

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Практикум

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

3-е издание, исправл. и дополн.

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – 3-е изд., испр. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 102 с.

Практикум содержит четырнадцать работ по спектральному анализу и цифровой обработке сигналов. По всем работам приводится необходимый теоретический материал, методические указания, программа работы и контрольные вопросы. Все работы выполняются на персональном компьютере в среде программирования MathCAD.

Практикум подготовлен на кафедре промышленной и медицинской электроники и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и наноэлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой ТОЭ ТУСУР

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук,

профессор кафедры медицинской и биологической кибернетики

ГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Вадутов О.С., 2014

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1.1. Цель работы

В настоящее время при формировании математической модели сигнала наибольшее распространение получила система, в которой базис образуют ортогональные гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Это объясняется тем, что гармоническая функция является единственной, которая сохраняет свою форму при прохождении через линейную электрическую цепь. Представление произвольного сигнала в виде суммы гармонических колебаний называют *спектральным разложением* этого сигнала в базисе гармонических функций, или *гармоническим анализом* сигнала.

Целью работы является определение коэффициентов ряда Фурье и построение аппроксимирующей функции для периодического сигнала, образованного из импульсов заданной формы.

1.2. Основные понятия и расчетные формулы

Пусть исследуемый сигнал описывается периодической функцией времени $x(t)$, которая в пределах периода T ее изменения удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда функцию $x(t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right], \quad (1.1)$$

коэффициенты которого определяются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt; \quad (1.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt; \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt. \quad (1.4)$$

Таким образом, в общем случае периодический сигнал $x(t)$ содержит в себе не зависящую от времени постоянную составляющую $a_0/2$ и бесконечный набор гармонических составляющих с частотами $\omega_n = n 2\pi/T$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), кратными *основной* частоте $\omega_1 = 2\pi/T$ периодического сигнала.

Распространена и другая форма записи ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right), \quad (1.5)$$

где амплитуды A_n и фазы φ_n гармонических составляющих вычисляют по формулам:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \arg(a_n - jb_n).$$

Гармоническую составляющую

$$x_1(t) = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right)$$

называют *основной гармоникой*, а гармоническую составляющую

$$x_n(t) = A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right)$$

– n -й гармоникой.

Совокупности величин A_n и φ_n ($n = 1, 2, \dots$) называют соответственно *амплитудным* и *фазовым* частотными спектрами сигнала или, иначе, спектром амплитуд и спектром фаз. Частотные спектры являются функциями, зависящими от номера гармоники n как независимой переменной. Графически частотные спектры изображают в виде отрезков A_n и φ_n , проведенных перпендикулярно к оси, на которую наносятся значения $\omega = n \omega_1$ (рис. 1.1). Графическое изображение амплитудного и фазового частотных спектров принято называть *амплитудной* и *фазовой спектральными диаграммами*.

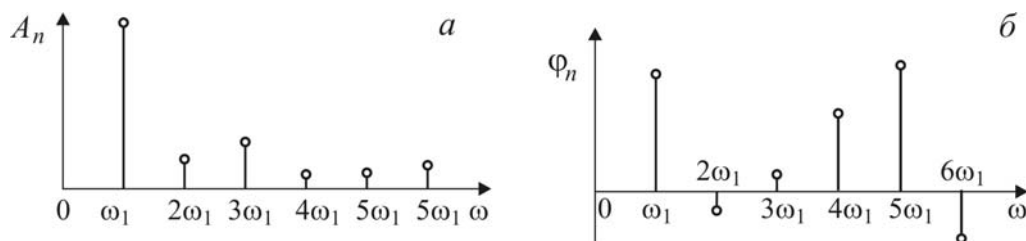


Рис. 1.1. Амплитудная и фазовая спектральные диаграммы

Ряд Фурье обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратической погрешности приближение к исходной функции. Это означает, что если число членов ряда Фурье ограничено и исходный сигнал $x(t)$ аппроксимирован функцией

$$x_N^*(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right),$$

то наименьшая средняя квадратическая ошибка

$$\sigma^2 = \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t) - x_N^*(t)]^2 dt \quad (1.6)$$

имеет место в том случае, когда коэффициенты ряда Фурье определены по формулам (1.2)–(1.4).

При увеличении числа членов ряда Фурье до бесконечности средняя квадратическая ошибка σ^2 стремится к нулю. Однако это вовсе не означает, что ряд точно стремится к функции при любом значении времени t . Например, если функция $x(t)$ имеет разрыв в точке t_1 , то есть

$$x(t_1 - 0) \neq x(t_1 + 0),$$

то ряд Фурье в этой точке, согласно теореме Дирихле, сходится к среднеарифметическому значению:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N^*(t_1) = \frac{x(t_1 - 0) + x(t_1 + 0)}{2}.$$

Таким образом, сходимость ряда Фурье во многом зависит от аналитических свойств разлагаемой функции. Более гладкой функции $x(t)$ соответствует лучшая сходимость ее ряда Фурье.

Средняя мощность периодического сигнала

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (1.7)$$

если известен амплитудный спектр сигнала, может быть рассчитана, согласно теореме Парсеваля, по формуле

$$P_{\text{cp}} = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Для сигнала, описываемого усеченным рядом Фурье, можно найти приближенное значение средней мощности

$$P_{\text{cp}}^* = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2. \quad (1.8)$$

1.3. Методические указания

В настоящей работе проводится гармонический анализ периодического сигнала, образованного из импульсов заданной формы (см. приложение П.1). На рис. 1.2 для примера изображен график сигнала, полученного из периодическим повторением одиночных импульсов.

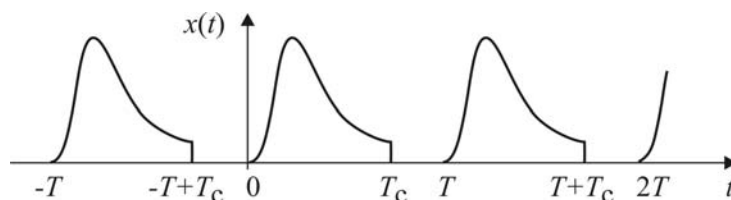


Рис. 1.2. Пример периодического сигнала

При расчете коэффициентов ряда Фурье требуется задать начальный момент t_0 периода интегрирования в формулах (1.2)–(1.4). Как правило, значение t_0 выбирают из условия упрощения вычислений. Для исследуемых в работе сигналов рекомендуем принять $t_0 = 0$. При этом нижний и верхний пределы интегрирования в формулах (1.2)–(1.4) будут соответственно равны 0 и T_c .

Обращаем внимание на то, что стандартная функция $\operatorname{arctg} x$ в системе программирования MatchCAD определяет главные значения, ограниченные пределами:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому, если при определении фазы гармоники использовать рекомендуемую в литературе формулу

$$\varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n},$$

можно получить неверные результаты.

Чтобы получить правильные результаты при использовании функции $\operatorname{arctg} x$, следует учесть знаки коэффициентов a_n, b_n и внести необходимые поправки в расчетные формулы.

При выполнении работы предлагаем использовать имеющуюся в системе MatchCAD функцию

$$\varphi_n = \arg(a_n - jb_n),$$

которая определяет значения φ_n от $-\pi$ до π .

1.4. Программа работы

1. Получить аналитические выражения для коэффициентов a_0 , a_n , b_n разложения в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. 1.3). Рассчитать значения A_n , φ_n первых пяти гармоник для произвольных τ , T .

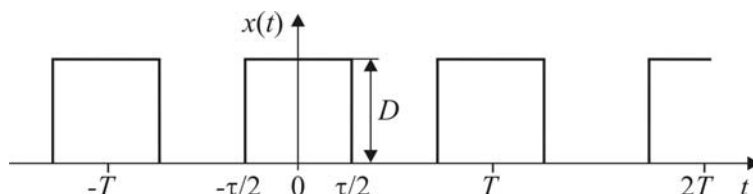


Рис. 1.3. Последовательность прямоугольных импульсов

Примечание: Даны пункт программы выполняется при подготовке к лабораторному занятию.

2. Сформировать в среде MathCAD математическую модель периодического сигнала $x(t)$, заданного для анализа в данной лабораторной работе. Построить график сигнала.

Примечание: Форма исследуемого сигнала и значения параметров сигнала задаются преподавателем (возможные варианты сигналов приведены в приложении П.1).

3. Составить программу для расчета коэффициентов a_n , b_n , A_n , φ_n ($n = 0, 1, \dots, 20$) ряда Фурье для сигнала $x(t)$. Рассчитать значения этих коэффициентов. По полученным данным построить амплитудный и фазовый спектральные диаграммы.

4. Образовать аппроксимирующий сигнал $x_N^*(t)$ путем суммирования постоянной составляющей и заданного числа N первых гармоник. Построить на одном рисунке графики исходного $x(t)$ и аппроксимирующего $x_N^*(t)$ сигналов для $N = 5$, $N = 10$ и $N = 20$. Сделать выводы.

5. Построить графики сигналов ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - x_N^*(t)$ для $N = 5$, $N = 10$ и $N = 20$.

6. По формуле (1.6) рассчитать значения средней квадратической ошибки для $N = 5$, $N = 10$ и $N = 20$. Сделать выводы о влиянии количества учитываемых гармоник на величину средней квадратической ошибки.

7. По формуле (1.7) рассчитать среднюю мощность исследуемого сигнала. По формуле (1.8) рассчитать среднюю мощность периодического сигнала, описываемого усеченным рядом Фурье, для $N = 5$,

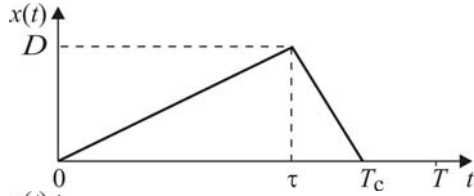
$N = 10$ и $N = 20$. Сделать выводы о влиянии количества учитываемых гармоник на величину средней мощности сигнала.

1.5. Контрольные вопросы и задания

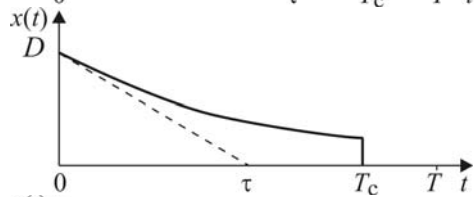
1. Опишите основные свойства периодических сигналов.
2. Изобразите графики нескольких первых базисных функций ряда Фурье.
3. Поясните особенности разложения нечетных и четных функций в ряд Фурье.
4. Запишите формулы, связывающие коэффициенты тригонометрического и комплексного рядов Фурье.
5. Как отразится изменение положения отсчета времени $t = 0$ периодического сигнала на значениях A_n и φ_n ряда Фурье?
6. Как изменится спектр периодического сигнала, если изменить масштаб по оси времени?
7. Как изменится спектр последовательности прямоугольных импульсов, если уменьшить длительность τ и период T импульсов в два раза?
8. Почему разрывные функции не могут иметь точного приближения рядами Фурье?
9. В чем состоит эффект Гиббса?

ПРИЛОЖЕНИЯ

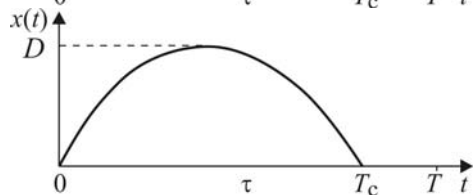
П.1. Варианты исследуемых функций



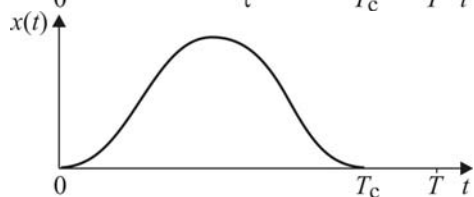
$$x(t) = \begin{cases} (D/\tau) \cdot t & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ D \cdot (t - T_c) / (\tau - T_c) & \text{при } \tau \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$



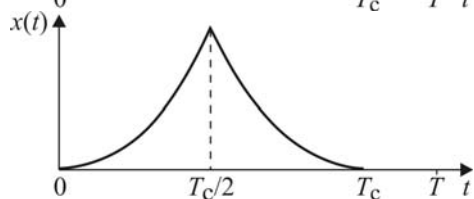
$$x(t) = \begin{cases} D \cdot \exp(-t/\tau) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$



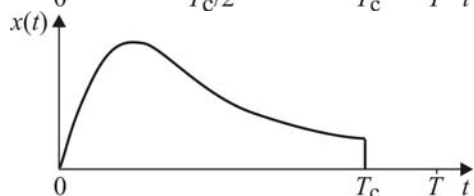
$$x(t) = \begin{cases} D \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T_c} \cdot t\right) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$



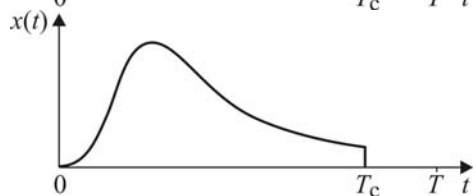
$$x(t) = \begin{cases} D \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{T_c} \cdot t\right) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$



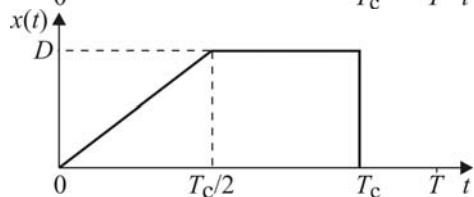
$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } 0 \leq t \leq T_c/2, \\ (t - T_c)^2 & \text{при } T_c/2 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} t \cdot \exp(-\alpha t) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} t^2 \cdot \exp(-\alpha t) & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} 2(D/T_c) \cdot t & \text{при } 0 \leq t \leq T_c/2, \\ D & \text{при } T_c/2 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Практикум

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*

Компьютерная верстка *О.С. Вадутов, В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 24.02.2014. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,93. Уч.-изд.л. 5,36.

Заказ 107-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru