МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73
В12

Вадутов О.С.

В12 Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. − 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)
ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР
В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,
профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики
ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России
В.А. Фокин

2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

2.1. Цель работы

Большинство сигналов, подвергающихся обработке, имеет непериодический характер. Особенностью гармонического анализа непериодических сигналов является то, что связь между временной функцией $x(t)$ и ее образом $X(j\omega)$ в области частот определяется интегральными соотношениями, составляющими пару преобразований Фурье.

Целью работы является изучение прямого и обратного преобразований Фурье и приобретение практических навыков их использования для расчета спектральной характеристики $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$ и восстановления функции $x(t)$ по спектральной характеристике $X(j\omega)$.

2.2. Основные понятия и расчетные формулы

Пусть сигнал описывается функцией времени $x(t)$, заданной на интервале (t_1, t_2) (рис. 2.1, *а*). Для функции выполняется условие абсолютной интегрируемости

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\,dt = M < \infty .$$

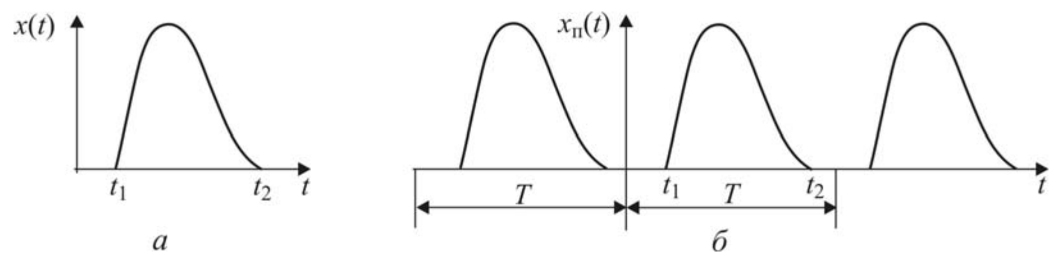


Рис. 2.1. Образование вспомогательной периодической функции: а – непериодическая функция; б – периодическая функция

Путем повторения функции $x(t)$ с периодом $T > t_2 - t_1$ образуем вспомогательную периодическую функцию

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT) .$$

Фрагмент функции $x_{\text{п}}(t)$ показан на рис. 2.1, *б*. Очевидно, что

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_{\text{п}}(t).$$

Периодическую функцию $x_{\text{п}}(t)$ можно описать с помощью ряда Фурье в комплексной форме:

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jn\omega_1 t}, \tag{2.1}$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$, а коэффициенты c_n рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} x_{\text{п}}(t)\, e^{-jn\omega_1 t}\, dt. \tag{2.2}$$

Подставив (2.2) в (2.1) и заменив $T = 2\pi/\omega_1$, получим

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} x_{\text{п}}(\tau)\, e^{-jn\omega_1 t}\, d\tau\right] e^{jn\omega_1 t}\,\omega_1 \tag{2.3}$$

В пределе при $T\to\infty$ угловая частота $\omega_1 = 2\pi/T$ превращается в бесконечно малое приращение частоты $d\omega$, частота n-ой составляющей ряда $n\omega_1$ – в текущую частоту ω, а операция суммирования переходит в операцию интегрирования. При этом расстояние между спектральными линиями, равное основной частоте ω_1, становится бесконечно малым, а спектр – сплошным.

Таким образом, при $T\to\infty$ из формулы (2.3) будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[\int_{t_1}^{t_2} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right] d\omega.$$

С учетом, что значения t_1 и t_2 не определены, введем обозначение

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{2.4}$$

Тогда

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{2.5}$$

Формулы (2.4) и (2.5) устанавливают однозначное соответствие между представлением $x(t)$ сигнала во временной области и его представлением $X(j\omega)$ в области частот. Формула (2.4) осуществляет прямое преобразование и позволяет найти спектральную характеристику $X(j\omega)$, соответствующую сигналу $x(t)$. Символически это записывается следующим образом:

$$X(j\omega) = \Im\{x(t)\}.$$

При известной спектральной характеристике $X(j\omega)$ по формуле (2.5) выполняется обратное преобразование и вычисляется мгновенное значение сигнала $x(t)$. Символически это можно записать так:

$$x(t) = \mathfrak{I}^{-1}\{X(j\omega)\}.$$

Установлено, что сигналу $x(t)$ можно сопоставить его спектральную характеристику $X(j\omega)$ в том случае, если этот сигнал описывается абсолютно интегрируемой функцией, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty.$$

Это условие существенно снижает класс допустимых сигналов. Однако имеются математические приемы, с помощью которых удается получать спектральные характеристики неинтегрируемых сигналов. Эти спектральные характеристики являются обобщенными функциями.

Спектральную характеристику $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$, использовав известную формулу Эйлера, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= X(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t \cdot dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t \cdot dt = a(\omega) - jb(\omega). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Действительная часть

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \cos\omega t \cdot dt \tag{2.7}$$

спектральной характеристики является четной функцией частоты, а мнимая часть

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \sin\omega t \cdot dt \tag{2.8}$$

– нечетной функцией частоты. Отсюда следует, что модуль спектральной характеристики

$$X(\omega) = |X(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

является четной функцией частоты, а аргумент спектральной характеристики

$$\varphi(\omega) = \arg X(j\omega) = \arg[a(\omega) - jb(\omega)]$$

– нечетной функцией частоты.

Спектральную характеристику $X(j\omega)$ можно изобразить на комплексной плоскости в виде годографа (рис. 2.2, *а*). Чаще же спектральную характеристику $X(j\omega)$ представляют в виде амплитудно-частотной $X(\omega)$ и фазо-частотной $\varphi(\omega)$ спектральных характеристик (рис. 2.2, *б, в*). Учитывая симметричность спектральных характеристик при положительных и отрицательных значениях частоты ω, как правило, их строят только в интервале положительных значений частоты ω.

Формула (2.5) обратного преобразования Фурье предполагает интегрирование комплексных функций и поэтому не всегда удобна для непосредственных вычислений. При помощи формулы Эйлера и выражения (2.6) формулу обратного преобразования можно привести к следующему виду:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [\, a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]\, d\omega. \tag{2.9}$$

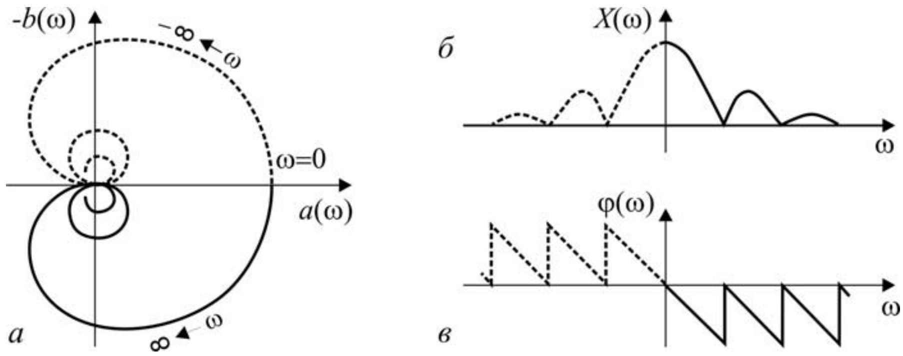


Рис. 2.2. Спектральные характеристики:
а – годограф; б – амплитудная; в – фазовая

Энергия сигнала равна

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, d\,t\,.$$

С помощью формулы Парсеваля энергию сигнала можно выразить через его спектральную характеристику:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, d\,t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\, X(j\,\omega)|^2\, d\,\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |\, X(j\,\omega)|^2\, d\,\omega\,. \tag{2.10}$$

2.3. Методические указания

Программа работы предусматривает определение спектральной характеристики заданного сигнала $x(t)$ с помощью формул прямого преобразования Фурье и восстановление сигнала по спектральной характеристике с помощью формулы обратного преобразования Фурье.

Предлагаемый для исследования сигнал представляет собой одиночный импульс, заданный на интервале времени $[0, T_c]$ (см. приложение П.1). Его спектральная характеристика вычисляется по формуле (2.4), либо по формулам (2.7), (2.8), в которых нижний и верхний пределы интегрирования принимаются соответственно равными 0 и T_c. Для достижения необходимой точности вычисления спектральной характеристики на интервале $[0, T_c]$ определения сигнала берется не менее 50 отсчетов заданного сигнала. Правая граница частотного интервала $[0, \omega_c]$, на котором рассчитывается спектральная характеристика, подбирается так, чтобы амплитуды отбрасываемых гармонических составляющих не превышали 5% от максимального значения.

Для восстановления сигнала $x(t)$ по его спектральной характеристике $X(j\omega)$ используется формула (2.9) обратного преобразования Фурье. Точное восстановление заданного сигнала согласно формуле (2.9) требует интегрирования на полубесконечном интервале $[0, \infty)$. На практике интегрирование осуществляют на ограниченном интервале $[0, \omega_c]$, вследствие чего появляется ошибка восстановления. Чем больше ω_c, тем меньше ошибка.

Оценка энергии сигнала рассчитывается по формуле

$$E_x^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} |X(j\omega)|^2 \, d\omega.$$

2.4. Программа работы

1. Сформировать в среде MathCAD математическую модель $x(t)$ сигнала, представляющего собой импульс заданной формы.

Примечание: Форма и параметры импульса задаются преподавателем (возможные варианты сигналов приведены в приложении П.1).

2. Составить программу вычисления спектральной характеристики $X(j\omega)$ данного сигнала $x(t)$ по формулам прямого преобразования Фурье. Выбрать интервал $[0, \omega_c]$. Построить амплитудную $X(\omega)$ и фазовую $\varphi(\omega)$ спектральные характеристики.

3. Составить программу восстановления сигнала $x(t)$ по полученной спектральной характеристике $X(j\omega)$ с помощью формулы обратного преобразования Фурье. Построить графики исходного $x(t)$ и восстановленного $x_в(t)$ сигналов. Сравнить их между собой и сделать качественные выводы по результатам восстановления.

4. Изменить интервал интегрирования $[0, \omega_c]$ и повторить процедуру восстановления. Сравнить с результатами, полученными в п. 3.

5. Определить энергию сигнала

$$E_x = \int_0^{T_c} x^2(t)\, dt .$$

6. Рассчитать оценку энергии сигнала с помощью амплитудной спектральной характеристики при различных значениях ω_c. Сравнить рассчитанные значения со значением, полученным в п. 5. Сделать выводы.

2.5. Контрольные вопросы и задания

1. Поясните отличие между понятиями ряда и интеграла Фурье.

2. При каких условиях можно пользоваться формулой прямого преобразования Фурье?

3. Справедлив ли принцип суперпозиции для преобразования Фурье?

4. Дана функция $x(t) = \delta(t+\tau) + \delta(t-\tau)$. Запишите формулу для спектральной характеристики $X(j\omega)$.

5. Поясните отличие между односторонним и двусторонним преобразованиями Фурье.

6. Назовите особенности спектральных характеристик сигналов, описываемых нечетной и четной функциями.

7. Какая связь существует между спектром одиночного импульса и спектром периодического сигнала, образованного из таких импульсов?

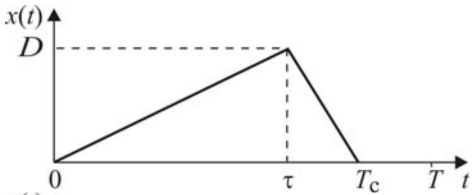
8. Пусть $X(j\omega) = \Im\{x(t)\}$. Запишите формулу для спектральной характеристики $Y(j\omega)$ сигнала $y(t) = k \cdot x(t-\tau)$, если $\tau = \text{const}$.

9. Что происходит со спектральной характеристикой при сжатии (растяжении) сигнала?

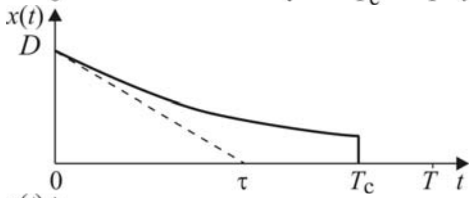
10. Как при помощи преобразования Фурье вычислить энергию сигнала?

ПРИЛОЖЕНИЯ

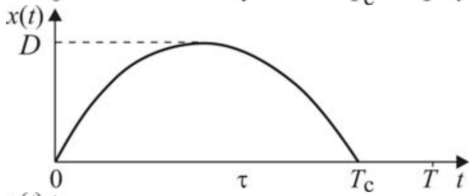
П.1. Варианты исследуемых функций



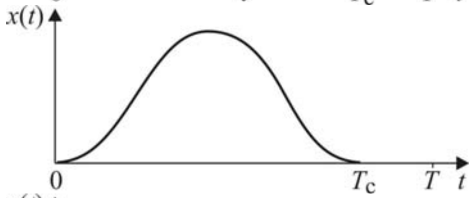
$$x(t)=\begin{cases}(D/\tau)\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le \tau\,,\\ D\cdot(t-T_\text{c})/(\tau-T_\text{c}) \ \text{при } \tau\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



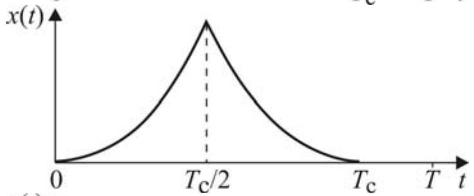
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\exp(-t/\tau) \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



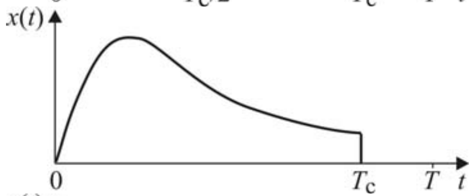
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{T_\text{c}}\cdot t\right) \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



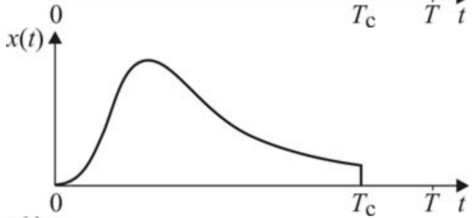
$$x(t)=\begin{cases}D\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{T_\text{c}}\cdot t\right) \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



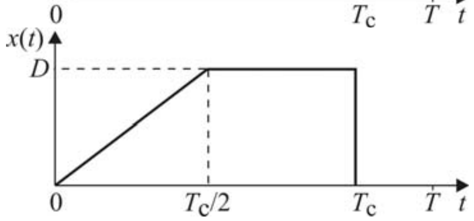
$$x(t)=\begin{cases}t^2 \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}/2\,,\\ (t-T_\text{c})^2 \ \text{при } T_\text{c}/2\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}t\cdot\exp(-\alpha\, t) \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}t^2\cdot\exp(-\alpha\, t) \ \text{при } 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases}2(D/T_\text{c})\cdot t \ \text{при } 0\le t\le T_\text{c}/2\,,\\ D \qquad \text{при } T_\text{c}/2\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук, профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.
Заказ 107-14. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru