МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73
В12

Вадутов О.С.

В12 Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. − 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР
В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,
профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики
ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России
В.А. Фокин

5. РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ ХААРА

5.1. Цель работы

Современные высокоэффективные алгоритмы сжатия при обработке изображений базируются в основном на методах вейвлет-анализа, среди которых заметное место занимает классический ортогональный базис Хаара. Функции Хаара, как и функции Уолша, относятся к классу кусочно-постоянных функций. Их отличие от функций Уолша заключается в том, что они локализованы на отдельных частях изучаемого интервала. Поэтому функции Хаара, которые позволяют оценить локальные свойства исследуемых сигналов, часто называют вейвлетами Хаара.

Целью работы является изучение системы ортогональных функций Хаара, разложение сигнала заданной формы и исследование влияния числа членов ряда на погрешность аппроксимации.

5.2. Основные понятия и расчетные формулы

Функции Хаара

Рассматриваемую в работе систему впервые построил и начал изучать в 1909 г. А. Хаар. Система Хаара состоит из кусочно-постоянных функций, заданных на интервале $[0, 1)$. Для функций Хаара наряду с одинарной (порядковой) нумерацией широко используется и двойная нумерация. Двойная нумерация соответствует групповому принципу формирования функций Хаара.

Первая функция системы Хаара постоянна:

$$\chi_0(\theta) \equiv 1, \quad \theta \in [0,1).$$

Остальные функции системы Хаара удобно строить по группам: группа с номером m содержит 2^m функций $\chi_{mk}(\theta)$, $m = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$.

В первую группу ($m = 0$) входит одна функция:

$$\chi_1(\theta) = \chi_{00}(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [0, \tfrac{1}{2}); \\ -1, & \theta \in [\tfrac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Вторая группа ($m=1$, $k=0,1$) состоит из двух функций: $\chi_2(\theta)=\chi_{10}(\theta)$ и $\chi_3(\theta)=\chi_{11}(\theta)$; третья группа ($m=2$, $k=0,1,2,3$) – из четырех функций: $\chi_4(\theta)=\chi_{20}(\theta)$, $\chi_5(\theta)=\chi_{21}(\theta)$, $\chi_6(\theta)=\chi_{22}(\theta)$, $\chi_7(\theta)=\chi_{23}(\theta)$ и т. д.

Для формирования функций Хаара используется следующая формула:

$$\chi_{mk}(\theta)=\begin{cases}\sqrt{2^m}, & \theta\in\left[\dfrac{k}{2^m},\dfrac{k+1/2}{2^m}\right);\\ -\sqrt{2^m}, & \theta\in\left[\dfrac{k+1/2}{2^m},\dfrac{k+1}{2^m}\right);\\ 0, & \theta\notin\left[\dfrac{k}{2^m},\dfrac{k+1}{2^m}\right).\end{cases}$$

На рис. 5.1 изображены первые восемь функций системы Хаара. Легко видеть, что первые две функции Хаара – такие же, как и соответствующие функции Уолша, упорядоченные по Уолшу или по Пэли. Остальные функции Хаара имеют локальный характер области определения.

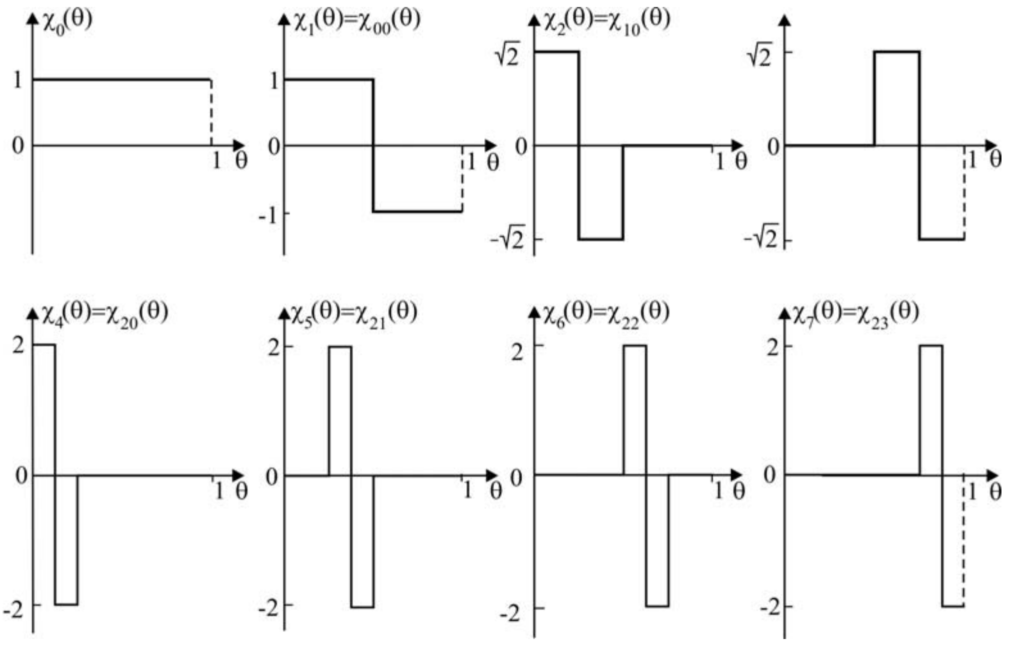


Рис. 5.1. Графики первых восьми функций Хаара

В настоящее время функции Хаара называют и вейвлетами Хаара, поскольку они могут быть описаны с помощью формальных правил, принятых в теории вейвлет-анализа. Скейлинг-функция и «материнский вейвлет» Хаара совпадают соответственно с первой и второй функциями рассмотренной системы, то есть:

$$\varphi(\theta) = \chi_0(\theta) \equiv 1, \quad \theta \in [0, 1);$$

$$\psi(\theta) = \varphi(2\theta) - \varphi(2\theta\text{-}1) = \chi_1(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1, & \theta \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \qquad (5.1)$$

Функции системы Хаара определяются согласно теории вейвлетов путем масштабных преобразований и переносов «материнского вейвлета»:

$$\chi_{mk}(\theta) = \sqrt{2^m}\ \psi(2^{-m}\theta - k); \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1. \qquad (5.2)$$

При использовании одинарной нумерации, как легко показать, номер функции Хаара, начиная с $n = 1$, определяется по значениям m и k с помощью формулы

$$n = 2^m + k; \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1.$$

Иногда функции Хаара определяются иначе. На интервалах, где функции отличаются от нуля, значения их принимаются равными +1 или –1. Определенные таким образом функции Хаара ортогональны, но не нормированы. Такие ненормированные функции Хаара удобно использовать при анализе и синтезе логических функций.

Разложение непрерывных сигналов в базисе Хаара

Систему ортогональных функций Хаара можно использовать в качестве базисной при разложении в равномерно сходящийся ряд Хаара непрерывного сигнала, заданного на отрезке $[0, T)$.

При использовании функций Хаара в качестве базисных для аппроксимации сигнала $x(t)$ на отрезке $[0, T]$ безразмерный аргумент ŕ необходимо заменить на $\alpha\, t$, где коэффициент $\alpha = 1/T$ задает необходимый временной масштаб функций и имеет размерность времени в минус первой степени.

Ряд Хаара одномерного сигнала $x(t), t \in [0, T)$ будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \chi_n\left(\frac{t}{T}\right),$$

где коэффициенты рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, \chi_n\left(\frac{t}{T}\right) dt.$$

Усеченные ряды Хаара

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, \chi_n\left(\frac{t}{T}\right)$$

обладают равномерной, среднеквадратической сходимостью и сходимостью в среднем. Они могут быть использованы для аппроксимации сигналов, описываемых интегрируемыми функциями.

Средняя квадратическая погрешность аппроксимации при конечном числе ортогональных составляющих ряда Хаара рассчитывается по формуле

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[x(t) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, \chi_n\left(\frac{t}{T}\right)\right]^2 dt\,.$$

При использовании двойной нумерации ряд Хаара записывается следующим образом:

$$x(t) = c_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^m-1} c_{mk} \, \chi_{mk}\left(\frac{t}{T}\right).$$

Особенностью функций Хаара является сравнительная простота их получения (генерирование в радиоустройствах). Базисную систему функций Хаара целесообразно использовать для анализа и синтеза импульсных сигналов конечной длительности.

Применение функций Хаара наиболее эффективно для анализа сигналов с сильно выраженными локальными особенностями в виде кратковременных всплесков и колебаний. Это объясняется тем, что аппроксимация этих всплесков и колебаний осуществляется ограниченным числом составляющих ряда, расположенных в соответствующей части интервала $[0, T)$.

5.3. Методические указания

Программа работы предусматривает разложение в ряд Хаара сигнала, описываемого на заданном интервале $[0, T)$ функцией $x(t)$. Чтобы составить программу, пригодную для анализа функций на интервалах различной длительности, функции Хаара рекомендуется сформировать сначала на интервале $[0, 1)$ относительного времени. При составлении программы моделирования функций Хаара предлагается использовать «материнский вейвлет», описываемый функцией (5.1). Получить «материнский вейвлет» в масштабе относительного времени, в частности, можно с помощью условного оператора if:

$$\mathrm{h(t)} := \mathrm{if(t \le 0, 0, 1)} - 2\,\mathrm{if(t \le 0.5, 0, 1)} + \mathrm{if(t \le 1, 0, 1)}\,.$$

Один из возможных способов получения системы функций Хаара заключается в том, что формируется вектор-функция, каждая составляющая которого записывается согласно формуле (5.2) в масштабе относительного времени и с соблюдением одинарной нумерации. Чтобы получить функции Хаара для заданного интервала $[0,T]$, в вектор-функции выполняется указанная выше подстановка $t = t/T$.

Пример формирования вектор-функции Хаара приведен в приложении П.6.

5.4. Программа работы

1. Составить программу моделирования функций Хаара $\chi_n(t)$, $t \in [0,T)$, $n = 0,1,...,N-1$, для $N = 16$. Пронаблюдать графики функций Хаара и проверить их правильность.

2. Убедиться в том, что функции Хаара удовлетворяют условию ортогональности. Для этого вычислить значения интегралов

$$\frac{1}{T}\int_0^T \chi_n\left(\frac{t}{T}\right)\cdot\chi_m\left(\frac{t}{T}\right)\cdot dt$$

для нескольких произвольных значений $n = m$ и $n \neq m$ $(n,m = 0,1,...,N-1)$.

3.Сформировать в среде MathCAD заданную функцию $x(t)$, $t \in [0,T)$. Построить ее график.

Примечание. Сигнал $x(t)$ задается преподавателем (возможные варианты сигналов приведены в приложении П.1). Длительность сигнала выбирается произвольно: $T = T_\text{с} \neq 1$ с .

4. Рассчитать значения коэффициентов c_n, $n = 0,1,...,N-1$, разложения заданной функции $x(t)$ в базисе функций Хаара.

5. Составить программу вычисления функции

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \chi_n\left(\frac{t}{T}\right), \qquad t \in [0,T).$$

6. Построить спектральную диаграмму и сделать выводы о спектральном составе исследуемого сигнала $x(t)$.

7. Построить график ошибки аппроксимации

$$\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N^*(t).$$

Проанализировать характерные признаки ошибки аппроксимации.

8. Образовать аппроксимирующий сигнал $x_N^*(t)$ путем суммирования первых восьми членов ряда ($N=8$). Построить график ошибки аппроксимации $\varepsilon_N(t)=x(t)-x_N^*(t)$. Сделать выводы.

9. Рассчитать значения средней квадратической ошибки

$$\sigma^2=\int_0^T [x(t)-x_N^*(t)]^2\,dt$$

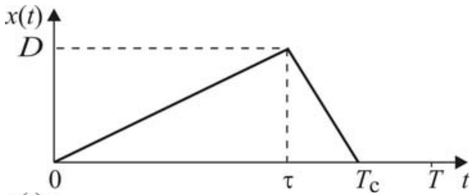
для $N=8$ и $N=16$. Сделать выводы.

5.5. Контрольные вопросы и задания

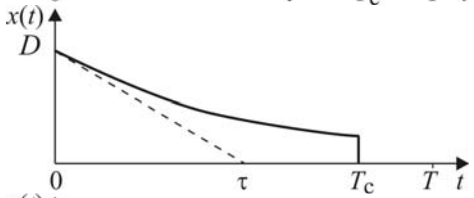
1. Дайте определение функций Хаара.
2. Изобразите график функции $x(\theta)=\chi_3(\theta)+\chi_7(\theta)$.
3. Изобразите график функции $x(t)=\chi_2\left(\frac{t}{T}\right)+\chi_6\left(\frac{t}{T}\right)$, если $T=0{,}1$ с.
4. Сколько функций образуют систему Хаара, если в ней использовано четыре группы?
5. Сколько функций Хаара входит в группу *m*=6?
6. К какой группе *m* принадлежит функция Хаара $\chi_{15}(\theta)$? Изобразите ее график.
7. Покажите, что функции Хаара ортогональны.
8. Найдите энергию функции Хаара $\chi_3(t)$ при $T=2$ с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

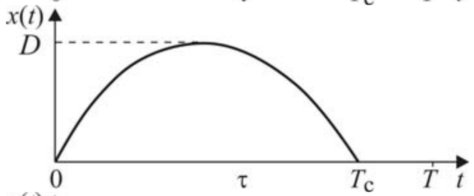
П.1. Варианты исследуемых функций



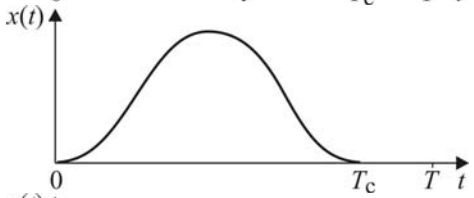
$$x(t)=\begin{cases}(D/\tau)\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le \tau\,,\\ D\cdot(t-T_{\text{c}})/(\tau-T_{\text{c}}) \ \text{при } \tau\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при другит } t\,.\end{cases}$$



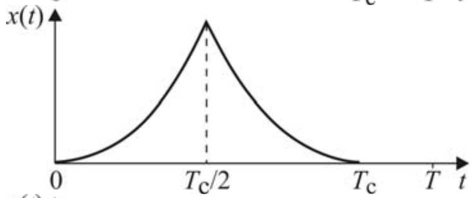
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\exp(-t/\tau) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



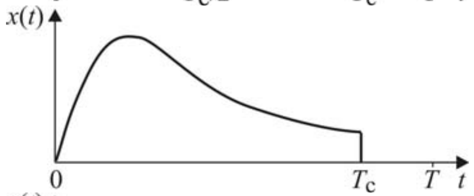
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{T_{\text{c}}}\cdot t\right) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



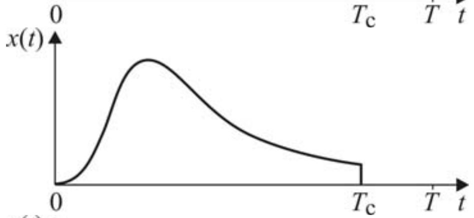
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{T_{\text{c}}}\cdot t\right) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



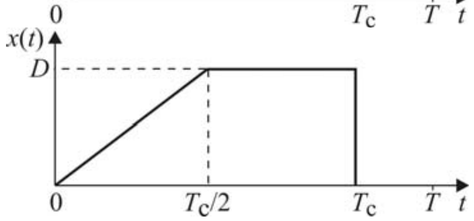
$$x(t)=\begin{cases}t^2 \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}/2\,,\\ (t-T_{\text{c}})^2 \quad \text{при } T_{\text{c}}/2\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}t\cdot\exp(-\alpha\, t) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}t^2\cdot\exp(-\alpha\, t) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}2(D/T_{\text{c}})\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}/2\,,\\ D \quad \text{при } T_{\text{c}}/2\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук, профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.
Заказ 107-14. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru