

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

10. РЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ЧАСТОТ

10.1. Цель работы

Для рекурсивных цифровых фильтров, имеющих прототипы среди аналоговых фильтров, задача определения передаточной функции, удовлетворяющей заданным требованиям, часто решается путем определения передаточной функции аналогового фильтра-прототипа и последующего ее преобразования. Из всех известных методов такого преобразования в настоящее время чаще применяется метод билинейного преобразования.

Целью работы является: а) изучение метода определения передаточной функции рекурсивных цифровых фильтров нижних и верхних частот с помощью билинейного преобразования; б) построение и анализ особенностей частотных характеристик цифровых фильтров нижних и верхних частот; в) определение и анализ реакции фильтров на тестовую дискретную последовательность.

10.2. Основные понятия и расчетные формулы

Нормированные аналоговые фильтры нижних частот

В работе рассматриваются фильтры, нормированные передаточные функции которых не содержат нулей и могут быть представлены в виде

$$H_{\text{на}}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}. \quad (10.1)$$

Обычно фильтр реализуют в виде последовательного соединения звеньев первого и второго порядка. Поэтому знаменатель передаточной функции (10.1) представляют в виде произведения сомножителей не выше второго порядка. Тогда

$$A(s) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}) & \text{при четных } n, \\ (s - \alpha_0) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}) & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Параметры нормированных передаточных функций ФНЧ, исследуемых в работе, приведены в приложении П.2.

Билинейное преобразование

Передаточная функция цифрового фильтра может быть получена путем преобразования передаточной функции аналогового фильтра. Для этих целей, как правило, используется метод билинейного преобразования, имеющий некоторые преимущества перед другими методами. Основу метода составляет конформное отображение s -плоскости в z -плоскость при помощи соотношения

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (10.2)$$

Каждой точке комплексной плоскости $s = \delta + j\omega$ выражение (10.2) ставит в соответствие определенную точку на плоскости $z = \exp[(\delta + j\omega)T]$ и при этом отображает:

- 1) открытую левую s -полуплоскость в область, расположенную внутри единичного круга ($|z| < 1$);
- 2) мнимую ось s -плоскости в единичную окружность ($|z| = 1$);
- 3) открытую правую полуплоскость s в область, расположенную вне единичного круга ($|z| > 1$).

Подстановкой (10.2) в передаточную функцию $H_a(s)$ аналогового фильтра получают передаточную функцию $H(z)$ цифрового фильтра

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}.$$

Однако соотношение между частотой Ω аналогового фильтра и частотой ω цифрового фильтра оказывается существенно нелинейным. Действительно, из формулы (10.2) при $s = j\Omega$ и $z = \exp(j\omega T)$ следует, что

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \quad \text{или} \quad \omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\Omega T}{2} \right).$$

При переходе от частоты Ω к частоте ω ширина полос пропускания и задерживания частотных интервалов деформируются. Но все максимумы и минимумы АЧХ аналогового фильтра сохраняются и в АЧХ цифрового фильтра. Сохраняются и основные свойства фильтров (тип, неравномерность АЧХ для соответствующих диапазонов частот и др.). Деформация шкалы частот проявляется и в искажениях ФЧХ фильтра.

Все полюса аналогового фильтра, расположенные в левой половине s -плоскости, при билинейном преобразовании отображаются во внутреннюю область единичного круга, поэтому цифровой фильтр будет устойчивым, если устойчив аналоговый прототип.

Определение передаточной функции ФНЧ и ФВЧ

Нормированные ФНЧ (см. приложение П.2), имеют частоту среза $\Omega_c = 1$. Переход от передаточной функции $H_n(s)$ нормированного ФНЧ к передаточной функции $H_{\text{цнч}}(z)$ цифрового ФНЧ с заданной частотой среза ω_c выполняется в три этапа:

1) определение частоты среза Ω_c аналогового фильтра-прототипа

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right); \quad (10.3)$$

2) определение передаточной функции $H_{\text{анч}}(s)$ аналогового фильтра-прототипа с помощью процедуры денормирования:

$$H_{\text{анч}}(s) = H_n(s) \Big|_{s=\frac{s}{\Omega_c}};$$

3) определение передаточной функции $H_{\text{цнч}}(z)$ цифрового ФНЧ с помощью билинейного преобразования:

$$H_{\text{цнч}}(z) = H_{\text{анч}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

Пусть требуется получить передаточную функцию цифрового ФНЧ Баттерворта первого порядка с частотой среза $\omega_c = 5$ рад/с и периодом $T = 0,2$ с. Определим частоту среза аналогового фильтра-прототипа

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) = 10 \cdot \operatorname{tg}(0,5) = 5,463 \text{ рад/с.}$$

Согласно таблице, приведенной в приложении П.2, запишем передаточную функцию нормированного ФНЧ заданного типа:

$$H_n(s) = \frac{1}{s+1}.$$

После денормирования с помощью подстановки $s = s/\Omega_c$ получим передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа

$$H_{\text{анч}}(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} = \frac{5,463}{s + 5,463}.$$

Выполнив билинейное преобразование $H_{\text{анч}}(s)$, найдем передаточную функцию искомого цифрового ФНЧ

$$H_{\text{цнч}}(z) = H_{\text{анч}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1}},$$

где $a_0 = \Omega_c + 2/T$; $a_1 = \Omega_c - 2/T$; $b_0 = b_1 = \Omega_c$.

Подставив численные значения, получим

$$H_{\text{цнч}}(z) = \frac{5,463 + 5,463z^{-1}}{15,463 - 4,537z^{-1}} = \frac{0,353(1 + z^{-1})}{1 - 0,293z^{-1}}.$$

Передающая функция $H_{\text{цвч}}(z)$ цифрового ФВЧ с заданной частотой среза Ω_c определяется в те же три этапа:

1) определение частоты среза Ω_c по формуле (10.3);

2) определение передаточной функции $H_{\text{авч}}(s)$ аналогового фильтра-прототипа с помощью процедуры трансформации:

$$H_{\text{авч}}(s) = H_{\text{н}}(s) \Big|_{s=\frac{\Omega_c}{s}};$$

3) определение передаточной функции $H_{\text{цвч}}(z)$ цифрового ФВЧ с помощью билинейного преобразования:

$$H_{\text{цвч}}(z) = H_{\text{авч}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

Пусть требуется получить передаточную функцию цифрового ФВЧ Чебышева ($\varepsilon = 0,153$) первого порядка с частотой среза $\omega_c = 5$ рад/с и периодом дискретизации $T = 0,2$ с. Частота среза аналогового фильтра-прототипа будет той же: $\Omega_c = 5,463$ рад/с. В приложении П.2 найдем передаточную функцию нормированного ФНЧ заданного типа:

$$H_{\text{н}}(s) = \frac{6,552}{s + 6,552}.$$

Денормирование и трансформация путем подстановки $s = \Omega_c/s$ дает передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа

$$H_{\text{авч}}(s) = \frac{6,552s}{6,552s + \Omega_c} = \frac{s}{s + 0,834}.$$

Выполнив билинейное преобразование $H_{\text{авч}}(s)$, найдем передаточную функцию $H_{\text{цвч}}(z)$ искомого цифрового ФВЧ

$$H_{\text{цвч}}(z) = H_{\text{авч}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{a_0 + a_1z^{-1}},$$

где $a_0 = \Omega_c + 6,552 \cdot \frac{2}{T}$; $a_1 = \Omega_c - 6,552 \cdot \frac{2}{T}$; $b_0 = -b_1 = 6,552 \cdot \frac{2}{T}$.

Подставив численные значения, будем иметь

$$H_{\text{цвч}}(z) = \frac{65,52 + 65,52z^{-1}}{70,985 - 60,057z^{-1}} = \frac{0,923(1 - z^{-1})}{1 - 0,846z^{-1}}.$$

10.3. Методические указания

В работе исследуются цифровые фильтры второго порядка. Передаточные функции исследуемых фильтров определяются по описанной выше методике. Все исследования проводятся по полученным передаточным функциям.

Частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) цифровых фильтров рассчитываются по передаточной функции и строятся с учетом их периодичности в интервале частот $[0, \pi/T]$.

Для проверки фильтрующих свойств цифрового фильтра формируется входная дискретная последовательность

$$x(n) = \sin(\omega_1 T \cdot n) + \cos(\omega_2 T \cdot n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (N \approx 500), \quad (10.4)$$

где значение ω_1 выбирается из полосы пропускания фильтра, а значение ω_2 – из полосы задерживания фильтра.

Выходной сигнал $y(n)$ цифрового фильтра рассчитывается по разностному уравнению, полученному из передаточной функции.

10.4. Программа работы

1. Получить в общем виде передаточную функцию $H_{\text{цнч}}(z)$ цифрового ФНЧ второго порядка по аналоговому прототипу заданного типа.

Примечание. Тип фильтра задается преподавателем по табл. 10.1. Нормированные передаточные функции аналоговых прототипов приведены в приложении П.2.

Таблица 10.1

Тип фильтра	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Тип ФНЧ	Бат	Чеб1	Бат	Чеб2	Бат	Чеб3	Бат	Чеб4
Тип ФВЧ	Чеб1	Бат	Чеб2	Бат	Чеб3	Бат	Чеб4	Бат

2. Составить программу расчета коэффициентов передаточной функции цифрового ФНЧ. Рассчитать коэффициенты передаточной функции фильтра для заданных значений ω_c и T .

Примечание. Значения частоты среза ω_c и периода дискретизации T задаются преподавателем.

3. Составить программу расчета АЧХ и ФЧХ цифрового ФНЧ при $\omega \in [0, \pi/T]$. Построить АЧХ и ФЧХ цифрового фильтра.

4. Сформировать по формуле (10.4) дискретную последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, ($N \approx 500$).

5. По найденной ранее передаточной функции записать разностное уравнение цифрового фильтра и составить программу расчета выходной последовательности $y(n)$ цифрового фильтра при входной последовательности $x(n)$. Пронаблюдать на экране дискретные последовательности $x(n)$, $y(n)$ и сделать вывод о работе фильтра.

6. Повторить пункты 1–5 для заданного цифрового ФВЧ.

7. Уменьшить значение периода дискретизации T на 20%. С помощью составленной программы рассчитать коэффициенты передаточной функции, АЧХ и ФЧХ цифровых ФНЧ и ФВЧ. Сравнить АЧХ и ФЧХ при двух значениях периода дискретизации и сделать вывод.

10.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте понятие цифрового фильтра.

2. Чем отличается деление цифровых фильтров по признакам «нерекурсивный и рекурсивный» и «конечная и бесконечная импульсные характеристики»?

3. Какие методы используются для преобразования передаточной функции аналогового фильтра-прототипа в передаточную функцию цифрового фильтра?

4. Каким условиям должна удовлетворять процедура преобразования передаточной функции аналогового прототипа в передаточную функцию цифрового фильтра?

5. Поясните основной недостаток билинейного преобразования.

6. Объясните смысл операции денормирования передаточной функции ФНЧ.

7. Объясните смысл операции трансформации передаточной функции ФНЧ.

8. Как отличаются АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева в полосе пропускания?

9. Чем обусловлены ограничения на нижний и верхний пределы изменения периода дискретизации T цифрового фильтра?

10. Объясните причину периодичности частотных характеристик цифрового фильтра.

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.

Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru