

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

13. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ КОРРЕЛОГРАММНОГО МЕТОДА

13.1. Цель работы

Основной целью спектрального анализа являются оценивание спектральной плотности мощности (СПМ) дискретизированного случайного процесса и обнаружение в нем периодических составляющих. Появление современных компьютеров и цифровых алгоритмов расширило роль спектрального оценивания и превратило его в средство решения многих практических задач. Коррелограммный метод относится к классическим методам, имеющим в основе преобразование Фурье.

Целью работы является изучение коррелограммного метода и его практическое освоение на примере анализа дискретной последовательности, содержащей две гармонические составляющие и помеху.

13.2. Основные понятия и расчетные формулы

Спектральная плотность мощности

Непосредственное применение классического гармонического анализа для исследования случайных процессов невозможно. Для случайного процесса спектральная характеристика $X(j\omega)$, полученная в результате преобразования Фурье конкретной реализации $x(t)$, содержит гармонические составляющие со случайными амплитудами и фазами. С помощью преобразования Фурье можно исследовать распределение мощности случайного процесса по гармоническим составляющим. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ мощности стационарного случайного процесса $X(t)$ есть преобразование Фурье корреляционной функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (13.1)$$

Формулу (13.1) можно записать в следующем виде:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Спектральная плотность представляет собой действительную, неотрицательную и четную функцию частоты ω .

Коррелограммный метод оценивания спектральной плотности мощности

Оценки спектральной плотности мощности, для определения которых сначала по исходным данным формируются оценки корреляционных функций, получили название *коррелограммных*.

Оценка корреляционной функции находится по заданной реализации $x_p(t)$ случайного процесса (см. работу 12). Если определены N отсчетов $x_p(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, сигнала, то оценку корреляционной функции можно вычислить по формуле

$$R_x^*(m) = \frac{1}{N - m} \sum_{i=0}^{N-m-1} x_p(i) \cdot x_p(i + m), \quad m = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (13.2)$$

Оценка $R_x^*(m)$ корреляционной функции представляет собой дискретную последовательность, определенную на конечном интервале $[0, M - 1]$. Дополнив $R_x^*(m)$ симметричными отсчетами для отрицательных $m = -M + 1, \dots, -1$ и применив дискретное преобразование Фурье (ДПФ), получим оценку спектральной плотности

$$S_x^*(\omega) = \sum_{m=-M}^{M-1} R_x^*(m) e^{-j \omega T m}. \quad (13.3)$$

С учетом того, что оценка $R_x^*(m)$ является четной функцией, формулу (13.2) можно записать в следующем виде:

$$S_x^*(\omega) = 2 \sum_{m=0}^{M-1} R_x^*(m) \cos(\omega T m). \quad (13.4)$$

Преимущество формулы (13.4) очевидно. При ее использовании отпадает необходимость дополнения $R_x^*(m)$ отсчетами для отрицательных m .

Теоретически спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$, определяемая в частотной области, является неслучайной характеристикой. Однако, поскольку ее оценивание всегда производится по ограниченным реализациям случайного процесса, значения спектра могут быть найдены только приближенно. Поэтому сама оценка спектральной плотности мощности имеет случайный характер и никогда не совпадает во всех точках с теоретической спектральной плотностью.

Применение коррелограммного метода оценивания оправдано только для стационарных случайных процессов и при использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье для расчетов по формулам (13.3), (13.4).

Коррелограммный метод применялся и до появления современных вычислительных машин и персональных компьютеров. Последние позволили внедрить в практику спектрального анализа более трудоемкие в вычислительном смысле, но и более эффективные методы.

Использование оконных функций

Для оценки (13.3), в которой вместо бесконечной корреляционной последовательности используется конечное число значений, характерно просачивание энергии, вызванное явлением Гиббса (эффект прямоугольного окна). Избавиться от просачивания энергии можно путем предварительного преобразования оценки корреляционной функции при помощи оконной функции $w(m)$, отличающейся от прямоугольной.

Тогда в качестве оценки спектральной плотности будем иметь:

$$S_x^*(\omega) = \sum_{m=1-M}^{M-1} R_x^*(m) w(m) e^{-j \omega T m} .$$

или

$$S_x^*(\omega) = 2 \sum_{m=0}^{M-1} R_x^*(m) w(m) \cos(\omega T m) .$$

Некоторые оконные функции, которые используются для улучшения оценок спектральной плотности, приведены в приложении П.3. Обработка с помощью оконной функции позволяет ослабить влияние боковых лепестков, вызванных явлением Гиббса. Но при этом ухудшается спектральное разрешение.

Эффект просачивания энергии также можно уменьшить сглаживанием самой оценки спектральной плотности, полученной по формуле (13.3), при помощи дополнительного фильтра.

13.3. Методические указания

Для исследования коррелограммного метода оценивания спектральной плотности формируется тестовая последовательность

$$x(n) = f(n) + r(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

в которой полезная составляющая $f(n)$ образуется путем дискретизации сигнала $f(t)$, состоящего из двух гармонических составляющих с различными частотами:

$$f(n) = \sin(\omega_1 T n) + \cos(\omega_2 T n),$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную последовательность, генерируемую с помощью стандартных средств MathCAD.

Для получения последней при помощи стандартной функции $\text{rnd}(x)$ формируется нецентрированная случайная последовательность

$$r1(n) = \text{rnd}(b),$$

где b – верхняя граница интервала разброса случайных чисел. Эта последовательность центрируется при помощи функции $\text{mean}(r1)$:

$$r(n) = r1(n) - \text{mean}(r1) .$$

Тогда тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin(\omega_1 T n) + \cos(\omega_2 T n) + r(n) . \quad (13.5)$$

Число элементов в этой последовательности принимается равным $N=2048$. Значения параметров последовательности приведены в табл. 13.1. Целью работы является оценивание значений ω_1 и ω_2 .

Оценка корреляционной функции тестовой последовательности, которая необходима для получения оценки спектральной плотности по методу коррелограмм, определяется по формуле (13.2) для $M=256$. Оценка спектральной плотности вычисляется по формуле (13.4), причем на частотном интервале $[0, \pi/T]$ для получения достаточного разрешения должно располагаться не менее 100 точек. Значения ω_1^* и ω_2^* , соответствующие точкам максимума, могут быть приняты в качестве оценок значений частоты гармонических составляющих последовательности (13.5).

Вычисление спектральной плотности может быть выполнено при помощи алгоритма БПФ, реализованного в системе MathCAD (см. приложения П.5 и П.6). В этом случае при формировании тестовой последовательности (13.5) следует использовать векторную форму представления (с индексами).

Оценка спектральной плотности будет получена в виде дискретной последовательности $S_x^*(k)$, $k = 0, 1, \dots, M/2$. На рис. 13.1 приведен график оценки спектральной плотности тестовой последовательности (13.5) при $\omega_1 = 280$ и $\omega_2 = 100$. Для того чтобы оценить значения ω_1 и ω_2 по графику, необходимо найти значения k_1^* и k_2^* , соответствующие точкам максимума. Легко убедиться, что искомые оценки

$$\omega_1^* = \frac{\pi}{128 \cdot T} k_1^* , \quad \omega_2^* = \frac{\pi}{128 \cdot T} k_2^* .$$

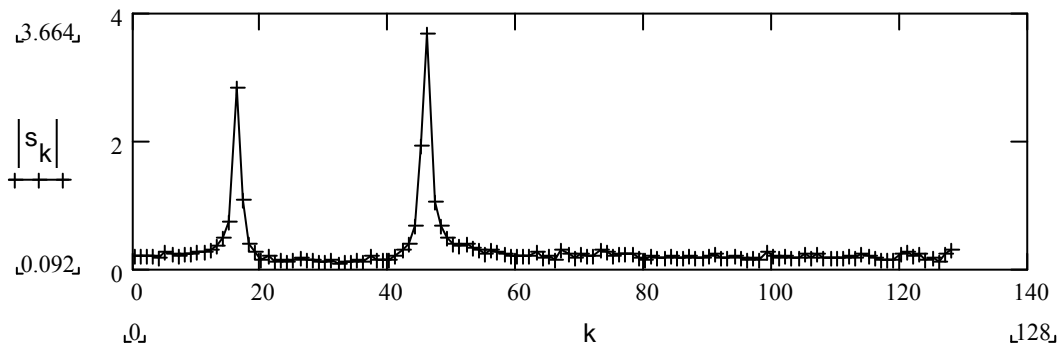


Рис. 13.1. Оценка спектральной плотности мощности, полученная при помощи метода коррелограмм

13.4. Программа работы

1. Для гармонической функции $x(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$ получить аналитические выражения корреляционной функции $R_x(\tau)$ и спектральной плотности $S_x(\omega)$. Построить график спектральной плотности.

2. Сформировать исследуемую последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ($N = 512$), приняв параметры регулярной составляющей из табл.13.1 согласно заданному варианту, а для случайной составляющей значение $b = 5$. Пронаблюдать на экране полезную и случайную составляющие, а также исследуемую последовательность в целом.

3. Составить программу расчета оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности по методу коррелограмм с прямоугольным окном. Построить график оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности и определить оценки частот ω_1 и ω_2 .

Таблица 13.1

Параметры	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
T, c	0,01	0,02	0,002	0,012	0,005	0,015	0,008	0,004
$\omega_1, рад/с$	94	81	360	300	200	150	180	280
$\omega_2, рад/с$	5,2	14	120	80	120	20	50	100
Оконная функция	Бартлетта		Хэнна		Хэмминга		Блэкмана	

4. Составить программу расчета оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности по методу коррелограмм с использованием оконной функции, за-

4. Составить программу расчета оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности по методу коррелограмм с использованием оконной функции, заданной в табл. 13.1. Построить график оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности и определить оценки частот ω_1 и ω_2 .

5. Сравнить результаты, полученные в пп. 3 и 4. Сделать выводы о влиянии оконной функции на качество оценивания.

6. Исследовать влияние уровня случайной составляющей (помехи) на качество оценивания.

Примечание. Значение b , определяющее уровень случайной составляющей, изменять в интервале от 5 до 10.

7. Исследовать работу коррелограммного метода для близких значений ω_1 и ω_2 .

13.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте физическое понятие спектральной плотности мощности.
2. Докажите, что $S_x(-\omega) = S_x(\omega)$.
3. Как выглядит график спектральной плотности «белого шума»?
4. Объясните физический смысл спектральной плотности «белого шума».
5. Определите спектральную плотность мощности случайного процесса с корреляционной функцией

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha \cdot |\tau|), \quad \alpha > 0.$$

6. Докажите, что если спектральная плотность случайного процесса $S_x(\omega) = 0$ при $\omega = 0$, то его автокорреляционная функция удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = 0.$$

7. Чем объясняется просачивание энергии при использовании прямоугольного окна?

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.

Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru