

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и нанoeлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

8. ДИСКРЕТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

8.1. Цель работы

В задачах обработки сигналов часто возникает необходимость преобразования сигналов путем их интегрирования и дифференцирования. Например, в системах управления с целью улучшения процесса управления вводятся воздействия по производной и интегралу. В медицинских информационных системах получение диагностических показателей основано на интегрировании или дифференцировании сигналов. Для таких систем необходимы алгоритмы цифрового интегрирования и дифференцирования, реализуемые в режиме реального времени.

Целью работы является изучение некоторых алгоритмов цифрового интегрирования и дифференцирования сигналов, представленных в виде конечных дискретных последовательностей.

8.2. Основные понятия и расчетные формулы

Дискретное интегрирование

Интегрирование непрерывного сигнала описывается уравнением

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (8.1)$$

Для приближенной реализации интегрирования в дискретной форме имеется ряд алгоритмов. Ограничим класс рассматриваемых алгоритмов дискретного интегрирования алгоритмами, которые можно описать разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) + \delta y[x(n), x(n-1), T], \quad (8.2)$$

где $y(n)$ – выходная последовательность, представляющая собой оценку интеграла, $\delta y[x(n), x(n-1), T]$ – величина приращения на очередном интервале дискретизации, зависящая от применяемого способа интегрирования.

Интегрирование по методу прямоугольников. Величина приращения в уравнении (8.1) находится как площадь прямоугольника (рис. 8.1, а). Разностное уравнение интегратора принимает вид

$$y(n) = y(n-1) + T \cdot x(n-1). \quad (8.3)$$

Подвергнув уравнение z -преобразованию, получим передаточную функцию дискретного интегратора

$$H_n(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (8.4)$$

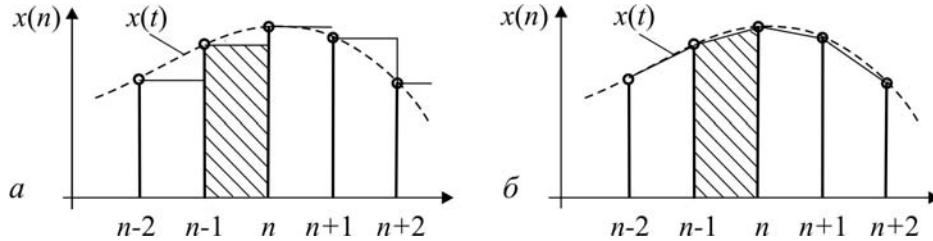


Рис.8.1. Геометрическое представление интегрирования:
а – по методу прямоугольников, б – по методу трапеций

Интегрирование по методу трапеций. Приращение интеграла в уравнении (8.1) численно равно площади трапеции, показанной на рис. 8.1,б). Дискретный интегратор, реализующий интегрирование по методу трапеций, описывается разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) + \frac{T}{2} \cdot [x(n-1) + x(n)].$$

Подвергнув это уравнение z -преобразованию, найдем передаточную функцию дискретного интегратора

$$H_\tau(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (8.5)$$

Интегрирование по комбинированному методу. АЧХ дискретных интеграторов, реализующих интегрирование по методам прямоугольников и трапеций, располагаются соответственно выше и ниже АЧХ идеального интегратора. Поэтому было предложено¹ аппроксимировать АЧХ идеального интегратора путем взвешенной комбинации указанных дискретных интеграторов:

$$H_k(z) = \frac{3}{4} \cdot H_n(z) + \frac{1}{4} \cdot H_\tau(z).$$

После подстановки (8.4) и (8.5) получим

$$H_k(z) = \frac{T}{8} \cdot \frac{1 + 7z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (8.6)$$

¹ Al-Alaoui M. A. Novel digital integrator and differentiator // Electronics Letters. – 1993. – Vol. 29. № 4. – P. 376–378.

Интегрирование по методу параболической аппроксимации.

Идея метода состоит в том, что интегрируемая функция $x(t)$ на интервале $[(n-2)T, nT]$ аппроксимируется параболой по имеющимся трем значениям $x(n-2)$, $x(n-1)$ и $x(n)$ сигнала. Приращение в формуле (8.2) находится интегрированием аппроксимирующей функции на интервале $[(n-1)T, nT]$.

Разностное уравнение такого дискретного интегратора имеет вид

$$y(n) = y(n-1) + T \cdot \left[\frac{5}{12} x(n) + \frac{8}{12} x(n-1) - \frac{1}{12} x(n-2) \right].$$

Передаточная функция интегратора равна

$$H_{\text{пар}}(z) = \frac{T}{12} \cdot \frac{5 + 8z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1}}. \quad (8.7)$$

Дискретное дифференцирование

Идеальное дифференцирование непрерывного сигнала определяется выражением

$$y(t) = \frac{d x(t)}{d t}.$$

Как известно, операторы дифференцирования s и сдвига z связаны соотношением

$$s = \frac{1}{T} \ln z. \quad (8.8)$$

Функция (8.8) может быть разложена в ряд тремя способами. Первые слагаемые этих разложений можно было бы рассматривать как варианты описания алгоритмов дифференцирования. Однако одно из этих разложений приводит к неустойчивому алгоритму дифференцирования, а другое – к алгоритму дифференцирования, который не может быть реализован в системах, работающих в реальном времени. Третий способ разложения приводит к двум следующим алгоритмам.

Дифференцирование по методу простой разности. Запишем функцию (8.8) в виде ряда:

$$s = \frac{1}{T} \left[(1 - z^{-1}) - \frac{1}{2} (1 - z^{-1})^2 + \frac{1}{3} (1 - z^{-1})^3 - \dots \right]. \quad (8.9)$$

Удержав в (8.9) первое слагаемое, получим передаточную функцию цифрового дифференциатора

$$H_{\text{дп}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{T} (1 - z^{-1}). \quad (8.10)$$

Отсюда найдем разностное уравнение

$$y(n) = \frac{1}{T} [x(n) - x(n-1)]. \quad (8.11)$$

Дифференцирующий нерекурсивный фильтр. Если в (8.9) учесть два первых члена ряда, то после преобразований получим

$$H_{\text{дн}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2T} (3 - 4z^{-1} + z^{-2}). \quad (8.12)$$

Передаточной функции (8.10) соответствует разностное уравнение

$$y(n) = \frac{1}{2T} [3 \cdot x(n) - 4 \cdot x(n-1) + x(n-2)].$$

Дифференцирующий рекурсивный фильтр. Считая дифференцирование как действие, обратное интегрированию, рассмотрим фильтр, передаточная функция которого получена инвертированием (8.6). Этот фильтр неустойчив, так как имеет полюс $z_1 = 7$. Чтобы получить устойчивый фильтр, предлагается² отобразить неустойчивый полюс в область внутри единичной окружности и изменить коэффициент передачи. В результате передаточная функция дискретного дифференциатора принимает вид

$$H_{\text{др}}(z) = \frac{8}{7T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{7} z^{-1}}. \quad (8.13)$$

Отсюда получим разностное уравнение

$$y(n) = -\frac{1}{7} y(n-1) + \frac{8}{7T} \cdot [x(n) - x(n-1)].$$

8.3. Методические указания

В работе проводится исследование описанных выше алгоритмов дискретного интегрирования и дифференцирования на соответствие их характеристик идеальным. Для этого предлагается провести два вида исследования:

- построение АЧХ и ФЧХ дискретных интеграторов и дифференциаторов и сравнение этих характеристик с соответствующими характеристиками идеальных интегратора и дифференциатора;
- расчет реакции дискретных интеграторов и дифференциаторов на входную тестовую последовательность и сравнение с реакцией идеальных интегратора и дифференциатора.

² Там же.

АЧХ $H(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ и ФЧХ $\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega T}))$ рекомендуется строить в интервале $[0, \pi]$ нормированной частоты $\tilde{\omega} = \omega T$.

Идеальный интегратор имеет АЧХ и ФЧХ, определяемые выражениями:

$$H_{\text{и}}(\omega) = \left| \frac{1}{j\omega} \right| = \frac{1}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

АЧХ и ФЧХ идеального дифференциатора описываются формулами:

$$H_{\text{д}}(\omega) = |j\omega| = \omega; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

В качестве тестовой последовательности для исследования дискретных интеграторов и дифференциаторов во временной области используется гармоническая дискретная последовательность

$$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{M}n\right).$$

Дискретная последовательность $y(n)$ на выходе дискретного интегратора (или дифференциатора) рассчитывается непосредственно по разностному уравнению. Рассчитанная последовательность сравнивается с дискретной последовательностью, которая могла бы быть получена в результате дискретизации выходного сигнала идеального интегратора (или дифференциатора). Легко показать, что указанные последовательности описываются выражениями:

$$y_{\text{ии}}(n) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{M}n\right),$$

$$y_{\text{ид}}(n) = \frac{M}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{M}n\right).$$

Сравнивая соответствующие последовательности, следует учесть наличие переходного процесса.

8.4. Программа работы

1. Составить программы расчета АЧХ $H(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ дискретных интеграторов, реализующих интегрирование по методам прямоугольников и трапеций. Построить АЧХ и ФЧХ интеграторов и сравнить их с одноименными характеристиками идеального интегратора, построенными на тех же графиках.

2. Составить программы расчета дискретной последовательности $y(n)$ на выходе дискретных интеграторов, реализующих интегрирование

по методам прямоугольников и трапеций. Построить графики $y(n)$ и сравнить их с графиками $y_{\text{ин}}(n)$ идеального интегратора.

3. Составить программы расчета АЧХ $H(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ дискретного дифференциатора, реализующего метод простой разности. Построить АЧХ и ФЧХ дифференциатора и сравнить их с одноименными характеристиками идеального дифференциатора, построенными на тех же графиках.

4. Составить программы расчета дискретной последовательности $y(n)$ на выходе дискретного дифференциатора, реализующего метод простой разности. Построить графики $y(n)$ и сравнить их с графиками $y_{\text{ин}}(n)$ идеального дифференциатора.

5. По аналогичной программе исследовать:

- дискретные интеграторы, описываемые передаточными функциями (8.6) и (8.7);
- дискретные дифференциаторы, описываемые передаточными функциями (8.12) и (8.13).

8.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дан гармонический сигнал $x(t) = 10 \cdot \sin(0,5 \cdot t)$. Осуществлена дискретизация сигнала с периодом $T = 0,05$ с. Запишите $x(n)$.

2. На вход дискретного интегратора, описываемого уравнением (8.3), подано воздействие $x(n) = \delta(n)$. Найдите $y(n)$, если $y(0) = 0$ и $T = 0,5$ с.

3. На вход дискретного дифференциатора, описываемого уравнением (8.11), подано ступенчатое воздействие $x(n) = 1(n)$. Найдите $y(n)$, если $T = 0,25$ с.

4. Нарисуйте структурную схему дискретного интегратора, реализующего интегрирование по методу прямоугольников (трапеций).

5. Запишите разностное уравнение дискретного интегратора, реализующего интегрирование по методу прямоугольников, если на вход интегратора подан сигнал $x(t) = 2t$ и $T = 0,2$ с.

6. Запишите разностное уравнение дискретного интегратора, реализующего интегрирование по методу трапеций, если на вход интегратора подан сигнал $x(t) = 1(t)$ и $T = 0,5$ с.

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*


Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.
Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru