

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

11. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ

11.1. Цель работы

Одной из наиболее важных особенностей нерекурсивных цифровых фильтров является то, что при соответствующем выборе параметров они могут иметь строго линейную фазо-частотную характеристику (ФЧХ). Это свойство является, например, определяющим, если требуется обеспечить неискаженное преобразование сигналов. Нерекурсивные цифровые фильтры используются и в тех случаях, когда предъявляемые требования не могут быть реализованы при помощи фильтров Баттерворта и Чебышева, например для выполнения дифференцирования и интегрирования сигналов.

Целью работы является изучение особенностей нерекурсивных цифровых ФНЧ с линейной ФЧХ, освоение способа расчета его коэффициентов методом взвешивания и исследование влияния порядка N и периода дискретизации T на частотные характеристики фильтра.

11.2. Основные понятия и расчетные формулы

Нерекурсивные цифровые ФНЧ с линейной ФЧХ

Нерекурсивные цифровые фильтры описываются разностным уравнением

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} b_v x(n-v). \quad (11.1)$$

Передаточная функция, полученная в результате применения прямого z -преобразования к уравнению (11.1), имеет вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{v=0}^{N-1} b_v z^{-v}.$$

Как известно, передаточная функция цифрового фильтра может быть определена как прямое z -преобразование импульсной характеристики $h(n)$, то есть

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \sum_{v=0}^{N-1} h(n) z^{-v}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты передаточной функции (разностного уравнения) и отсчеты импульсной характеристики нерекурсивных цифровых фильтров совпадают.

Если в разностном уравнении (11.1) произвести замену $b_v = h(v)$, $v = 0, 1, \dots, N-1$, то получим

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} h(v) x(n-v). \quad (11.2)$$

Это есть не что иное, как свертка функций $x(n)$ и $h(n)$. Следовательно, в случае нерекурсивных цифровых фильтров разностное уравнение и уравнение свертки совпадают.

Алгоритм функционирования нерекурсивных цифровых фильтров может быть представлен в виде структурной схемы, показанной на рис. 11.1.

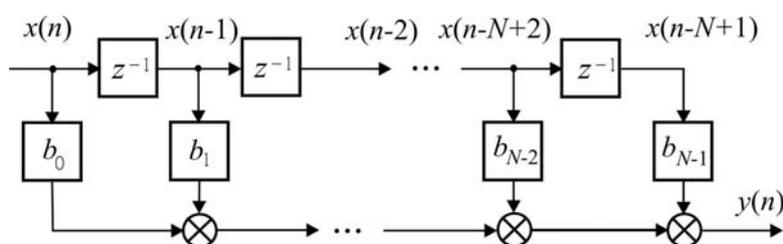


Рис. 11.1. Структурная схема нерекурсивного цифрового фильтра

Частотная передаточная функция нерекурсивных цифровых фильтров определяется выражением

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{v=0}^{N-1} h(v) e^{-j\omega T v}. \quad (11.3)$$

Нерекурсивные цифровые фильтры с линейной ФЧХ, в зависимости от числа N и вида симметрии отсчетов импульсной характеристики, делятся на четыре типа. Для реализации ФНЧ с линейной ФЧХ пригодны два из них. Частотные передаточные функции этих фильтров имеют следующий вид:

1) для типа 1 (N – нечетное, симметричные коэффициенты $b_v = b_{N-v-1}$):

$$H_1(e^{j\omega T}) = e^{-jK\omega T} \sum_{m=0}^K c_m \cos(m\omega T), \quad (11.4)$$

где $K = (N-1)/2$; $c_0 = b_K$; $c_m = 2b_{K-m}$, $m = 1, 2, \dots, K$;

2) для типа 2 (N – четное, симметричные коэффициенты $b_v = b_{N-v-1}$):

$$H_2(e^{j\omega T}) = e^{-j(K+0.5)\omega T} \sum_{m=0}^K c_m \cos((m+0.5)\omega T),$$

где $K = (N-1)/2$; $c_m = 2b_{K-m}$, $m = 0, 1, \dots, K$.

Данные фильтры имеют $N-1$ нулей и $N-1$ нулевых полюсов, поэтому для получения частотной характеристики с крутым срезом необходимо брать большое N . При этом реализация фильтров требует большого числа элементов задержки. Из-за того, что все полюсы равны нулю, эти фильтры всегда устойчивы.

Расчет коэффициентов нерекурсивного ФНЧ методом взвешивания

Для расчета коэффициентов нерекурсивных цифровых фильтров разработан ряд методов. Одним из часто применяемых является метод взвешивания. Здесь требования к частотной характеристике цифрового ФНЧ задаются в виде функции

$$H_d(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\omega T(N-1)/2} & \text{при } |\omega| \leq \omega_c, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (11.5)$$

Согласно (11.5) желаемые АЧХ и ФЧХ фильтра определяются соответственно формулами:

$$H_d(\omega) = |H_d(e^{j\omega T})| = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \omega_c, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = \arg H_d(e^{j\omega T}) = -\omega(N-1)T/2.$$

Импульсную характеристику $h_d(n)$ можно получить путем вычисления коэффициентов ряда Фурье функции (11.5), продолженной периодически с периодом $\omega_n = 2\pi/T$:

$$h_d(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega T(n-(N-1)/2)} d\omega. \quad (11.6)$$

После преобразований (11.6) будем иметь

$$h_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-(N-1)/2)T]}{\pi(n-(N-1)/2)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11.7)$$

Очевидно, $h_d(n)$ имеет бесконечную длину. Одним из возможных способов получения нерекурсивного цифрового фильтра состоит в усечении бесконечного ряда (11.7) путем отбрасывания отсчетов, соответ-

ствующих $n \geq N$, то есть в качестве импульсной характеристики фильтра принимается функция

$$h(n) = h_d(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Однако простое усечение функции (11.7) из-за явления Гиббса не дает хороших результатов. Амплитудная частотная характеристика фильтра при использовании простого усечения имеет выбросы и пульсации большого уровня до и после точки разрыва аппроксимируемой частотной характеристики. Например, при аппроксимации идеальной характеристики ФНЧ (11.5) максимальная амплитуда пульсаций частотной характеристики составляет около 9%, причем с увеличением длины импульсной характеристики она не уменьшается.

Широко распространенный способ устранения вредного влияния явления Гиббса заключается во взвешивании функции $h_d(n)$ при помощи функции $w(n)$. Импульсную характеристику нерекурсивного цифрового фильтра находят в виде

$$h(n) = h_d(n) w(n).$$

Дискретную функцию $w(n)$, заданную на интервале $[0, N - 1]$, называют оконной функцией (окном). Кстати, простое усечение функции $h_d(n)$ эквивалентно применению прямоугольного окна

$$w(n) = 1, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Наиболее часто используются следующие оконные функции: Бартлетта, Хэнна, Хэмминга, Блэкмана (приложение П.3). Использование оконных функций приводит, во-первых, к уменьшению уровня боковых лепестков и, как следствие, к меньшим пульсациям частотной характеристики в полосе пропускания и лучшему подавлению в полосе задерживания фильтра. Во-вторых, оконная функция увеличивает ширину главного лепестка частотной характеристики.

11.3. Методические указания

Программа работы предусматривает расчет импульсной и частотных характеристик нерекурсивного цифрового ФНЧ, их сравнение при различных значениях порядка фильтра N и периода дискретизации T , а также расчет реакции фильтра при заданном входном воздействии.

Импульсная характеристика фильтра $h_d(n)$ рассчитывается по формуле (11.7). При этом надо помнить, что при $n = (N - 1)/2$ может проявиться неопределенность типа $0/0$. Чтобы устранить эту неопределенность, следует использовать условный оператор `if`.

Частотные характеристики цифрового фильтра рассчитываются по формуле (11.3) и с учетом их периодичности в интервале частот $[0, \pi/T]$.

При подготовке отчета характеристики, соответствующие различным значениям N и T , рекомендуется для удобства сопоставления строить на одном рисунке.

Расчет выходной последовательности фильтра $y(n)$ при заданном входном воздействии $x(n)$ осуществляется по формуле (11.2).

11.4. Программа работы

1. Рассчитать по формуле (11.7) импульсную характеристику $h_d(n)$. Построить график $h_d(n)$, $n = -10, -9, \dots, 50$. Составить программу расчета импульсной характеристики $h(n)$ нерекурсивного цифрового фильтра с помощью прямоугольного окна (простого усечения $h_d(n)$) при $N = 21$.

Примечание. Параметры фильтра (частота среза ω_c и период дискретизации T) задаются преподавателем.

2. Составить программу расчета импульсной характеристики $h(n)$ нерекурсивного цифрового фильтра с помощью заданной оконной функции $w(n)$ при $N = 21$.

Примечание. Вид оконной функции задается преподавателем. Аналитические выражения оконных функций $w(n)$ приведены в приложении П.3.

3. Построить на одном рисунке импульсные характеристики нерекурсивных фильтров, соответствующих прямоугольному и заданному варианту окна.

5. Составить программу расчета частотных характеристик нерекурсивных цифровых фильтров, соответствующих прямоугольному и заданному варианту окна. Построить и сравнить АЧХ и ФЧХ этих фильтров.

6. Сформировать дискретную последовательность $x(n)$, состоящую из двух синусоидальных составляющих

$$x(n) = \sin(\omega_1 T \cdot n) + \sin(\omega_2 T \cdot n), \quad n = 0, 1, \dots, 500,$$

выбрав значения ω_1 и ω_2 в полосе пропускания фильтра. Пронаблюдать эту последовательность.

7. Рассчитать дискретную последовательность $y(n)$ на выходе фильтра при входном воздействии $x(n)$. Пронаблюдать дискретные по-

следовательности $x(n), y(n)$ и сделать заключение об искажении выходной последовательности по форме.

8. Принять $N = 31$ и с помощью составленной программы рассчитать импульсную и частотные характеристики фильтра, полученного с помощью заданной оконной функции. Построить их вместе с одноименными характеристиками фильтра с $N = 21$ и сравнить.

9. Изменить значение периода дискретизации T на 20% в ту и другую сторону при $N = 31$ и с помощью составленной программы рассчитать импульсную и частотные характеристики фильтра, полученного с помощью заданной оконной функции. Построить их вместе с одноименными характеристиками фильтра, полученными выше, и сравнить.

11.5. Контрольные вопросы и задания

1. Запишите условия неискаженного воспроизведения сигнала линейной стационарной системой.

2. Чем отличаются нерекурсивные фильтры с симметричными и антисимметричными импульсными характеристиками?

3. Поясните отличия между каузальными и некаузальными цифровыми фильтрами.

4. Почему нерекурсивные цифровые фильтры всегда устойчивы?

5. Получите формулу (11.4), используя в качестве исходного выражение (11.3).

6. Как выглядит амплитудно-фазовая частотная характеристика нерекурсивного цифрового фильтра?

7. Перечислите известные Вам методы расчета нерекурсивных цифровых фильтров.

8. Поясните характерные особенности оконных функций.

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.

Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru