Тема 7. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

Дискретизация аналоговых сигналов –Квантование по времени и по уровню – Дискретные и цифровые последовательности – Преобразование дискретных последовательностей – Z-преобразование и его свойства – Дискретное преобразование Фурье.

7.1. Дискретизация аналоговых сигналов. Дискретные и цифровые последовательности

Большинство сигналов имеют аналоговую природу. Они изменяются непрерывно во времени и могут принимать любые значения в некоторой области. Ввести такой сигнал в компьютер и обработать его невозможно, так как на любом интервале времени он имеет бесконечное множество значений. Поэтому в системах цифровой обработки сигнал представлен значениями сигнала, взятыми в отдельные дискретные моменты времени (рис. 7.1). Эти значения называются *отсчетами.*

Отсчеты могут быть взяты в произвольные моменты времени t_n, $n = 0, 1, \ldots, N$ (рис. 7.1, *а*). Тогда сигнал будет представлен двумя последовательностями чисел: последовательностью $t_0, t_1, \ldots, t_N$ и последовательностью отсчетов $x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_N)$. Меняя длительность интервала между отсчетами в зависимости от свойств аналогового сигнала, можно повысить точность их сохранения. Однако в виду сложности реализации данный способ не нашел широкого применения в системах обработки сигналов.

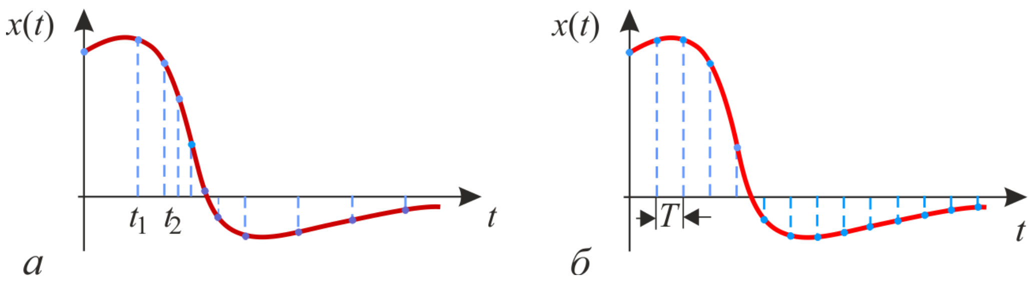

Рис. 7.1. Представление сигнала последовательностью отсчетов:
а – в произвольные дискретные моменты времени t_i;
б – в дискретные моменты времени $T \cdot n$, $n = 0,1,2,\ldots$, $T = \text{const}$.

На практике получил распространение другой способ представления сигнала последовательностью, в которой отсчеты располагаются через равные промежутки времени T (рис. 7.1, *б*).

● В этом случае сигнал определяется последовательностью его значений $x(0), x(T), x(2T), \ldots$. Эту последовательность называют *дискретной последовательностью*. Обозначают дискретную последовательность $x(n)$.

● Аналитически дискретная последовательность $x(n)$ может быть описана функцией, которая называется *решетчатой*.

● Интервал T называют *периодом дискретизации*, или интервалом дискретизации. Величина, обратная периоду дискретизации, называется *частотой дискретизации*, или частотой взятия отсчетов $f_д$.

● Преобразование аналогового сигнала в последовательность отсчетов называется *дискретизацией* (*квантованием*) по времени.

Очевидно, что представление сигнала дискретной последовательностью отсчетов приводит к потере информации о поведении сигнала в промежутках между отсчетами. Чтобы эти потери были минимальны, период дискретизации T необходимо уменьшать. Однако уменьшение периода дискретности приводит к увеличению числа отсчетов и, как следствие, к увеличению объема вычислений. Поэтому при выборе периода дискретизации приходится искать компромиссное решение.

Для точного представления значения сигнала в дискретные моменты времени требуются числа бесконечной разрядности. В системах обработки сигналов разрядность чисел ограничена. Представление дискретной последовательности числами конечной разрядности называется *квантованием по уровню*. Вся область значений сигнала при этом разбивается на уровни, количество которых зависит от числа разрядов. Эти уровни называются *уровнями квантования*. Расстояние между ними называется *шагом квантования*. Квантование сигнала по уровню – принципиально нелинейная операция.

Операции дискретизации по времени и квантования по уровню выполняются в аналого-цифровых преобразователях (АЦП). Если пренебречь явлениями гистерезиса и запаздывания, АЦП можно представить в виде последовательного соединения импульсного элемента, осуществляющего квантование по времени, и многоступенчатого симметричного релейного элемента со статической характеристикой $\Phi[x(n)]$, осуществляющего квантование по уровню (рис. 7.2).

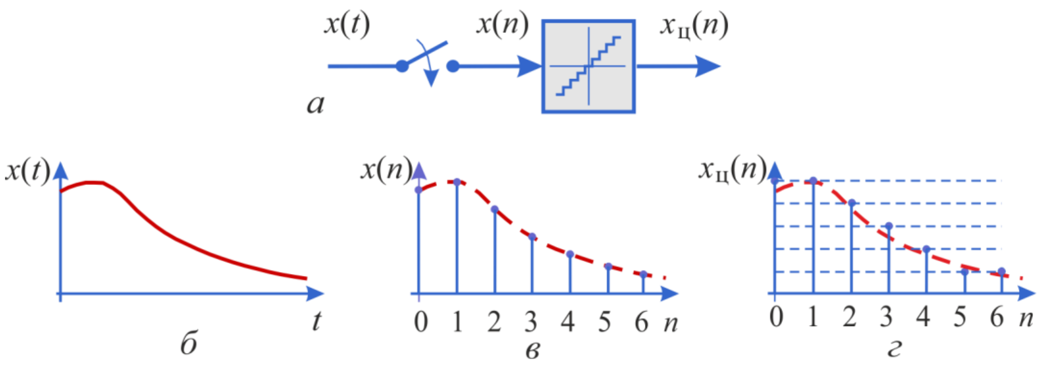

Рис.7.2. Образование дискретной и цифровой последовательности:
а – схема замещения цифро-аналогового преобразователя;
б – аналоговый сигнал; *в* – дискретная последовательность;
г – цифровая последовательность, полученная округлением

Элементы цифровой последовательности $x_ц(n)$ могут принимать лишь ряд дискретных значений $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_l, \ldots, h_{N-1}$, число которых зависит от количества используемых разрядов.

Известны способы квантования по уровню с использованием усечения или округления значения дискретного отсчета сигнала. Если осуществляется усечение, то дискретный отсчет, находящийся между уровнями h_{l-1} и h_l, заменяется нижним значением h_{l-1}. Усечение приводит к погрешности, максимальное значение которой равно весу младшего из удерживаемых разрядов. При этом ошибка всегда имеет один и тот же знак (усеченное значение не может быть больше исходного).

При округлении дискретному отсчету, находящемуся между уровнями h_{l-1} и h_l, присваивается ближайшее значение. Ошибка для этого способа квантования может быть как положительной, так и отрицательной, а ее модуль не превосходит веса старшего из отброшенных разрядов.

Дискретные последовательности, подвергнутые процедуре квантования по уровню, принято называть цифровыми дискретными последовательностями. Примером цифровой последовательности могут служить сведения о температуре, передаваемые несколько раз в сутки по радио.

7.2. Типовые дискретные последовательности

Единичный импульс

Единичный импульс (рис. 7.3, *а*) определяется выражением

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

В дискретных системах этот импульс играет такую же роль, что и дельта-функция $\delta(t)$ в анализе аналоговых сигналов. Но между ними имеется очень важное отличие: единичный импульс $\delta(n)$ является физически реализуемым, а дельта-функция $\delta(t)$ есть математическая абстракция.

На рис. 7.3, *б* изображен единичный импульс, задержанный на n_0 интервалов дискретности. Описывающее его выражение выглядит так:

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0, \\ 0, & n \neq n_0. \end{cases}$$

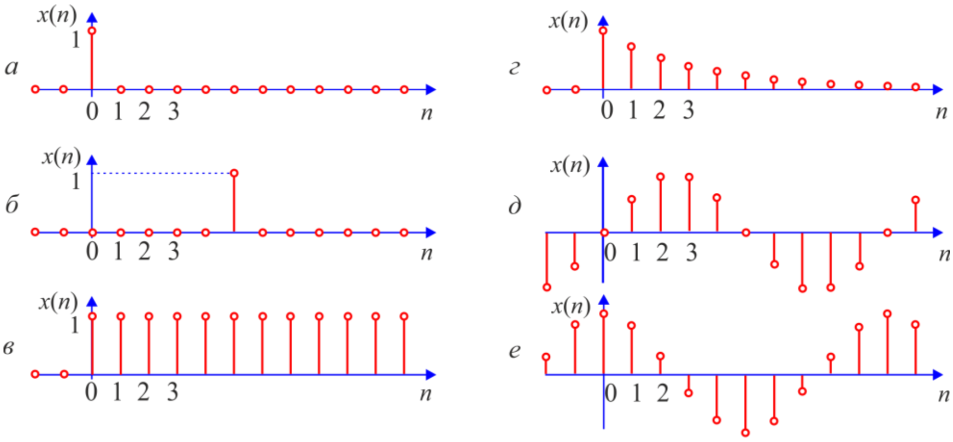

Рис. 7.3. Графики типовых дискретных последовательностей:
а – $x(n) = \delta(n)$; *б* – $x(n) = \delta(n - n_0)$; *в* – $x(n) = 1(n)$;
г – $x(n) = A \cdot \exp(-an) \cdot 1(n)$; *д* – $x(n) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} n\right)$; *е* – $x(n) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} n\right)$.

Единичная ступенчатая последовательность

Единичная ступенчатая последовательность $1(n)$ (рис. 7.3, *в*) есть аналог единичной ступенчатой функции $1(t)$ и описывается формулой

$$1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Экспоненциальная последовательность

Экспоненциальная последовательность образуется в результате дискретизации экспоненты $x(t) = A \cdot \exp(\pm\alpha \cdot t) \cdot 1(t)$. Произведя замену $t = Tn$ и обозначив $a = \alpha T$, получим решетчатую функцию, описывающую экспоненциальную последовательность:

$$x(n) = A \cdot \exp(\pm a\, n) \cdot 1(n) = \begin{cases} A \cdot \exp(\pm a\, n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

На рис. 7.3, *г* показан график убывающей экспоненциальной последовательности.

Синусоидальная последовательность

Синусоидальная дискретная последовательность получается вследствие дискретизации синусоидального сигнала, описываемого функцией

$$x(t) = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} t\,,$$

где T_0 – период. После замены $t = Tn$ будем иметь

$$x(n) = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} Tn = A \cdot \sin \frac{2\pi}{N} n\,.$$

Здесь $N = T_0/T$ – число интервалов дискретности на периоде. Синусоидальная последовательность показана на рис. 7.3, *д*.

Легко заметить, что синусоидальная последовательность является периодической только в том случае, когда N – целое число.

Косинусоидальная последовательность

Аналогично может быть получена косинусоидальная дискретная последовательность

$$x(n) = A \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} Tn = A \cdot \cos \frac{2\pi}{N} n\,.$$

Графическое представление этой последовательности дано на рис. 7.3, *е*.

7.3. Описание и преобразование дискретных последовательностей

Для описания произвольных последовательностей могут быть использованы различные способы:

- в виде последовательности отсчетов $\{x(0), x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots\}$;
- суммы взвешенных и задержанных единичных импульсов

$$x(n) = \sum_{\nu - 0}^{\infty} x(\nu)\delta(n - \nu);$$

- решетчатой функции $x(n) = F(n)$.

Пример 1. Последовательность, образованная в результате дискретизации экспоненты $x(t) = \exp(-0.5t)\cdot 1(t)$ с периодом $T = 0.2$ с, можно задать:

- в виде последовательности отсчетов $x_n = \{x(0), x(1), x(2), \ldots\}$, где $x(0) = \exp(0) = 1$, $x(1) = \exp(-0.1) = 0.9048$, $x(2) = \exp(-0.2) = 0.8187$ и т.д.;
- с помощью единичных импульсов в виде

$$x(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp(-0{,}1\nu)\cdot\delta(n-\nu) = \delta(n) + 0{,}9048\delta(n-1) + 0{,}8187\delta(n-2) + \ldots;$$

- в виде решетчатой функции $x(n) = \exp(-0.1n)\cdot 1(n)$.

Собственно цифровая обработка сигналов заключается в преобразовании некоторой дискретной (цифровой) последовательности $x(n)$ в другую последовательность $y(n)$ с помощью определенного алгоритма. Рассмотрим некоторые базовые преобразования дискретных последовательностей.

1. Масштабирование. При масштабировании дискретная последовательность $y(n)$ образуется путем умножения каждого элемента дискретной последовательности $x(n)$ на постоянный множитель λ:

$$y(n) = \lambda \cdot x(n).$$

2. Смещение. При этом дискретная последовательность $y(n)$ получается смещением каждого элемента дискретной последовательности $x(n)$ на фиксированное значение независимой переменной n_0 в ту или другую сторону. При этом

$$y(n) = x(n \mp n_0).$$

Здесь знаку «–» соответствует задержка последовательности на n_0 интервалов дискретности, а знаку «+» – опережение.

3. Разности дискретной последовательности. Теория непрерывных функций использует понятие дифференцирования, и в результате получают производные различных порядков. В теории дискретных последовательностей аналогичную роль играют понятия *разностей*.

Аналогом первой производной непрерывной функции является либо *первая прямая разность*

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n),$$

либо *первая обратная разность*

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1).$$

Прямая разность определяется в дискретный момент времени $\bar{t} = n$ по будущему значению дискретной последовательности $\bar{t} = n+1$. Это можно сделать в тех случаях, когда будущее значение известно, либо, если это будущее значение можно вычислить. Обратная разность определяется для момента времени $\bar{t} = n$ по прошлому значению дискретной последовательности в момент времени $\bar{t} = n-1$.

Аналогом второй производной непрерывной функции для дискретной последовательности служат вторые разности:

прямая вторая разность

$$\Delta^2 x(n) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n);$$

обратная вторая разность

$$\nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1).$$

Очевидно, сказанное выше относительно возможности вычисления прямой и обратной разностей сохраняют свою силу и здесь.

Прямая и обратная разности m-го порядка определяются формулами:

$$\Delta^m x(n) = \Delta^{m-1} x(n+1) - \Delta^{m-1} x(n);$$

$$\nabla^m x(n) = \nabla^{m-1} x(n) - \nabla^{m-1} x(n-1).$$

Из способа образования разностей различных порядков видно, что разности дискретных последовательностей, являясь аналогами производной непрерывной функции, характеризуют локальные свойства дискретной последовательности вблизи некоторой точки. Разности, вместе с тем, обладают некоторыми отличительными особенностями.

- Если дискретная последовательность определена только для положительных значений аргумента, то есть $x(n) = 0$ при $n < 0$, то в точке $n = 0$ m-я обратная разность $\nabla^m x(0) = x(0)$ для любого целого положительного m.
- Разность любого порядка может быть выражена через значения исходной дискретной последовательности. Например, прямая и обратная разности второго порядка могут быть определены формулами:

$$\Delta^2 x(n) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n) = x(n+2) - 2 \cdot x(n+1) + x(n);$$

$$\nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1) = x(n) - 2 \cdot x(n-1) + x(n-2).$$

4. Сумма дискретной последовательности. В теории непрерывных функций используется интегрирование. Аналогами интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до t для дискретной последовательности является *сумма*

$$\sigma(n) = \sum_{m=0}^{n-1} x(m).$$

Интервал между соседними значениями дискретной последовательности равен единице. Поэтому сумма, по существу, равна площади под ступенчатой огибающей дискретной последовательности.

Аналогия между производными и интегралом функций непрерывного аргумента и конечными разностями и суммой дискретных последовательностей является чисто формальной. Достаточно отметить, что конечные разности и сумма дискретных последовательностей существуют всегда, в то время как для дифференцируемости и интегрируемости функций непрерывного аргумента требуется соблюдение определенных условий.

7.4. Представление дискретной последовательности в виде дискретной функции времени

Математическое представление дискретной последовательности в виде решетчатой функции не всегда оказывается удобным. В частности к решетчатой функции нельзя применить интегральные преобразования Лапласа и Фурье, получившие широкое распространение при анализе непрерывных сигналов. Для того чтобы применить указанные преобразования, определим функцию непрерывного времени, однозначно связанную с решетчатой функцией.

Рассмотрим преобразование непрерывного сигнала с помощью идеального дискретизатора (рис. 7.4,*а*). На выходе идеального дискретизатора образуется последовательность мгновенных импульсов (дельта-функций Дирака), которые появляются в дискретные моменты времени nT, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и имеют площадь, равную значению $x(nT)$ непрерывного сигнала в дискретные моменты времени. Математически эта последовательность импульсов определяется выражением

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT).$$

Идеальную дискретизацию можно представить как модуляцию непрерывного сигнала $x(t)$, когда «несущей» является непрерывная последовательность единичных мгновенных импульсов

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

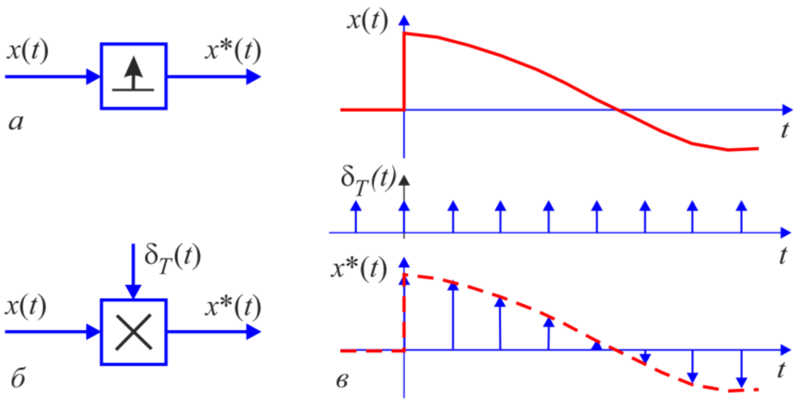

Рис. 7.4. Представление дискретной последовательности в виде дискретной функции времени

В этом случае функция $x^*(t)$ образуется в результате умножения (рис. 7.4,*б*) входного сигнала $x(t)$ на последовательность $\delta_T(t)$:

$$x^*(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT).$$

Дискретная функция времени $x^*(t)$ содержит ту же самую информацию о значениях непрерывного сигнала в дискретные моменты времени, что и дискретная последовательность. И в то же время она может быть подвергнута преобразованиям Лапласа и Фурье.

7.5. Дискретное преобразование Лапласа. Z - преобразование

Рассмотрим применение преобразования Лапласа для анализа дискретных функций времени

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cdot\delta(t-Tn) .$$

Применение преобразования Лапласа к дельта-функции $\delta(t)$ дает

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 .$$

Согласно теореме смещения изображение по Лапласу дельта-функции, сдвинутой на nT , равно

$$L\{\delta(t-nT)\} = e^{-nTs} .$$

Найдем изображение дискретной функции времени $x^*(t)$:

$$X^*(s) = L\{x^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-nTs} . \qquad (7.1)$$

Это выражение определяет математическую операцию, называемую дискретным преобразованием Лапласа (D-преобразованием). Видно, что в дискретное преобразование Лапласа переменная s входит в виде e^{-Ts} и, следовательно, это преобразование не является рациональной функцией от s. Поэтому проводить анализ дискретных функций времени в плоскости s трудно.

Дискретное преобразование Лапласа является рациональной функцией от e^{Ts}. Использовав подстановку

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma+j\omega)} \qquad (s = \frac{1}{T}\ln z) ,$$

выражение (7.1) можно переписать в виде

$$X(z) = X^*(\frac{1}{T}\ln z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} . \qquad (2)$$

Полученная функция $X(z)$ представляет уже рациональную функцию относительно переменной z . Она определяет собой прямое z -преобразование, являющееся вариантом преобразования Лапласа применительно к дискретным функциям времени. Обозначается прямое z -преобразование

$$X(z) = Z\{x(n)\}$$

и называется z -изображением дискретной функции.

D -преобразование и z -преобразование эквивалентны. Однако при использовании z -преобразования анализ дискретных функций во многом подобен анализу непрерывных функций в плоскости s . Кроме того, преимуществом z -преобразования является легкость обратного преобразования.

Комплексная функция $X(z)$ определена лишь для тех значений переменной $z = re^{j\phi}$, при которых ряд сходится. Условием сходимости ряда (2) является

$$|X(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |x(n) z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| r^{-n} < \infty .$$

Множество значений z, для которых ряд (2) сходится, называют *областью сходимости*. Область сходимости определяется радиусом сходимости R. Величина R зависит от положения особых точек (полюсов) функции $X(z)$.

Пример 1. Дана функция $x(n) = A \cdot \delta(n)$. Формула (2) в этом случае содержит единственное слагаемое:

$$X(z) = A .$$

Пример 2. Дана ступенчатая функция $x(n) = A \cdot 1(n)$. В соответствии с формулой (2) изображение этой функции имеет вид

$$X(z) = A + A z^{-1} + A z^{-2} + \dots .$$

Сумму полученной бесконечной геометрической прогрессии можно записать в явной форме:

$$X(z) = A \frac{1}{1 - z^{-1}} = A \frac{z}{z - 1}, \quad |z^{-1}| < 1 \quad (\text{или } |z| > 1) .$$

Пример 3. Дана экспоненциальная функция $x(n) = e^{-an} \cdot 1(n)$ (a – действительное число). На основании формулы (2) запишем

В соответствии с определением z-преобразования запишем

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a} z^{-1})^n .$$

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии с показателем, меньшим единицы, получим

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-a}} .$$

Ряд сходится, то есть функция $X(z)$ является аналитической при $|e^{-a} z^{-1}| < 1$ (или $|z| > e^{-a}$).

7.6. Свойства прямого *Z*-преобразования

Между дискретной функцией $x(n)$ и ее изображением $X(z)$ существует однозначное соответствие. Для решения практических задач необходимо знать связь между изменениями дискретной функции и соответствующими изменениями изображения.

Линейность *Z*-преобразования

Если решетчатые функции $x_1(n), \dots, x_n(n)$ имеют соответственно изображения $X_1(z), \dots, X_n(z)$, то справедливы следующие равенства:

$$Z\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(n) \right\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(z) ,$$

$$Z^{-1}\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(z) \right\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(n) ,$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – постоянные коэффициенты. Это свойство следует непосредственно из определения Z – преобразования.

Изображения смещенной дискретной функции

Пусть дискретная функция $x(n)$ имеет изображение $X(z)$.

Рассмотрим дискретную функцию $x(n-m)$, описывающую дискретную последовательность, задержанную на m интервалов. По формуле прямого Z-преобразования, если обозначить $r = n - m$, получим

$$Z\{x(n-m)\} = \sum_{r=-m}^{\infty} x(r) z^{-(n+r)} =$$

$$= z^{-m}\left[\sum_{r=0}^{\infty} x(r) z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} x(r) z^{-r}\right] = z^{-m}\left[X(z) + \sum_{r=-m}^{-1} x(r) z^{-r}\right].$$

Если для исходной дискретной функции $x(n)$ выполняется условие $x(n) = 0$ при $n < 0$, формула упрощается и принимает вид

$$Z\{x(n-m)\} = z^{-m} X(z).$$

Рассмотрим дискретную функцию $x(n+m)$, которая описывает дискретную последовательность, упреждающую исходную на m интервалов. Применив прямое Z-преобразование, найдем

$$Z\{x(n+m)\} = z^{m}\left[X(z) + \sum_{r=0}^{m-1} x(r) z^{-r}\right].$$

Формула принимает вид

$$Z\{x(n+m)\} = z^{m} X(z),$$

если для исходной дискретной функции $x(n)$ выполняется условие $x(n) = 0$ при $n = 0, 1, \ldots, m-1$.

Изображения разностей дискретной функции

Для первой обратной разности на основании теорем линейности и запаздывания найдем

$$Z\{\nabla x(n)\} = Z\{x(n) - x(n-1)\} =$$

$$= X(z) - z^{-1}[X(z) + x(-1) z = \frac{z-1}{z} X(z) - x(-1).$$

Если для отрицательных значений n дискретная функция равна нулю, то формула упрощается:

$$Z\{\nabla x(n)\} = \frac{z-1}{z} X(z).$$

Для первой прямой разности на основании теорем линейности и запаздывания получим

$$Z\{\Delta x(n)\} = Z\{x(n+1) - x(n)\} =$$

$$= z[X(z) - x(0)] - X(z) = (z-1) X(z) - z\,x(0).$$

Если $x(0) = 0$, то изображение первой прямой разности равно

$$Z\{\Delta x(n)\} = (z-1)\,X(z).$$

Аналогичным образом можно получить формулы для изображений m -й обратной и прямой разностей.

Изображения суммы дискретной функции

Сумма дискретной последовательности определяется формулой

$$\sigma(n) = \sum_{m=0}^{n-1} x(n).$$

Составим первую прямую разность суммы

$$\Delta\sigma(n) = \sigma(n+1) - \sigma(n) = x(n)$$

и, полагая $\sigma(0) = 0$, возьмем z -преобразование от правой и левой частей. Получим

$$(z-1)Z\{\sigma(n)\} = X(z).$$

Отсюда

$$Z\{\sigma(n)\} = \frac{1}{z-1}X(z).$$

Свертка дискретных функций

Если $X_1(z) = Z\{x_1(n)\}$ и $X_2(z) = Z\{x_2(n)\}$, то можно показать, что

$$X_1(z)X_2(z) = Z\{\sum_{\nu=0}^{n} x_1(\nu)\,x_2(n-\nu)\} = Z\{\sum_{\nu=0}^{n} x_1(n-\nu)\,x_2(\nu)\}.$$

Эта формула аналогична соответствующему выражению для свертки двух непрерывных функций.

7.7. Обратное *Z*-преобразование

Обратное *Z*-преобразование позволяет определить дискретную последовательность $x(n)$ по её *z*-изображению $X(z)$ и сокращённо записывается в виде

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}.$$

Теория обратного *Z*-преобразования базируется на так называемой формуле обращения

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\,z^{n-1}dz. \qquad (3)$$

Интеграл в правой части формулы обращения берется по окружности радиуса ρ с центром в начале координат плоскости z (рис. 7.5). Радиус окружности находится из выражения

$$\rho > \max_{\nu}|z_\nu|,$$

в котором z_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ – особые точки функции $X(z)$.

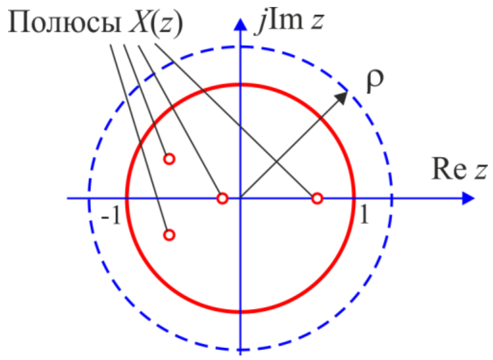

Рис. 7.5. Особые точки функции $X(z)$ и контур интегрирования

Контурный интеграл (3) удобно вычислять с помощью теоремы о вычетах. Согласно этой теореме контурный интеграл равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, расположенных в области, охватываемой окружностью радиуса ρ:

$$x(n) = \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_\nu} [X(z) z^{n-1}].$$

Для простого полюса z_ν вычет вычисляется по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} [X(z) z^{n-1}] = \lim_{z \to z_\nu} [(z - z_\nu) X(z) z^{n-1}],$$

а для полюса порядка m – по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} [X(z) z^{n-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_\nu} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_\nu) X(z) z^{n-1}].$$

В технических приложениях обычно изображение $X(z)$ представляет собой дробно-рациональную функцию z и для вычисления обратного z-преобразования используются методы разложения на простые дроби и в степенной ряд.

Метод разложения на простые дроби

Если изображение представляет собой простейшую табличную форму (см. табл. 1), то определение оригинала не представляет трудностей. Сложную дробно-рациональную функцию можно представить в виде суммы дробей первой степени, каждая из которых является табличной формой. Рассмотрим случай, когда изображение $X(z)$ представляет собой отношение двух полиномов:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$

причем будем полагать, что степень полинома $B(z)$ не выше, чем степень полинома $A(z)$, а корни уравнения $A(z) = 0$ простые.

Представим изображение $X(z)$ в виде суммы

$$X(z) = \frac{zB_0(z)}{A(z)} = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \frac{z}{z - z_\nu}, \qquad (7.4)$$

где z_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) – корни уравнения $A(z) = 0$, $c_\nu = \dfrac{B_0(z_\nu)}{A'(z_\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \dots, N$). Элементарному слагаемому $z/(z - z_\nu)$, как видно из табл. 1, соответствует оригинал $z_\nu^n = e^{-a_\nu T n}$, где $a_\nu = \dfrac{1}{T}\ln\dfrac{1}{z_\nu}$.

Поэтому дискретную последовательность, соответствующую (7.4), запишем в следующем виде:

$$x(n) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \cdot z_\nu^n .$$

Пример. Дано z -изображение

$$X(z) = \frac{zB_0(z)}{A(z)} = \frac{z}{z^2 - 1,5z + 0,5} .$$

Корни уравнения $A(z) = 0$ равны: $z_1 = 1$, $z_1 = 0,5$. Тогда знаменатель представим в виде $A(z) = (z-1)(z-0,5)$ и запишем $X(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$X(z) = \frac{c_1 z}{z-1} + \frac{c_2 z}{z-0,5} .$$

Рассчитаем значения коэффициентов:

$$c_1 = 1/(2z - 1,5)_{z=z_1} = 2 ,$$

$$c_2 = 1/(2z - 1,5)_{z=z_2} = -2 .$$

Тогда

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0,5} .$$

Обратившись к табл. 1, находим дискретную последовательность

$$x(n) = 2 \cdot 1(n) - 2 \cdot 0,5^n .$$

Рассчитав по полученному выражению значения $x(n)$ для различных n, запишем дискретную последовательность в следующем виде:

$$x(n) = \delta(n-1) + 1,5\delta(n-2) + 1,75\delta(n-3) + 1,875\delta(n-4) + \dots .$$

Метод разложения в ряд Лорана

Согласно данному методу изображение $X(z)$ разлагается в ряд по степени z^{-1} с помощью последовательного деления. При выполнении деления полиномы следует располагать по убывающим степеням z так, что

$$X(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \dots + b_1 z^1 + b_0}{z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0}, \quad N \ge M .$$

Разложение получается в виде

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots .$$

Коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \dots$ равны значениям дискретной последовательности $x(n)$: $x(0) = c_0$, $x(1) = c_1$, $x(2) = c_2$ и т. д. Следовательно,

$$x(n) = c_0\delta(n) + c_1\delta(n-1) + c_2\delta(n-2) + \dots$$

Достоинством метода является возможность вычисления оригинала $x(n)$ без нахождения полюсов изображения $X(z)$.

Пример. Дано z -изображение

$$X(z)=\frac{zB_0(z)}{A(z)}=\frac{z}{z^2-1,5z+0,5}.$$

Выполнив деление, будем иметь

$$X(z)=z^{-1}+1,5z^{-2}+1,75z^{-3}+1,875z^{-4}+\ldots$$

Полученному z -изображению соответствует дискретная последовательность

$$x(n)=\delta(n-1)+1,5\delta(n-2)+1,75\delta(n-3)+1,875\delta(n-4)+\ldots$$

Таким образом, результаты решения задачи обратного преобразования, найденные методами разложения на простые дроби и разложения в ряд Лорана, совпали.

7.8. Преобразование Фурье дискретного сигнала

Пусть дана дискретная последовательность $x(n)$, $n=0,1,2,\ldots$. Бессмысленно говорить о преобразовании Фурье от этой дискретной последовательности. Однако, как показано выше, дискретную последовательность $x(n)$ можно связать с временной функцией

$$x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot\delta(t-nT).$$

Эта функция имеет преобразование Фурье

$$X^*(j\omega)=\Im\{x^*(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\cdot e^{-j\omega Tn}. \qquad (7.1)$$

В то же время дискретная последовательность $x(n)$ имеет z-преобразование

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\cdot z^{-n}. \qquad (7.2)$$

Если сравнить (7.1) и (7.2), можно увидеть, что преобразование Фурье представляет собой частный случай z-преобразования, то есть преобразование Фурье можно получить как z-преобразование, вычисленное на единичной окружности z-плоскости:

$$X^*(e^{j\omega T})=X(z)_{|z=e^{j\omega T}}.$$

Из выражения (1) видно, что спектральная характеристика является периодической функцией по частоте и период $\omega_д=2\pi/T$. Спектр вещественного сигнала $x^*(t)$ полностью описывается в основной полосе частот $[0,\omega_д/2]$. Составляющие спектра, расположенные в этой полосе частот, называют *основным спектром*.

Соотношение, устанавливающее связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов, имеет вид

$$X^*(e^{j\omega t})=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_а[j(\omega+m\omega_д)],$$

где $\omega_д=2\pi/T$.

Иными словами, спектр дискретного сигнала (с точностью до постоянного множителя $1/T$) равен сумме спектров исходного аналогового сигнала, смещенных друг относительно друга на все возможные значения частоты, кратные частоте дискретизации, то есть на значения $m\omega_д$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример. Пусть экспоненциальный импульс $x(t) = A \cdot \exp(-\alpha\, t)$, $t \ge 0$, подвергнут дискретизации с интервалом T. Найдем спектральную характеристику сигнала

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot e^{-\alpha T n}\, \delta(t - nT).$$

Согласно (1) получим

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot e^{-\alpha T n}\, e^{-j\omega T n}.$$

Применив формулу суммы геометрической прогрессии, найдем

$$X^*(\omega) = \frac{A}{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega T}} = \frac{A \cdot e^{-j\omega T}}{e^{-j\omega T} - e^{-\alpha T}}.$$

На рис. 7.6 представлены спектральные характеристики, построенные по полученному выражению. Амплитудная и фазовая спектральные характеристики на интервале частот от 0 до $2\pi/T$ выделены сплошной линией.

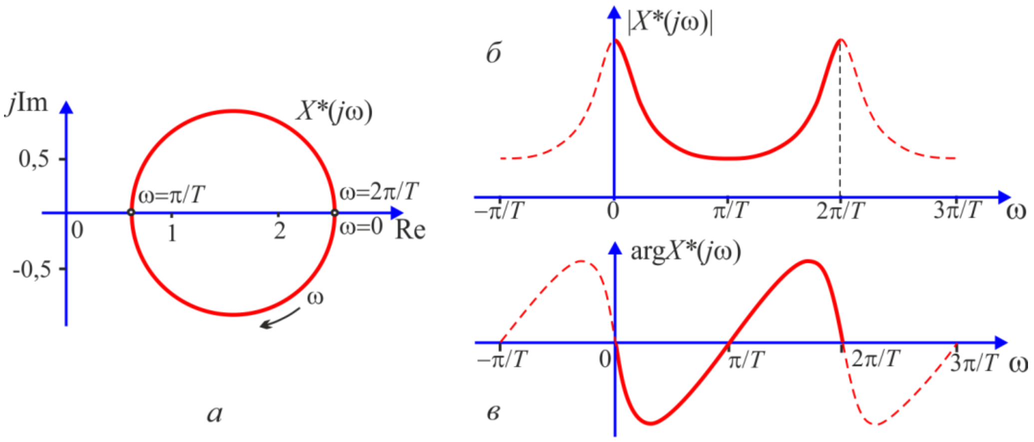

Рис. 7.6. Спектральные характеристики
экспоненциальной дискретной последовательности:
а – годограф, *б* – амплитудная, *в* – фазовая

7.9. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

На практике приходится иметь дело с сигналами, заданными на ограниченном интервале времени, например $t \in [0, T_н]$. Такой сигнал может быть представлен последовательностью из N отсчетов, взятых на временном отрезке $[0, T_н]$ через интервал дискретизации $T = T_н/N$. В результате получим дискретную последовательность $x(n)$, заданную на конечном интервале дискретного аргумента $[0, N-1]$.

В этом случае дискретная функция $x^*(t)$ и ее спектральная характеристика $X^*(j\omega)$ описываются выражениями:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{N-1} x(n)\cdot\delta(t-nT),$$

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\omega T n}.$$

Напомним, что спектральная характеристика $X^*(j\omega)$ является функцией непрерывной и периодической по частоте с периодом $\omega_д = 2\pi/T$. Для практических расчетов спектральную характеристику $X^*(j\omega)$ целесообразно представить в виде последовательности $X^*(jk\Omega)$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$, где Ω – выбранное расстояние между отсчетами в частотной области. Учитывая отмеченную выше периодичность функции $X^*(j\omega)$ по частоте, принимаем

$$\Omega = 2\pi/NT.$$

Подставив в (2.б) $\omega = k\Omega$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$, и введя обозначение $X(k) = X^*(jk\Omega)$, получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\Omega T n k}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

Формула (2.в) определяет прямое ДПФ. Легко заметить, что прямое ДПФ в общем случае дает периодическую последовательность комплексных чисел с периодом N.

Существует обратное ДПФ, которое переводит последовательность $X(k)$ в последовательность $x(n)$, из которой она была вычислена. Оно задается выражением

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{j\Omega T n k}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1,$$

которое отличается от формулы прямого ДПФ только масштабным множителем и знаком экспоненты.

Обратное преобразование подобно прямому ДПФ может давать отсчеты $x(n)$ для n вне интервала $[0, N-1]$, но эти отсчеты есть просто повторение значений $x(n)$ для n, взятых внутри этого интервала.

Введя обозначение для так называемого поворачивающего множителя

$$W_N = e^{-j\Omega T} = e^{-j2\pi/N},$$

можно записать прямое ДПФ и обратное ДПФ в следующем виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)\cdot W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

2.3. Свойства дискретного преобразования Фурье

Между дискретной функцией $x(n)$ и ее спектральной характеристикой $X(k)$ существует однозначное соответствие. Для решения практических задач необходимо знать связь между изменениями дискретной функции и соответствующими изменениями спектральной характеристики.

1. Линейность. Если $y(n) = \sum_{r=1}^{R} \lambda_r x_r(n)$, то $Y(k) = \sum_{r=1}^{R} \lambda_r X_r(k)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_R$ – постоянные коэффициенты; $X_r(k) = \Im_д\{x_r(n)\}$, $r = 1, 2, \ldots, R$.

2. Спектральная характеристика смещенной дискретной функции. Если $X(k) = \Im_д\{x(n)\}$, то

$$\Im_д\{x(n-m)\} = e^{-j2\pi km/N} X(k) = W_N^{km}.$$

3. Свойство симметрии. Если дискретная последовательность $x(n)$ является действительной, то спектральная характеристика $X(k)$ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\mathrm{Re}\, X(k) = \mathrm{Re}\, X(N-k);$$

$$\mathrm{Im}\, X(k) = -\mathrm{Im}\, X(N-k);$$

$$|X(k)| = |X(N-k)|;$$

$$\arg X(k) = -\arg X(N-k).$$

Спектральная характеристика симметричной последовательности $x(n) = x(N-n)$ является действительной.

4. Круговая свертка. Пусть $X_1(k) = \Im_д\{x_1(n)\}$ и $X_2(k) = \Im_д\{x_2(n)\}$. Тогда если $Y(k)\} = X_1(z) \cdot X_2(z)$, то

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

5. Спектральная характеристика произведения дискретных функций. Пусть $X_1(k) = \Im_д\{x_1(n)\}$ и $X_2(k) = \Im_д\{x_2(n)\}$. Тогда если $y(n)\} = x_1(n) \cdot x_2(n)$, то

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2(k-l), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

7.10. Восстановление сигнала по его отсчетам

В результате преобразования дискретных последовательностей в системе цифровой обработки получаем дискретную последовательность. Возникает естественный вопрос, как по известной дискретной последовательности получить непрерывный сигнал.

Ряд Котельникова

Теорема, доказанная В.А. Котельниковым в 1933 году, определяет условия точного восстановления мгновенных значений сигнала по его отсчетам, взятым через равные промежутки времени.

Теорема. Любую функцию $x(t)$, содержащую только гармонические составляющие с частотами от 0 до $\omega_в$, можно представить в виде ряда

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\frac{\sin\omega_{\text{в}}(t-nT)}{\omega_{\text{в}}(t-nT)}\ . \qquad (7.15)$$

где $T=\pi/\omega_{\text{в}}$, и, наоборот, любая функция, представленная рядом (7.15), содержит только гармонические составляющие с частотами от 0 до $\omega_{\text{в}}$.

Формулу (7.15) можно рассматривать как разложение сигнала $x(t)$ по функциям

$$\varphi_n(t)=\frac{\sin\omega_{\text{в}}(t-nT)}{\omega_{\text{в}}(t-nT)}\ , \qquad (7.16)$$

причем в качестве коэффициентов ряда выступают значения сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени $t_n=nT$, $n\in(-\infty,\infty)$. Функция $\varphi_n(t)$, называемая отсчетной функцией, отображает собой колебания с максимальным значением при $t_n=nT$ (на рис. 7.7, *а* представлен график отсчетной функции для $n=3$). В другие дискретные моменты времени функция равна нулю. Легко проверить, что отсчетные функции ортогональны на интервале времени, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)\,\varphi_m(t)\,dt=\begin{cases}\pi/\omega_{\text{в}} & \text{при} \quad n=m,\\ 0 & \text{при} \quad n\neq m.\end{cases}$$

В каждой точке $t=nT$ только один член ряда, стоящего в правой части выражения (7.15), отличен от нуля и этот член равен $x(nT)$. Следовательно, в точках $t=nT$ справедливость формулы (7.15) очевидна. В промежутках между указанными точками точное значение функции $x(t)$ обеспечивается суммированием бесконечного числа функций вида (7.16).

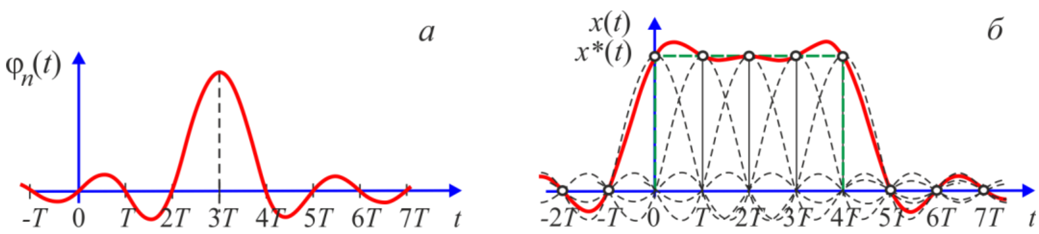

Рис. 7.7. Представление сигнала в виде ряда Котельникова:
а – отсчетная функция; *б* – составляющие ряда

Таким образом, функция $x(t)$ с ограниченным спектром, с одной стороны, может быть полностью задана множеством ее мгновенных значений, взятых через равные промежутки времени T. С другой стороны, если имеются числовые значения функции $x(nT)$ для всех n, то она может быть полностью восстановлена по формуле (7.15).

Желая использовать теорему Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам, необходимо учитывать следующее. Сигналы с ограниченным спектром, для которых справедлива теорема, бесконечны во времени. Реальные же сигналы ограничены по времени интервалом $[0,T_{\text{с}}]$ и обладают, следовательно, неограниченным по времени спектром. Поэтому точно восстановить сигнал не удается. Для приближенного восстановления можно выделить интервал частот $[0,\omega_{\text{в}}]$, в котором заключена основная часть энергии сигнала, а на долю составляющих спектра с частотой $\omega > \omega_в$ приходится малая часть энергии сигнала.

Сигнал, ограниченный по времени, приближенно описывается рядом (7.15), состоящим из конечного числа членов:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{N} x(nT)\,\frac{\sin\omega_в(t-nT)}{\omega_в(t-nT)}\,. \qquad (7.17)$$

На рис. 7.7, *б* показана аппроксимация рядом (7.15) прямоугольного импульса, представленного пятью дискретными отсчетами.

При суммировании членов ряда (7.17) сигнал $x(t)$ воспроизводится точно только в точках отсчета $t_n = nT$. В промежутках между отсчетами возникает ошибка аппроксимации, величина которой зависит от отбрасываемой части спектра сигнала. Чтобы уменьшить ошибку, интервал дискретизации T рекомендуют принимать в 2–5 раз меньше величины, определяемой по формуле (7.16). Ряд Котельникова для восстановления сигналов практически не используется. Он имеет скорее теоретическое значение, позволяя получить полезные выводы. Для восстановления же сигналов по дискретным отсчетам на практике чаще используются другие методы, например методы линейной и квадратичной интерполяции.

Метод линейной интерполяции

При линейной интерполяции соседние дискретные точки восстанавливаемой функции соединяют прямолинейными отрезками. Предположим, что при восстановлении сигнала необходимо воспроизвести с заданной точностью все гармонические составляющие до некоторой верхней частоты $\omega_в$. Пусть выбран интервал дискретизации $T = \pi/5\omega_в$, что в пять раз меньше устанавливаемого теоремой Котельникова.

Как видно из рис. 7.8, наибольшая погрешность восстановления будет получена в районе экстремальной точки и при симметричном расположении отсчетов. Тогда наибольшая приведенная погрешность восстановления синусоидальной составляющей с частотой $\omega_в$ может быть найдена как разность между амплитудой A и одним из указанных отсчетов:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{A} = \frac{1}{A}\left[A - A\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_в T}{2}\right)\right] = 1 - \cos\frac{\omega_в T}{2}\,. \qquad (7.18)$$

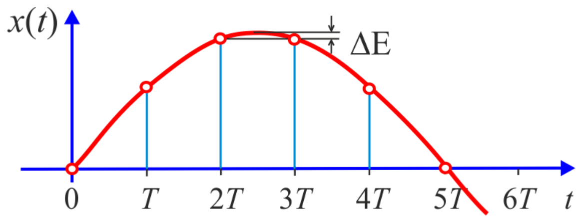

Рис. 7.8. Ошибка восстановления методом линейной интерполяции

Обозначим через N число отсчетов на одном периоде синусоиды с частотой $\omega_в$. Тогда $\omega_в = 2\pi/NT$. Подставив в (7.18), получим

$$\varepsilon = 1 - \cos(\pi/N)\,.$$

Данное соотношение позволяет определить число отсчетов N, необходимых для обеспечения заданной погрешности ε:

$$N = \frac{\pi}{\arccos(1-\varepsilon)}.$$

Например, при заданной допустимой погрешности восстановления $\varepsilon = 0,01$ требуется 22 отсчета на один период синусоиды.

На практике обычно отдают предпочтение методу линейной интерполяции, поскольку она реализуется очень просто технически и позволяет восстанавливать сигнал в режиме реального времени. Восстановление же при помощи ряда Котельникова возможно только после получения всех точек восстанавливаемого сигнала.