МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73
В12

Вадутов О.С.

В12 Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. − 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР
В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,
профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики
ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России
В.А. Фокин

4. РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

4.1. Цель работы

С развитием вычислительной техники стали чаще в качестве базисных использоваться кусочно-постоянные функции, имеющие постоянные значения на фиксированных интервалах времени. При вычислении коэффициентов ряда производится умножение функции на постоянный, единый для данного интервала, множитель. Это проще, чем умножение на меняющиеся от точки к точке значения непрерывных базисных функций. Основными среди таких функций являются функции Уолша и Хаара. Функции Уолша, которым посвящена данная работа, используются при обработке речевых сигналов, сигналов в биологии и медицине, при цифровой обработке изображений, в цифровой голографии и многих других областях.

Целью работы является изучение системы ортогональных функций Уолша, разложение сигнала заданной формы и исследование влияния числа членов ряда на погрешность аппроксимации.

4.2. Основные понятия и расчетные формулы

Функции Уолша (J. Walsh) были разработаны в 1923 г. как развитие известной к тому времени системы функций Радемахера путем добавления в нее новых функций. Функции Радемахера образуются из синусоидальных функций:

$$rad_0(\theta) \equiv 1; \quad rad_i(\theta) = \mathrm{sign}[\sin(2^i \pi\theta)]\ ; \quad i = 1,\dots,n \qquad (4.1)$$

где θ – относительное время, изменяющееся в интервале $[0,1)$. Символом sign (сигнум-функция) обозначается функция

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

В соответствии с формулами (4.1) и (4.2) функции Радемахера принимают значения +1 или –1 и имеют вид, показанный на рис. 4.1.

Функции Радемахера являются ортогональными, но не составляют полную систему. На том же интервале $[0,1)$ существуют другие функции, связанные условиями ортогональности с функциями Радемахера.

Поэтому система функций Радемахера не может эффективно использоваться для разложения произвольно заданных функций.

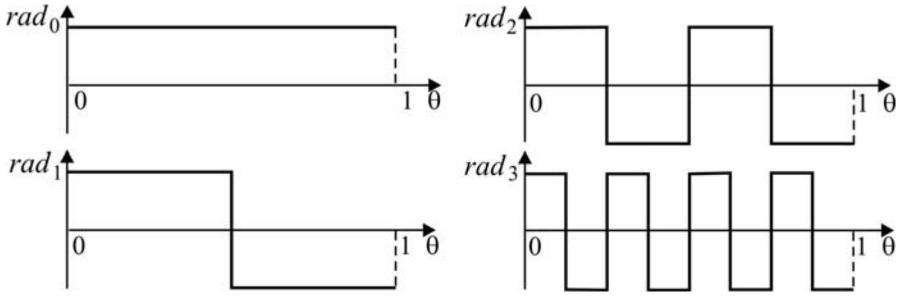


Рис. 4.1. Функции Радемахера

Функции Уолша формируются из функций Радемахера с помощью следующего соотношения:

$$wal_0(\theta) \equiv 1; \quad wal_n(\theta) = \prod_{k=1}^{m} [rad_k(\theta)]^{n_k}, \; n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где n – номер функции Уолша, n_k – значение (0 или 1) k-го разряда номера функции Уолша n, записанного в виде m-разрядного двоичного кода Грея. Отсюда легко видеть, что количество функций в системе Уолша оказывается равным $N = 2^m$, где m – целое число.

Последовательность образования функций Уолша может быть такой. Сначала записывается код номера n функции Уолша в двоичном коде. Затем этот номер представляется в коде Грея. Код Грея связан с обычным двоичным кодом следующим образом. Если в обычной двоичной системе счисления для данного номера имеем

$$n = a_{m-1}\, a_{n-2} \dots a_1\, a_0,$$

то в коде Грея это число записывается в виде

$$n = b_{m-1}\, b_{n-2} \dots b_1\, b_0,$$

где

$$b_0 = a_0 \oplus a_1, \;\; b_1 = a_1 \oplus a_2, \dots \;\; \dots, b_{m-2} = a_{m-2} \oplus a_{m-1}, b_{m-1} = a_{m-1}.$$

Здесь $\oplus$ – знак суммирования по модулю 2. При суммировании по модулю 2 имеем:

$$0 \oplus 0 = 0; \; 0 \oplus 1 = 1; \; 1 \oplus 0 = 1; \; 1 \oplus 1 = 0.$$

Например, пусть $n = 4$. В двоичном коде будем иметь $n = 100$, в коде Грея – $n = 110$. Функция Уолша запишется так:

$$wal_4(\theta) = [rad_3(\theta)]^1 \cdot [rad_2(\theta)]^1 \cdot [rad_1(\theta)]^0 = rad_3(\theta) \cdot rad_2(\theta).$$

Таким образом, функция Уолша $wal_4(\theta)$ представляет собой произведение функций Радемахера $rad_2(\theta)$ и $rad_3(\theta)$.

На рис. 4.2 представлены функции Уолша для $N = 8$.

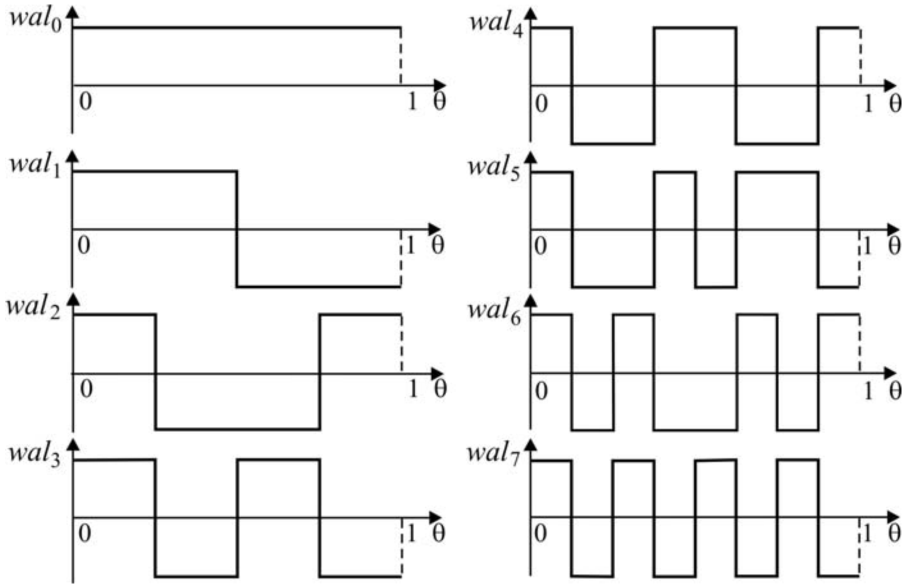


Рис. 4.2. Система Уолша, состоящая из $N = 2^3 = 8$ *функций*

Полученная система функций оказывается полной и ортогональной, поэтому она пригодна для разложения сигналов произвольного вида с конечным интервалом определения. Функции Уолша являются кусочно-постоянными. Интервал определения функций можно рассматривать состоящим из $N = 2^m$ равных подынтервалов. На каждом из них функции Уолша принимают значения +1 или –1. В точках разрыва функции непрерывны справа.

Функции Уолша ортогональны и нормированы, так как

$$\int_0^1 wal_n(\theta)\, wal_k(\theta)\, d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k. \end{cases}$$

Среднее значение функций Уолша для всех $n \neq 0$ равно нулю:

$$\int_0^1 wal_n(\theta)\, d\theta = 0, \quad n = 1, 2, ..., N-1.$$

Функции Уолша обладают свойством *мультипликативности*, то есть произведение двух функций Уолша равно новой функции Уолша из этой же системы:

$$wal_n(\theta) \cdot wal_k(\theta) = wal_p(\theta).$$

Умножение любой функции Уолша самой на себя дает функцию с нулевым номером $wal_0(\theta)$:

$$wal_n(\theta) \cdot wal_n(\theta) = wal_0(\theta).$$

4.3. Разложение сигналов по функциям Уолша

Для разложения сигналов, заданных на интервале $[0, T)$, удобно использовать функции Уолша, которые после преобразования их аргумента записываются в виде $wal_n(t/T)$.

Ряд Уолша одномерного сигнала $x(t)$, $t \in [0, T)$, будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \; wal_n\left(\frac{t}{T}\right),$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \, wal_n\left(\frac{t}{T}\right) d\,t\,.$$

Так как функции Уолша на интервалах дискретности принимают значения +1 или –1, при вычислении коэффициентов c_n не требуется производить операцию умножения. Поэтому спектральный анализ по Уолшу связан с меньшими затратами машинного времени, чем анализ с использованием гармонических функций.

Усеченные ряды Уолша

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \; wal_n\left(\frac{t}{T}\right)$$

обладают равномерной, среднеквадратической сходимостью и сходимостью в среднем и могут быть использованы для аппроксимации сигналов, описываемых интегрируемыми функциями. Графики функций $x_N^*(t)$ имеют ступенчатый характер.

4.4. Методические указания

Чтобы составить программу, пригодную для анализа функций на интервалах различной длительности, функции Уолша рекомендуется построить сначала на интервале $[0, 1)$ относительного времени. На этом интервале, учитывая разрывный характер функций, размещается не менее 1000 отсчетов. Функции Радемахера, описываемые формулой (4.1), можно сформировать, применив, условный оператор if. Например, для функции Радемахера $rad_3(t)$ получим

$$rad_3(t) = \mathrm{if}\,(\sin(8\pi t) > 0, 1, -1)\,.$$

Систему функций Радемахера рекомендуется записать в виде вектор-функции, составляющие которой есть функции Радемахера $rad_i(t)$, $i = 1, ..., m$.

Система функций Уолша может быть записана в виде вектор-функции, элементы которой являются функциями Уолша и выражены через функции Радемахера. Для удобства все функции рекомендуется записать относительного времени θ, изменяющегося в интервале $[0,1)$. Чтобы получить функции Уолша для заданного интервала $[0,T]$, в вектор-функции выполняется подстановка $t = t/T$. В приложении П.6 дан пример формирования таким способом системы функций Хаара.

4.5. Программа работы

1. Составить программу моделирования функций Уолша $wal_n(t)$, $t \in [0,T)$, $n = 0,1,...,N-1$, для $N = 16$. Пронаблюдать графики функций Уолша и проверить, что они сформированы правильно.

2. Убедиться в том, что функции Уолша удовлетворяют условию ортогональности. Для этого вычислить значения интегралов

$$\frac{1}{T}\int_0^T wal_n\left(\frac{t}{T}\right)\cdot wal_m\left(\frac{t}{T}\right)\cdot dt$$

при нескольких произвольных значениях $n = m$ и $n \neq m$ $(n,m = 0,1,...,N-1)$.

3.Сформировать в среде MathCAD заданную функцию $x(t)$, $t \in [0,T)$. Построить ее график.

Примечание. Сигнал $x(t)$ задается преподавателем или определяется из приложения П.1 согласно заданному варианту. Длительность сигнала выбирается произвольно: $T = T_{\text{c}} \neq 1$ с.

4. Рассчитать значения коэффициентов c_n, $n = 0,1,...,N-1$, разложения заданной функции $x(t)$ в базисе функций Уолша.

5. Составить программу вычисления функции

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot wal_n\left(\frac{t}{T}\right), \qquad t \in [0,T).$$

6. Построить спектральную диаграмму и сделать выводы о спектральном составе исследуемого сигнала $x(t)$.

7. Построить график ошибки аппроксимации

$$\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N^*(t).$$

Проанализировать характерные признаки ошибки аппроксимации.

8. Образовать аппроксимирующий сигнал $x_N^*(t)$ путем суммирования первых восьми членов ряда ($N = 8$). Построить график ошибки аппроксимации $\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N^*(t)$. Сделать выводы.

9. Рассчитать значения средней квадратической ошибки

$$\sigma^2 = \int_0^T [x(t) - x_N^*(t)]^2 dt$$

для $N = 8$ и $N = 16$. Сделать выводы.

4.6. Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключаются преимущества применения функций Уолша перед другими?

2. Запишите при помощи функций Радемахера функцию Уолша $wal_{21}(\theta)$.

3. Покажите, что функции Уолша ортогональны.

4. Покажите, что произведение любых двух функций Уолша является также функцией Уолша. Как это свойство называется?

5. Образуйте функцию $wal_2(\theta) \cdot wal_6(\theta)$. Определите номер функции Уолша, получившейся в результате данного действия.

6. Изучите графики функций Уолша на рис. 4.2 и найдите закономерность, которой подчинены значения функций на последнем интервале постоянства.

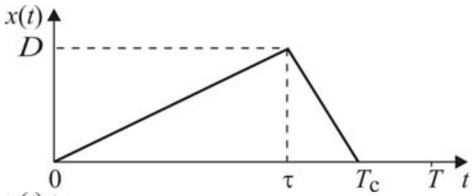
7. Назовите и поясните существующие способы упорядочения функций Уолша.

8. Укажите особенность функций Уолша, благодаря которой упрощается расчет коэффициентов ряда.

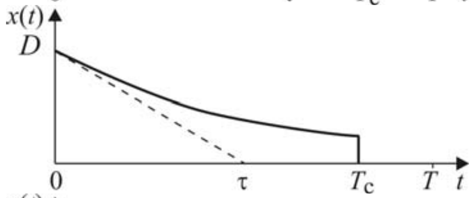
9. Как из системы дискретных функций Уолша для $N = 16$ образовать аналогичную систему для $N = 8$?

ПРИЛОЖЕНИЯ

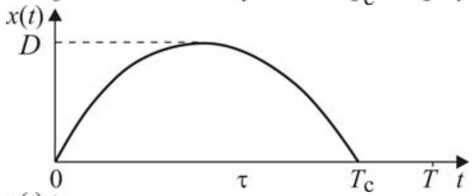
П.1. Варианты исследуемых функций



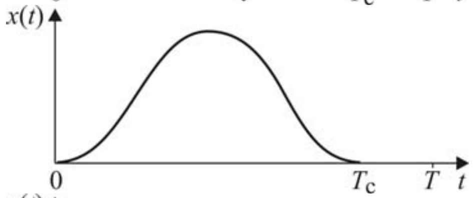
$$x(t)=\begin{cases}(D/\tau)\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le\tau\,,\\ D\cdot(t-T_{\text{c}})/(\tau-T_{\text{c}}) \text{ при } \tau\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



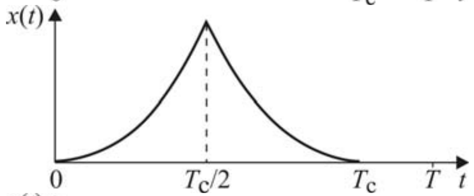
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\exp(-t/\tau) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



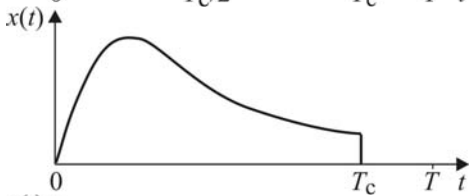
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{T_{\text{c}}}\cdot t\right) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



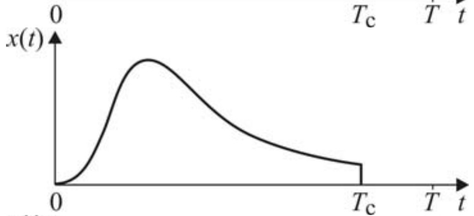
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{T_{\text{c}}}\cdot t\right) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



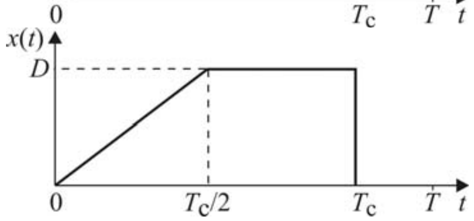
$$x(t)=\begin{cases}t^2 \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}/2\,,\\ (t-T_{\text{c}})^2 \quad \text{при } T_{\text{c}}/2\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}t\cdot\exp(-\alpha t) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}t^2\cdot\exp(-\alpha t) \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}2(D/T_{\text{c}})\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le T_{\text{c}}/2\,,\\ D \qquad \text{при } T_{\text{c}}/2\le t\le T_{\text{c}}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,*
профессор Г.С. Евтушенко

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.
Заказ 107-14. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru