МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73
В12

Вадутов О.С.

В12 Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. − 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР
В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,
профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики
ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России
В.А. Фокин

12. ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

12.1. Цель работы

При решении многих прикладных задач необходимо знать статистические характеристики случайных процессов. Обычно эти характеристики определяют по реализациям случайного процесса, полученным экспериментально. Наиболее просто эта задача решается для стационарного случайного процесса, статистические характеристики которого не изменяются во времени. Если стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством, то его статистические характеристики могут быть определены по одной реализации, наблюдаемой на достаточно большом интервале времени.

Целью работы является определение оценок математического ожидания, дисперсии, плотности распределения вероятности и корреляционной функции стационарного случайного процесса по его заданной реализации.

12.2. Основные понятия и расчетные формулы

Подготовка данных

Пусть дана реализация $x_\text{р}(t)$ стационарного случайного процесса длительностью $T_\text{р}$ (рис. 12.1).

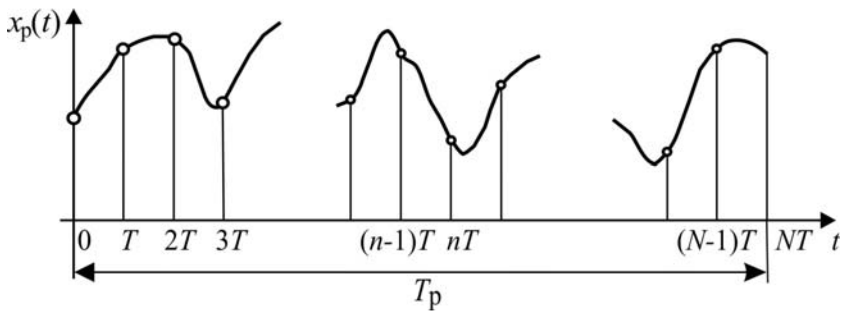

Рис. 12.1. Дискретизация реализации случайного процесса

На основании эргодического свойства математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция этого стационарного случайного процесса определяются соответственно выражениями:

$$m_x = \lim_{T_\text{р}\to\infty} \frac{1}{T_\text{р}} \int_0^{T_\text{р}} x_\text{р}(t)\, dt \,, \tag{12.1}$$

$$D_x = \lim_{T_\text{р}\to\infty} \frac{1}{T_\text{р}} \int_0^{T_\text{р}} \left[x_\text{р}(t) - m_x \right]^2 dt \,, \tag{12.2}$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T_\text{р}\to\infty} \frac{1}{T_\text{р}} \int_0^{T_\text{р}} \left[x_\text{р}(t) - m_x \right]\left[x_\text{р}(t+\tau) - m_x \right] dt \,. \tag{12.3}$$

Оценки приведенных выше статистических характеристик находятся по имеющейся реализации $x_\text{р}(t)$ заданной длины по следующим формулам, полученным из (12.1)–(12.3):

$$m_x^* = \frac{1}{T_\text{р}} \int_0^{T_\text{р}} x_\text{р}(t)\, dt \,, \tag{12.4}$$

$$D_x^* = \frac{1}{T_\text{р}} \int_0^{T_\text{р}} \left[x_\text{р}(t) - m_x^* \right]^2 dt \,, \tag{12.5}$$

$$R_x^*(\tau) = \frac{1}{T_\text{р} - \tau} \int_0^{T_\text{р}-\tau} \left[x_\text{р}(t) - m_x^* \right] \left[x_\text{р}(t+\tau) - m_x^* \right] dt \,. \tag{12.6}$$

Расчет численных значений оценок математического ожидания m_x^*, дисперсии D_x^* и ординат функции $R_x^*(\tau)$, являющейся оценкой корреляционной функции, производится путем дискретизации реализации $x_\text{р}(t)$ случайного процесса и заменой интегралов в выражениях (12.4)–(12.6) суммами. Для этого интервал наблюдения $[0, T_\text{р}]$ случайного процесса (рис. 12.1) разбивается на N достаточно малых интервалов длительностью T. В начале каждого из этих интервалов определяются значения

$$x(0) = x_\text{р}(0),\; x(1) = x_\text{р}(T),\; \ldots\; , x(N-1) = x_\text{р}\left((N-1)\, T \right).$$

При этом возникает задача выбора необходимой длины $T_\text{р}$ реализации случайного процесса и длительности T интервала дискретизации. Необходимая длина реализации в основном определяется требуемой точностью оценивания корреляционной функции и ее свойствами. Разработаны методики, которые позволяют оценить необходимую длину реализации для получения корреляционной функции с заданной точностью непосредственно по отрезку реализации случайного процесса. Например, для определения $T_\text{р}$ используется связь среднего числа максимумов и нулей случайного процесса в единицу времени с параметрами корреляционной функции. Шаг дискретизации T рекомендуют выбирать так, чтобы на «полупериод» (время между двумя пересечениями графиком случайной функции линии математического ожидания) реализации случайного процесса приходилось около семи дискретных значений.

Оценки математического ожидания и дисперсии

Для оценки математического ожидания, заменив в (12.4) интеграл суммой, получим

$$m_x^* = \frac{1}{N \cdot T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot T = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n).$$

Таким образом, оценка математического ожидания равна среднему арифметическому значений $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$ реализации случайного процесса в дискретные моменты времени.

Для оценки дисперсии из формулы (12.5) найдем

$$D_x^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - m_x^*]^2.$$

Однако эта оценка дисперсии оказывается смещенной. На практике применяется формула, которая удовлетворяет условию несмещенности:

$$D_x^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - m_x^*]^2.$$

Оценка одномерной плотности распределения

Оценка одномерной плотности распределения вероятности случайного процесса сводится к построению гистограммы распределения значений $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$ реализации. Для этого следует разбить полученный диапазон значений случайных чисел на равные интервалы и вычислить частоты попадания случайных чисел в эти интервалы.

Большое значение при построении гистограммы имеет разбиение интервала изменения случайных чисел на интервалы группировки. При слишком большом числе интервалов группировки некоторые из них оказываются слабозаполненными, и гистограмма получается изрезанной и многолепестковой. При малом числе интервалов гистограмма утрачивает детальность и становится малоинформативной. В работе рекомендуется принять $L \approx \sqrt{N}$ (L–целое).

Оценка корреляционной функции

По формуле (12.6) для значений оценки корреляционной функции в дискретные моменты времени $\tau_m = m \cdot T \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots)$ получим

$$R_x^*(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} [x(n) - m_x^*]\ [x(n+m) - m_x^*]\ , \qquad m = 0,\ 1,\ \ldots, M-1. \tag{12.7}$$

Показано, что чем больше m, тем больше ошибка определения корреляционной функции. Поэтому формулу (12.7) рекомендуют использовать при $M < \ N/10$. Найденную по формуле (12.7) оценку корреляционной функции необходимо дополнить симметричными отсчетами для отрицательных $m = -M+1, \ldots, -1$.

12.3. Методические указания

В качестве объекта исследования используется последовательность случайных чисел $x(0), x(1),\ \ldots, x(N-1)$, моделирующая некоторый стационарный случайный процесс. Для получения этой последовательности используется генератор случайных чисел, имеющийся в составе системы MathCAD, и линейный дискретный фильтр (рис. 12.2).

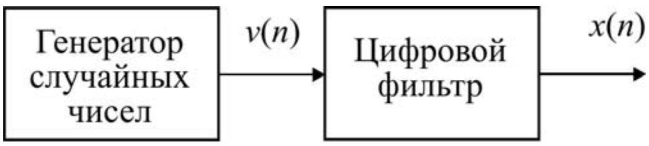

Рис. 12.2. Формирование последовательности случайных чисел

Функция $v(n) = \mathrm{rnd}(b)$ в системе MathCAD генерирует случайные числа с равномерным распределением в интервале $[0, b]$. Линейный фильтр первого порядка описывается разностным уравнением

$$x(n) = (1-a) \cdot x(n-1) + a \cdot v(n), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{12.8}$$

где a – постоянный коэффициент и $x(0)$ – первый элемент генерируемой последовательности, значение которого можно принять равным $x(0) = b/2$.

При построении гистограммы для определения частот попадания случайных чисел $x(0), x(1),\ \ldots, x(N-1)$ в заданные интервалы используется стандартная функция $\mathrm{hist}(\omega, X)$ системы MathCAD. Для того чтобы применить указанную функцию, надо сформировать вектор w с составляющими $w(0),\ w(1),\ \ldots,\ w(L)$, которые представляют собой границы интервалов группировки.

Эти составляющие образуют по формуле

$$w(l+1)=w(l)+\Delta w, \qquad l=0,1,...,L-1,$$

где

$$\Delta w=\frac{\max(x)-\min(x)}{L}; \qquad w(0)=\min(x).$$

Для расчета оценки корреляционной функции используются приведенные выше формулы.

12.4. Программа работы

1. Сформировать последовательность случайных чисел

$$v(n)=\mathrm{rnd}(b) \;\; n=0,\ 1,\ ...,N-1 \;\; (N\in[500,1000]).$$

Примечание: Параметр b, определяющий предельное значение генерируемых случайных чисел, задается преподавателем. При моделировании дискретных последовательностей и разностных уравнений в среде MathCAD рекомендуется использовать векторную форму представления (с использованием индексов).

2. Получить последовательность случайных чисел $x(n)$, $n=0,1,\ ...,N-1$ путем преобразования последовательности чисел $v(n),\ n=0,\ 1,\ ...,N-1$ при помощи дискретного фильтра, описываемого разностным уравнением (12.8).

Примечание: Значение коэффициента a цифрового фильтра задаются преподавателем.

3. Разбить интервал изменения значений случайных чисел в последовательности $x(n)$, $n=0,1,\ ...,N-1$ на L интервалов группировки, определив последовательность $w(0),\ w(1),\ ...,\ w(L)$, и построить гистограмму. Сделать вывод о характере распределения случайной последовательности $x(n)$, $n=0,1,\ ...,N-1$.

4. Определить значение оценки m_x^* математического ожидания случайной последовательности $x(n)$, $n=0,1,\ ...,N-1$.

5. Определить значение оценки D_x^* дисперсии случайной последовательности $x(n)$, $n=0,1,\ ...,N-1$.

6. Рассчитать значения ординат оценки $R_x^*(m)$ корреляционной функции для $m=0,\ 1,\ ...,\ 32$. Построить график оценки корреляционной функции.

7. Определить передаточную функцию $H(z)$ и импульсную характеристику $h(n)=Z^{-1}\{H(z)\}$ дискретного фильтра, описываемого раз-

ностным уравнением (12.8). Построить импульсную характеристику фильтра с заданным значения a.

8. Сравнить оценку $R_x^*(m)$ корреляционной функции с импульсной характеристикой цифрового фильтра. Для этого надо произвести нормирование указанных характеристик

$$\rho_x^*(m) = R_x^*(m) / R_x^*(0),$$

$$\eta\,(m) = h\,(m) / h\,(0)$$

и построить их графики на одном рисунке. Сделать выводы.

12.5. Контрольные вопросы и задания

1. Что понимают под реализацией случайного процесса?
2. Какой случайный процесс называется стационарным?
3. В чем состоит суть эргодического свойства?
4. Выразите свое отношение к следующим утверждениям: а) любой стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством; б) случайный процесс, обладающий эргодическим свойством, является стационарным.
5. Поясните физический смысл понятий математического ожидания и дисперсии стационарного случайного процесса.
6. Как связаны между собой среднее квадратическое отклонение и дисперсия случайного процесса?
7. Какое свойство стационарного случайного процесса характеризует корреляционная функция?
8. Какая связь существует между дисперсией и корреляционной функцией стационарного случайного процесса?
9. Обоснуйте верхний предел суммирования в формуле (12.7).

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук, профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.
Заказ 107-14. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru