность $y(n)$ на выходе фильтра при входном воздействии $x(n)$. Пронаблюдать дискретные последовательности $x(n), y(n)$ и сделать заключение об искажении выходной последовательности по форме.

8. Принять $N = 31$ и с помощью составленной программы рассчитать импульсную и частотные характеристики фильтра, полученного с помощью заданной оконной функции. Построить их вместе с одноименными характеристиками фильтра с $N = 21$ и сравнить.

9. Изменить значение периода дискретизации T на 20% в ту и другую сторону при $N = 31$ и с помощью составленной программы рассчитать импульсную и частотные характеристики фильтра, полученного с помощью заданной оконной функции. Построить их вместе с одноименными характеристиками фильтра, полученными выше, и сравнить.

11.5. Контрольные вопросы и задания

1. Запишите условия неискаженного воспроизведения сигнала линейной стационарной системой.
2. Чем отличаются нерекурсивные фильтры с симметричными и антисимметричными импульсными характеристиками?
3. Поясните отличия между каузальными и некаузальными цифровыми фильтрами.
4. Почему нерекурсивные цифровые фильтры всегда устойчивы?
5. Получите формулу (11.4), используя в качестве исходного выражение (11.3).
6. Как выглядит амплитудно-фазовая частотная характеристика нерекурсивного цифрового фильтра?
7. Перечислите известные Вам методы расчета нерекурсивных цифровых фильтров.
8. Поясните характерные особенности оконных функций.

12. ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

12.1. Цель работы

При решении многих прикладных задач необходимо знать статистические характеристики случайных процессов. Обычно эти характеристики определяют по реализациям случайного процесса, полученным экспериментально. Наиболее просто эта задача решается для стационарного случайного процесса, статистические характеристики которого не изменяются во времени. Если стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством, то его статистические характеристики могут быть определены по одной реализации, наблюдаемой на достаточно большом интервале времени.

Целью работы является определение оценок математического ожидания, дисперсии, плотности распределения вероятности и корреляционной функции стационарного случайного процесса по его заданной реализации.

12.2. Основные понятия и расчетные формулы

Подготовка данных

Пусть дана реализация $x_p(t)$ стационарного случайного процесса длительностью T_p (рис. 12.1).

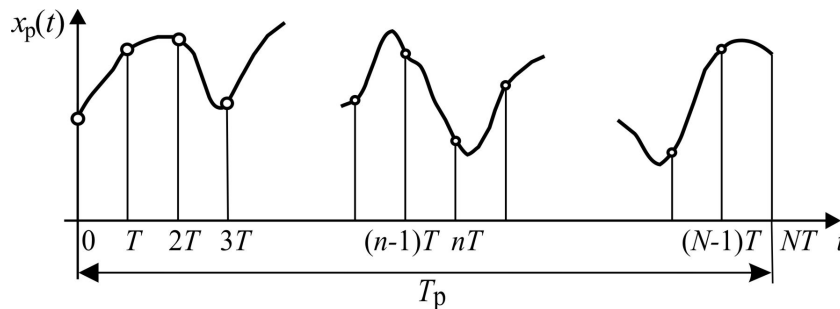


Рис. 12.1. Дискретизация реализации случайного процесса

На основании эргодического свойства математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция этого стационарного случайного процесса определяются соответственно выражениями:

$$m_x = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x_p(t) dt, \quad (12.1)$$

$$D_x = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [x_p(t) - m_x]^2 dt, \quad (12.2)$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [x_p(t) - m_x][x_p(t + \tau) - m_x] dt. \quad (12.3)$$

Оценки приведенных выше статистических характеристик находятся по имеющейся реализации $x_p(t)$ заданной длины по следующим формулам, полученным из (12.1)–(12.3):

$$m_x^* = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x_p(t) dt, \quad (12.4)$$

$$D_x^* = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [x_p(t) - m_x^*]^2 dt, \quad (12.5)$$

$$R_x^*(\tau) = \frac{1}{T_p - \tau} \int_0^{T_p - \tau} [x_p(t) - m_x^*][x_p(t + \tau) - m_x^*] dt. \quad (12.6)$$

Расчет численных значений оценок математического ожидания m_x^* , дисперсии D_x^* и ординат функции $R_x^*(\tau)$, являющейся оценкой корреляционной функции, производится путем дискретизации реализации $x_p(t)$ случайного процесса и заменой интегралов в выражениях (12.4)–(12.6) суммами. Для этого интервал наблюдения $[0, T_p]$ случайного процесса (рис. 12.1) разбивается на N достаточно малых интервалов длительностью T . В начале каждого из этих интервалов определяются значения

$$x(0) = x_p(0), \quad x(1) = x_p(T), \quad \dots, \quad x(N-1) = x_p((N-1)T).$$

При этом возникает задача выбора необходимой длины T_p реализации случайного процесса и длительности T интервала дискретизации. Необходимая длина реализации в основном определяется требуемой точностью оценивания корреляционной функции и ее свойствами. Разработаны методики, которые позволяют оценить необходимую длину реализации для получения корреляционной функции с заданной точностью непосредственно по отрезку реализации случайного процесса. Например, для определения T_p используется связь среднего числа максимумов и нулей случайного процесса в единицу времени с параметрами корреляционной функции. Шаг дискретизации T рекомендуют выбирать так, чтобы на «полупериод» (время между двумя пересечениями графиком слу-

чайной функции линии математического ожидания) реализации случайного процесса приходилось около семи дискретных значений.

Оценки математического ожидания и дисперсии

Для оценки математического ожидания, заменив в (12.4) интеграл суммой, получим

$$m_x^* = \frac{1}{N \cdot T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot T = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n).$$

Таким образом, оценка математического ожидания равна среднему арифметическому значений $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ реализации случайного процесса в дискретные моменты времени.

Для оценки дисперсии из формулы (12.5) найдем

$$D_x^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - m_x^*]^2.$$

Однако эта оценка дисперсии оказывается смещенной. На практике применяется формула, которая удовлетворяет условию несмещенности:

$$D_x^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - m_x^*]^2.$$

Оценка одномерной плотности распределения

Оценка одномерной плотности распределения вероятности случайного процесса сводится к построению гистограммы распределения значений $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ реализации. Для этого следует разбить полученный диапазон значений случайных чисел на равные интервалы и вычислить частоты попадания случайных чисел в эти интервалы.

Большое значение при построении гистограммы имеет разбиение интервала изменения случайных чисел на интервалы группировки. При слишком большом числе интервалов группировки некоторые из них оказываются слабозаполненными, и гистограмма получается изрезанной и многолепестковой. При малом числе интервалов гистограмма утрачивает детальность и становится малоинформативной. В работе рекомендуется принять $L \approx \sqrt{N}$ (L – целое).

Оценка корреляционной функции

По формуле (12.6) для значений оценки корреляционной функции в дискретные моменты времени $\tau_m = m \cdot T$ ($m = 0, 1, \dots$) получим

$$R_x^*(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} [x(n) - m_x^*] [x(n+m) - m_x^*], \quad (12.7)$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1.$$

Показано, что чем больше m , тем больше ошибка определения корреляционной функции. Поэтому формулу (12.7) рекомендуют использовать при $M < N/10$. Найденную по формуле (12.7) оценку корреляционной функции необходимо дополнить симметричными отсчетами для отрицательных $m = -M + 1, \dots, -1$.

12.3. Методические указания

В качестве объекта исследования используется последовательность случайных чисел $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, моделирующая некоторый стационарный случайный процесс. Для получения этой последовательности используется генератор случайных чисел, имеющийся в составе системы MathCAD, и линейный дискретный фильтр (рис. 12.2).

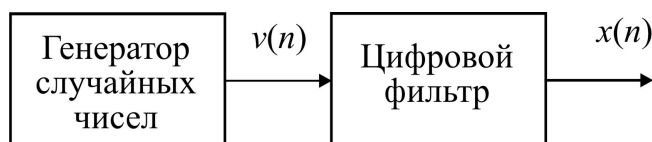


Рис. 12.2. Формирование последовательности случайных чисел

Функция $v(n) = \text{rnd}(b)$ в системе MathCAD генерирует случайные числа с равномерным распределением в интервале $[0, b]$. Линейный фильтр первого порядка описывается разностным уравнением

$$x(n) = (1 - a) \cdot x(n-1) + a \cdot v(n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (12.8)$$

где a – постоянный коэффициент и $x(0)$ – первый элемент генерируемой последовательности, значение которого можно принять равным $x(0) = b/2$.

При построении гистограммы для определения частот попадания случайных чисел $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ в заданные интервалы используется стандартная функция $\text{hist}(\omega, X)$ системы MathCAD. Для того чтобы применить указанную функцию, надо сформировать вектор w с составляющими $w(0), w(1), \dots, w(L)$, которые представляют собой границы интервалов группировки.

Эти составляющие образуют по формуле

$$w(l+1) = w(l) + \Delta w, \quad l = 0, 1, \dots, L-1,$$

где

$$\Delta w = \frac{\max(x) - \min(x)}{L}; \quad w(0) = \min(x).$$

Для расчета оценки корреляционной функции используются приведенные выше формулы.

12.4. Программа работы

1. Сформировать последовательность случайных чисел $v(n) = \text{rnd}(b)$ $n = 0, 1, \dots, N-1$ ($N \in [500, 1000]$).

Примечание: Параметр b , определяющий предельное значение генерируемых случайных чисел, задается преподавателем. При моделировании дискретных последовательностей и разностных уравнений в среде MathCAD рекомендуется использовать векторную форму представления (с использованием индексов).

2. Получить последовательность случайных чисел $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ путем преобразования последовательности чисел $v(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ при помощи дискретного фильтра, описываемого разностным уравнением (12.8).

Примечание. Значение коэффициента a цифрового фильтра задаются преподавателем.

3. Разбить интервал изменения значений случайных чисел в последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ на L интервалов группировки, определив последовательность $w(0), w(1), \dots, w(L)$, и построить гистограмму. Сделать вывод о характере распределения случайной последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

4. Определить значение оценки m_x^* математического ожидания случайной последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

5. Определить значение оценки D_x^* дисперсии случайной последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

6. Рассчитать значения ординат оценки $R_x^*(m)$ корреляционной функции для $m = 0, 1, \dots, 32$. Построить график оценки корреляционной функции.

7. Определить передаточную функцию $H(z)$ и импульсную характеристику $h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}$ дискретного фильтра, описываемого разностным уравнением (12.8). Построить импульсную характеристику фильтра с заданным значения a .

8. Сравнить оценку $R_x^*(m)$ корреляционной функции с импульсной характеристикой цифрового фильтра. Для этого надо произвести нормирование указанных характеристик

$$\rho_x^*(m) = R_x^*(m) / R_x^*(0),$$
$$\eta(m) = h(m) / h(0)$$

и построить их графики на одном рисунке. Сделать выводы.

12.5. Контрольные вопросы и задания

1. Что понимают под реализацией случайного процесса?
2. Какой случайный процесс называется стационарным?
3. В чем состоит суть эргодического свойства?
4. Выразите свое отношение к следующим утверждениям: а) любой стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством; б) случайный процесс, обладающий эргодическим свойством, является стационарным.
5. Поясните физический смысл понятий математического ожидания и дисперсии стационарного случайного процесса.
6. Как связаны между собой среднее квадратическое отклонение и дисперсия случайного процесса?
7. Какое свойство стационарного случайного процесса характеризует корреляционная функция?
8. Какая связь существует между дисперсией и корреляционной функцией стационарного случайного процесса?
9. Обоснуйте верхний предел суммирования в формуле (12.7).

13. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ КОРРЕЛОГРАММНОГО МЕТОДА

13.1. Цель работы

Основной целью спектрального анализа являются оценивание спектральной плотности мощности (СПМ) дискретизированного случайного процесса и обнаружение в нем периодических составляющих. Появление современных компьютеров и цифровых алгоритмов расширило роль спектрального оценивания и превратило его в средство решения многих практических задач. Коррелограммный метод относится к классическим методам, имеющим в основе преобразование Фурье.

Целью работы является изучение коррелограммного метода и его практическое освоение на примере анализа дискретной последовательности, содержащей две гармонические составляющие и помеху.

13.2. Основные понятия и расчетные формулы

Спектральная плотность мощности

Непосредственное применение классического гармонического анализа для исследования случайных процессов невозможно. Для случайного процесса спектральная характеристика $X(j\omega)$, полученная в результате преобразования Фурье конкретной реализации $x(t)$, содержит гармонические составляющие со случайными амплитудами и фазами. С помощью преобразования Фурье можно исследовать распределение мощности случайного процесса по гармоническим составляющим. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ мощности стационарного случайного процесса $X(t)$ есть преобразование Фурье корреляционной функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (13.1)$$

Формулу (13.1) можно записать в следующем виде:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Спектральная плотность представляет собой действительную, неотрицательную и четную функцию частоты ω .

Коррелограммный метод оценивания спектральной плотности мощности

Оценки спектральной плотности мощности, для определения которых сначала по исходным данным формируются оценки корреляционных функций, получили название *коррелограммных*.

Оценка корреляционной функции находится по заданной реализации $x_p(t)$ случайного процесса (см. работу 12). Если определены N отсчетов $x_p(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, сигнала, то оценку корреляционной функции можно вычислить по формуле

$$R_x^*(m) = \frac{1}{N - m} \sum_{i=0}^{N-m-1} x_p(i) \cdot x_p(i + m), \quad m = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (13.2)$$

Оценка $R_x^*(m)$ корреляционной функции представляет собой дискретную последовательность, определенную на конечном интервале $[0, M - 1]$. Дополнив $R_x^*(m)$ симметричными отсчетами для отрицательных $m = -M + 1, \dots, -1$ и применив дискретное преобразование Фурье (ДПФ), получим оценку спектральной плотности

$$S_x^*(\omega) = \sum_{m=1-M}^{M-1} R_x^*(m) e^{-j \omega T m}. \quad (13.3)$$

С учетом того, что оценка $R_x^*(m)$ является четной функцией, формулу (13.2) можно записать в следующем виде:

$$S_x^*(\omega) = 2 \sum_{m=0}^{M-1} R_x^*(m) \cos(\omega T m). \quad (13.4)$$

Преимущество формулы (13.4) очевидно. При ее использовании отпадает необходимость дополнения $R_x^*(m)$ отсчетами для отрицательных m .

Теоретически спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$, определяемая в частотной области, является неслучайной характеристикой. Однако, поскольку ее оценивание всегда производится по ограниченным реализациям случайного процесса, значения спектра могут быть найдены только приближенно. Поэтому сама оценка спектральной плотности мощности имеет случайный характер и никогда не совпадает во всех точках с теоретической спектральной плотностью.

Применение коррелограммного метода оценивания оправдано только для стационарных случайных процессов и при использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье для расчетов по формулам (13.3), (13.4).

Коррелограммный метод применялся и до появления современных вычислительных машин и персональных компьютеров. Последние позволили внедрить в практику спектрального анализа более трудоемкие в вычислительном смысле, но и более эффективные методы.

Использование оконных функций

Для оценки (13.3), в которой вместо бесконечной корреляционной последовательности используется конечное число значений, характерно просачивание энергии, вызванное явлением Гиббса (эффект прямоугольного окна). Избавиться от просачивания энергии можно путем предварительного преобразования оценки корреляционной функции при помощи оконной функции $w(m)$, отличающейся от прямоугольной.

Тогда в качестве оценки спектральной плотности будем иметь:

$$S_x^*(\omega) = \sum_{m=1-M}^{M-1} R_x^*(m) w(m) e^{-j \omega T m} .$$

или

$$S_x^*(\omega) = 2 \sum_{m=0}^{M-1} R_x^*(m) w(m) \cos(\omega T m) .$$

Некоторые оконные функции, которые используются для улучшения оценок спектральной плотности, приведены в приложении П.3. Обработка с помощью оконной функции позволяет ослабить влияние боковых лепестков, вызванных явлением Гиббса. Но при этом ухудшается спектральное разрешение.

Эффект просачивания энергии также можно уменьшить сглаживанием самой оценки спектральной плотности, полученной по формуле (13.3), при помощи дополнительного фильтра.

13.3. Методические указания

Для исследования коррелограммного метода оценивания спектральной плотности формируется тестовая последовательность

$$x(n) = f(n) + r(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

в которой полезная составляющая $f(n)$ образуется путем дискретизации сигнала $f(t)$, состоящего из двух гармонических составляющих с различными частотами:

$$f(n) = \sin(\omega_1 T n) + \cos(\omega_2 T n),$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную последовательность, генерируемую с помощью стандартных средств MathCAD.

Для получения последней при помощи стандартной функции $\text{rnd}(x)$ формируется нецентрированная случайная последовательность

$$r1(n) = \text{rnd}(b),$$

где b – верхняя граница интервала разброса случайных чисел. Эта последовательность центрируется при помощи функции $\text{mean}(r1)$:

$$r(n) = r1(n) - \text{mean}(r1) .$$

Тогда тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin(\omega_1 T n) + \cos(\omega_1 T n) + r(n) . \quad (13.5)$$

Число элементов в этой последовательности принимается равным $N = 2048$. Значения параметров последовательности приведены в табл. 13.1. Целью работы является оценивание значений ω_1 и ω_2 .

Оценка корреляционной функции тестовой последовательности, которая необходима для получения оценки спектральной плотности по методу коррелограмм, определяется по формуле (13.2) для $M = 256$. Оценка спектральной плотности вычисляется по формуле (13.4), причем на частотном интервале $[0, \pi/T]$ для получения достаточного разрешения должно располагаться не менее 100 точек. Значения ω_1^* и ω_2^* , соответствующие точкам максимума, могут быть приняты в качестве оценок значений частоты гармонических составляющих последовательности (13.5).

Вычисление спектральной плотности может быть выполнено при помощи алгоритма БПФ, реализованного в системе MathCAD (см. приложения П.5 и П.6). В этом случае при формировании тестовой последовательности (13.5) следует использовать векторную форму представления (с индексами).

Оценка спектральной плотности будет получена в виде дискретной последовательности $S_x^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, M/2$. На рис. 13.1 приведен график оценки спектральной плотности тестовой последовательности (13.5) при $\omega_1 = 280$ и $\omega_2 = 100$. Для того чтобы оценить значения ω_1 и ω_2 по графику, необходимо найти значения k_1^* и k_2^* , соответствующие точкам максимума. Легко убедиться, что искомые оценки

$$\omega_1^* = \frac{\pi}{128 \cdot T} k_1^* , \quad \omega_2^* = \frac{\pi}{128 \cdot T} k_2^* .$$

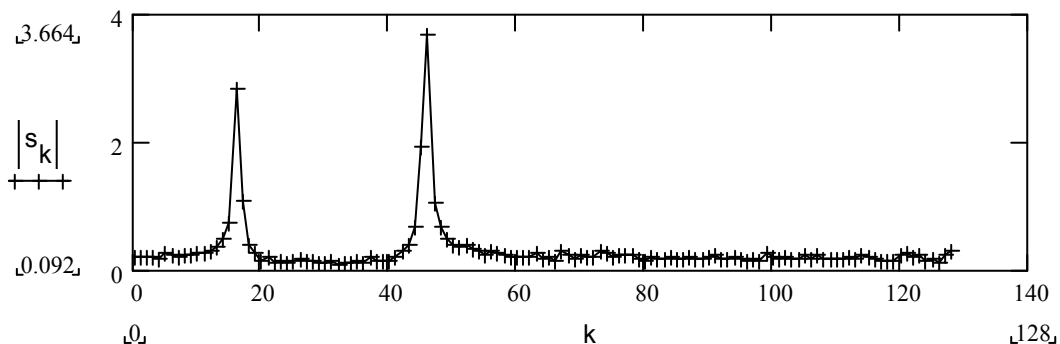


Рис. 13.1. Оценка спектральной плотности мощности, полученная при помощи метода коррелограмм

13.4. Программа работы

1. Для гармонической функции $x(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$ получить аналитические выражения корреляционной функции $R_x(\tau)$ и спектральной плотности $S_x(\omega)$. Построить график спектральной плотности.

2. Сформировать исследуемую последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ($N = 512$), приняв параметры регулярной составляющей из табл.13.1 согласно заданному варианту, а для случайной составляющей значение $b = 5$. Пронаблюдать на экране полезную и случайную составляющие, а также исследуемую последовательность в целом.

3. Составить программу расчета оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности по методу коррелограмм с прямоугольным окном. Построить график оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности и определить оценки частот ω_1 и ω_2 .

Таблица 13.1

Параметры	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
T , с	0,01	0,02	0,002	0,012	0,005	0,015	0,008	0,004
ω_1 , рад/с	94	81	360	300	200	150	180	280
ω_2 , рад/с	5,2	14	120	80	120	20	50	100
Оконная функция	Бартлетта		Хэнна		Хэмминга		Блэкмана	

4. Составить программу расчета оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности по методу коррелограмм с использованием оконной функции, заданной в табл. 13.1. Построить график оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности и определить оценки частот ω_1 и ω_2 .

5. Сравнить результаты, полученные в пп. 3 и 4. Сделать выводы о влиянии оконной функции на качество оценивания.

6. Исследовать влияние уровня случайной составляющей (помехи) на качество оценивания.

Примечание. Значение b , определяющее уровень случайной составляющей, изменять в интервале от 5 до 10.

7. Исследовать работу коррелограммного метода для близких значений ω_1 и ω_2 .

13.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте физическое понятие спектральной плотности мощности.
2. Докажите, что $S_x(-\omega) = S_x(\omega)$.
3. Как выглядит график спектральной плотности «белого шума»?
4. Объясните физический смысл спектральной плотности «белого шума».
5. Определите спектральную плотность мощности случайного процесса с корреляционной функцией

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha \cdot |\tau|), \quad \alpha > 0.$$

6. Докажите, что если спектральная плотность случайного процесса $S_x(\omega) = 0$ при $\omega = 0$, то его автокорреляционная функция удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = 0.$$

7. Чем объясняется просачивание энергии при использовании прямоугольного окна?

14. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ПЕРИОДОГРАММНОГО МЕТОДА

14.1. Цель работы

Периодограммный метод относится к классическим методам спектрального оценивания. В этом методе преобразование Фурье применяется непосредственно к последовательности, полученной в результате дискретизации конечной реализации случайного процесса.

Целью работы является изучение периодограммного метода оценивания спектральной плотности и его практическое освоение на примере анализа тестовой дискретной последовательности, содержащей две гармонические составляющие и помеху.

14.2. Основные понятия и расчетные формулы

Периодограммный метод оценивания спектральной плотности

Спектральная плотность мощности случайного процесса может быть получена непосредственно по спектральной характеристике реализации случайного процесса

$$X_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Спектральная плотность мощности определяется по формуле:

$$S_x(\omega) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T_p} M [|X_p(j\omega)|^2], \quad (14.1)$$

Оценка спектральной плотности производится по известной реализации $x_p(t)$ случайного процесса путем формирования из нее дискретной последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ и обработки этой последовательности в соответствии с приведенными выше формулами.

Преобразование Фурье действительной последовательности конечной длины $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, равно

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega T n}. \quad (14.2)$$

Пренебрегая операцией вычисления математического ожидания в формуле (14.1), в качестве оценки спектральной плотности используют функцию

$$P_x(\omega) = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega T})|^2. \quad (14.3)$$

Оценка спектральной плотности, полученная с помощью прямого преобразования Фурье согласно формулам (14.2) и (14.3), получила название *периодограммы*.

При использовании дискретного преобразования Фурье формулы (14.2) и (14.3) принимают следующий вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\Omega Tkn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$P_x(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

В общем случае, поскольку была опущена операция математического ожидания, периодограмма не является состоятельной оценкой и существует возможность ее флуктуации около истинного значения спектра. Для получения состоятельной оценки спектра используются фильтры и методы усреднения периодограмм.

Используя фильтр нижних частот с частотной характеристикой $H(k)$, получают модифицированную периодограмму

$$\tilde{P}_x(k) = H(k)P_x(k). \quad (14.4)$$

В частности, фильтрация может быть выполнена с помощью алгоритма скользящего усреднения, рассмотренного в работе 9 (см. стр. 53).

При использовании метода усреднения периодограмм из исходной последовательности данных формируется псевдоансамбль дискретных последовательностей (сегментов) и соответствующий псевдоансамбль периодограмм. Получили известность алгоритмы Бартлетта и Уэлча. В алгоритме Бартлетта исходная дискретная последовательность из N отсчетов разбивается на V неперекрывающихся сегментов. Основное отличие алгоритма Уэлча состоит в том, что используется перекрывающееся сегментирование исходной последовательности отсчетов.

Рассмотрим последовательность действий при использовании алгоритма Уэлча. На **первом этапе** из анализируемой дискретной последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, формируется несколько сегментов. При этом выбирается коэффициент D перекрытия соседних сегментов и определяется число V сегментов. Как правило, коэффициент перекрытия $D = 0.5$ или $D = 0.75$.

Число V сегментов определяется по формуле

$$V = E_{\text{ц}}[(N - D \cdot L)/(L - D \cdot L)],$$

где N – общее количество отсчетов анализируемого процесса, L – количество отсчетов в формируемых сегментах, $E_{\text{ц}}$ означает «целая часть числа, заключенного в квадратные скобки».

После этого из заданной дискретной последовательности формируется V дискретных последовательностей $x_r(l)$, $r = 1, \dots, V$,

$l = 0, 1, \dots, L-1$. Варианты перекрытия сегментов, соответствующие данным значениям коэффициента $V = 3$, показаны на рис. 14.1.

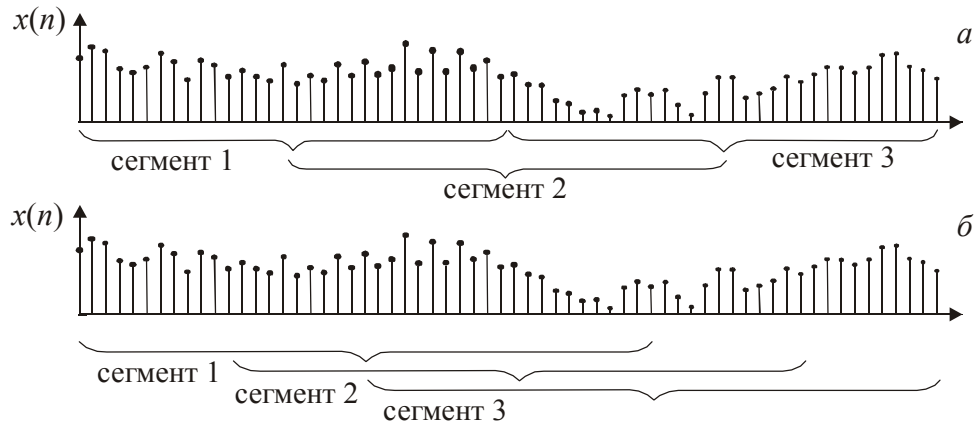


Рис. 14.1. Перекрытие сегментов с коэффициентами:
 $a - D = 0,5$; $b - D = 0,75$

На **втором этапе** выбирается оконная функция $w(l)$, осуществляется преобразование дискретных последовательностей $x_r(l) \cdot w(l)$, $r = 1, \dots, V$, $l = 0, 1, \dots, L-1$ по Фурье:

$$X_r(k) = \sum_{l=0}^{L-1} x_r(l) \cdot p(l) \cdot e^{-j\Omega T k l}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad r = 1, \dots, V$$

и производится расчет функций:

$$P_{xr}(k) = \frac{1}{N} |X_r(k)|^2.$$

На **третьем этапе** выполняется усреднение результатов, полученных для нескольких сегментов, с целью уменьшения дисперсии оценки. Усредненная оценка рассчитывается по формуле

$$S_x^*(k) = \frac{1}{V} \sum_{r=1}^V P_{xr}(k).$$

Для вычисления спектральных характеристик $X(k)$ могут быть использованы алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ).

14.3. Методические указания

Для исследования описанных выше методов оценивания спектральной плотности формируется тестовая последовательность

$$x(n) = f(n) + r(n), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

в которой полезная составляющая $f(n)$ образуется путем дискретизации сигнала $f(t)$, состоящего из двух гармонических составляющих с различными частотами:

$$f(n) = \sin(\omega_1 T n) + \cos(\omega_2 T n),$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную последовательность, генерируемую при помощи стандартных функций системы MathCAD. Нецентрированная случайная последовательность $r1(n)$ формируется при помощи стандартной функции $\text{rnd}(x)$:

$$r1(n) = \text{rnd}(b),$$

где b – верхняя граница интервала разброса случайных чисел. Эта последовательность центрируется при помощи функции $\text{mean}(r1)$. В результате будем иметь

$$r(n) = r1(n) - \text{mean}(r1).$$

Таким образом, тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin(\omega_1 T n) + \cos(\omega_2 T n) + r(n).$$

Число элементов в этой последовательности принимается равным $N = 2^m$, где m – целое число. Значения параметров последовательности приведены в табл. 14.1. Целью работы является оценивание значений ω_1 и ω_2 .

Таблица 14.1

Параметры	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
T , с	0,01	0,02	0,002	0,012	0,005	0,015	0,008	0,004
ω_1 , рад/с	94	81	360	300	200	150	180	280
ω_2 , рад/с	5,2	14	120	80	120	20	50	100
Оконная функция	Бартлетта		Хэнна		Хэмминга		Блэкмана	

Оценивание спектральной плотности по методу периодограмм осуществляется согласно описанному выше алгоритму, например, при $N = 2048$, $L = 1024$ и $D = 0,5$. При этом согласно формуле (14.4) имеем число интервалов $V = 3$, то есть исследуемая последовательность $x(n)$ разбивается на три последовательности $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$, как показано на рис. 14.1,а. Последовательности $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$ подвергаются преобразованию при помощи оконной функции $w(n)$ заданного вида (см. табл. 14.1. и приложение П.3):

$$y_i(n) = x_i(n) \cdot w(n), \quad i = 1, 2, 3.$$

Преобразование дискретных последовательностей $y_i(n)$ по Фурье осуществляется при помощи алгоритма БПФ, реализованного в системе MathCAD. Обращение к нему осуществляется в следующем виде:

$$X = \text{fft}(x),$$

где x – вектор, образованный значениями дискретной последовательности; X – вектор, составляющими которого являются значения спектральной характеристики (спектральной плотности) в дискретных точках частотного интервала. Обращаем внимание на то, что размерности векторов x и X должны удовлетворять определенным требованиям, которые описаны в приложении П.5.

Оценка спектральной плотности будет получена в виде дискретной последовательности $S_x^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, 512$. График оценки $S_x^*(k)$ может выглядеть, например, так, как показано на рис. 14.2.

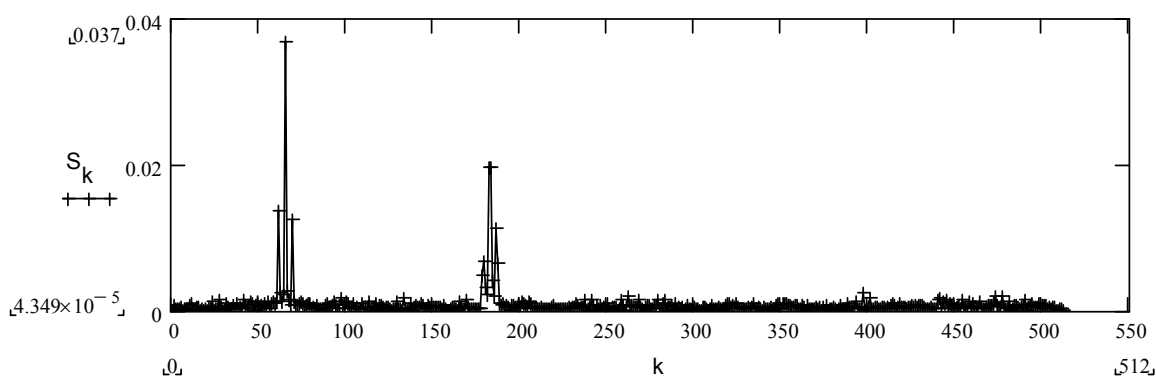


Рис. 14.2. Оценка спектральной плотности мощности, полученная при помощи метода периодограмм

Чтобы оценить значения ω_1 и ω_2 , необходимо найти значения k_1^* и k_2^* , соответствующие точкам максимума. Легко убедиться, что

$$\omega_1^* = \frac{\pi}{512 \cdot T} k_1^* , \quad \omega_2^* = \frac{\pi}{512 \cdot T} k_2^* .$$

14.4. Программа работы

1. Сформировать исследуемую последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ($N = 2048$), задав параметры регулярной составляющей из табл.14.1 согласно заданному варианту и приняв для случайной составляющей произвольное значение b из интервала $[5; 10]$. Пронаблюдать на экране полезную и случайную составляющие, а также исследуемую последовательность в целом.

2. Разбить последовательность $x(n)$, на сегменты с коэффициентом перекрытия $D = 0.5$ и сформировать три последовательности $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$.

3. Рассчитать спектральные характеристики $X_1(k)$, $X_2(k)$, $X_3(k)$ и периодограммы $P_{x_1}(k)$, $P_{x_2}(k)$, $P_{x_3}(k)$.

4. Получить оценку спектральной плотности мощности $S_x^*(k)$ и рассчитать оценки ω_1^* и ω_2^* .

5. Повторить пункты 2–4 программы, предварительно подвергнув последовательности $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$ преобразованию при помощи заданной в табл. 14.1 оконной функции. Сделать выводы.

14.5. Контрольные вопросы и задания

1. Какие составляющие входят в процесс $X(t)$, если его спектральная плотность имеет вид

$$S_x^*(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega) + 5 \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - 9) + \delta(\omega + 9)]?$$

2. Дайте понятие быстрого преобразования Фурье (БПФ).

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Варианты исследуемых функций

	$x(t) = \begin{cases} (D/\tau) \cdot t & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ D \cdot (t - T_c)/(\tau - T_c) & \text{при } \tau \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$
	$x(t) = \begin{cases} D \cdot \exp(-t/\tau) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$
	$x(t) = \begin{cases} D \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T_c} \cdot t\right) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$
	$x(t) = \begin{cases} D \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{T_c} \cdot t\right) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$
	$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } 0 \leq t \leq T_c/2, \\ (t - T_c)^2 & \text{при } T_c/2 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$
	$x(t) = \begin{cases} t \cdot \exp(-\alpha t) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$
	$x(t) = \begin{cases} t^2 \cdot \exp(-\alpha t) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$
	$x(t) = \begin{cases} 2(D/T_c) \cdot t & \text{при } 0 \leq t \leq T_c/2, \\ D & \text{при } T_c/2 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$

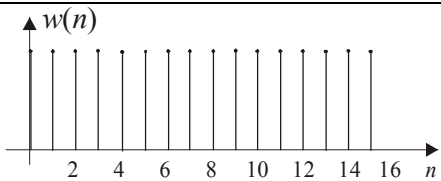
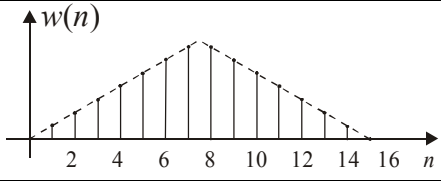
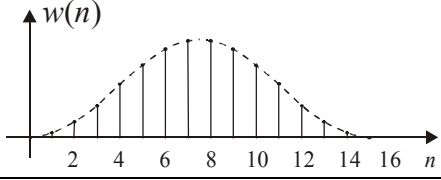
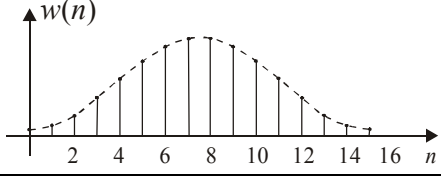
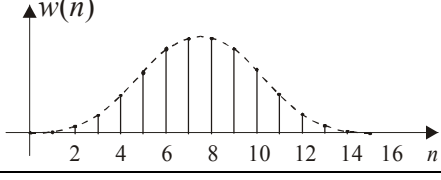
П.2. Передаточные функции нормированных ФНЧ

$$W_H(s) = \frac{b_0}{A(s)}, \quad A(s) = \prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}), \text{ если } n - \text{ четное};$$

$$A(s) = (s - \alpha_0) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}), \text{ если } n - \text{ нечетное.}$$

n	b_0	$A(s)$
Фильтр Баттерворта		
1	1	$s + 1$
2	1	$s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1$
3	1	$(s + 1)(s^2 + s + 1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	1	$(s^2 + 0,765s + 1)(s^2 + 1,848s + 1)$
Фильтр Чебышева с неравномерностью 0.1 дБ ($\varepsilon = 0,153$) (Чеб 1)		
1	6,552	$s + 6,552$
2	3,276	$s^2 + 2,372s + 3,314$
3	1,638	$(s + 0,969)(s^2 + 0,969s + 1,69)$
4	0,819	$(s^2 + 1,275s + 0,623)(s^2 + 0,528s + 1,33)$
Фильтр Чебышева с неравномерностью 0.5 дБ ($\varepsilon = 0,349$) (Чеб 2)		
1	2,863	$s + 2,863$
2	1,431	$s^2 + 1,426s + 1,516$
3	0,715	$(s + 0,626)(s^2 + 0,626s + 1,142)$
4	0,358	$(s^2 + 0,847s + 0,356)(s^2 + 0,351s + 1,064)$
Фильтр Чебышева с неравномерностью 1 дБ ($\varepsilon = 0.509$) (Чеб 3)		
1	1,965	$s + 1,965$
2	0,983	$s^2 + 1,098s + 1,103$
3	0,491	$(s + 0,494)(s^2 + 0,494s + 0,994)$
4	0,245	$(s^2 + 0,674s + 0,279)(s^2 + 0,279s + 0,987)$

П.3. Характеристики оконных функций

Прямоугольное (равномерное) окно	
$w(n) = 1, 0 \leq n \leq N - 1$	
$A_{\text{ПЛ}} = -13; \Delta\omega = 4\pi/N; A_{\text{МИН}} = -21$	
Треугольное окно (окно Бартлетта)	
$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1, \end{cases}$	
$A_{\text{ПЛ}} = -25; \Delta\omega = 8\pi/N; A_{\text{МИН}} = -25$	
Косинус-квадрат (окно Хэнна)	
$w(n) = 0,5\{1 - \cos[2\pi n/(N-1)]\},$ $0 \leq n \leq N-1;$	
$A_{\text{ПЛ}} = -31; \Delta\omega = 8\pi/N; A_{\text{МИН}} = -44$	
Приподнятый косинус (окно Хэмминга)	
$w(n) = 0,54 - 0,46 \cdot \cos[2\pi n/(N-1)],$ $0 \leq n \leq N-1$	
$A_{\text{ПЛ}} = -41; \Delta\omega = 8\pi/N; A_{\text{МИН}} = -53$	
Окно Блэкмана	
$w(n) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) +$ $+0,08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N-1}n\right); 0 \leq n \leq N-1$	
$A_{\text{ПЛ}} = -57; \Delta\omega = 12\pi/N; A_{\text{МИН}} = -74$	

$A_{\text{ПЛ}}$ – амплитуда пика бокового лепестка, дБ

$\Delta\omega$ – ширина переходной полосы главного лепестка;

$A_{\text{МИН}}$ – минимальное затухание в полосе задерживания, дБ.

II.4. Встроенные операторы MathCAD

Оператор, его обозначение, клавиши и описание оператора			
Сложение	$x + y$	+	Выполняет скалярное или векторное сложение
Вычитание	$x - y$	-	Выполняет скалярное или векторное вычитание
Умножение	$x * z$	*	Вычисляет произведение x на z
Деление	x / z	/	Деление выражения x на скаляр z , не равный нулю
Возведение в степень	a^2	^	Возведение числа a в степень 2
Возведение матрицы в степень, инвертирование матрицы	A^n	^	Вычисляет произведение n матриц A
Квадратный корень	\sqrt{x}	\	Вычисляет квадратный корень
Корень n -й степени	$\sqrt[n]{x}$	Ctrl+\	Вычисляет n -й корень
Нижний индекс	a_n	[Задание индексированной переменной
Факториал	$n!$!	Вычисляет факториал для целого неотрицательного n
Транспонирование	A^T	Ctrl+1	Транспонирование матрицы A
Модуль	$ x $		Вычисляет модуль комплексного числа
Детерминант матрицы	$ A $		Возвращает определитель квадратной матрицы A
Суммирование	$\sum_{i=m}^n x_i$	Ctrl+Shift+4	Вычисляет сумму x_i для $i = m, m+1, \dots, n$
Произведение	$\prod_{i=m}^n x_i$	Ctrl+Shift+3	Вычисляет произведение x_i для $i = m, m+1, \dots, n$
Предел	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Ctrl+L	Вычисляет предел функции $f(x)$ по мере приближения x к значению a
Интеграл	$\int_a^b f(t) dt$	&	Вычисляет определенный интеграл $f(t)$ на интервале $[a, b]$
Производная	$\frac{d}{dt} f(t)$?	Вычисляет производную $f(t)$

П.5. Встроенные функции MathCAD

П.5.1. Тригонометрические функции

- $\sin(x)$ – вычисление синуса x (угол x – в радианах);
- $\cos(x)$ – вычисление косинуса x (угол x – в радианах);
- $\tan(x)$ – вычисление тангенса x (угол x – в радианах);
- $\cot(x)$ – вычисление котангенса x (угол x – в радианах);
- $\text{asin}(x)$ – вычисление арксинуса;
- $\text{acos}(x)$ – вычисление арккосинуса;
- $\text{atan}(x)$ – вычисление арктангенса;
- $\text{acot}(x)$ – вычисление арккотангенса.

П.5.2. Комплексные числа

- $\text{arg}(x)$ – вычисление аргумента (в радианах) комплексного числа x ;
- $\text{Im}(x)$ – выделение мнимой части комплексного числа x ;
- $\text{Re}(x)$ – выделение вещественной части комплексного числа x .

П.5.3. Логарифмические и экспоненциальные функции

- $\exp(x)$ – вычисление экспоненциальной функции (e в степени x);
- $\ln(x)$ – вычисление натурального логарифма (основание e) от x ;
- $\log(x)$ – вычисление десятичного логарифма x ;
- $\log(x, [b])$ – вычисление логарифма x по основанию b .

П.5.4. Кусочно-непрерывные функции

- $\Phi(t)$ – вычисление ступенчатой функции (функции Хевисайда)

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Прописной символ «фи» вводится набором клавиш F + Ctrl + G ;

- $\text{sign}(t)$ – функция знака:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \\ -1, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

- $\text{if}(\text{условие}, x, y)$ – функция логического условия:

$$\text{if}(\text{условие}, x, y) = \begin{cases} x, & \text{если условие выполнено,} \\ y, & \text{если условие не выполнено.} \end{cases}$$

П.5.5. Случайные числа. Статистика

- $\text{rnd}(x)$ – формирование вектора из m случайных чисел, имеющих равномерное распределение на интервале $[0, x]$;

- $\text{mean}(A, B, C, \dots)$ – вычисление среднего арифметического элементов A, B, C, \dots , где A, B, C, \dots – массивы или скаляры;
- $\text{hist}(\text{интервал}, A)$ – вычисление вектора частот попадания величин из массива данных A в интервалы, полученные в **интервал**;
- $\text{histogram}(n, \text{data})$ – вычисление матрицы с двумя столбцами. Первый содержит координаты середин равных интервалов разбиения отрезка. Второй – вектор частот (см. выше).

П.5.6. Решение алгебраических уравнений и систем

- $\text{polyroots}(v)$ – вычисление корней многочлена, коэффициенты которого заданы в векторе v ;
- $\text{root}(f(x), x, [a, b])$ – вычисление значений x в диапазоне $[a, b]$, которое обращает в ноль $f(x)$ (должна предвостаться начальным приближением для x);
- $\text{lsolve}(M, v)$ – решение линейной системы уравнений вида $M * x = v$.

П.5.7. Преобразование Фурье

- $\text{fft}(v)$ – вычисление быстрого преобразования Фурье вещественных данных (v – вещественный вектор с 2^n компонентами, n – целое, результат – в виде вектора размера $2^{n-1} + 1$);
- $\text{ifft}(u)$ – вычисление обратного преобразования Фурье, соответствующего fft (исходный вектор u имеет размерность $2^{n-1} + 1$, результат – в виде вектора размера 2^n);
- $\text{cfft}(A)$ – вычисление быстрого преобразования Фурье комплексных данных;
- $\text{icfft}(A)$ – вычисление обратного преобразования Фурье, соответствующего cfft .

П.6. Примеры программ в системе MathCAD

П.6.1. Составление модели сигнала

Модель интервально-аналитического сигнала может быть получена различными способами. На рис. П.1 показано использование программного блока и ступенчатой функции (функции Хевисайда).

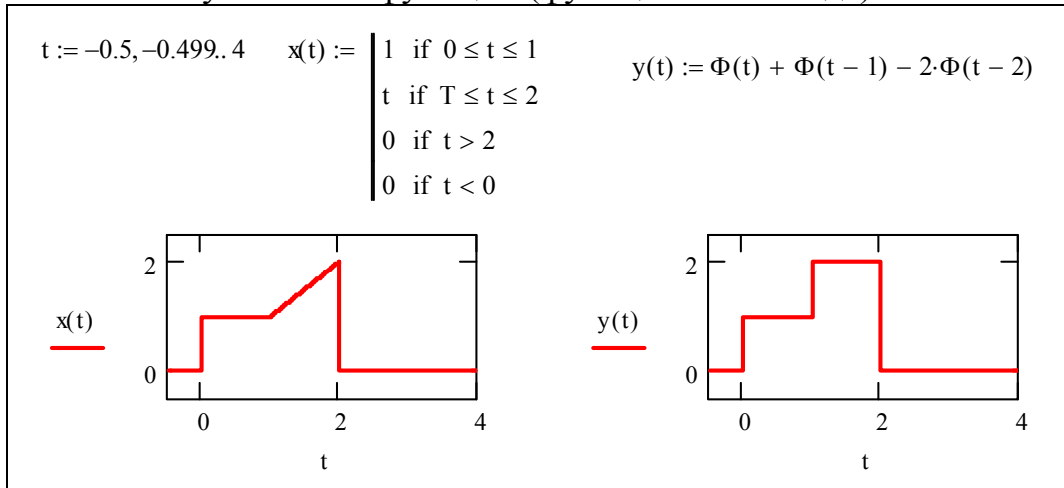


Рис. П.1. Использование программного блока и ступенчатой функции в модели сигнала

П.6.2. Формирование функций Хаара

Для получения функций Хаара сначала формируется материнский вейвлет, который затем преобразуется путем масштабирования и переносов. На рис. П.2 функции Хаара представлены в виде вектор-функции. Такое представление облегчает процедуру спектрального анализа.

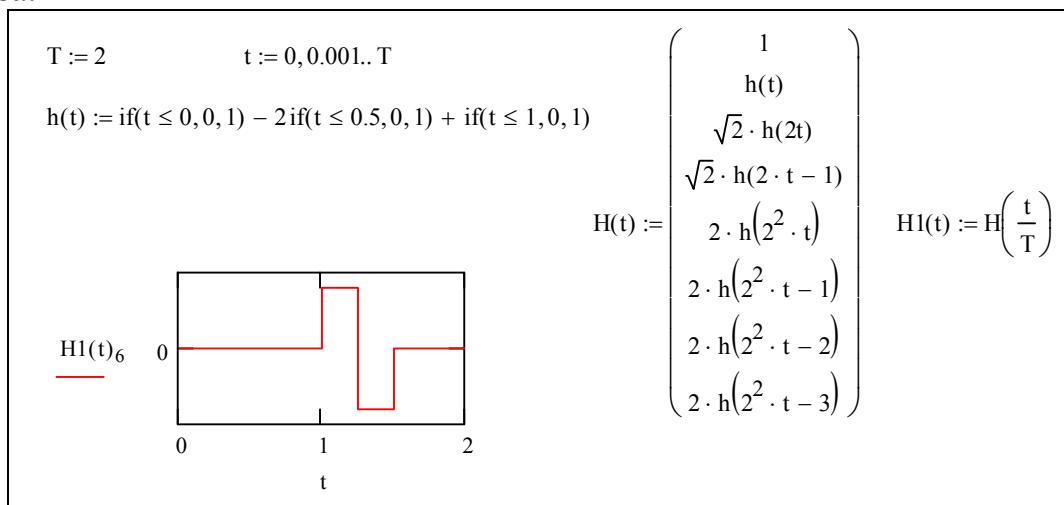


Рис. П.2. Формирование функций Хаара

П.6.3. Формирование случайной последовательности

На рис. П.3 показана программа формирования центрированной случайной дискретной последовательности с помощью функции `rnd(b)` и дискретного фильтра первого порядка.

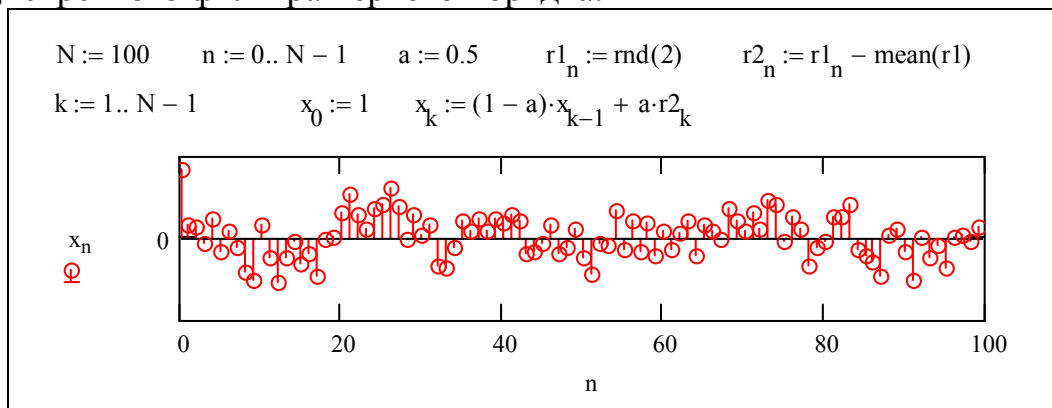


Рис. П.3. Формирование дискретной случайной последовательности

П.6.4. Определение корней полинома

Для определения корней полинома с вещественными (или комплексными) коэффициентами используется функция `polyroots(v)`. Пример показан на рис. П.4.

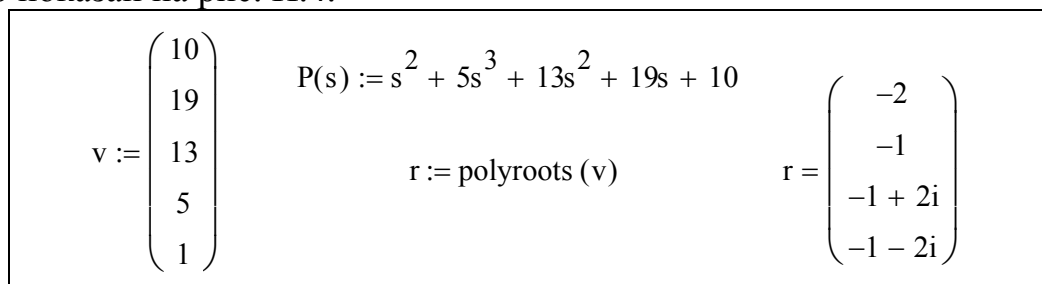


Рис. П.4. Пример вычисления корней полинома

П.6.5. Решение системы нелинейных уравнений

Решение системы нелинейных уравнений отыскивается с помощью численных методов, которые реализуются в вычислительных блоках. Вычислительный блок в этом случае будет содержать: ключевое слово **Given**, систему уравнений и решающую функцию **Find**. При вводе уравнений вместо обычного знака равенства вводится оператор отношений **Ctrl+=**. Перед ключевым словом вводятся начальные значения переменных, с которых начинается поиск решения. Если решений несколько, то для получения другого решения задаются другие начальные значения. Пример приведен на рис. П.5.


```

x:=1      y:=1
Given     -0.01·x2 + 1 + y = 0  -0.001·x3 + x = 0  Find(x,y) =  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 
x:=100   y:=10
Given     -0.01·x2 + 1 + y = 0  -0.001·x3 + x = 0  Find(x,y) =  $\begin{pmatrix} 31.623 \\ 9 \end{pmatrix}$ 

```

Рис. П.5. Пример решения системы нелинейных уравнений

П.6.6. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Покажем применение БПФ для получения оценки частоты гармонического сигнала $x(t) = \sin(\omega_0 t)$, искаженного помехой. Сигнал дискретизирован с периодом $T = 1$ с. Пример расчета при $\omega_0 = 0,1\pi$ показан на рис. П.6.

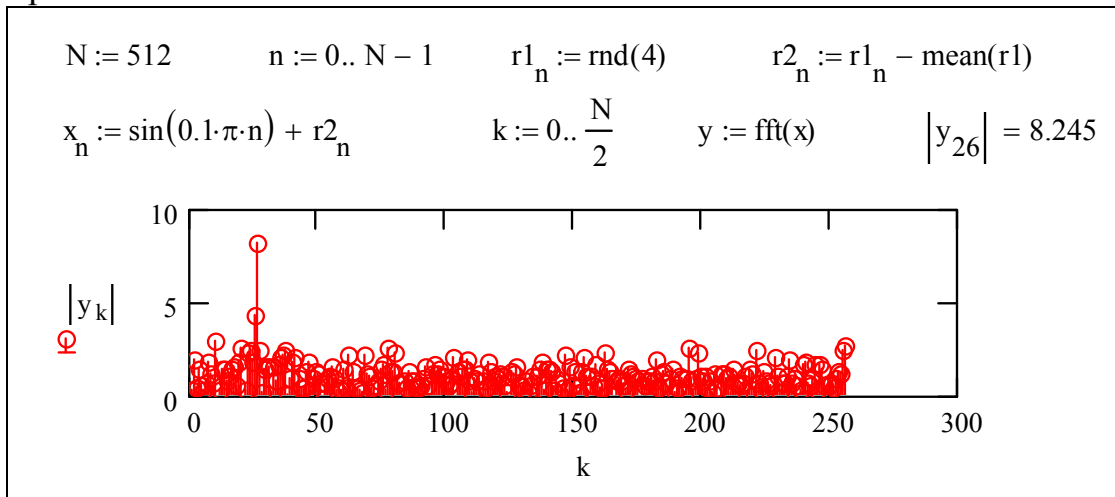


Рис. П.6. Пример использования БПФ

Амплитудная спектральная характеристика принимает максимальное значение при $k = 26$. Тогда оценка частоты гармонического сигнала равна

$$\omega_0^* = \frac{2\pi}{NT} k = \frac{2\pi}{512} 26 = 0,319.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов / С.И. Баскаков. – М.: Высшая школа, 2005. – 462 с.
2. Вадутов О.С. Математические основы обработки сигналов: учебное пособие / О.С. Вадутов. – Томск: Изд. ТПУ, 2011. – 212 с.
3. Введение в цифровую фильтрацию / под ред. Р. Богнера и А. Константиноидиса; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 320 с.
4. Гольденберг Л.М., Матошкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матошкин, М.Н. Поляк. – Радио и связь, 1990. – 256 с.
5. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов: справочник / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матошкин, М.Н. Поляк. – Радио и связь, 1985. – 312 с.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие для вузов / И.С. Гоноровский. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.
7. Дьяконов В.П. MatchCAD 2001. Специальный справочник / В.П. Дьяконов. – СПб.: Питер, 2002. – 832 с.
8. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001 и Mathcad 11 / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 832 с.
9. Дьяконов В.П. Mathcad 8–12 для студентов / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 631 с.
10. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л.А. Залманзон. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
11. Ивановский Р. И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD Pro: учебное пособие / Р.И. Ивановский. – М.: Высш. шк., 2003. – 431 с.
12. Марпл.–мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл.–мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
13. Мошиц Г. Проектирование активных фильтров / Г. Мошиц, П. Хорн. – М.: Мир, 1984. – 320 с.
14. Оппенгейм А.В. Цифровая обработка сигналов / А.В. Оппенгейм, Р.В. Шафер. – М.: Теносфера, 2006. – 856 с. (2-е изд., испр. – М.: Теносфера, 2006. – 856 с.)
15. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций / Авторы: А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева, И.И. Гук. – СПб.: БХВ–Петербург, 2005. – 753 с.
16. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов/ Д.В. Васильев, М.Р. Витоль, Ю.Н. Горшенков и др.; Под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.
17. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 751 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	5
1.1. Цель работы	5
1.2. Основные понятия и расчетные формулы	5
1.3. Методические указания	7
1.4. Программа работы	8
1.5. Контрольные вопросы и задания	9
2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	11
2.1. Цель работы	11
2.2. Основные понятия и расчетные формулы	11
2.3. Методические указания	14
2.4. Программа работы	15
2.5. Контрольные вопросы и задания	16
3. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	17
3.1. Цель работы	17
3.2. Оконное преобразование Фурье	17
3.3. Определение вейвлет-функции	18
3.4. Вейвлет-преобразование	20
3.5. Методические указания	21
3.6. Программа работы	21
3.7. Контрольные вопросы и задания	22
4. РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ УОЛША	23
4.1. Цель работы	23
4.2. Основные понятия и расчетные формулы	23
4.3. Разложение сигналов по функциям Уолша	25
4.4. Методические указания	26
4.5. Программа работы	27
4.6. Контрольные вопросы и задания	28
5. РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ ХААРА	29
5.1. Цель работы	29
5.2. Основные понятия и расчетные формулы	29
5.3. Методические указания	32
5.4. Программа работы	33
5.5. Контрольные вопросы и задания	34
6. ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГОВЫХ ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ЧАСТОТ	35
6.1. Цель работы	35
6.2. Основные понятия и расчетные формулы	35

6.3. Методические указания.....	38
6.4. Программа работы.....	39
6.5. Контрольные вопросы и задания.....	40
7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ПРИ ПОМОЩИ РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА.....	41
7.1. Цель работы.....	41
7.2. Основные понятия и расчетные формулы.....	41
7.3. Методические указания.....	44
7.4. Программа работы.....	45
7.5. Контрольные вопросы и задания.....	46
8. ДИСКРЕТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.....	47
8.1. Цель работы.....	47
8.2. Основные понятия и расчетные формулы.....	47
8.3. Методические указания.....	50
8.4. Программа работы.....	51
8.5. Контрольные вопросы и задания.....	52
9. СГЛАЖИВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ.....	53
9.1. Цель работы.....	53
9.2. Основные понятия и расчетные формулы.....	53
9.3. Методические указания.....	56
9.4. Программа работы.....	57
9.5. Контрольные вопросы и задания.....	58
10. РЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ЧАСТОТ.....	59
10.1. Цель работы.....	59
10.2. Основные понятия и расчетные формулы.....	59
10.3. Методические указания.....	62
10.4. Программа работы.....	63
10.5. Контрольные вопросы и задания.....	64
11. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ.....	65
11.1. Цель работы.....	65
11.2. Основные понятия и расчетные формулы.....	65
11.3. Методические указания.....	68
11.4. Программа работы.....	69
11.5. Контрольные вопросы и задания.....	70
12. ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА.....	71
12.1. Цель работы.....	71
12.2. Основные понятия и расчетные формулы.....	71

12.3. Методические указания	74
12.4. Программа работы.....	75
12.5. Контрольные вопросы и задания	76
13. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ КОРРЕЛОГРАММНОГО МЕТОДА	77
13.1. Цель работы	77
13.2. Основные понятия и расчетные формулы	77
13.3. Методические указания	79
13.4. Программа работы.....	81
13.5. Контрольные вопросы и задания	82
14. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ПЕРИОДОГРАММНОГО МЕТОДА	83
14.1. Цель работы	83
14.2. Основные понятия и расчетные формулы	83
14.3. Методические указания	85
14.4. Программа работы.....	87
14.5. Контрольные вопросы и задания	88
ПРИЛОЖЕНИЯ	89
П.1. Варианты исследуемых функций	89
П.2. Передаточные функции нормированных ФНЧ	90
П.3. Характеристики оконных функций	91
П.4. Встроенные операторы MathCAD	92
П.5. Встроенные функции MathCAD	93
П.6. Примеры программ в системе MathCAD	95
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	98

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*


Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 5,93. Уч.-изд. л. 5,36.
Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  **ТПУ**. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru