

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

9. СГЛАЖИВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

9.1. Цель работы

При исследовании реальных процессов, как правило, вместо истинной физической величины регистрируется случайная величина $x(n)$, представляющая собой аддитивную смесь самой величины $v(n)$ и помехи $r(n)$, то есть $x(n) = v(n) + r(n)$. Помеха $r(n)$ может генерироваться непосредственно в исследуемом объекте, попадать в него извне или быть случайной наводкой в цепях измерения и регистрации.

Наличие помехи в последовательности $x(n)$, затрудняет получение достоверной информации об исследуемом процессе. Поэтому последовательность $x(n)$ подвергают первичной обработке, целью которой является сглаживание, то есть полное или частичное устранение помехи $r(n)$. Сглаживание дискретной последовательности $x(n)$ осуществляется при помощи специальных алгоритмов.

Целью работы является изучение алгоритмов сглаживания экспериментальных данных, представленных в виде конечных дискретных последовательностей.

9.2. Основные понятия и расчетные формулы

Изучаемые в работе алгоритмы сглаживания данных описываются линейными разностными уравнениями. Следовательно, их можно рассматривать как цифровые фильтры, которые преобразуют исходную последовательность $x(n)$ в последовательность $y(n)$, являющуюся оценкой полезной составляющей $v(n)$.

Сглаживание скользящим усреднением

Суть этого метода сглаживания состоит в последовательном осреднении ординат $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, на интервале $[n-L/2, n+L/2]$, где L – целое четное число. Значения сглаженной последовательности $y(n)$ определяются по формуле

$$y\left(n + \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{L+1} \sum_{\lambda=0}^L x(n+\lambda), \quad n = 0, 1, \dots, N-L-1. \quad (9.1)$$

Согласно этой формуле значение $y(n + L/2)$ находится как среднее арифметическое $L + 1$ значений $x(n), x(n + 1), \dots, x(n + L)$. При этом усредняются значения, расположенные слева и справа от текущего номера дискретной последовательности. Например, при $L = 4$ каждый элемент последовательности $y(n)$ вычисляется как среднее пяти значений входной последовательности $x(n - 2), x(n - 1), x(n), x(n + 1), x(n + 2)$.

Передающая функция фильтра, реализующего скользящее усреднение, находится по разностному уравнению (9.1):

$$H_{cy}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{L + 1} \sum_{\lambda=0}^L z^{\lambda - \frac{L}{2}}.$$

Фильтр существенно ослабляет гармонические составляющие, частоты которых выше $\omega = 2\pi / (T \cdot L)$. Правильный выбор значения L определяет качество отделения высокочастотной помехи $r(n)$ от более низкочастотной составляющей $v(n)$. Уменьшение L ведет к недостаточному выравниванию экспериментальных данных, а завышение — к искажению существенных особенностей последовательности $v(n)$. Поскольку частотные спектры последовательностей $v(n)$ и $r(n)$ заранее неизвестны, величину L обычно подбирают экспериментально. Обычно процедуру сглаживания начинают со значений $L = 2 - 4$ и увеличивают в случае необходимости после анализа полученных результатов сглаживания.

Сглаживание четвертыми разностями

Сглаживание четвертыми разностями производится путем аппроксимации пяти соседних значений последовательности $x(n)$ параболой с помощью метода наименьших квадратов. В качестве элемента сглаженной последовательности $y(n)$ принимается точка параболы, наилучшим образом аппроксимирующей значения сглаживаемой последовательности $x(n)$ в пяти точках (рис. 9.1)

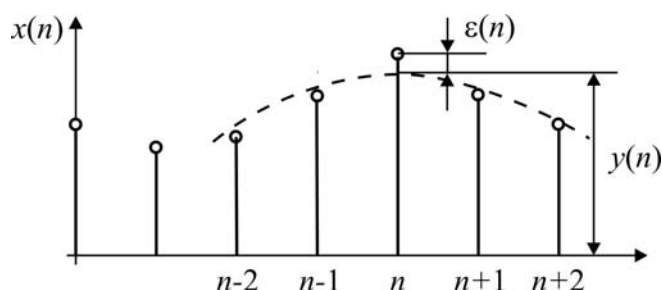


Рис. 9.1. Аппроксимация последовательности в пяти точках

Как показано с помощью метода наименьших квадратов, значение этого элемента вычисляется по формуле

$$y(n) = x(n) - \varepsilon(n), \quad (9.2)$$

где поправка $\varepsilon(n)$ пропорциональна смещенной обратной или прямой разности четвертого порядка:

$$\varepsilon(n) = \frac{3}{35} \Delta^4 x(n+2) = \frac{3}{35} \Delta^4 x(n-2).$$

Используя известные соотношения для расчета прямых и обратных разностей, легко убедиться в том, что

$$\varepsilon(n) = \frac{3}{35} [x(n-2) - 4 \cdot x(n-1) + 6 \cdot x(n) - 4 \cdot x(n+1) + x(n+2)]. \quad (9.3)$$

Подставив (9.3) в (9.2), найдем формулу, которая позволяет непосредственно рассчитать ординату выходной последовательности:

$$y(n) = \frac{1}{35} [-3 \cdot x(n-2) + 12 \cdot x(n-1) + 17 \cdot x(n) + 12 \cdot x(n+1) - 3 \cdot x(n+2)].$$

Из этого уравнения определим передаточную функцию фильтра

$$H_{\text{чп}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{35} (-3z^{-2} + 12z^{-1} + 17 + 12z - 3z^2).$$

Экспоненциальное сглаживание

Экспоненциальное сглаживание – один из простейших и распространенных приемов выравнивания последовательностей. В его основе лежит расчет экспоненциальных средних. Алгоритм экспоненциального сглаживания описывается разностным уравнением

$$y(n) = (1 - \alpha) \cdot y(n-1) + \alpha \cdot x(n), \quad (9.4)$$

где α – постоянный коэффициент ($0 < \alpha < 1$), называемый *постоянной сглаживания*.

Передаточная функция фильтра, осуществляющего экспоненциальное сглаживание, согласно уравнению (9.4) имеет вид

$$H_{\text{эс}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}}.$$

Из выражения (9.4) следует, что текущее значение сглаженной последовательности $y(n)$ равно предыдущему ее значению плюс некоторая доля (α) разности между текущим значением входной последовательности и предыдущим значением сглаженной выходной последовательности.

Если последовательно использовать соотношение (9.4), то экспоненциальную среднюю $y(n)$ можно выразить через значения входной последовательности $x(v)$, $v = 0, \dots, n$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \alpha \cdot x(n) + (1 - \alpha) \cdot y(n - 1) = \\ &= \alpha \cdot x(n) + \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot x(n - 1) + (1 - \alpha)^2 \cdot y(n - 2) = \dots \\ &\dots = \alpha \sum_{v=0}^{n-1} (1 - \alpha)^v \cdot x(n - v) + (1 - \alpha)^n \cdot x(0). \end{aligned}$$

Таким образом, величина $y(n)$ оказывается взвешенной суммой всех членов последовательности $x(n)$, причем веса падают экспоненциально в зависимости от удаления элемента входной последовательности. Если, например, $\alpha = 0,3$, то текущий элемент последовательности будет иметь вес 0,3, а веса предшествующих элементов составят соответственно 0,21; 0,147; 0,1029 и т.д.

Постоянная сглаживания α принимает значения от 0 до 1. Предельное значение $\alpha = 0$ соответствует случаю $L = \infty$ при сглаживании скользящим усреднением. При этом $y(n) = y(n - 1)$. Предельное значение $\alpha = 1$ означает, что предыдущие значения вообще не учитываются. Как показывает практика, значение постоянной сглаживания α следует принимать в пределах от 0,01 до 0,3.

9.3. Методические указания

Для исследования описанных выше алгоритмов сглаживания формируется тестовая дискретная последовательность

$$x(n) = v(n) + r(n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

в которой полезная составляющая $v(n)$ состоит из двух гармонических последовательностей с различными частотами:

$$v(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{M_1} n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{M_2} n\right),$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную последовательность, генерируемую при помощи стандартных функций MathCAD.

Центрированная случайная последовательность $r(n)$ формируется в виде разности

$$r(n) = r1(n) - \text{mean}(r1).$$

Здесь нецентрированная случайная последовательность образуется при помощи стандартной функции $\text{rnd}(x)$, то есть

$$r1(n) = \text{rnd}(b),$$

где b – верхняя граница интервала разброса случайных чисел, а $\text{mean}(r1)$ – среднее значение, определяемое средствами системы MathCAD или непосредственно по формуле

$$\text{mean}(r1) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r1(n).$$

Таким образом, тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{M_1} n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{M_2} n\right) + r(n).$$

Для оценки качества сглаживания различных алгоритмов в работе используется сумма

$$J = \sum_{n=10}^{N-10} [y(n) - v(n)]^2. \quad (9.5)$$

Пределы изменения n в (9.5) приняты такими, чтобы при сравнении алгоритмов сглаживания с некоторым запасом исключить влияние начального и конечного участков, на которых алгоритмы сглаживания не работают.

9.4. Программа работы

1. Сформировать полезную и случайную составляющие сглаживаемой последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ ($N \approx 500$). Пронаблюдать полезную и случайную составляющие, а также сглаживаемую последовательность в целом.

Примечание. Параметры сглаживаемой последовательности (M_1 , M_2 и b) задаются преподавателем.

2. Составить программу сглаживания последовательности $x(n)$ по методу скользящего усреднения и вычисления значения критерия (9.5), характеризующего качество сглаживания. Пронаблюдать сглаженные последовательности и рассчитать значение критерия при $L = 2, 4, 6, 8$. Значения критерия при различных L занести в таблицу и оценить влияние параметра L на качество сглаживания.

3. Составить программу сглаживания последовательности $x(n)$ по методу четвертых разностей. Пронаблюдать сглаженную последовательность и вычислить значение критерия качества.

4. Составить программу экспоненциального сглаживания последовательности $x(n)$. Пронаблюдать сглаженную последовательность и вычислить значения критерия качества при $\alpha = 0,1; 0,2; \dots; 0,9$. Данные занести в таблицу и построить график зависимости критерия качества

сглаживания от коэффициента α Определить оптимальное значение коэффициента α .

5. Сравнить значения критериев качества сглаживания, полученные для различных алгоритмов сглаживания, и сделать выводы.

6. Записать частотные передаточные функции $H(e^{j\omega T})$ для всех алгоритмов сглаживания, исследуемых в работе.

7. Составить программы расчета АЧХ и ФЧХ всех исследуемых фильтров сглаживания в масштабе относительной частоты $r = \omega T / 2\pi$ при $0 \leq r \leq 0.5$. Построить соответственно АЧХ и ФЧХ всех фильтров на одном рисунке. Сравнить исследуемые фильтры сглаживания по частотным свойствам.

9.5. Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях рекомендуется использовать процедуру сглаживания экспериментальных данных?

2. Почему при сглаживании скользящим усреднением увеличение L приводит к искажению полезной составляющей?

3. Как изменится АЧХ алгоритма скользящего усреднения при увеличении L ?

4. Поясните геометрически идею сглаживания четвертыми разностями.

5. В чем заключается аппроксимация по методу наименьших квадратов?

6. Покажите, что уравнения фильтра, полученные через обратную и прямую разности четвертого порядка, эквивалентны.

7. Найдите статический коэффициент передачи фильтра, реализующего сглаживание четвертыми разностями.

8. Почему в уравнении (9.4) должно выполняться условие $0 < \alpha < 1$?

9. Найдите статический коэффициент передачи экспоненциального фильтра.

10. Как изменяются АЧХ и ФЧХ экспоненциального фильтра при изменении α ?

11. Какие алгоритмы сглаживания, кроме рассмотренных, Вам известны?

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.

Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru