

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

3. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

3.1. Цель работы

Вейвлет-преобразование, появившись в результате решения конкретной задачи, связанной с обработкой сейсмических сигналов, за короткий отрезок времени завоевало популярность и в настоящее время используется в качестве инструмента прикладных исследований во всех естественных науках и многих областях техники. Разработаны непрерывный и дискретный варианты вейвлет-преобразования. Непрерывное вейвлет-преобразование нашло широкое применение в таких задачах, связанных с обработкой сигналов, как распознавание сигналов, обработка биомедицинских данных, анализ сейсмической информации и т.д. Дискретное вейвлет-преобразование позволило создать эффективные алгоритмы сжатия изображений, которые, в частности, использованы в стандарте JPEG2000. Специальные пакеты расширения по вейвлетам включены в последние версии систем MathCAD и MATLAB.

Целью работы является знакомство с основными понятиями непрерывного вейвлет-анализа, сравнение спектров тестовых сигналов, полученных с помощью преобразования Фурье и вейвлет-преобразования.

3.2. Оконное преобразование Фурье

На протяжении многих десятилетий основным средством анализа реальных физических процессов, в том числе случайных, являлся гармонический анализ. Преобразование Фурье устанавливает факт наличия в сигнале гармонической составляющей определенной частоты, но не дает возможности определить интервал времени, на котором существует эта гармоническая составляющая.

Использование оконного преобразования Фурье является одним из способов получения информации о поведении спектра сигнала во времени. Формула прямого преобразования Фурье при этом записывается в следующем виде:

$$X(j\omega, b) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)w(t-b)e^{-i\omega t} dt,$$

где $w(t-b)$ – оконная функция, которая определена на интервале времени длительностью τ и равна нулю за пределами этого интервала.

Для того чтобы получить представление об изменении спектральной характеристики $X(j\omega, b)$ по времени, параметру сдвига b задают последовательно значения $0, \tau, 2\tau, \dots$. При этом оконная функция перемещается дискретно вдоль оси времени и получается набор спектральных характеристик, позволяющий судить об изменении спектра сигнала во времени. При выборе оконной функции используются критерии максимума энергии в окне или уменьшения уровня боковых составляющих в спектре.

3.3. Определение вейвлет-функции

Сам термин «вейвлет» ввели J. Morlet и A. Grossman в своей статье, опубликованной в 1984 г. Они занимались исследованиями сейсмических сигналов с помощью базиса, который назвали вейвлетом. Некоторые идеи теории вейвлетов были известны раньше. Например, А. Хаар разработал в 1909 г. систему базисных функций с локальной областью определения. Сегодня эти функции называют вейвлетами Хаара.

Вейвлет-преобразование имеет много общего с преобразованием Фурье. Отличие состоит в том, что в качестве базисных выбираются функции, хорошо локализованные во временной и частотной областях. Базисные функции (вейвлеты) создаются с помощью специальных функций – материнских вейвлетов $\psi(t)$, задающих их вид и свойства. Локализация функции $\psi(t)$ обеспечивается путём изменения масштаба и смещения в области времени.

На основе функции $\psi(t)$ строится двухпараметрическое семейство вейвлет-функций

$$\psi(t, a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (3.1)$$

Они образуются из материнского (исходного) вейвлета $\psi(t)$ за счёт сдвига во времени на величину b и изменения масштаба по времени с коэффициентом a . Множитель $1/\sqrt{a}$ обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа a .

В табл. 1.1 приведены некоторые материнские вейвлеты (вейвлетообразующие функции): вейвлеты МНАТ и DOG, относящиеся к группе вещественных непрерывных вейвлетов и вейвлет Морле, относящийся к комплексным вейвлетам.

Материнские вейвлеты

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная характеристика $\Psi(\omega)$
МНАТ «мексиканская шляпа»	$(1-t^2)e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}(j\omega)^2 e^{-\omega^2/2}$
DOG (Difference of Gaussians)	$e^{-t^2/2} - \frac{1}{2}e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}(e^{-\omega^2/2} - e^{-\omega^2/8})$
Морле (Morlet)	$e^{j\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\sigma(\omega)e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$

На рис. 3.1 и 3.2 показаны временные и частотные характеристики вейвлетов МНАТ – «мексиканская шляпа» и DOG (Difference of Gaussians).

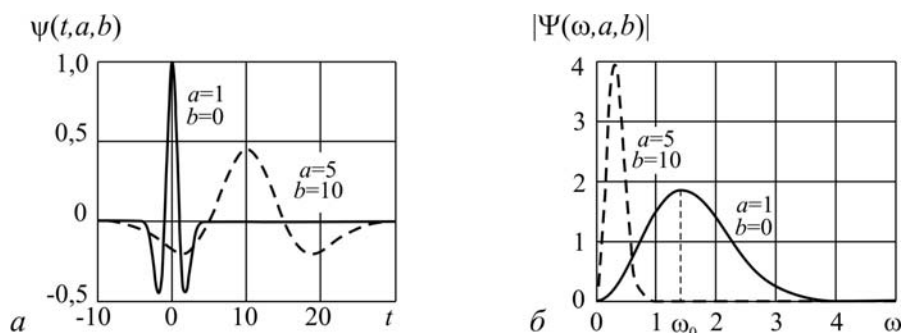


Рис. 3.1. Характеристики вейвлета МНАТ – «мексиканская шляпа»: а – вейвлет; б – амплитудная спектральная характеристика

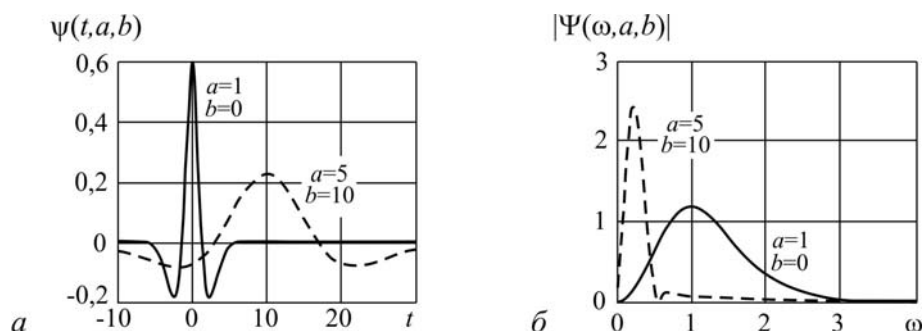


Рис. 3.2. Характеристики вейвлета DOG (Difference of Gaussians): а – вейвлет; б – амплитудная спектральная характеристика

Как видно из графиков, вейвлеты локализованы как во временной, так и частотной областях.

Чтобы функцию $\psi(t)$ можно было рассматривать в качестве вейвлета, она должна обладать следующими свойствами:

Автомодельность. Все вейвлеты $\psi(t, a, b)$ семейства имеют то же число колебаний, что и материнский вейвлет $\Psi(t)$, так как получены из него при помощи масштабных преобразований и сдвига.

Ограниченность. Квадрат нормы функции должен быть конечным:

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

Локализация. Функция должна быть локализована во времени и по частоте. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$|\psi(t)| \leq \frac{C}{(1+|t|)^\alpha}, \quad |\Psi(\omega)| \leq \frac{C}{(1+|\omega|)^\alpha}.$$

Например, дельта-функция $\delta(t)$ и гармоническая функция не удовлетворяют необходимому условию одновременной локализации во временной и частотной областях.

Нулевое среднее. Среднее значение вейвлет-функции должно быть равно нулю:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

3.4. Вейвлет-преобразование

В общем случае формула прямого вейвлет-преобразования функции $x(t)$ записывается в виде

$$W_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi(t, a, b) dt.$$

С учетом (3.1) эту формулу записывают так:

$$W_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Функция $W_x(a, b)$ называется вейвлет-спектром. В отличие от спектральной характеристики, полученной с помощью преобразования Фурье, вейвлет-спектр является функцией двух аргументов. Он отображается в виде поверхности в трехмерном пространстве и называется вейвлет-спектрограммой. Для отображения вейвлет-спектра используют либо поверхность $W_x(a, b)$, либо ее проекцию на плоскость (a, b) в виде линий уровня, либо картину уровней локальных экстремумов этой поверхности, называемую скелетоном (skeleton).

Обратное вейвлет-преобразование определяется так:

$$x(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(a,b) \psi(t,a,b) da db, \quad (3.2)$$

где нормирующий коэффициент равен

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Здесь $\Psi(j\omega)$ – спектральная характеристика вейвлета $\psi(t)$.

Математический аппарат вейвлет-анализа к настоящему времени хорошо разработан. Однако выбор вейвлета, наиболее подходящего для анализа конкретного сигнала или последовательности, представляет собой скорее искусство, чем формализованную процедуру.

3.3. Методические указания

Для того чтобы изучить основные отличия между гармоническим анализом и вейвлет-анализом, в лабораторной работе предлагается построить спектральные характеристики и вейвлет-спектрограммы тестовых сигналов, описываемых функциями:

$$x_1(t) = \begin{cases} D_1 \sin(2\pi/T_1), & 0 \leq t \leq 10T_1; \\ D_2 \sin(2\pi/T_2), & 10T_1 \leq t \leq 20T_1. \end{cases}$$

$$x_2(t) = D_1 \sin(2\pi/T_1) + D_2 \sin(2\pi/T_2).$$

Для анализа данных сигналов в лабораторной работе используются рассмотренные выше вейвлеты МНАТ и DOG. Для построения вейвлет-функций необходимо определить пределы изменения параметров a , b и интервалы их дискретизации. Чёткие рекомендации по выбору указанных параметров дать трудно. Обычно они подбираются в процессе анализа с учётом сохранения возможности восстановления сигнала из его вейвлет-спектрограммы.

Ниже показан пример формирования вейвлетов

$$\theta := -5, -4.9 \dots 5 \quad \text{МНАТ}(\theta) := (1 - \theta^2) \cdot \exp\left(\frac{-\theta^2}{2}\right)$$

$$a := 1 \dots 20 \quad b := 0 \dots 40 \quad \Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a \cdot 5}} \cdot \text{МНАТ}\left(\frac{t - b \cdot 2}{a \cdot 5}\right)$$

Для построения вейвлет-спектрограмм используется компонента 3DPlot в режиме Surface Plot.

3.4. Программа работы

1. Записать в среде MathCAD функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, описывающие заданные сигналы. Построить графики сигналов на заданном интервале.

Примечание. Параметры D_1, D_2, T_1 и T_2 сигналов задаются преподавателем.

2. С помощью преобразования Фурье получить амплитудные $X_1(\omega) = |X_1(j\omega)|$, $X_2(\omega) = |X_2(j\omega)|$ и фазовые $\varphi_1(\omega) = \arg[X_1(j\omega)]$, $\varphi_2(\omega) = \arg[X_2(j\omega)]$ спектральные характеристики сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Построить соответствующие спектральные характеристики сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на одном графике.

3. Записать в среде MathCAD формулы для материнского вейвлета $\psi(t)$ и вейвлетов $\psi(t, a, b)$. Построить графики вейвлетов для ряда значений a, b .

Примечание. Вариант вейвлета (МНАТ или DOG) задаётся преподавателем.

4. Построить вектор-спектрограммы сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в виде поверхности с использованием 3-D графики. Сравнить вектор-спектрограммы сигналов и сделать выводы.

3.5. Контрольные вопросы и задания

1. Поясните принцип формирования вейвлетов.
2. Какими свойствами должна обладать функция, чтобы её можно было использовать в качестве вейвлета?
3. В чем преимущество вейвлетов перед рядами Фурье?
4. Объясните основные отличия вейвлет-преобразования от оконного преобразования Фурье?
5. Какие варианты визуализации результатов вейвлет-анализа используются на практике?
6. Назовите области применения вейвлетов.

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.

Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru