Тема 8. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Понятие дискретной системы. – Методы описания линейных дискретных систем: разностное уравнение, передаточная функция, импульсная характеристика, частотная передаточная функция и частотные характеристики. – Структурные схемы. – Устойчивость. – расчет реакции на входное воздействие. – Дискретные интеграторы и дифференциаторы.

8.1. Понятие дискретной системы

Под *дискретной системой* будем понимать техническое устройство или программу, которая осуществляет преобразование дискретной последовательности $x(n)$ в другую дискретную последовательность $y(n)$ в соответствии с заданным алгоритмом (рис. 8.1).

Рис. 8.1. Представление дискретной системы

Алгоритм преобразования входной последовательности $x(n)$ в выходную последовательность $y(n)$ описывается соотношением

$$R_y[y(n)] = R_x[x(n)],$$

где R_x, R_y – операторы.

По виду оператора R дискретные системы делят:

- на линейные или нелинейные;
- стационарные или нестационарные;
- физически реализуемые (каузальные) или нереализуемые (некаузальные).

Линейность. Дискретная система называется линейной тогда и только тогда, если ее оператор R обладает следующими свойствами *аддитивности* и *однородности*:

1) $R[x_1(n) + x_2(n)] = R[x_1(n)] + R[x_2(n)]$ для любых $x_1(n)$ и $x_2(n)$;

2) $R[\alpha \cdot x(n)] = \alpha \cdot R[x(n)]$ для любых α и $x(n)$.

Эти свойства можно записать в виде одного условия:

$$R[\alpha \cdot x_1(n) + \beta \cdot x_2(n)] = \alpha \cdot R[x_1(n)] + \beta \cdot R[x_2(n)]. \quad (8.1)$$

Согласно (8.1) реакция линейной системы на сложное воздействие равна сумме реакций на отдельные воздействия, взятых с теми же коэффициентами α и β.

Стационарность. Дискретная система называется *стационарной* (инвариантной во времени), если ее параметры не изменяются во времени. При этом данное воздействие, поданное на вход системы, будет всегда приводить к одной и той же реакции независимо от времени приложения воздействия.

Физическая реализуемость. Физически реализуемой называется система, у которой реакция в данный момент времени не зависит от значений воздействия в последующие моменты. Например, система, описываемая оператором

$$y(n) = 0.2 \cdot x(n-1),$$

будет физически реализуемой, так как для определения $y(n)$ используется значение входной последовательности $x(n)$ в предшествующий момент времени. Система, оператор преобразования которой описывается выражением

$$y(n) = 0.2 \cdot x(n+1),$$

является физически нереализуемой. В такой системе для расчета выходной последовательности $y(n)$ требуются будущие значения входной последовательности $x(n)$.

8.2. Описание дискретной системы разностным уравнением

Наиболее простой формой представления оператора R, связывающего входную $x(n)$ и выходную $y(n)$ последовательности, является разностное уравнение. Под *разностным уравнением* понимают соотношение, которое определяет связь между последовательностями $x(n)$, $y(n)$ и их разностями различных порядков. Разностное уравнение называют линейным, если указанное соотношение включает операции сложения и умножения на постоянный множитель.

Пример. Рассмотрим дискретную систему, описываемую линейным разностным уравнением первого порядка

$$\nabla y(n) + y(n) = x(n).$$

Сделав замену первой обратной разности $\nabla y(n) = y(n) - y(n-1)$, получим другую форму записи разностного уравнения:

$$y(n) = 0.5\,y(n-1) + 0.5\,x(n).$$

Пусть на вход системы действует последовательность $x(n) = 1(n)$. Рассчитаем выходную последовательность $y(n)$ при начальном условии $y(-1) = 0$. Последовательное вычисление дает: $y(0) = 0.5$, $y(1) = 0.75$, $y(2) = 0.875$, $y(3) = 0.9375$, $y(4) = 0.96375$ и т.д.

В общем случае линейное разностное уравнение, записанное в обратных разностях, имеет вид

$$\begin{aligned} &\nabla^N y(n) + \alpha_1 \nabla^{N-1} y(n) + \ldots + \alpha_{N-1} \nabla y(n) + \alpha_N y(n) = \\ &= \beta_0 \nabla^M x(n) + \beta_1 \nabla^{M-1} x(n) + \ldots + \beta_{M-1} \nabla x(n) + \beta_M x(n). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Заменив в (8.2) разности соответствующими выражениями через последовательности $x(n)$ и $y(n)$, получим следующую форму записи разностного уравнения:

$$\begin{aligned} &y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = \\ &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots + b_{M-1} x(n-M+1) + b_M x(n-M). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Это уравнение можно записать в операторной форме. Для этого введем оператор сдвига назад q^{-i}, определяемый формулой

$$x(n-i) = q^{-i} x(n).$$

Тогда уравнение (8.3) запишется так:

$$A(q^{-1})y(n) = B(q^{-1})x(n),$$

где $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{N-1} q^{-N+1} + a_N q^{-N}$;

$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_{M-1} q^{-M+1} + b_M q^{-M}$.

В некоторых случаях уравнение (8.3) удобно записать иначе:

$$\begin{aligned} &y(n+N) + a_1 y(n+N-1) + \ldots + a_{N-1} y(n+1) + a_N y(n) = \\ &\quad = b_0 x(n+N) + \ldots + b_{M-1} x(n+N-M+1) + b_M x(n+N-M). \end{aligned} \tag{8.4}$$

При помощи оператора сдвига вперед q^i, который задается формулой

$$x(n+i) = q^i x(n),$$

уравнение (8.4) записывают в операторной форме

$$A(q)y(n) = B(q)x(n),$$

где $A(q) = q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-1} q + a_N$;

$B(q) = b_0 q^N + \ldots + b_{M-1} q^{N-M+1} + b_M q^{N-M}$.

Методы решения разностных уравнений во многом аналогичны методам решения дифференциальных уравнений. *Аналитические методы* позволяют получить решение в общем виде, пригодном для анализа работы дискретной системы. *Численные методы* решения дают результат в виде последовательности. Разностное уравнение записывается в виде, удобном для непосредственного расчета:

$$y(n) = -\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu y(n-\nu) + \sum_{\mu=0}^{M} b_\mu x(n-\mu). \tag{8.5}$$

Зная входную последовательность $x(n)$ при $n \geq 0$ и начальные значения $x(n)$, $y(n)$ для $n = -1, -2, \ldots, -n$, формулу (8.5) можно использовать непосредственно для расчета значений последовательности $y(n)$.

8.3. Передаточная функция дискретной системы

Наряду с разностным уравнением для описания динамических свойств дискретной системы используется передаточная функция. *Передаточной функцией* $H(z)$ дискретной системы называется отношение z-изображения выходной последовательности $y(n)$ к z-изображению входной последовательности $x(n)$ при нулевых начальных условиях:

$$H(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Передаточную функцию можно получить, применив z-преобразование к разностному уравнению. При этом учитывают свойства z-преобразования.

Пример. Рассмотрим дискретную систему первого порядка, описываемую разностным уравнением

$$y(n) = (1-\alpha)y(n-1) + \alpha x(n), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Подвергнув каждое слагаемое z-преобразованию при нулевых начальных условиях ($y(-1)=0$), получим

$$Y(z)=(1-\alpha)z^{-1}Y(z)+\alpha X(z).$$

Отсюда согласно определению найдем

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z^{-1}}=\frac{\alpha z}{z-(1-\alpha)}.$$

Рассмотрим разностное уравнение общего вида

$$y(n)+a_1y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_N y(n-N)=$$
$$=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\ldots+b_{M-1}x(n-M+1)+b_M x(n-M).$$

Подвергнув каждое слагаемое z-преобразованию при нулевых начальных условиях, получим уравнение системы в области изображений

$$(1+a_1z^{-1}+\ldots+a_{N-1}z^{-N+1}+a_N z^{-N})Y(z)=$$
$$=(b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_1z^{-M+1}+b_M z^{-M})X(z).$$

Согласно определению передаточной функции отсюда найдем

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_{M-1}z^{-M+1}+b_M z^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\ldots+a_{N-1}z^{-N+1}+a_N z^{-N}}. \qquad (8.6)$$

Из сказанного выше следуют простые правила определения передаточной функции по разностному уравнению (и наоборот):

- коэффициенты разностного уравнения b_μ при $x(n-\mu)$ являются коэффициентами при z^{-k} полинома числителя передаточной функции;
- коэффициенты разностного уравнения a_ν при $y(n-\nu)$ являются коэффициентами при z^{-k} полинома знаменателя передаточной функции.

Наряду с записью передаточной функции в виде (8.6) используется и другая форма записи, получаемая путем умножения числителя и знаменателя на z^N:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{N-M}(b_0z^M+b_1z^{M-1}+\ldots+b_{M-1}z+b_M)}{z^N+a_1z^{N-1}+\ldots+a_{N-1}z+a_N}. \qquad (8.7)$$

Корни $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N$ уравнения

$$z^{N-M}(b_0z^M+b_1z^{M-1}+\ldots+b_{M-1}z+b_M)=0$$

называют нулями передаточной функции. Легко видеть, что $(N-M)$ нулей располагаются в начале координат, а остальные могут быть как вещественными, так и комплексными.

Корни $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$ уравнения

$$z^N+a_1z^{N-1}+\ldots+a_{N-1}z+a_N=0$$

называют полюсами передаточной функции. Полюсы могут принимать вещественные и комплексные значения. Если все числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$ различны, то полюсы функции называются простыми. Если же среди этих чисел встречаются одинаковые, то соответствующие полюсы называются кратными.

Передаточную функцию (8.7) темы можно представить в виде

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0 z^{N-M}(z-\nu_1)(z-\nu_2)\ldots(z-\nu_M)}{(z-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_N)}.$$

8.4. Импульсная характеристика дискретной системы. Уравнение свертки

Важнейшей характеристикой линейной дискретной системы является импульсная характеристика. *Импульсная характеристика* $h(n)$ представляет собой реакцию системы на воздействие в виде единичного импульса $\delta(n)$ при нулевых начальных условиях.

Так как $X(z)=Z\{\delta(n)\}=1$, то из уравнения системы

$$Y(z)=H(z)\,X(z) \tag{8.8}$$

следует, что импульсная характеристика представляет собой обратное z – преобразование передаточной функции $H(z)$, то есть

$$h(n)=Z^{-1}\{H(z)\}. \tag{8.9}$$

Отсюда

$$H(z)=Z\{h(n)\}=\sum_{n=0}^{\infty} h(n)\,z^{-n}.$$

Пример. Дискретная система первого порядка, рассмотренная в примере предыдущего параграфа, описывается передаточной функцией

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z^{-1}}=\frac{\alpha z}{z-(1-\alpha)}.$$

Для того чтобы найти импульсную характеристику системы, необходимо согласно (8.9) подвергнуть передаточную функцию обратному z – преобразованию:

$$h(n)=Z^{-1}\left\{\frac{\alpha\ z}{z-(1-\alpha)}\right\}=\alpha\cdot(1-\alpha)^n.$$

Импульсная характеристика представлена на рис. 8.2.

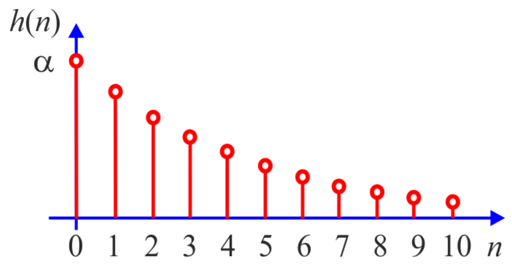

Рис. 8.2. Импульсная характеристика дискретной системы

Уравнение (8.8) в области изображений соответствует уравнение системы в области времени в виде свертки

$$y(n)=\sum_{\nu=0}^{n} h(\nu)\,x(n-\nu). \tag{8.10}$$

Таким образом, импульсная характеристика дискретной системы может быть использована для расчета реакции системы на произвольное внешнее воздействие при нулевых начальных условиях.

Произведя в формуле дискретной свертки (8.10) замену переменных $n-\nu=m$, $\nu=n-m$, получим

$$y(n)=\sum_{\nu=0}^{n} h(n-\nu)\,x(\nu)\,.$$

Таким образом, свертка обладает свойством коммутативности. Согласно этому свойству выходную последовательность $y(n)$, являющуюся реакцией системы с импульсной характеристикой $h(n)$ на последовательность $x(n)$, можно рассматривать как реакцию системы с импульсной характеристикой $x(n)$ на последовательность $h(n)$.

8.5. Частотная передаточная функция дискретной системы

Частотная передаточная функция дискретной системы может быть получена формальной заменой $z=e^{j\omega T}$ ($s=j\omega$), полученной отбрасыванием вещественной части переменной s преобразования Лапласа:

$$H(e^{j\omega T})=H(z)_{|z=e^{j\omega T}}\,.$$

В результате указанной замены в (8.6) получим

$$H(e^{j\omega T})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega T}+\ldots+b_{M-1}e^{-j\omega T(M-1)}+b_Me^{-j\omega TM}}{1+a_1e^{-j\omega T}+\ldots+a_{N-1}e^{-j\omega T(N-1)}+a_Ne^{-j\omega TN}}\,.$$

Частотная передаточная функция характеризует преобразующие свойства дискретной системы при гармоническом входном воздействии $x(n)$. Покажем это. Пусть на вход системы подается комплексная гармоническая последовательность

$$x(n)=a\cdot e^{j\omega Tn}\,.$$

Тогда, поскольку система линейна, последовательность на выходе может быть только вида

$$x(n)=b\cdot e^{j(\omega Tn+\varphi)}=b\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega Tn}\,.$$

Подставив $x(n)$ и $y(n)$ в разностное уравнение (8.3), получим

$$b\cdot e^{j\varphi}(e^{j\omega Tn}+a_1e^{j\omega T(n-1)}+\ldots+a_{N-1}e^{j\omega T(n-N+1)}+a_Ne^{j\omega T(n-N)})=$$
$$=a\cdot(b_0e^{j\omega Tn}+b_1e^{j\omega T(n-1)}+\ldots+b_{M-1}e^{j\omega T(n-M+1)}+b_Me^{j\omega T(n-M)}).$$

Перепишем полученное выражение в следующем виде

$$b\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega Tn}(1+a_1e^{-j\omega T}+\ldots+a_{N-1}e^{-j\omega T(N-1)}+a_Ne^{-j\omega TN})=$$
$$=a\cdot e^{j\omega Tn}\cdot(b_0+b_1e^{-j\omega T}+\ldots+b_{M-1}e^{-j\omega T(M-1)}+b_Me^{-j\omega TM}).$$

Отсюда с учетом (8.7) найдем

$$H(e^{j\omega T})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega T}+\ldots+b_{M-1}e^{-j\omega T(M-1)}+b_Me^{-j\omega TM}}{1+a_1e^{-j\omega T}+\ldots+a_{N-1}e^{-j\omega T(N-1)}+a_Ne^{-j\omega TN}}=\frac{b}{a}\cdot e^{j\varphi}$$

Таким образом, в общем случае частотная передаточная функция для каждого значения ω представляет собой комплексный коэффициент передачи дискретной системы. Функция $H(e^{j\omega T})$ является периодической по частоте с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д=2\pi/T=2\pi f_д$, так как $e^{j\omega T}=e^{j(\omega+k\omega_д)T}$ для произвольного целого числа k. Следовательно, дискретная система ведет себя одинаковым образом для всех частот, отличающихся от основной на значение, кратное $\omega_д$.

Частотная передаточная функция $H(e^{j\omega T})$ дает полное описание линейной стационарной дискретной системы. По этой функции могут быть определены любые другие характеристики.

8.6. Амплитудная и фазовая частотные характеристики

Представим частотную передаточную функцию линейной дискретной системы в виде

$$H(e^{j\omega T}) = H(\omega)\cdot e^{j\phi(\omega)},$$

где $H(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$, $\phi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T})$.

Функцию $H(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ называют амплитудной частотной функцией, ее график – амплитудной частотной характеристикой (АЧХ). Аргумент $\phi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T})$ называют фазовой частотной функцией, его график – фазовой частотной характеристикой (ФЧХ). В силу периодичности функции $H(e^{j\omega T})$ АЧХ и ФЧХ дискретной системы полностью при $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$. Для дискретных систем, передаточные функции которых имеют только вещественные коэффициенты, АЧХ $H(\omega)$ представляет собой четную функцию частоты, а ФЧХ $\phi(\omega)$ – нечетную функцию частоты. Следовательно, АЧХ и ФЧХ дискретной системы достаточно строить на частотном интервале $[0, \pi/T]$.

Чтобы упростить сопоставление частотных характеристик различных дискретных систем частоту ω нормируют. Как правило, используют два способа нормирования.

1. При первом способе применяют нормированную частоту $\tilde{\omega} = \omega T$. Период повторения для всех частотных характеристик в этом случае равен $\tilde{\omega}_д = 2\pi$ и строятся они обычно на интервале $[0, \pi]$ нормированной частоты.

2. При втором способе вводят нормированную частоту $r = \omega T/2\pi$. Период повторения для всех частотных характеристик в этом случае равен $r_д = 1$. Характеристики строят для $r \in [0; 0,5]$.

Пример. Рассмотрим дискретную систему первого порядка, описываемую передаточной функцией

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z^{-1}} = \frac{\alpha z}{z-(1-\alpha)}.$$

После подстановки $z = e^{j\omega T}$ получим частотную передаточную функцию:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)e^{-j\omega T}} = \frac{\alpha e^{j\omega T}}{e^{j\omega T}-(1-\alpha)}.$$

Если ввести нормированную частоту $r = \omega T/2\pi$, частотная передаточная функция примет вид

$$H(e^{j2\pi r}) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)e^{-j2\pi r}} = \frac{\alpha e^{j2\pi r}}{e^{j2\pi r}-(1-\alpha)}.$$

АЧХ и ФЧХ рассматриваемой системы определяются выражениями:

$$H(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + (1-\alpha)^2 - 2(1-\alpha)\cos 2\pi r}};$$

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\frac{(1-\alpha)\sin 2\pi r}{1-(1-\alpha)\cos 2\pi r}.$$

Частотные характеристики, рассчитанные по полученным выражениям, показаны на рис. 8.2.

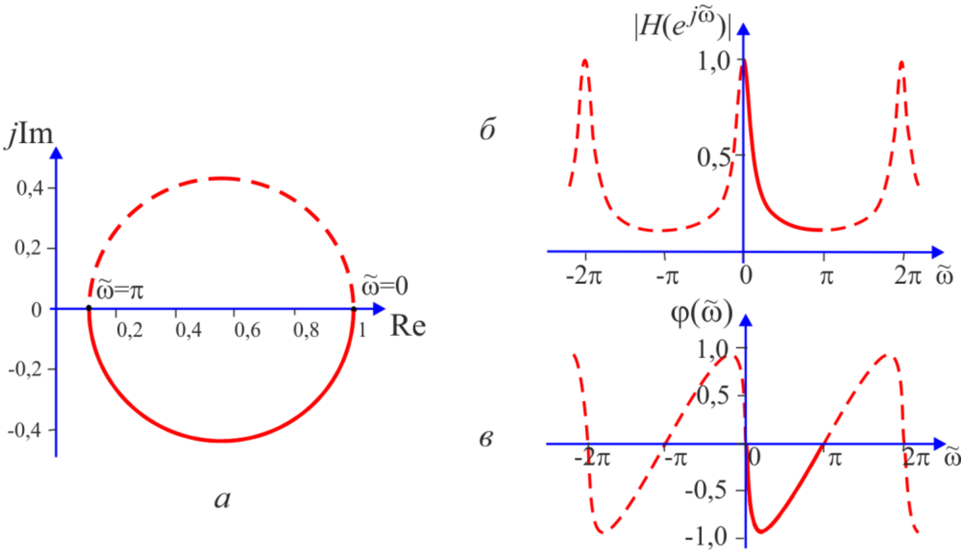

Рис. 8.3. Частотные характеристики дискретной системы:
а – АФЧХ, *б* – АЧХ, *в* – ФЧХ

8.7. Структурные схемы дискретной системы

Элементы структурных схем

Структурная схема – это графическая форма математической модели дискретной системы, заданной разностным уравнением. Как видно из разностного уравнения, в линейной стационарной системе с дискретными последовательностями выполняются следующие преобразования:

- сложение (вычитание) отсчетов;
- масштабирование (умножение отсчета на постоянный коэффициент);
- задержка (запоминание) отсчетов.

Для каждого из указанных преобразований определено соответствующее графическое обозначение (рис. 8.4).

На рис. 8.4,*а* и *б* показаны соответственно условные обозначения операций сложения и вычитания дискретных последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$:

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n);$$

$$y(n) = x_1(n) - x_2(n).$$

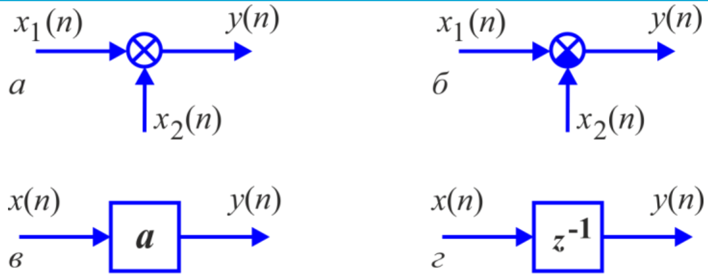

Рис. 8.4. Элементы структурных схем

Операция умножения на постоянный коэффициент обозначается в виде, показанном на рис. 8.4, *в*. Задержка отсчетов дискретных последовательностей на один интервал дискретизации обозначается так, как изображено на рис. 8.4, *г*.

Используя описанные условные обозначения, можно изобразить структурную схему любой линейной стационарной системы, причем не единственным способом. Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые варианты построения структурных схем дискретной системы. Эти варианты структурных схем еще называют формами реализации дискретных систем, поскольку согласно структурной схеме обычно выполняется расчет выходной дискретной последовательности.

Прямая форма

Прямая форма структурной схемы составляется непосредственно по разностному уравнению дискретной системы, записанному в виде

$$y(n) = -\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu y(n-\nu) + \sum_{\mu=0}^{M} b_\mu x(n-\mu),$$

или по передаточной функции

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^{M} b_\mu z^{-\mu}}{1 + \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu z^{-\nu}}. \qquad (8.11)$$

Структурная схема изображена на рис. 8.5. В структурной схеме для образования цепей, соответствующих преобразованию входной $x(n)$ и выходной $y(n)$ последовательностей используются отдельные элементы задержки (см. верхнюю и нижнюю части схемы). Затем эти цепи объединяются.

Недостаток прямой формы заключается в том, что реализация дискретной системы по этой схеме требует $(M + N)$ элементов задержки. В конечном счете это ведет к увеличению времени вычисления значений $y(n)$.

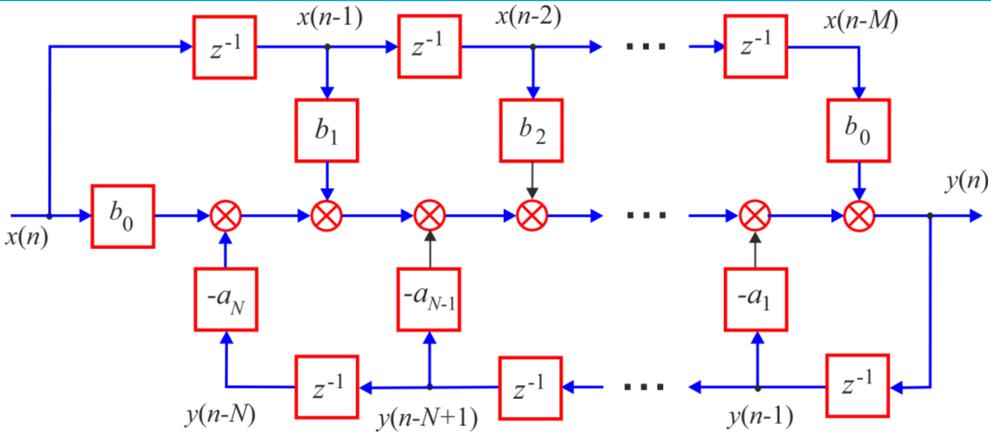

Рис. 8.5. Прямая форма структурной схемы

Первая каноническая форма

Канонической называют структурную схему дискретной системы, содержащую минимальное число элементов задержки. Построим первый вариант такой схемы.

Передаточную функцию (8.11) дискретной системы можно представить в виде

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z),$$

где

$$H_1(z) = \frac{G(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu z^{-\nu}}; \quad H_2(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \sum_{\mu=0}^{M} b_\mu z^{-\mu}.$$

Передаточным функциям $H_1(z)$ и $H_2(z)$ соответствуют разностные уравнения

$$g(n) = x(n) - \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu g(n-\nu);$$

$$y(n) = \sum_{\mu=0}^{M} b_\mu g(n-\mu).$$

Используя один и тот же набор элементов задержки, получим структурную схему, показанную на рис. 8.6.

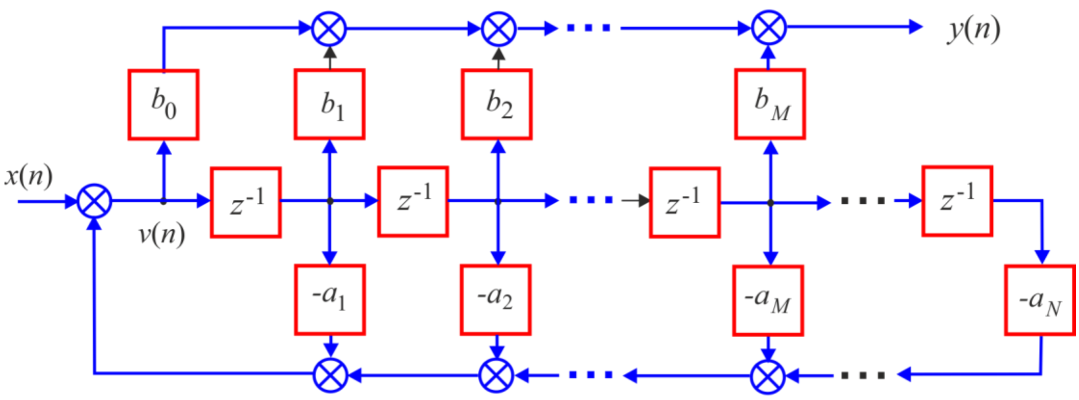

Рис. 8.6. Первая каноническая форма структурной схемы

Вторая каноническая форма

Разностное уравнение (8.9) дискретной системы можно записать в виде системы разностных уравнений

$$
\begin{aligned}
&y(n) = b_0 x(n) + g_1(n),\\
&g_1(n+1) = b_1 x(n) - a_1 y(n) + g_2(n),\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
&g_M(n+1) = b_M x(n) - a_M y(n) + g_{M+1}(n),\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
&g_N(n+1) = -a_N y(n).
\end{aligned}
$$

По этой системе уравнений, правильность которой легко проверить путем исключения промежуточных переменных $g_\nu(n)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, составлена структурная схема дискретной системы. Последовательности на выходе элементов задержки здесь обозначены через $g_\nu(n)$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$.

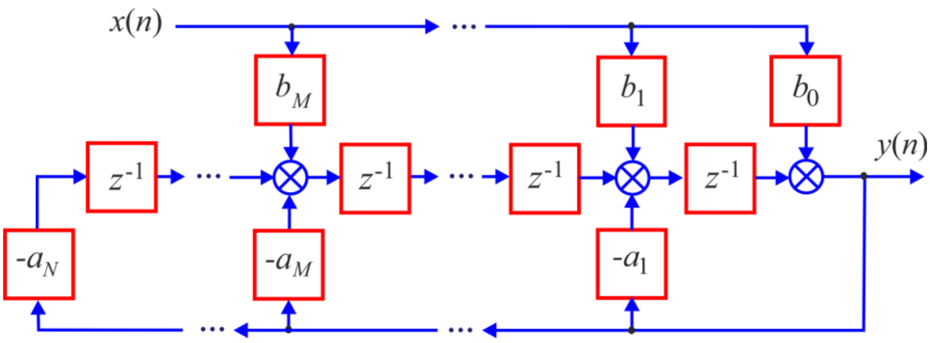

Рис. 8.7. Вторая каноническая форма структурной схемы

8.8. Устойчивость дискретных систем

Дискретная система, как и всякая система с обратной связью, может при определенных условиях стать неустойчивой.

Пусть на вход дискретной системы, описываемой разностным уравнением N -го порядка

$$
\begin{aligned}
&y(n+N) + a_1 y(n+N-1) + \ldots + a_{N-1} y(n+1) + a_N y(n) =\\
&\quad = b_0 x(n+N) + \ldots + b_{M-1} x(n+N-M+1) + b_M x(n+N-M).
\end{aligned}, \qquad (8.12)
$$

подано произвольное входное воздействие $x(n)$. Процессы в системе зависят от этого входного воздействия и начальных условий $y(0)$, $y(1)$, …, $y(N-1)$. Последовательность $y(n)$ на выходе системы может быть записана в виде

$$y(n) = y_\text{в}(n) + y_\text{c}(n),$$

где $y_\text{в}(n)$, $y_\text{c}(n)$ – составляющие, соответственно определяющие вынужденное и свободное движения системы.

Дискретная система асимптотически устойчива, если её собственное движение с течением времени затухает и стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} y_c(n) = 0 . \tag{8.13}$$

Если

$$\lim_{n\to\infty} y_c(n) = \infty ,$$

то дискретная система называется неустойчивой. Если, наконец,

$$\lim_{n\to\infty} y_c(n) = \text{const}$$

или не существует, то говорят, что дискретная система находится на границе устойчивости.

Собственное движение $y_c(n)$ дискретной системы является общим решением однородного разностного уравнения

$$y(n+N)+a_1 y(n+N-1)+\ldots+a_{N-1}y(n+1)+a_N y(n)=0 ,$$

полученного из (8.12). Это решение зависит от начальных условий $y(0), y(1), \ldots, y(N-1)$ и корней $z_1, z_2, \ldots, z_N$ характеристического уравнения

$$z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_{N-1} z + a_N = 0 .$$

Если среди корней характеристического уравнения отсутствуют кратные, свободное движение дискретной системы описывается формулой

$$y_c(n) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \, z_\nu^n . \tag{8.14}$$

Отсюда следует, что условие (8.13) будет выполнено тогда и только тогда, когда корни характеристического уравнения по модулю строго меньше единицы, т. е.

$$|z_\nu| < 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N .$$

Основное условие устойчивости. *Для того чтобы линейная дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (полюсы системы) были по модулю меньше единицы.*

Геометрически это означает, что корни характеристического уравнения (полюсы) устойчивой дискретной системы располагаются внутри единичного круга на z-плоскости. На рис. 8.8, *а* показано расположение полюсов устойчивой дискретной системы четвертого порядка. Если хотя бы один полюс системы находится за пределами единичной окружности (рис. 8.8, *б*), то дискретная система неустойчива. При наличии полюса на единичной окружности (рис. 8.8, *в*) система находится на границе устойчивости. Нули передаточной функции не влияет на устойчивость дискретной системы.

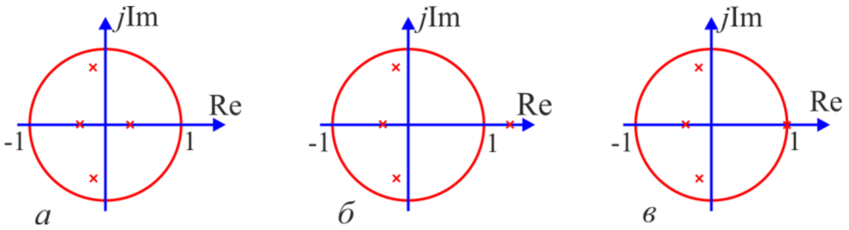

Рис. 8.8. Расположение полюсов дискретной системы:
а – устойчивая система, *б* – неустойчивая система,
в – система на границе устойчивости

8.9. Дискретное интегрирование

Интегрирование непрерывного сигнала описывается уравнением

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau .$$

Для приближенной реализации интегрирования в дискретной форме имеется ряд алгоритмов. Ограничим класс рассматриваемых алгоритмов дискретного интегрирования алгоритмами, которые можно описать разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) + \delta y[x(n), x(n-1), T], \qquad (8.15)$$

где $y(n)$ – выходная последовательность, представляющая собой оценку интеграла, $\delta y[x(n), x(n-1), T]$ – величина приращения на очередном интервале дискретизации, зависящая от применяемого способа интегрирования.

Интегрирование по методу прямоугольников. Величина приращения в уравнении (8.15) находится как площадь прямоугольника (рис. 8.9,*а*). В этом случае разностное уравнение дискретного интегратора принимает вид

$$y(n) = y(n-1) + T \cdot x(n-1) .$$

Подвергнув уравнение z -преобразованию, получим передаточную функцию дискретного интегратора

$$H_{п}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} .$$

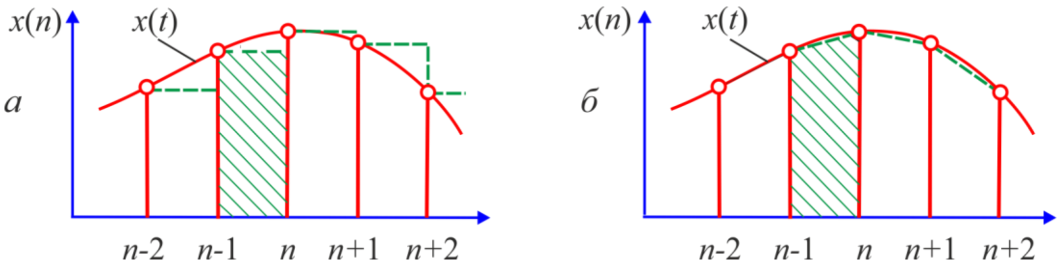

Рис.8.9. Геометрическое представление интегрирования:
а – по методу прямоугольников, *б* – по методу трапеций

Интегрирование по методу трапеций. Приращение интеграла в уравнении (8.15) численно равно площади трапеции, показанной на рис. 8.9,*б*). Дискретный интегратор, реализующий интегрирование по методу трапеций, описывается разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) + \frac{T}{2} \cdot [x(n-1) + x(n)] .$$

Подвергнув это уравнение z -преобразованию, найдем передаточную функцию дискретного интегратора

$$H_{т}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} .$$

8.10. Дискретное дифференцирование

Идеальное дифференцирование непрерывного сигнала определяется выражением

$$y(t) = \frac{d\,x(t)}{d\,t}.$$

Как известно, операторы дифференцирования s и сдвига z связаны соотношением

$$s = \frac{1}{T}\ln z\,. \tag{8.16}$$

Функция (8.16) может быть разложена в ряд тремя способами. Первые слагаемые этих разложений можно было бы рассматривать как варианты описания алгоритмов дифференцирования. Однако одно из этих разложений приводит к неустойчивому алгоритму дифференцирования, а другое – к алгоритму дифференцирования, который не может быть реализован в системах, работающих в реальном времени. Третий способ разложения приводит к двум следующим алгоритмам.

Дифференцирование по методу простой разности. Запишем функцию (8.16) в виде ряда:

$$s = \frac{1}{T}\left[(1 - z^{-1}) - \frac{1}{2}(1 - z^{-1})^2 + \frac{1}{3}(1 - z^{-1})^3 - \ldots\right]. \tag{8.17}$$

Удержав в (8.17) первое слагаемое, получим передаточную функцию цифрового дифференциатора

$$H_{\text{дп}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})\,.$$

Отсюда найдем разностное уравнение

$$y(n) = \frac{1}{T}[x(n) - x(n-1)]\,.$$

Дифференцирующий нерекурсивный фильтр. Если в (8.17) учесть два первых члена ряда, то после преобразований получим

$$H_{\text{дн}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2T}(3 - 4z^{-1} + z^{-2})\,. \tag{8.18}$$

Передаточной функции (8.18) соответствует разностное уравнение

$$y(n) = \frac{1}{2T}\left[3\cdot x(n) - 4\cdot x(n-1) + x(n-2)\right].$$