

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и нанoeлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

6. ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГОВЫХ ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ЧАСТОТ

6.1. Цель работы

Решение задачи аппроксимации характеристик идеальных фильтров нижних и верхних частот (ФНЧ и ФВЧ) при помощи устойчивой и физически реализуемой передаточной функции привело к созданию целого семейства типовых фильтров. Наибольшую известность среди них, благодаря простоте, приобрели фильтры Баттерворта и Чебышева.

Целью работы является изучение методов расчета ФНЧ и ФВЧ Баттерворта и Чебышева по заданным требованиям к амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) и построение характеристик рассчитанных фильтров.

6.2. Основные понятия и расчетные формулы

Нормированные аналоговые фильтры нижних частот

Нормированные передаточные функции фильтров Баттерворта и Чебышева (см. приложение П.2) могут быть представлены в виде

$$H_{\text{на}}(s) = \frac{b_0}{A(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}. \quad (6.1)$$

Свойства этих фильтров подробно описаны в литературе. Существуют и другие фильтры, имеющие передаточные функции вида (6.1) и сочетающие свойства фильтров Баттерворта и Чебышева. Например, фильтр Лежандра имеет в полосе затухания наклон АЧХ такой же крутой, как и фильтр Чебышева, и монотонную АЧХ в полосе пропускания, как фильтр Баттерворта.

Обычно фильтр реализуют в виде последовательного соединения звеньев первого и второго порядка. Поэтому знаменатель передаточной функции (6.1) можно представить в виде произведения сомножителей не выше второго порядка. Тогда

$$A(s) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}) & \text{при четных } n, \\ (s - \alpha_0) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}) & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Фильтр Баттерворта

АЧХ фильтра Баттерворта описывается выражением

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}}, \quad (6.2)$$

где ω_c – граничная частота, n – порядок фильтра.

Фильтры Баттерворта имеют максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задерживания. АЧХ фильтров Баттерворта для $n = 2, 4$ и 8 показаны на рис. 6.1.

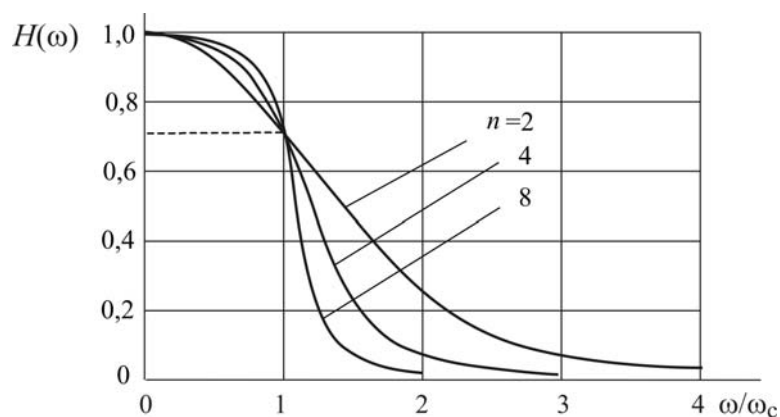


Рис. 6.1. АЧХ нормированных фильтров Баттерворта

По мере возрастания порядка n фильтра Баттерворта коэффициент передачи в полосе пропускания все в большей степени приближается к единице, переходная область все в большей степени сужается, а в полосе задерживания функция передачи все ближе и ближе подходит к нулю. При $n \rightarrow \infty$ АЧХ фильтра Баттерворта приближается к идеальной.

Фильтр Баттерворта имеет следующие свойства.

1. При любом n справедливы соотношения:

$$H(0) = 1; \quad H(\omega_c) = 1/\sqrt{2}; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 0.$$

2. Функция $H(\omega)$ фильтров Баттерворта монотонно убывает при $\omega \geq 0$. Следовательно, АЧХ имеет максимальное значение при $\omega = 0$.

3. Все производные функции (6.2) по частоте ω от первой до $(n-1)$ -й включительно при $\omega = 0$ равны нулю. Именно по этой причине фильтр Баттерворта называют фильтром с максимально плоской АЧХ.

4. Крутизна АЧХ фильтра Баттерворта n -го порядка на высоких частотах составляет $20n$ дБ/дек.

Таким образом, n и ω_c являются теми параметрами, выбор которых позволяет удовлетворить заданный набор требований к фильтру в полосе пропускания и полосе задерживания.

Передаточная функция фильтра Баттерворта не имеет нулей, а ее n полюсов располагаются в левой полуплоскости на окружности с радиусом, равным ω_c .

Фильтр Чебышева первого рода

Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ Чебышева первого рода определяется выражением:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega/\omega_c)}},$$

где V_n – полином Чебышева порядка n , который может быть образован с помощью рекуррентной формулы

$$V_{n+1}(x) - 2xV_n(x) + V_{n-1}(x) = 0.$$

Здесь первые два полинома принимаются равными: $V_0(x) = 1$; $V_1(x) = x$.

На рис. 6.2 показаны АЧХ фильтра Чебышева первого рода. АЧХ имеет равновеликие пульсации в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задержания. Размах пульсации АЧХ равен

$$\delta = 1 - 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}.$$

Таким образом, ε представляет собой свободный параметр, который устанавливает величину неравномерности передачи в полосе пропускания. Чем меньше значение ε , тем меньше ширина полосы, в которой колеблется АЧХ в полосе пропускания.

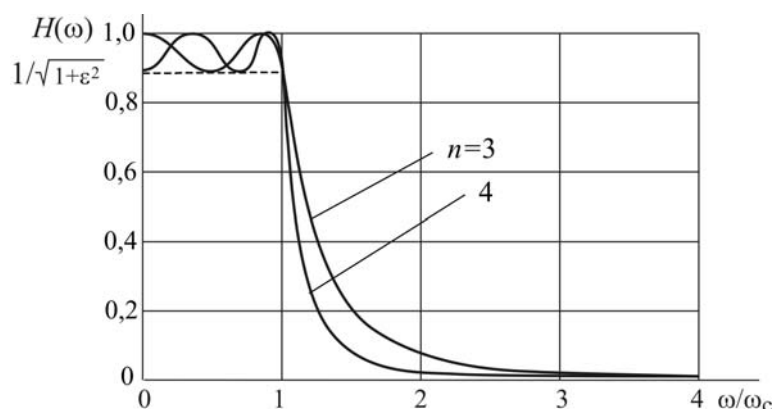


Рис.6.2. АЧХ нормированных фильтров Чебышева первого типа ($\varepsilon = 0.765$)

Фильтр Чебышева имеет следующие свойства:

1. АЧХ удовлетворяет условиям:

$$H(\omega_c) = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2} ;$$

$$H(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

2. На интервале $[0, \omega_c]$ значения функции $H(\omega)$ лежат в пределах от $1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2}$ до 1. В общей сложности, на этом интервале имеется n критических точек, в которых функция $H(\omega)$ достигает минимального значения $1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2}$, или максимального значения, равного 1.

3. При $\omega \geq \omega_c$ функция $H(\omega)$ монотонно убывает и стремится к нулю. Крутизна спада на высоких частотах составляет $20n$ дБ/дек.

Выбирая значения n и ε , можно удовлетворить заданный набор требований к фильтру в полосе пропускания и полосе задерживания. Передаточная функция фильтра Чебышева первого рода не имеет нулей. Полюсы размещены в левой полуплоскости на эллипсе, большая ось которого располагается на оси ординат, а малая – на оси абсцисс.

Денормирование и трансформация фильтров

Проектирование ФНЧ и ФВЧ начинается с определения передаточной функции *нормированного* ФНЧ. Под нормированным фильтром при этом подразумевается фильтр с частотой среза полосы пропускания $\omega_c = 1$. Передаточные функции фильтров с заданными частотами среза получают с помощью операций *денормирования* (масштабирования по частоте) и *трансформации* (преобразование типа фильтра).

Для получения передаточной функции ФНЧ с требуемой частотой среза используется операция *денормирования* (*масштабирования по частоте*). В передаточной функции нормированного ФНЧ оператор s заменяется на оператор s / ω_c , то есть искомая передаточная функция ФНЧ будет равна

$$H_{\text{фнч}}(s) = H_{\text{н}}(s / \omega_c).$$

Для того чтобы получить передаточную функцию ФВЧ с требуемой частотой среза, одновременно проводятся операции денормирования и трансформации. Указанные операции осуществляются путем замены оператора s в передаточной функции нормированного ФНЧ на оператор ω_c / s . Передаточная функция ФВЧ определится так:

$$H_{\text{фвч}}(s) = H_{\text{н}}(\omega_c / s).$$

6.3. Методические указания

В работе исследуются частотные и временные характеристики фильтров нижних и верхних частот второго и третьего порядков. Исследование начинается с определения передаточных функций фильтров.

Частотные характеристики рассчитываются непосредственно по частотной передаточной функции

$$H(j\omega) = H(s)_{s=j\omega}.$$

Частоту ω при построении частотных характеристик рекомендуется менять в диапазоне от 0 до $3\omega_c$.

Амплитудно-частотная характеристика рассчитывается по формуле

$$H(\omega) = |H(j\omega)|, \quad 0 \leq \omega \leq 3\omega_c.$$

При расчёте и построении фазо-частотной характеристики фильтров для получения правильных результатов необходимо учесть особенности расчёта комплексных чисел в системе MathCAD. Например, можно использовать условный оператор:

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \text{if}(\text{Im}(H(j\omega)) \leq 0, \arg(H(j\omega)), \arg(H(j\omega)) - 2\pi).$$

Импульсная переходная функция определяется как обратное преобразование Лапласа передаточной функции $H(s) = B(s)/A(s)$:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(s)e^{st} ds.$$

С учетом, что полюсы исследуемых в работе фильтров простые и ненулевые, импульсная переходная функция может быть определена в следующем виде:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{s_i t},$$

где s_i – полюсы фильтра; C_i – постоянные, вычисляемые по формуле

$$C_i = \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}.$$

Для расчета полюсов фильтра используются имеющиеся в системе MathCAD функции **root(f(x),x)** или **polyroots(v)**. Пример определения корней полинома с помощью функции **polyroots(v)** приведен в приложении П.6.

6.4. Программа работы

1. Рассчитать коэффициенты передаточных функций ФНЧ и ФВЧ 2-го и 3-го порядка заданных типов (см. табл. 6.1) и с заданным значением частоты среза.

Примечание. Вариант исследуемых фильтров и значение частоты среза задаются преподавателем.

Таблица 6.1

Тип фильтра	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Тип ФНЧ	Бат	Чеб1	Бат	Чеб2	Бат	Чеб3	Бат	Чеб4
Тип ФВЧ	Чеб1	Бат	Чеб2	Бат	Чеб3	Бат	Чеб4	Бат

2. Составить программы для расчета АЧХ $H(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ фильтров.

3. Построить АЧХ $H(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ фильтров. Сравнить характеристики однотипных фильтров различных порядков и сделать выводы.

3. Рассчитать полюсы исследуемых фильтров и показать расположение полюсов на комплексной плоскости. Сравнить расположение полюсов однотипных фильтров различных порядков и сделать выводы.

4. Рассчитать и построить импульсные переходные функции $w(t)$ фильтров. Сравнить характеристики однотипных фильтров и сделать выводы.

6.5. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение амплитудно-частотной характеристики.

2. Поясните понятия полосы пропускания и полосы задерживания фильтра.

3. Дайте понятия фильтров нижних и верхних частот.

4. Найдите значение ε , при котором величина неравномерности передачи в полосе пропускания у фильтра Чебышева равна 0,1.

4. Объясните смысл операции денормирования.

5. Объясните смысл операции трансформации.

6. Поясните, каким образом преобразовать передаточную функцию ФНЧ в передаточную функцию ФВЧ.

7. Как отличаются АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева в полосе пропускания?

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.

Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru