

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ПРИ ПОМОЩИ РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА

7.1. Цель работы

Первым этапом цифровой обработки сигналов является дискретизация. В результате дискретизации непрерывный сигнал заменяется отсчетами, взятыми через определенные, обычно равные интервалы времени. При этом очень важным оказывается выбор интервала дискретизации. При большом интервале дискретизации быстрые изменения непрерывного сигнала могут остаться незамеченными. Выбор малого интервала дискретизации ведет к увеличению числа отсчетов и тем самым к увеличению времени обработки. Задача о выборе интервала дискретизации наиболее просто решается при помощи теоремы, доказанной В. А. Котельниковым в 1933 году. Эта теорема устанавливает условия точного восстановления мгновенных значений сигнала по его отсчетам, взятым через равные промежутки времени.

Целью работы является определение периода дискретизации по спектральной характеристике заданного сигнала и оценка погрешности восстановления сигнала при помощи ряда Котельникова.

7.2. Основные понятия и расчетные формулы

Сигнал $x(t)$ и спектральная характеристика $X(j\omega)$ взаимно однозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt ; \quad (7.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega . \quad (7.2)$$

Пусть спектральная характеристика $X(j\omega)$ равна нулю при $\omega < -\omega_b$ и $\omega > \omega_b$. В этом случае ее можно преобразовать в периодическую с периодом $W = 2\omega_b$ и представить в виде комплексного ряда Фурье. Заменив в формуле комплексного ряда Фурье переменную t на ω и период T на $W = 2\omega_b$ получим

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn \frac{2\pi}{W} \omega} , \quad (7.3)$$

где коэффициенты разложения

$$A_n = \frac{2}{W} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} X(j\omega) e^{-jn\frac{2\omega}{W}\omega} d\omega = \frac{1}{\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} X(j\omega) e^{-jn\frac{\pi}{\omega_B}\omega} d\omega. \quad (7.4)$$

Сравнивая правые части выражений (7.2) и (7.4), замечаем, что

$$A_n = \frac{2\pi}{\omega_B} x(-n\pi/\omega_B) = 2T x(-nT),$$

где

$$T = \pi/\omega_B. \quad (7.5)$$

При этом спектральная характеристика (7.3) примет вид

$$X(j\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-nT) e^{jnT\omega} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jnT\omega}. \quad (7.6)$$

Подставим формулу (7.6) под знак интеграла в (7.2). Меняя порядок действия интегрирования и суммирования в полученном выражении и вычисляя интегралы, найдём

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jnT\omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} x(nT) e^{j\omega(t-nT)} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{\pi} x(nT) \frac{\sin \omega_B(t-nT)}{\omega_B(t-nT)}. \end{aligned}$$

С учетом (7.5) окончательно получим

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \omega_B(t-nT)}{\omega_B(t-nT)}. \quad (7.7)$$

На основании изложенного В.А. Котельниковым была сформулирована следующая

Теорема. Любую функцию $x(t)$, содержащую гармонические составляющие с частотами от 0 до ω_B , можно представить в виде ряда (7.7) и, наоборот, любая функция, представленная формулой (7.7), содержит лишь гармонические составляющие с частотами от 0 до ω_B .

Полученную формулу (7.7) можно рассматривать как разложение сигнала $x(t)$ по функциям

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_B(t-nT)}{\omega_B(t-nT)}, \quad (7.8)$$

причем в качестве коэффициентов ряда выступают значения сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени $t_n = nT$, $n \in (-\infty, \infty)$.

Функция $\varphi_n(t)$, называемая отсчетной функцией, отображает собой колебания с максимальным значением при $t_n = nT$ (на рис. 7.1, а представлен график отсчетной функции для $n = 4$). В другие дискретные моменты времени функция равна нулю. Легко проверить, что отсчетные функции ортогональны на интервале времени, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} d_n & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

где

$$d_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \omega_B(t - nT)}{\omega_B(t - nT)} \right]^2 dt = \frac{\pi}{\omega_B} = T.$$

Представление функции $x(t)$ рядом (7.7) показано на рис. 7.1, б. В каждой точке $t = nT$ только один член ряда, стоящего в правой части выражения (7.7), отличен от нуля и этот член равен $x(nT)$. Следовательно, в точках $t = nT$ справедливость формулы (7.7) очевидна. В промежутках между указанными точками точное значение функции $x(t)$ обеспечивается суммированием бесконечного числа функций вида (7.8).

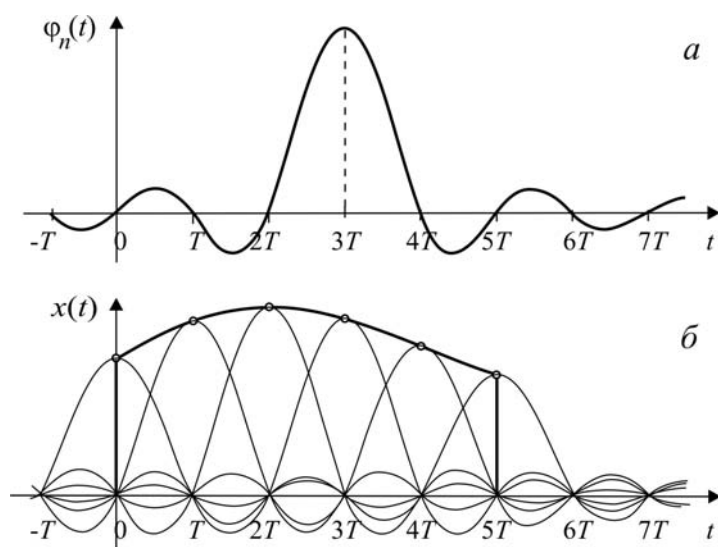


Рис. 7.1. Представление сигнала в виде ряда Котельникова:
а – отсчетная функция; б – составляющие ряда

Таким образом, функция $x(t)$ с ограниченным спектром, с одной стороны, может быть полностью задана множеством ее мгновенных значений, взятых через равные промежутки времени T . С другой стороны, если имеются числовые значения функции $x(nT)$ для всех n , то она может быть полностью восстановлена по формуле (7.7).

При практическом использовании теоремы Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам необходимо учитывать следующее. Сигналы с ограниченным спектром, для которых справедлива теорема, бесконечны во времени. Реальные же сигналы ограничены по времени интервалом $[0, T_c]$ и обладают, следовательно, неограниченным по времени спектром. Однако всегда можно выделить интервал частот $[0, \omega_b]$, в котором заключена основная часть энергии сигнала, а на долю составляющих спектра с частотой $\omega > \omega_b$ приходится малая часть энергии сигнала.

Сигнал, ограниченный по времени, приближенно описывается рядом (7.7), состоящим из конечного числа членов:

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^N x(nT) \frac{\sin \omega_b(t - nT)}{\omega_b(t - nT)}. \quad (7.9)$$

При суммировании членов ряда (7.9) сигнал $x(t)$ воспроизводится точно только в точках отсчета $t_n = nT$. В промежутках между отсчетами возникает ошибка аппроксимации, величина которой зависит от отбрасываемой части спектра сигнала. Чтобы уменьшить ошибку, интервал дискретизации T рекомендуют принимать в 2–5 раз меньше величины, определяемой по формуле (7.5). Ряд Котельникова для восстановления сигналов используется редко. Он имеет скорее теоретическое значение, позволяя получить полезные выводы. Для восстановления же сигналов по дискретным отсчетам на практике чаще используются другие методы, например методы линейной и квадратичной интерполяции.

7.3. Методические указания

В работе исследуется сигнал $x(t)$, представляющий собой одиночный импульс заданной формы (см. приложение П.1). Программа работы предусматривает дискретизацию заданного сигнала, восстановление его по дискретным отсчетам и оценку погрешности восстановления.

Период дискретизации T находится по формуле (7.5). Для определения граничной частоты ω_b , которая используется в формуле (7.5), строится амплитудная спектральная характеристика $X(j\omega) = |X(j\omega)|$ сигнала. По этой характеристике определяется граница интервала ω_b , в котором заключена основная часть энергии сигнала (рис. 7.2). Значение ω_b находится из условия, что при $\omega > \omega_b$ выполняется неравенство

$$X(\omega) \leq A,$$

где A – заданная величина.

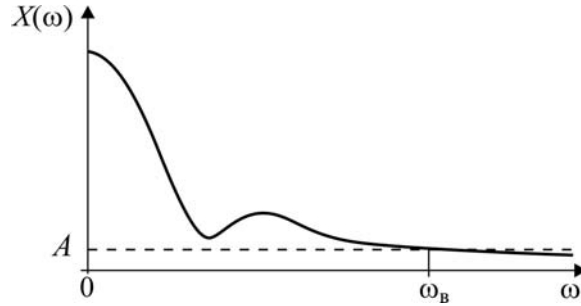


Рис. 7.2. Определение границы частотного интервала

При составлении программы восстановления сигнала по формуле (7.9) надо принять во внимание, что входящие в нее отсчетные функции (7.8) имеют неопределенность при $t = nT$. Если используемая версия системы MatchCAD автоматически не устраняет эту неопределенность, в программе для устранения неопределенности можно использовать условный оператор. Программа вычисления функции

$$y(x) = \sin x/x$$

с помощью условного оператора может быть записана в следующем виде

$$y(x) := \text{if}(x \approx 0, 1, \sin x/x) .$$

Как отмечалось выше, ряд (7.7) точно воспроизводит сигнал $x(t)$ в точках отсчета $t_n = nT$. Следовательно, в этих точках ошибка аппроксимации равна нулю, максимумы же ошибки следует ожидать примерно посередине интервалов между соседними точками отсчета. Поэтому для быстрой оценки погрешности аппроксимации можно вычислить значения ошибки $\varepsilon(nT + 0.5T)$.

7.4. Программа работы

1. Найти спектральную характеристику отсчетной функции

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_B(t - nT)}{\omega_B(t - nT)} .$$

Построить ее для произвольного значения n и $T = \pi/\omega_B = 1$.

2. Сформировать в среде MatchCAD математическую модель сигнала $x(t)$, заданного преподавателем (варианты сигналов приведены в приложении П.1). Построить график функции $x(t)$.

3. Составить программу расчета спектральной характеристики

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

заданного сигнала $x(t)$. Построить амплитудную спектральную характеристику $X(\omega) = |X(j\omega)|$.

4. По амплитудной спектральной характеристике $X(\omega)$ определить значение частоты ω_B из условия, что $X(\omega) \leq 0,05 \max_{\omega} X(\omega)$ при $\omega \geq \omega_B$.

5. Определить интервал дискретизации Котельникова $T = \pi/\omega_B$ и сформировать дискретную последовательность

$$x(n) = x(nT), n = 0, 1, \dots, N = T_c/T,$$

где T_c – интервал определения заданного сигнала $x(t)$.

6. Составить программу расчета сигнала $x_N^*(t)$, восстанавливаемого из дискретной последовательности $x(nT)$, $n = 0, 1, \dots, N$, при помощи ряда Котельникова. Построить на одном рисунке графики функций $x(t)$ и $x_N^*(t)$.

7. Сформировать сигнал ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - x_N^*(t)$. Определить максимальную абсолютную ошибку

$$\varepsilon_{\max} = \max_t |\varepsilon(t)|.$$

8. Повторить пункты 4–6 программы, уменьшив период дискретизации T в 2–5 раз.

7.5. Контрольные вопросы и задания

1. Как осуществляется дискретизация непрерывного сигнала по времени?

2. Покажите, что отсчетные функции $\varphi_n(t)$ ортогональны на интервале времени $(-\infty, \infty)$.

3. Как изменяются отсчетные функции $\varphi_n(t)$ при уменьшении (увеличении) периода дискретизации?

4. Как выглядит спектральная характеристика отсчетной функции?

5. Что понимают под числом степеней свободы сигнала $x(t)$?

6. Какие методы, кроме ряда Котельникова, используются для восстановления сигнала по его отсчетам в дискретные моменты времени?

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.

Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru