МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73
В12

Вадутов О.С.

В12 Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. − 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР
В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,
профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики
ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России
В.А. Фокин

14. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ПЕРИОДОГРАММНОГО МЕТОДА

14.1. Цель работы

Периодограммный метод относится к классическим методам спектрального оценивания. В этом методе преобразование Фурье применяется непосредственно к последовательности, полученной в результате дискретизации конечной реализации случайного процесса.

Целью работы является изучение периодограммного метода оценивания спектральной плотности и его практическое освоение на примере анализа тестовой дискретной последовательности, содержащей две гармонические составляющие и помеху.

14.2. Основные понятия и расчетные формулы

Периодограммный метод оценивания спектральной плотности

Спектральная плотность мощности случайного процесса может быть получена непосредственно по спектральной характеристике реализации случайного процесса

$$X_{\text{р}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{р}}(t)\, e^{-j\,\omega\, t} dt\,.$$

Спектральная плотность мощности определяется по формуле:

$$S_x(\omega) = \lim_{T_{\text{р}}\to\infty} \frac{1}{2\cdot T_{\text{р}}} M\ [\,|X_{\text{р}}(j\omega)|^2\ ], \qquad (14.1)$$

где

Оценка спектральной плотности производится по известной реализации $x_{\text{р}}(t)$ случайного процесса путем формирования из нее дискретной последовательности $x(n)$, $n = 0,1,\ \dots\ , N-1$ и обработки этой последовательности в соответствии с приведенными выше формулами.

Преобразование Фурье действительной последовательности конечной длины $x(n)$, $n = 0,1,\ \dots,\ N-1$, равно

$$X(e^{j\,\omega\, T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\,\omega\, T\, n}\,. \qquad (14.2)$$

Пренебрегая операцией вычисления математического ожидания в формуле (14.1), в качестве оценки спектральной плотности используют функцию

$$P_x(\omega) = \frac{1}{N} \; |X(e^{j\,\omega T})|^2 \; . \tag{14.3}$$

Оценка спектральной плотности, полученная с помощью прямого преобразования Фурье согласно формулам (14.2) и (14.3), получила название *периодограммы*.

При использовании дискретного преобразования Фурье формулы (14.2) и (14.3) принимают следующий вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\Omega T k n}, \;\; k = 0,1,\ldots,N-1 ,$$

$$P_x(k) = \frac{1}{N} \; |X(k)|^2 \;\; , \; k = 0,1,\ldots,N-1 .$$

В общем случае, поскольку была опущена операция математического ожидания, периодограмма не является состоятельной оценкой и существует возможность ее флуктуации около истинного значения спектра. Для получения состоятельной оценки спектра используются фильтры и методы усреднения периодограмм.

Используя фильтр нижних частот с частотной характеристикой $H(k)$, получают модифицированную периодограмму

$$\tilde{P}_x(k) = H(k) P_x(k) . \tag{14.4}$$

В частности, фильтрация может быть выполнена с помощью алгоритма скользящего усреднения, рассмотренного в работе 9 (см. стр. 53).

При использовании метода усреднения периодограмм из исходной последовательности данных формируется псевдоансамбль дискретных последовательностей (сегментов) и соответствующий псевдоансамбль периодограмм. Получили известность алгоритмы Бартлетта и Уэлча. В алгоритме Бартлетта исходная дискретная последовательность из N отсчетов разбивается на V неперекрывающихся сегментов. Основное отличие алгоритма Уэлча состоит в том, что используется перекрывающееся сегментирование исходной последовательности отсчетов.

Рассмотрим последовательность действий при использовании алгоритма Уэлча. На **первом этапе** из анализируемой дискретной последовательности $x(n), \;\; n = 0, \; 1, \ldots , N-1$, формируется несколько сегментов. При этом выбирается коэффициент D перекрытия соседних сегментов и определяется число V сегментов. Как правило, коэффициент перекрытия $D = 0.5$ или $D = 0.75$.

Число V сегментов определяется по формуле

$$V = E_{ц}[(N - D \cdot L)/(L - D \cdot L)],$$

где N – общее количество отсчетов анализируемого процесса, L – количество отсчетов в формируемых сегментах, $E_{ц}$ означает «целая часть числа, заключенного в квадратные скобки».

После этого из заданной дискретной последовательности формируется V дискретных последовательностей $x_r(l)$, $r = 1,...,V$, $l = 0,1,...,L-1$. Варианты перекрытия сегментов, соответствующие данным значениям коэффициента $V = 3$, показаны на рис. 14.1.

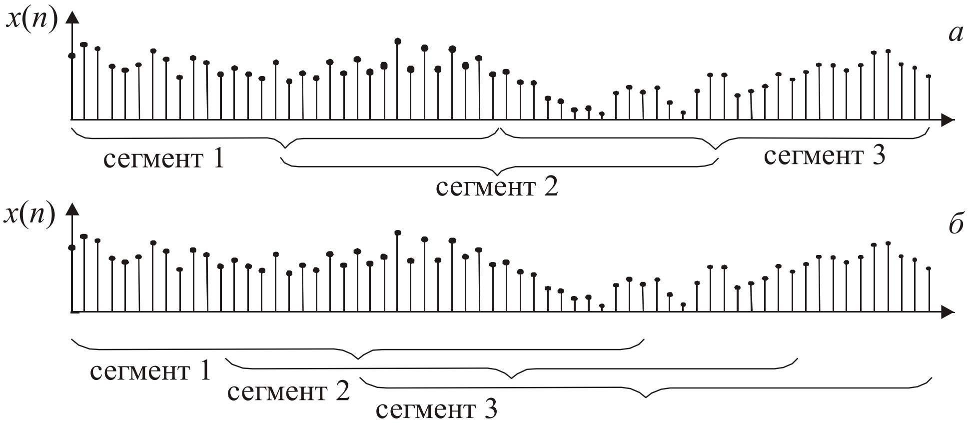

Рис. 14.1. Перекрытие сегментов с коэффициентами:
а – $D = 0{,}5$*; б –* $D = 0{,}75$

На **втором этапе** выбирается оконная функция $w(l)$, осуществляется преобразование дискретных последовательностей $x_r(l) \cdot w(l)$, $r = 1,...,V$, $l = 0,1,...,L-1$ по Фурье:

$$X_r(k) = \sum_{l=0}^{L-1} x_r(l) \cdot p(l) \cdot e^{-j\,\Omega\,T\,k\,l}, \quad k = 0,1,...,N-1\,, \quad r = 1,...,V$$

и производится расчет функций:

$$P_{xr}(k) = \frac{1}{N}\,|X_r(k)|^2\ .$$

На **третьем этапе** выполняется усреднение результатов, полученных для нескольких сегментов, с целью уменьшения дисперсии оценки. Усредненная оценка рассчитывается по формуле

$$S_x^*(k) = \frac{1}{V}\ \sum_{r=1}^{V} P_{xr}(k)\ .$$

Для вычисления спектральных характеристик $X(k)$ могут быть использованы алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ).

14.3. Методические указания

Для исследования описанных выше методов оценивания спектральной плотности формируется тестовая последовательность

$$x(n) = f(n) + r(n), \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N,$$

в которой полезная составляющая $f(n)$ образуется путем дискретизации сигнала $f(t)$, состоящего из двух гармонических составляющих с различными частотами:

$$f(n) = \sin(\omega_1 T\ n) + \cos(\omega_2 T\ n),$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную последовательность, генерируемую при помощи стандартных функций системы MathCAD. Нецентрированная случайная последовательность $r1(n)$ формируется при помощи стандартной функции $\mathrm{rnd}(x)$:

$$r1(n) = \mathrm{rnd}(b),$$

где b – верхняя граница интервала разброса случайных чисел. Эта последовательность центрируется при помощи функции $mean(r1)$. В результате будем иметь

$$r(n) = r1(n) - \mathrm{mean}(r1).$$

Таким образом, тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin(\omega_1 T\ n) + \cos(\omega_1 T\ n) + r(n)\ .$$

Число элементов в этой последовательности принимается равным $N = 2^m$, где m – целое число. Значения параметров последовательности приведены в табл. 14.1. Целью работы является оценивание значений ω_1 и ω_2.

Таблица 14.1

Параметры	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
T, с	0,01	0,02	0,002	0,012	0,005	0,015	0,008	0,004
ω_1,рад/с	94	81	360	300	200	150	180	280
ω_2,рад/с	5,2	14	120	80	120	20	50	100
Оконная функция	Бартлетта		Хэнна		Хэмминга		Блэкмана	

Оценивание спектральной плотности по методу периодограмм осуществляется согласно описанному выше алгоритму, например, при

$N = 2048$, $L = 1024$ и $D = 0,5$. При этом согласно формуле (14.4) имеем число интервалов $V = 3$, то есть исследуемая последовательность $x(n)$ разбивается на три последовательности $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$, как показано на рис. 14.1,*а*. Последовательности $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ подвергаются преобразованию при помощи оконной функции $w(n)$ заданного вида (см. табл. 14.1. и приложение П.3):

$$y_i(n) = x_i(n) \cdot w(n), \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Преобразование дискретных последовательностей $y_i(n)$ по Фурье осуществляется при помощи алгоритма БПФ, реализованного в системе MathCAD. Обращение к нему осуществляется в следующем виде:

$$X = fft(x),$$

где x – вектор, образованный значениями дискретной последовательности; X – вектор, составляющими которого являются значения спектральной характеристики (спектральной плотности) в дискретных точках частотного интервала. Обращаем внимание на то, что размерности векторов x и X должны удовлетворять определенным требованиям, которые описаны в приложении П.5.

Оценка спектральной плотности будет получена в виде дискретной последовательности $S_x^*(k),\ k = 0,\ 1,\ ...,\ 512$. График оценки $S_x^*(k)$ может выглядеть, например, так, как показано на рис. 14.2.

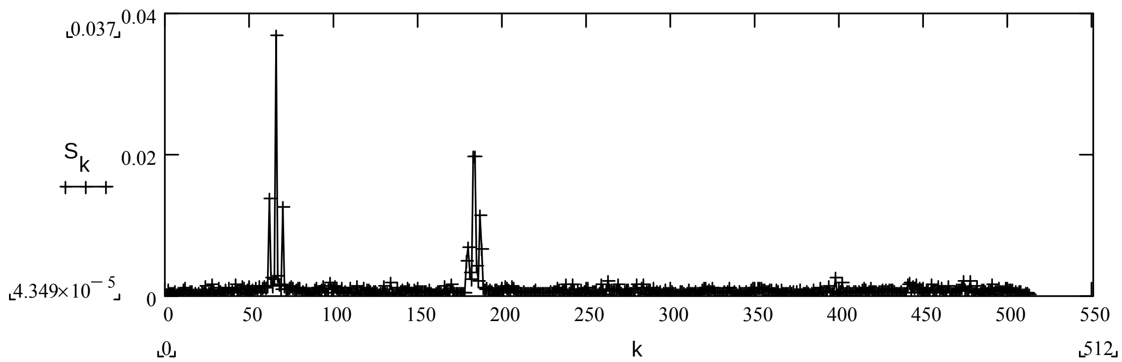

Рис. 14.2. Оценка спектральной плотности мощности, полученная при помощи метода периодограмм

Чтобы оценить значения ω_1 и ω_2, необходимо найти значения k_1^* и k_2^*, соответствующие точкам максимума. Легко убедиться, что

$$\omega_1^* = \frac{\pi}{512 \cdot T} k_1^*\ ,\quad \omega_2^* = \frac{\pi}{512 \cdot T} k_2^*\ .$$

14.4. Программа работы

1. Сформировать исследуемую последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, ..., N-1$ $(N = 2048)$, задав параметры регулярной составляющей из табл.14.1 согласно заданному варианту и приняв для случайной составляющей произвольное значение b из интервала [5; 10]. Пронаблюдать на экране полезную и случайную составляющие, а также исследуемую последовательность в целом.

2. Разбить последовательность $x(n)$, на сегменты с коэффициентом перекрытия $D = 0.5$ и сформировать три последовательности $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$.

3. Рассчитать спектральные характеристики $X_1(k)$, $X_2(k)$, $X_2(k)$ и периодограммы $P_{x1}(k)$, $P_{x2}(k)$, $P_{x3}(k)$.

4. Получить оценку спектральной плотности мощности $S_x^*(k)$ и рассчитать оценки ω_1^* и ω_2^*.

5. Повторить пункты 2–4 программы, предварительно подвергнув последовательности $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ преобразованию при помощи заданной в табл. 14.1 оконной функции. Сделать выводы.

14.5. Контрольные вопросы и задания

1. Какие составляющие входят в процесс $X(t)$, если его спектральная плотность имеет вид

$$S_x^*(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega) + 5 \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - 9) + \delta(\omega + 9)]\,?$$

2. Дайте понятие быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук*, *профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.
Заказ 107-14. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru