

Тема 9. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Функциональная схема цифровых фильтров. – Классификация ЦФ. – Каузальные и некаузальные ЦФ. – Линейные рекурсивные и нерекурсивные ЦФ. – БИХ-фильтры и КИХ-фильтры. – Рекурсивные цифровые фильтры первого порядка. – Рекурсивные цифровые фильтры второго порядка. – Расчет рекурсивных цифровых фильтров по аналоговому прототипу. – Структурные схемы рекурсивных цифровых фильтров. – Нерекурсивные цифровые фильтры и их свойства. – Нерекурсивные цифровые фильтры с линейной ФЧХ. – Расчет нерекурсивных цифровых фильтров при помощи усредняющих окон.

9.1. Функциональная схема цифровых фильтров

Рассмотрим упрощенную функциональную схему цифрового фильтра (рис. 9.1,а). Непрерывный сигнал $x(t)$ поступает на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП), который фиксирует значения $x(n)$ сигнала в дискретные моменты времени $t = nT$, $n = 0, 1, \dots$ и преобразует их в цифровой код в виде двоичного числа. Последовательность $x(n)$ поступает в процессор, состоящий из арифметического устройства (АУ) и памяти (П). В процессоре осуществляется преобразование последовательности $x(n)$ в соответствии с определенным алгоритмом. В результате на его выходе образуется последовательность $y(n)$.

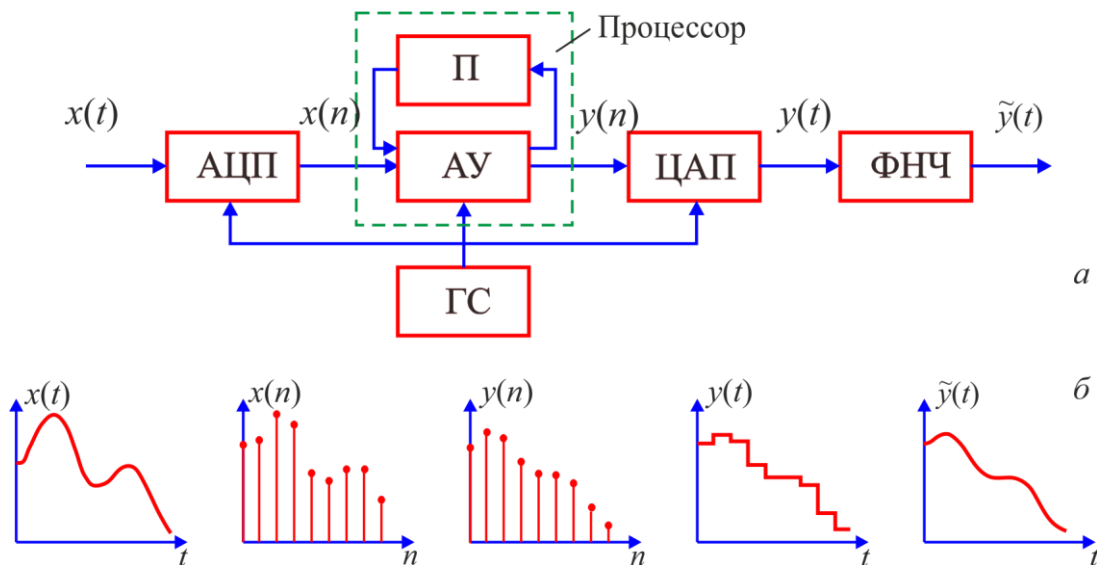


Рис.9.1. Функциональная схема цифрового фильтра

Последовательность $y(n)$ поступает на цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), в котором текущее значение $y(n)$, представленное в цифровом виде, преобразуется в постоянное напряжение, удерживаемое в течение соответствующего интервала дискретности. На выходе ЦАП формируется непрерывный сигнал $y(t)$ в виде ступенчатой функции (рис. 9.1,б). С помощью фильтра нижних частот (ФНЧ) устраняются высокочастотные колебания, и выходной сигнал $\tilde{y}(t)$ цифрового фильтра приобретает сглаженный вид.

9.2. Классификация цифровых фильтров

Каузальные и некаузальные ЦФ

С точки зрения физической реализуемости ЦФ делятся на каузальные и некаузальные.

Каузальным (от лат. слова *causal* – причинный) или физически реализуемым называется фильтр, у которого реакция в данный момент времени не зависит от значений входного воздействия в последующие моменты. Импульсная характеристика каузального фильтра удовлетворяет условию $h(n) = 0$ при $n < 0$, которое означает, что реакция фильтра не может предшествовать приложенному воздействию.

Например, фильтр, описываемый разностным уравнением

$$y(n) = 0,8y(n-1) + 0,2x(n),$$

удовлетворяет приведенному выше определению и, следовательно, является каузальным. Его импульсная характеристика

$$h(n) = Z^{-1} \left\{ \frac{0,2z}{z-0,8} \right\} = 0,2 \cdot (0,8)^n, \quad n > 0.$$

Некаузальный фильтр – это фильтр, у которого реакция в данный момент времени зависит от значений входного воздействия в последующие моменты. Например, фильтр, осуществляющий сглаживание скользящим усреднением по трем значениям, описывается разностным уравнением

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n-1) + x(n) + x(n+1)].$$

Такой фильтр нельзя физически реализовать в режиме реального времени, так при вычислении очередного значения $y(n)$ необходимо знать будущее значение $x(n+1)$ входного воздействия. Импульсная характеристика фильтра определяется выражением

$$h(n) = \frac{1}{3} [\delta(n-1) + \delta(n) + \delta(n+1)].$$

Некаузальные фильтры можно использовать на практике в тех случаях, когда процедура фильтрации происходит не в реальном времени, а выполняется над хранящимися в памяти последовательностями конечной длины.

Линейные рекурсивные и нерекурсивные ЦФ

В зависимости от вида разностного уравнения, описывающего работу цифрового фильтра, последние делятся на рекурсивные и нерекурсивные.

Для линейных рекурсивных фильтров связь между входной последовательностью $x(n)$ и реакцией фильтра $y(n)$ записывается в виде разностного уравнения

$$y(n) = - \sum_{v=1}^N a_{N-v} y(n-v) + \sum_{\mu=0}^M b_{M-\mu} x(n-\mu). \quad (9.1)$$

Согласно уравнению текущий отсчет $y(n)$ реакции фильтра определяется текущим значением входной последовательности $x(n)$ и предшествующими значениями входной и выходной последовательностей.

Линейные нерекурсивные фильтры описываются разностным уравнением следующего вида:

$$y(n) = \sum_{v=1-N}^{N-1} c_v x(n-v), \quad (9.2)$$

где c_v – постоянные коэффициенты. Из этого уравнения видно, что нерекурсивные цифровые фильтры производят взвешенное суммирование элементов входной последовательности $x(n)$. Фильтр, описываемый уравнением (9.2), является некаузальным, так как при определении текущего значения $y(n)$ предполагается использование будущих значений входной величины $x(n+1), \dots, x(n+N-1)$. Каузальный нерекурсивный фильтр описывается уравнением

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} c_v x(n-v). \quad (9.3)$$

В табл. 9.1 представлены различные факторы, которые должны быть рассмотрены при выборе типа фильтра.

Таблица 9.1

Фактор	Рекурсивный фильтр	Нерекурсивный фильтр
ФЧХ	Плохо управляется	Может быть линейной
Устойчивость	Могут быть неустойчивыми	Всегда устойчивы
Автоколебания	Могут быть	Отсутствуют
Порядок	Меньше	Больше
Аналоговый прототип	Имеется	Отсутствует

ЦФ с конечной и бесконечной импульсными характеристиками

Фильтром с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтром) называют фильтр, у которого импульсная характеристика представляет собой конечную дискретную последовательность: $h(0), h(1), \dots, h(N-1)$.

Фильтром с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтром) называют фильтр, у которого импульсная характеристика может принимать отличные от нуля значения на бесконечном множестве значений $n = 0, 1, \dots$.

Нерекурсивный фильтр всегда является КИХ-фильтром, а рекурсивный фильтр может быть как БИХ-фильтром, так и КИХ-фильтром

9.2. Рекурсивные цифровые фильтры первого порядка

Разностное уравнение рекурсивного цифрового фильтра первого порядка имеет вид:

$$y(n) = -ay(n-1) + b_1x(n) + b_0x(n-1).$$

Применив z -преобразование к левой и правой частям уравнения, найдем передаточную функцию

$$H(z) = \frac{b_1 + b_0z^{-1}}{1 + az^{-1}}.$$

Выполнив здесь подстановку $z = e^{j\tilde{\omega}}$, где $\tilde{\omega} = \omega T$ – нормированная частота, получим частотную передаточную функцию

$$H(e^{j\tilde{\omega}}) = \frac{b_1 + b_0e^{-j\tilde{\omega}}}{1 + ae^{-j\tilde{\omega}}}.$$

Отсюда при $\tilde{\omega} = 0$ и $\tilde{\omega} = \pi$ соответственно будем иметь граничные значения АЧХ:

$$H(1) = \frac{b_1 + b_0}{1 + a}; \quad H(-1) = \frac{b_1 - b_0}{1 - a}. \quad (9.4)$$

Единственный полюс фильтра равен $z_1 = -a_0$. Чтобы обеспечить устойчивость фильтра, необходимо выбрать $|a| < 1$.

Фильтр нижних частот. Зададим граничные условия для АЧХ фильтра: $H(1) = 1$ и $H(-1) = 0$. В этом случае из выражений (9.4) получим следующее соотношение для коэффициентов передаточной функции цифрового ФНЧ первого порядка

$$b_0 = b_1 = (1 + a) / 2.$$

На рис. 9.2 показаны АЧХ фильтра, рассчитанные для нескольких значений a .

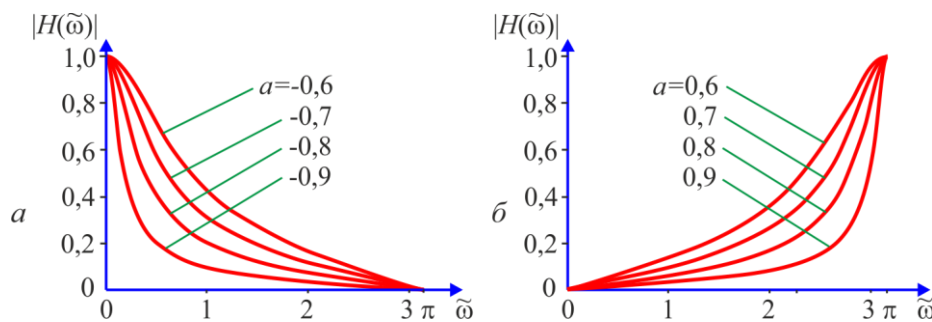


Рис.9.2. АЧХ рекурсивных цифровых фильтров первого порядка:
 a – ФНЧ; b – ФВЧ

Фильтр верхних частот. Зададим граничные значения для АЧХ фильтра: $H(1) = 0$ и $H(-1) = 1$. В этом случае соотношение для коэффициентов передаточной функции цифрового ФВЧ первого порядка имеет вид

$$b_1 = -b_0 = (1 - a) / 2.$$

АЧХ фильтра, рассчитанные для ряда значений a , представлены на рис. 9.2,б.

Необходимо отметить, что цифровые фильтры первого порядка из-за низкой избирательности находят ограниченное применение на практике. Как правило, они входят в виде составной части в цифровые фильтры, построенные по каскадной схеме.

9.3. Рекурсивные цифровые фильтры второго порядка

Рекурсивный цифровой фильтр второго порядка описывается разностным уравнением

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + a_0 y(n-2) + b_2 x(n) + b_1 x(n-1) + b_0 x(n-2).$$

Передаточная функция фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}.$$

После подстановки $z = e^{j\tilde{\omega}}$, где $\tilde{\omega} = \omega T$ – нормированная частота, получим частотную передаточную функцию

$$H(z) = \frac{b_2 + b_1 e^{-j\tilde{\omega}} + b_0 e^{-j2\tilde{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\tilde{\omega}} + a_0 e^{-j2\tilde{\omega}}}.$$

Граничные значения АЧХ, соответствующие значениям частоты $\tilde{\omega} = 0$ и $\tilde{\omega} = \pi$ определяются соответственно выражениями:

$$H(1) = \frac{b_2 + b_1 + b_0}{1 + a_1 + a_0}; \quad H(-1) = \frac{b_2 - b_1 + b_0}{1 - a_1 + a_0}. \quad (9.5)$$

Фильтр имеет два нуля и два полюса. Условия устойчивости фильтра записываются в виде системы неравенств для коэффициентов характеристического полинома $A(z) = z^2 + a_1 z + a_0$:

$$1 + a_1 + a_0 > 0;$$

$$1 - a_1 + a_0 > 0;$$

$$1 - a_0 > 0.$$

Значения коэффициентов a_0, a_1 , удовлетворяющие данным неравенствам, лежат внутри треугольника (рис. 9.3), называемым областью устойчивости фильтра.

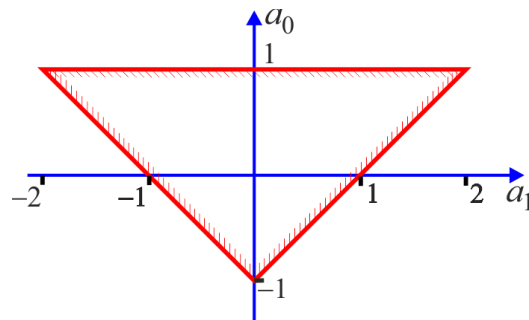


Рис.9.3. Область устойчивости рекурсивных ЦФ второго порядка

Фильтр нижних частот. Примем граничные условия для АЧХ фильтра: $H(1) = 1$ и $H(-1) = 0$. В этом случае из выражений (9.5) получим соотношение, которому должны удовлетворять коэффициенты передаточной функции:

$$b_1 = b_0 + b_2 = (1 + a_1 + a_0) / 2.$$

На рис. 9.4 показаны нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики цифрового ФНЧ второго порядка с параметрами: $a_0 = 0,3$; $a_1 = 1,0$; $b_0 = b_2 = 0,075$; $b_1 = 0,15$.

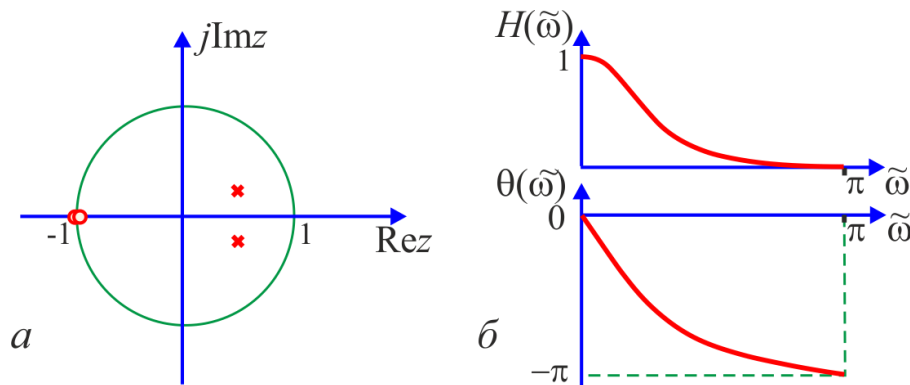


Рис.9.4. Характеристики цифрового ФНЧ второго порядка:
а – нуль-полюсная диаграмма; б – АЧХ и ФЧХ

Фильтр верхних частот. Граничные значения для АЧХ фильтра примем равными: $H(1)=0$ и $H(-1)=1$. При этом соотношение для коэффициентов передаточной функции, полученное из формул (9.5), имеет вид

$$-b_1 = b_0 + b_2 = (1 - a_1 + a_0) / 2.$$

На рис. 9.5 показаны нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики цифрового ФВЧ второго порядка с параметрами: $a_0 = 0,3$; $a_1 = 1,0$; $b_0 = b_2 = 0,075$; $b_1 = -0,15$.

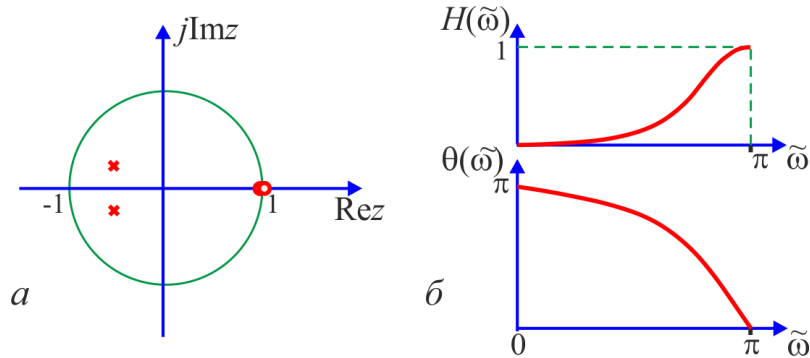


Рис.9.5. Характеристики цифрового ФВЧ второго порядка:
a – нуль-полюсная диаграмма; *б* – АЧХ и ФЧХ

Полосовой фильтр. Граничные значения для АЧХ фильтра примем равными: $H(1)=0$ и $H(-1)=0$. В этом случае из формул (9.5) получим:

$$b_1 = 0; \quad b_2 = -b_0 > 0.$$

Нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики полосового фильтра второго порядка изображены на рис. 9.6. Параметры фильтра: $a_0 = 0,8$; $a_1 = -0,1$; $b_0 = 0,1$; $b_1 = 0$; $b_2 = -0,1$.

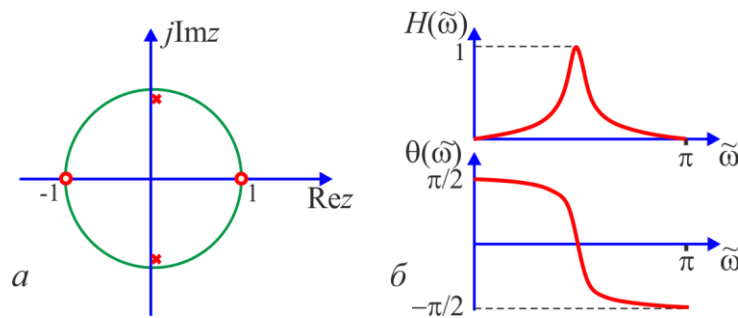


Рис.9.6. Характеристики цифрового полосового фильтра второго порядка:
a – нуль-полюсная диаграмма; *б* – АЧХ и ФЧХ

Заграждающий фильтр. Граничные значения для АЧХ фильтра примем равными: $H(1)=1$ и $H(-1)=1$. Из формул (9.5) при этих условиях будем иметь:

$$b_1 = a_1; \quad b_2 + b_0 = 1 + a_0.$$

Нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики заграждающего фильтра второго порядка представлены на рис. 9.7. Параметры фильтра: $a_0 = 0,1$; $a_1 = -0,8$; $b_0 = 0,55$; $b_1 = -0,8$; $b_2 = -0,55$.

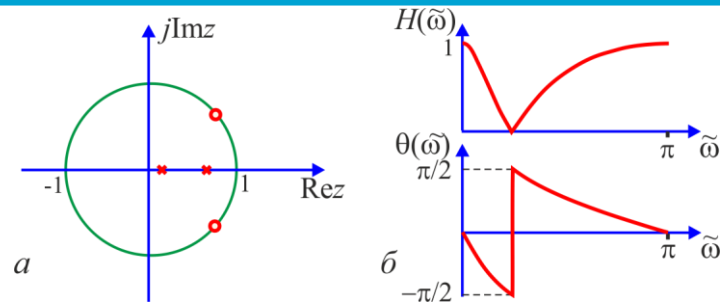


Рис.9.7. Характеристики цифрового заграждающего фильтра второго порядка:
а – нуль-полюсная диаграмма; б – АЧХ и ФЧХ

9.4. Расчет рекурсивных цифровых фильтров по аналоговому прототипу

Рекурсивные цифровые фильтры имеют прототипы среди аналоговых фильтров. Поэтому задача определения передаточной функции фильтра, удовлетворяющего заданным требованиям, часто решается путем определения передаточной функции аналогового фильтра-прототипа и последующего ее преобразования. Из всех известных методов такого преобразования в настоящее время чаще применяется метод билинейного преобразования.

Билинейное преобразование

Передаточная функция цифрового фильтра может быть получена путем преобразования передаточной функции аналогового фильтра. Для этих целей, как правило, используется метод билинейного преобразования, имеющий некоторые преимущества перед другими методами. Основу метода составляет конформное отображение s -плоскости в z -плоскость при помощи соотношения

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (9.6)$$

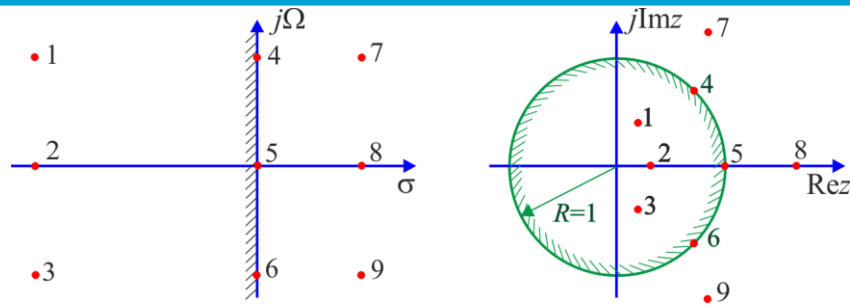
Билинейное преобразование отображает мнимую ось s -плоскости в единичную окружность z -плоскости (рис. 9.8). Чтобы показать это, подставим в (9.6) $z = \exp(j\omega T)$ и проделаем некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{1 + \exp(-j\omega T)} = \frac{2}{T} \cdot \frac{\exp(j\omega T/2) - \exp(-j\omega T/2)}{\exp(j\omega T/2) + \exp(-j\omega T/2)} = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{j \sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\Omega. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Выражение (9.6) каждой точке комплексной плоскости $s = \delta + j\omega$ ставит в соответствие определенную точку на плоскости $z = \exp[(\delta + j\omega)T]$ и при этом отображает:

- 1) все точки, лежащие в открытой левой полуплоскости s , в точки внутри единичного круга на плоскости z ($|z| < 1$);
- 2) все точки, расположенные в открытой правой полуплоскости s , в область вне единичного круга на плоскости z ($|z| > 1$).

На рис. 9.8 показаны точки на плоскости s и соответствующие им точки на плоскости z .

Рис. 9.8. Отображение точек плоскости s на плоскость z .

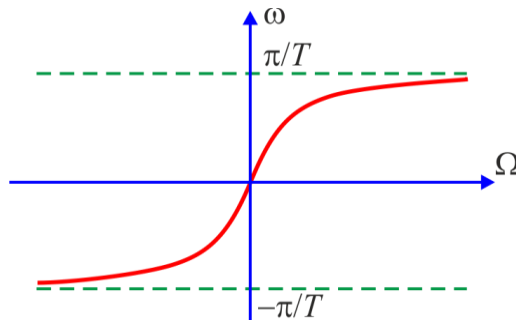
Согласно (9.7), связь между «аналоговой» частотой Ω и «цифровой» частотой ω определяется выражением

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (9.8)$$

Формулу (9.8) можно записать в следующем виде

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\Omega T}{2}.$$

График соотношения (9.8) показан на рис. 9.9.

Рис. 9.9. Зависимость между «аналоговой» Ω и «цифровой» ω частотами

Подстановкой (9.6) в передаточную функцию $H_a(s)$ аналогового фильтра получают передаточную функцию $H(z)$ цифрового фильтра

$$H(z) = H_a \left(\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right). \quad (9.9)$$

При этом частотная характеристика $H_a(j\Omega)$ аналогового фильтра преобразуется в частотную характеристику $H(e^{j\omega T})$ цифрового фильтра с изменениями масштабов по оси частот, которые определяются формулой (9.8). Связь между частотой Ω аналогового фильтра и частотой ω цифрового фильтра описывается хотя и нелинейной, но монотонной функцией. Поэтому относительное положение частоты при преобразовании (9.8) сохраняется, то есть если $\omega_2 > \omega_1$, то $\Omega_2 > \Omega_1$.

Поэтому, если в полосе частот от Ω_1 до Ω_2 АЧХ фильтра-прототипа удовлетворяет условиям

$$H_1 \geq |H_a(j\Omega)| \geq H_2,$$

то в полосе частот от ω_1 до ω_2 АЧХ цифрового фильтра удовлетворяет аналогичному требованию

$$H_1 \geq |H(e^{j\omega T})| \geq H_2.$$

Однако при переходе от частоты Ω к частоте ω длительности полос пропускания и задерживания частотных интервалов деформируются. Но все максимумы и минимумы АЧХ аналогового фильтра сохраняются и в АЧХ цифрового фильтра. При этом сохраняются основные свойства фильтров (тип, неравномерность АЧХ для соответствующих диапазонов частот и др.). На рис. 9.10 показано преобразование АЧХ аналогового ФНЧ Чебышева третьего порядка, используемого в качестве фильтра-прототипа, в АЧХ цифрового ФНЧ.

Деформация шкалы частот при билинейном преобразовании проявляется в искажениях импульсной и фазовой частотной характеристик фильтра. Указанные характеристики аналогового и цифрового фильтров не будут совпадать.

Достоинством билинейного преобразования является то, что все полюсы аналогового фильтра, расположенные в левой половине s -плоскости, отображаются во внутреннюю область единичного круга. Поэтому цифровой фильтр будет устойчивым, если устойчив аналоговый прототип.

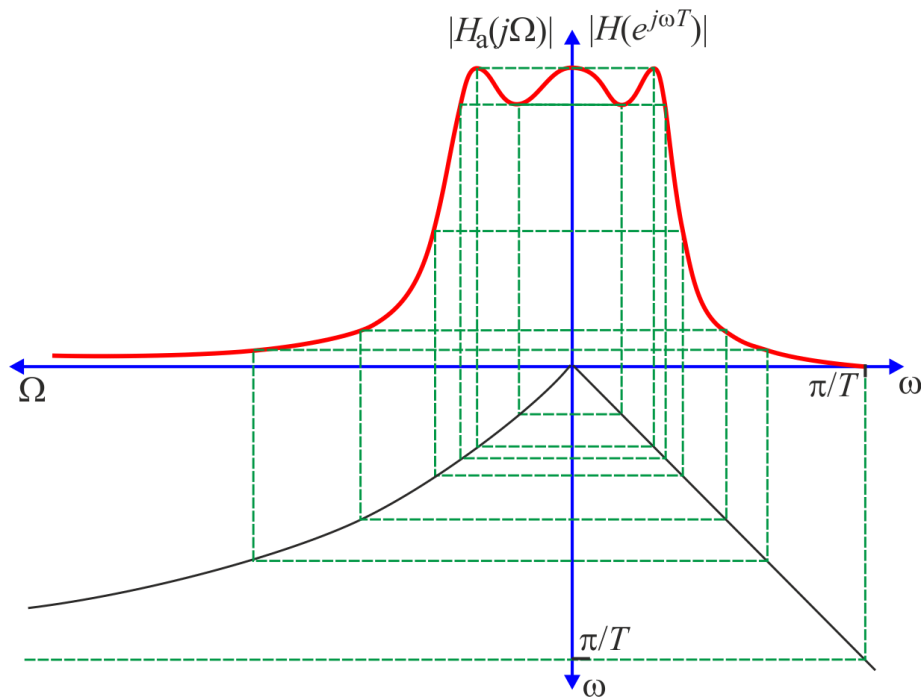


Рис. 9.10. Связь между АЧХ аналогового и цифрового ФНЧ при билинейном преобразовании

9.4.2. Расчет цифровых ФНЧ и ФВЧ по заданным требованиям к АЧХ

Рассмотрим порядок расчета рекурсивных цифровых фильтров Баттерворта. В качестве исходных данных для расчета фильтров используются значения граничных частот и интервалов отклонения АЧХ от идеальной в полосах пропускания и задерживания (рис. 9.11).

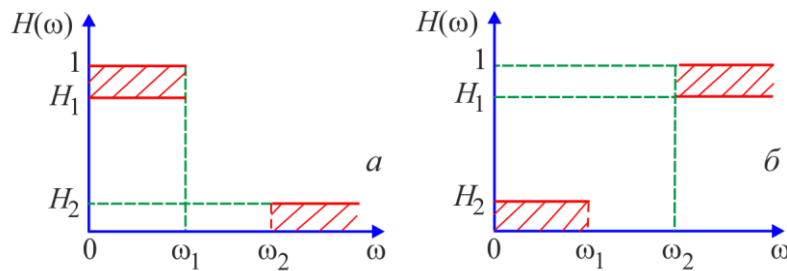


Рис. 9.11. Требования к АЧХ цифровых ФНЧ и ФВЧ

Последовательность расчета такова.

1. Рассчитываем граничные частоты аналогового фильтра-прототипа:

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_1 T}{2}; \quad \Omega_2 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_2 T}{2}$$

2. Для определения порядка n и частоты среза Ω_c аналогового фильтра-прототипа составим систему уравнений, используя формулу для квадрата АЧХ и условия, что АЧХ фильтра проходит через точки (Ω_1, H_1) и (Ω_2, H_2) . Для ФНЧ и ФВЧ системы уравнений записываются с учетом правил трансформации фильтров:

<p>ФНЧ</p> $\frac{1}{1 + (\Omega_1 / \Omega_c)^{2n}} = H_1^2;$ $\frac{1}{1 + (\Omega_2 / \Omega_c)^{2n}} = H_2^2.$		<p>ФВЧ</p> $\frac{1}{1 + (\Omega_c / \Omega_1)^{2n}} = H_1^2;$ $\frac{1}{1 + (\Omega_c / \Omega_2)^{2n}} = H_2^2.$
--	--	--

Решив систему уравнений, получим значения n^* и Ω_c^* , при которых АЧХ фильтра проходит через заданные граничные точки (Ω_1, H_1) и (Ω_2, H_2) . Так как в общем случае полученное значение n^* является дробным, порядок фильтра принимаем равным ближайшему целому числу $n > n^*$.

3. Находим передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа $H_a(s)$. Для этого нормированную передаточную функцию $H_n(s)$ Баттерворта подвергаем процедуре денормирования и трансформации.

<p>ФНЧ</p> $H_a(s) = H_n(s) _{s=s/\Omega_c};$		<p>ФВЧ</p> $H_a(s) = H_n(s) _{s=\Omega_c/s};$
---	--	---

4. Рассчитываем передаточную функцию цифрового фильтра применением билинейного преобразования:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

5. Получаем частотную передаточную функцию

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

строим АЧХ и проверяем выполнение требований заданных требований.

9.6. Реализация рекурсивных цифровых фильтров

Алгоритм работы рекурсивного цифрового фильтра в общем случае описывается разностным уравнением

$$y(n) = - \sum_{v=1}^N a_{N-v} y(n-v) + \sum_{\mu=0}^N b_{N-\mu} x(n-\mu). \quad (9.10)$$

Реализация цифрового фильтра непосредственно по разностному уравнению при больших значениях N связана со значительными затруднениями. Они обусловлены высокой чувствительностью характеристик фильтра к неточности задания коэффициентов разностного уравнения. Погрешности задания коэффициентов, вызванные их неизбежным округлением при больших N , могут привести к нежелательным отклонениям АЧХ и даже вызвать неустойчивость фильтра. Дело в том, что частотно-избирательные фильтры могут иметь полюсы, расположенные близко от единичной окружности, и неточное задание коэффициентов разностного уравнения может привести к дрейфу этих полюсов за пределы единичной окружности.

Поэтому для реализации рекурсивных цифровых фильтров, как правило, применяют структуры, основанные на использовании элементарных звеньев первого и второго порядков. При этом любой фильтр реализуется путем каскадного или параллельного соединения элементарных звеньев.

9.6.1. Каскадная (последовательная) реализация

Разностному уравнению (9.10) соответствуют передаточная функция

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^N b_{N-\mu} z^{\mu}}{1 + \sum_{v=1}^N a_{N-v} z^{-v}}$$

Запишем передаточную функцию фильтра в следующем виде

$$H(z) = \begin{cases} H_1(z) \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_{2k}(z) & \text{при нечетном } N; \\ \sum_{k=1}^{N/2} H_{2k}(z) & \text{при четном } N; \end{cases} \quad (9.11)$$

где множители $H_1(z)$ и $H_{2k}(z)$ соответствуют звеньям первого и второго порядков с передаточными функциями

$$H_1(z) = \frac{b_1 + b_0 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}; \quad H_{2k}(z) = \frac{b_{2k} + b_{1k} z^{-1} + b_{0k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{0k} z^{-2}}$$

Структурные схемы таких звеньев, построенные по первой канонической форме, показаны на рис. 9.12.

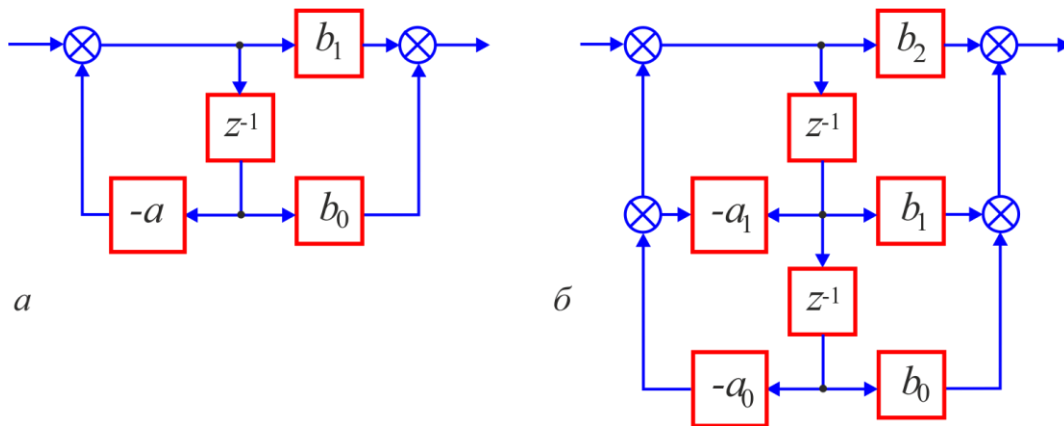


Рис. 9.12. Структурные схемы элементарных звеньев:
a – первого порядка, *б* – второго порядка

На рис.9.13 показана схема каскадной реализации рекурсивного цифрового фильтра из элементарных звеньев первого и второго порядков.

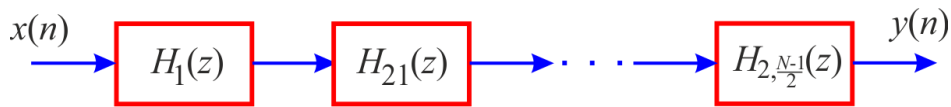


Рис. 9.13. Каскадная реализация ЦФ из элементарных звеньев

9.6.2. Параллельная реализация

Передаточную функцию цифрового фильтра при нечетном N можно разложить на простые дроби:

$$H(z) = C + H_1(z) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_{2k}(z),$$

где C – постоянная, $H_1(z)$ и $H_{2k}(z)$ – передаточные функции элементарных звеньев первого и второго порядков:

$$H_1(z) = \frac{b}{1 + az^{-1}}; \quad H_{2k}(z) = \frac{b_{1k} + b_{0k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{0k}z^{-2}}.$$

Структурная схема фильтра имеет вид, показанный на рис. 9.14.

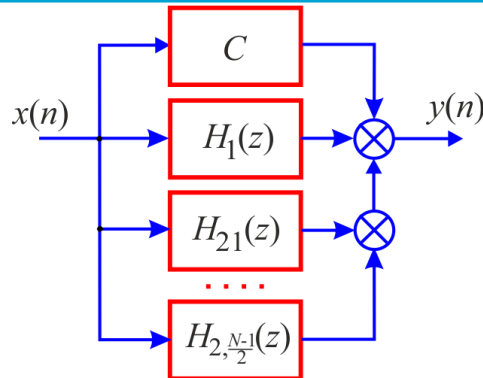


Рис. 9.14. Параллельная реализация ЦФ из элементарных звеньев

Построенные при помощи каскадной и параллельной форм фильтры оказались на практике сравнительно экономичными по требуемой точности коэффициентов, а следовательно, по аппаратуре и средствам программирования. Кроме того, подобные фильтры легко рассчитывать, так как при известной конфигурации полюсов и нулей передаточной функции фильтра значения коэффициентов элементарных звеньев первого и второго порядков определяются достаточно быстро. Благодаря этому к расчету фильтров, ориентированных на каскадную и параллельную реализацию, легко приспособиваются классические методы расчета аналоговых фильтров.

9.7. Особенности нерекурсивных цифровых фильтров

Нерекурсивные ЦФ описываются разностным уравнением

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} c_v x(n-v), \quad (9.12)$$

где c_v – постоянные коэффициенты.

Передаточная функция нерекурсивного ЦФ, полученная в результате применения прямого Z-преобразования к уравнению (9.12), имеет вид.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{v=0}^{N-1} c_v z^{-v}. \quad (9.13)$$

С другой стороны, передаточная функция нерекурсивного ЦФ может быть определена как прямое Z-преобразование конечной импульсной характеристики $h(n)$, то есть

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

Отсюда следует, что коэффициенты передаточной функции (разностного уравнения) и отсчёты импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ совпадают.

Если в разностном уравнении (9.12) произвести замену $b_v = h(v)$, $v = 0, 1, \dots, N-1$, то получим

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} h(v) x(n-v), \quad (9.14)$$

Это есть не что иное, как свертка функций $x(n)$ и $h(n)$. Следовательно, в случае нерекурсивных цифровых фильтров *разностное уравнение и уравнение свертки совпадают*.

Алгоритм функционирования нерекурсивных ЦФ представляется в виде структурной схемы, показанной на рис. 9.15.

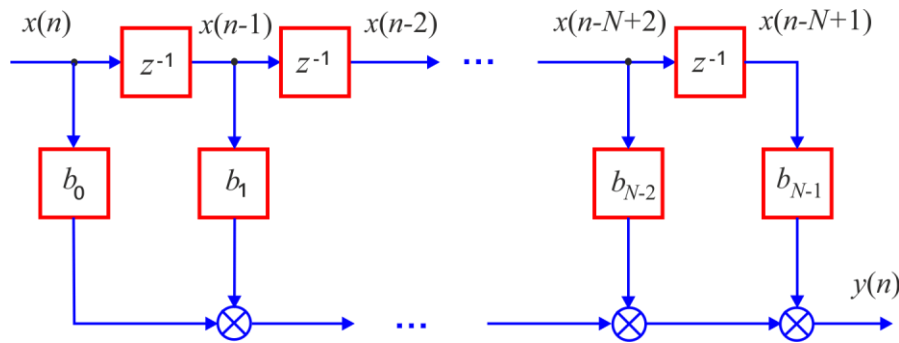


Рис. 9.15. Структурная схема нерекурсивного цифрового фильтра

Нерекурсивные ЦФ обладают рядом положительных качеств, основное из которых состоит в том, что *благодаря отсутствию обратных связей они всегда устойчивы*. Действительно, передаточная функция нерекурсивного ЦФ (9.13) имеет $N - 1$ полюсов, которые все находятся в точке $z = 0$.

Другой особенностью нерекурсивного фильтра является его конечная импульсная характеристика. Поэтому *переходные процессы в фильтре затухают за конечный промежуток времени*.

Характерная особенность нерекурсивного фильтра состоит в том, что *при соответствующем выборе параметров они могут иметь строго линейную фазо-частотную характеристику (ФЧХ)*. Это особенно важно в тех случаях, когда требуется обеспечить неискаженное преобразование сигналов, например при анализе электрокардиограмм.

Нерекурсивные цифровые фильтры используются и в тех случаях, когда предъявляемые требования не могут быть реализованы при помощи фильтров Баттерворта и Чебышева, например для выполнения дифференцирования и интегрирования сигналов.

В отличие от рекурсивных фильтров нерекурсивные фильтры не могут аппроксимировать амплитудно-частотные характеристики с крутыми переходами. Тем не менее нерекурсивные фильтры очень популярны из-за легкости проектирования, линейной ФЧХ и гарантированной устойчивости.

9.8. Нерекурсивные цифровые фильтры с линейной ФЧХ

Произведя в (9.13) замену $z = e^{j\omega T}$, получим частотную передаточную функцию нерекурсивного ЦФ

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega T n}. \quad (9.15)$$

Фазо-частотная характеристика фильтра определяется выражением

$$\theta(\omega) = \arg[H(e^{j\omega T})] = -\operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(nT\omega)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(nT\omega)}. \quad (9.16)$$

Найдем условия, при которых ФЧХ является линейной, то есть

$$\theta(\omega) = -\tau\omega, \quad (9.17)$$

где τ – коэффициент наклона ФЧХ, подлежащий определению.

Приравняв (9.16) и (9.17), запишем исходное соотношение

$$\operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(nT\omega)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(nT\omega)} = \tau\omega$$

После очевидных преобразований данное выражение принимает вид

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) [\cos(nT\omega) \sin(\tau\omega) - \sin(nT\omega) \cos(\tau\omega)] = 0.$$

Отсюда получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\tau\omega - nT\omega) = 0.$$

Можно показать, что решением этого уравнения являются следующие соотношения:

$$\tau = (N-1)T/2;$$

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Таким образом, нерекурсивный фильтр, обладающий линейной ФЧХ, имеет импульсную характеристику, симметричную относительно средней точки, и коэффициент наклона ФЧХ $\tau = (N-1)T/2$.

При этом можно выделить два вида фильтров.

Фильтр вида 1 (N – нечетное число и $h(n) = h(N-1-n)$).

Импульсная характеристика фильтра при $N=11$ имеет вид, показанный на рис. 9.16,а. Частотную передаточную функцию получим из выражения (9.15). Вынесем за знак суммы $\exp(-j\omega Tk)$, где $k = (N-1)/2$. Используя формулу Эйлера и учтя условие симметрии $h(n)$, будем иметь:

$$H_1(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega Tk} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega T(n-k)} = e^{-j\omega Tk} \sum_{v=0}^k c_v \cos(vT\omega),$$

где $c_0 = h(k)$, $c_v = 2 \cdot h(k-v)$, $v = 1, 2, \dots, k$.

Отсюда для АЧХ имеем

$$H_1(\omega) = |H_1(e^{j\omega T})| = \left| \sum_{v=0}^k c_v \cos(vT\omega) \right|.$$

Значения АЧХ $H_1(0)$ и $H_1(\pi/T)$, в зависимости от выбранных значений коэффициентов c_v , могут быть равными нулю или произвольными положительными. Поэтому данный вид нерекурсивного ЦФ позволяет получить ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ.

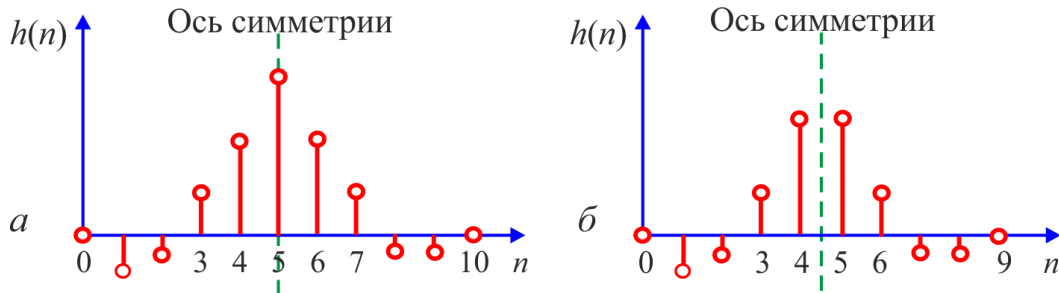


Рис. 9.16. Импульсные характеристики нерекурсивных ЦФ:
 a – вид 1, $N=11$; b – вид 2, $N=10$.

Фильтр вида 2 (N – четное число и $h(n) = h(N-1-n)$).

Импульсная характеристика фильтра при $N=10$ показана на рис. 9.16,б. Частотную передаточную функцию (9.15) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} H_2(e^{j\omega T}) &= e^{-j(k+0,5)T\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega T(n-k-0,5)} = \\ &= e^{-j(k+0,5)T\omega} \sum_{v=0}^k c_v \cos[(v+0,5)T\omega], \end{aligned}$$

где $k = (N-2)/2$, $c_v = 2 \cdot h(k-v)$, $v = 0, 1, \dots, k$.

Отсюда найдем формулу АЧХ

$$H_2(\omega) = |H_2(e^{j\omega T})| = \left| \sum_{v=0}^k c_v \cos[(v+0,5)T\omega] \right|.$$

Легко видеть, что значения $H_2(0)$ могут быть произвольными, в том числе и равными нулю, а значение $H_2(\pi/T) = 0$ при любом выборе коэффициентов c_v . Поэтому данный вид нерекурсивного ЦФ позволяет реализовать ФНЧ и ПФ.

Во многих практических задачах ФЧХ нерекурсивного ЦФ может иметь вид

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega,$$

где θ_0 – постоянная величина. Применяв процедуру, описанную выше, получим фильтра другого типа. В частности, при $\theta_0 = \pi/2$ найдем решение в следующей форме:

$$\tau = (N-1)T/2;$$

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

В этом случае импульсная характеристика является антисимметричной относительно средней точки. При этом можно выделить два вида фильтров.

Фильтр вида 3 (N – нечетное число и $h(n) = -h(N-1-n)$).

Импульсная характеристика фильтра при $N=11$ показана на рис. 9.17,а. Частотную передаточную функцию (9.15) преобразуем следующим образом:

$$H_3(e^{j\omega T}) = e^{-jkT\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(n-k)T\omega} = e^{-j(kT\omega - \pi/2)} \sum_{v=1}^k c_v \sin(vT\omega),$$

где $k = (N-1)/2$, $c_0 = 0$, $c_v = 2 \cdot h(k-v)$, $v = 1, 2, \dots, k$.

Отсюда найдем формулу АЧХ

$$H_3(\omega) = |H_3(e^{j\omega T})| = \left| \sum_{v=1}^k c_v \sin(vT\omega) \right|.$$

Из этой формулы следует, что при любом выборе коэффициентов c_v значения $H_3(0) = 0$ и $H_3(\pi/T) = 0$. Таким образом, рассматриваемый вид нерекурсивного ЦФ можно использовать только в качестве ПФ.

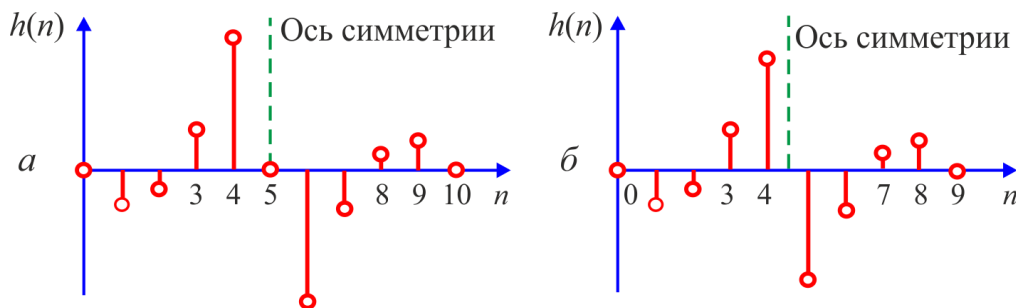


Рис. 9.17. Импульсные характеристики нерекурсивных ЦФ:
а – вид 3, $N=11$; б – вид 4, $N=10$.

Фильтр вида 4 (N – четное число и $h(n) = -h(N-1-n)$).

Импульсная характеристика фильтра при $N=10$ показана на рис. 9.17,б. Частотную передаточную функцию (9.15) преобразуем так:

$$\begin{aligned} H_4(e^{j\omega T}) &= e^{-j(k+0,5)T\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(n-k-0,5)T\omega} = \\ &= e^{-j[(k+0,5)T\omega - \pi/2]} \sum_{v=1}^k c_v \sin[(v+0,5)T\omega], \end{aligned}$$

где $k = (N-2)/2$, $c_v = 2 \cdot h(k-v)$, $v = 0, 1, \dots, k$.

Отсюда найдем формулу АЧХ

$$H_4(\omega) = |H_4(e^{j\omega T})| = \left| \sum_{v=1}^k c_v \sin[(v+0,5)T\omega] \right|.$$

Легко видеть, что значение $H_4(0) = 0$ при любом выборе коэффициентов c_v , а значения $H_4(\pi/T)$ могут быть произвольными, в том числе и равными нулю. Поэтому данный вид нерекурсивного ЦФ позволяет реализовать ФВЧ и ПФ.

Для расчета нерекурсивных фильтров с линейной ФЧХ применяют следующие методы:

- метод взвешивания с помощью оконных функций;

- метод частотной выборки;
- метод оптимизации с помощью функций Чебышева.

Как наиболее просто реализуемый рассмотрим только первый метод.

9.9. Расчет нерекурсивных цифровых фильтров при помощи усредняющих окон

Наиболее простой подход при расчете нерекурсивного ЦФ сводится к получению импульсной характеристики конечной длины путем усечения импульсной характеристики бесконечной длины.

Пусть требования к частотной характеристике нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ заданы в виде функции

$$H_{\text{ж}}(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\omega T(N-1)/2} & \text{при } |\omega| \leq \omega_c < \omega_d = \pi/T, \\ 0 & \text{при } \omega_c < |\omega| \leq \pi/T. \end{cases} \quad (9.18)$$

Согласно (9.18) желаемые АЧХ и ФЧХ фильтра определены формулами:

$$H(\omega) = |H_{\text{ж}}(e^{j\omega T})| = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \omega_c < \omega_d = \pi/T, \\ 0 & \text{при } \omega_c < |\omega| \leq \pi/T, \end{cases}$$

$$\theta(\omega) = \arg H_{\text{ж}}(e^{j\omega T}) = -\omega T(N-1)/2.$$

Импульсную характеристику $h_{\text{ж}}(n)$ можно получить, вычислив коэффициенты ряда Фурье функции (9.18), являющейся, как известно, периодической и имеющей период $\omega_d = 2\pi/T$, то есть

$$h_{\text{ж}}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega T(n-(N-1)/2)} d\omega. \quad (9.19)$$

После преобразований (12.б) будем иметь

$$h_{\text{ж}}(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-(N-1)/2)T]}{\pi(n-(N-1)/2)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9.20)$$

Очевидно, $h_{\text{ж}}(n)$ имеет бесконечную длину. Одним из возможных способов получения нерекурсивного цифрового фильтра состоит в усечении бесконечного ряда (9.20) путем отбрасывания отсчетов, соответствующих $n \geq N$, то есть в качестве импульсной характеристики фильтра принимается функция

$$h(n) = h_{\text{ж}}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (9.21)$$

Фильтр, полученный путем простого усечения числа отсчетов импульсной характеристики, на практике не применяется из-за явления Гиббса. Амплитудная частотная характеристика такого фильтра имеет выбросы и пульсации большого уровня до и после точки разрыва аппроксимируемой частотной характеристики. С увеличением числа отсчетов уменьшается ширина выброса, изрезанность АЧХ увеличивается, но амплитуда колебаний АЧХ не изменяется и составляет примерно 9% от размаха АЧХ в точке разрыва. Уровень боковых лепестков в полосе затухания остается высоким.

Широко распространенный способ устранения вредного влияния явления Гиббса заключается во взвешивании функции $h_{\text{ж}}(n)$ при помощи оконной функции $w(n)$. Импульсную характеристику нерекурсивного цифрового ФНЧ находят в виде

$$h(n) = w(n) \cdot h_{\text{ж}}(n).$$

Оконная функция является симметричной функцией, медленно спадающей к краям. Центральный отсчет оконной функции нормируется к единице. Применение метода оконных функций позволяет уменьшить или даже устранить колебания АЧХ. Однако при этом наклон АЧХ в переходной зоне будут более пологими, чем у исходной АЧХ.

Прямоугольное (равномерное) окно. Прямоугольное окно соответствует простому усечению ряда Фурье. Оно описывается весовой функцией:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & n < 0 \text{ и } n \geq N. \end{cases}$$

Треугольное окно. Формула треугольного окна (окна Бартлетта) имеет вид

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

Окно Хэнна (Hanning). Оконная функция Хэнна описывается формулой

$$w(n) = 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Окно Хемминга (Hamming). Оконная функция Хемминга описывается выражением

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Окно Блэкмана (Blackman). Оконная функция Блэкмана содержит две косинусные составляющие:

$$w(n) = 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi}{N-1}n\right), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$