Тема 5. ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ

Свойства линейных стационарных систем: линейность, стационарность, физическая реализуемость. – Дифференциальное уравнение. – Передаточная функция. – Частотная передаточная функция и частотные характеристики. – Импульсная переходная функция. – Расчет реакции системы на детерминированные сигналы при помощи интеграла свертки. – Спектральный и операторный методы определения реакции системы на детерминированные сигналы. – Условия неискаженной передачи сигнала. – Интегрирование и дифференцирование детерминированных сигналов

5.1. Общие понятия

Обработка непрерывных сигналов заключается в преобразовании их свойств при помощи различных устройств и систем. Назовем простейшие виды преобразования сигналов: выпрямление, усиление, ограничение, фильтрация, модуляция, демодуляция и т.д.

Под *непрерывной системой* будем понимать техническое устройство, которая осуществляет преобразование непрерывного сигнала $x(t)$ в другой непрерывный сигнал $y(t)$ в соответствии с заданным оператором R (рис. 5.1).

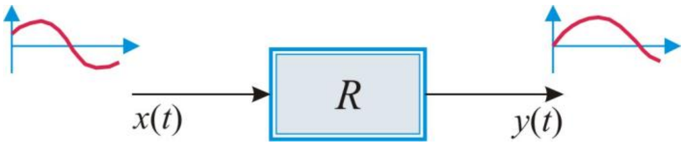

Рис. 5.1. Представление непрерывной системы

Система называется *динамической*, если текущее значение выходного сигнала зависит не только от текущих, но и более ранних значений внешних воздействий (входных сигналов).

Основная задача, которую приходится решать при анализе систем обработки сигналов, заключается в следующем. Дана система, с помощью которой преобразуется сигнал (рис. 5.1). На вход системы подается сигнал $x(t)$. Требуется найти выходной сигнал $y(t)$.

Преобразование входного сигнала $x(t)$ в выходной сигнал $y(t)$ описывается соотношением

$$R_y[y(t)] = R_x[x(t)],$$

где R_x и R_y – некоторые операторы, применяемые соответственно к функциям $x(t)$ и $y(t)$. Конкретный вид этих операторов зависит от характера преобразования сигнала, осуществляемого системой. Например, при выпрямлении будем иметь: $y(t) = |x(t)|$.

В зависимости от вида оператора R непрерывные системы могут быть:

- линейными или нелинейными;
- стационарными или нестационарными;

- физически реализуемыми (каузальными) или нереализуемыми (некаузальными).

Линейность. Непрерывная система называется линейной тогда и только тогда, если ее операторы обладают свойствами *аддитивности* и *однородности*:

$R[x_1(t)+x_2(t)] = R[x_1(t)] + R[x_2(t)]$ для любых $x_1(t)$ и $x_2(t)$;

$R[\alpha \cdot x(t)] = \alpha \cdot R[x(t)]$ для любых α и $x(t)$.

Эти свойства можно записать в виде одного условия:

$$R[\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)] = \alpha \cdot R[x_1(t)] + \beta \cdot R[x_2(t)].$$

Непосредственно из формулы легко видеть, что линейными операторами являются операторы умножения на постоянное число и суммирования. К линейным операторам относятся операторы интегрирования и дифференцирования:

$$y(t) = \frac{d}{dt}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha \frac{dx_1(t)}{dt} + \beta \frac{dx_2(t)}{dt};$$

$$y(t) = \int [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]dt = \alpha \int x_1(t)dt + \beta \int x_2(t)dt.$$

В то же время операторы логарифмирования или возведения в степень не обладают свойством линейности. Действительно:

$$\ln[x_1(t) + x_2(t)] \neq \ln[x_1(t)] + \ln[x_2(t)];$$

$$[x_1(t) + x_2(t)]^2 \neq x_1^2(t) + x_2^2(t).$$

Ни одна реальная система преобразования сигналов, строго говоря, не удовлетворяет условиям линейности.

Стационарность. Стационарная система обладает следующим свойством: если реакция на входной сигнал $x(t)$ равна $y(t) = R[x(t)]$, то для любого вещественного постоянного значения t_0 имеем $y(t-t_0) = R[x(t-t_0)]$. Это означает, что данное воздействие будет всегда приводить к одной и той же реакции независимо от времени приложения воздействия.

Система называется стационарной (инвариантной во времени), если ее параметры не изменяются во времени.

Физическая реализуемость. Физически реализуемой называется система, у которой выходной сигнал в текущий момент времени не зависит от значений входного сигнала в последующие моменты времени.

5.2. Дифференциальное уравнение линейной стационарной системы

Линейная стационарная система описывается дифференциальным уравнением

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \tag{5.1}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы, $a_i, i = 0,\ldots,n$, $b_j, j = 0,\ldots,m$ – постоянные коэффициенты.

В реальных системах всегда выполняется условие $n \geq m$. Это неравенство называют условием физической реализуемости системы. Оно означает, что нельзя реализовать систему, у которой $n \leq m$. Порядок наивысшей входящей в это уравнение производной выходного сигнала называется *порядком* уравнения.

Уравнение (5.1) можно записывать в операторной форме:

$$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0)y(t) = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0)x(t), \tag{5.2}$$

где $p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Обозначим

$$A(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0 ,$$

$$B(p) = b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0 .$$

Тогда дифференциальное уравнение запишется так:

$$A(p)y(t) = B(p)x(t) .$$

Следует отметить, что точное отображение процессов, происходящих в реальных устройствах и системах преобразования сигналов, требует описания с помощью нелинейных дифференциальных уравнений. Однако во многих случаях инженеры и исследователи, пренебрегая некоторыми второстепенными факторами или накладывая определенные ограничения, сводят решение конкретных задач к исследованию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Объясняется это, во-первых, завершенностью теории их интегрирования, позволяющей получить решение в элементарных функциях. Во-вторых, во многих практически важных задачах точность, даваемая линейным приближением, является вполне достаточной.

Для составления дифференциального уравнения система расчленяется на простейшие составные части, и для каждой из них записываются уравнения элементов и связей между ними. В качестве примера можно привести основные законы электротехники (законы Ома и Фарадея):

$$i = \frac{u}{R}, \quad L\frac{di}{dt} = u, \quad i = C\frac{du}{dt}.$$

В этом случае уравнения связи будут представлены в виде законов Кирхгофа. С их помощью составляются уравнения сложной цепи по контурам и узловым точкам.

5.3. Передаточная функция линейной стационарной системы

Передаточная функция системы определяется по ее дифференциальному уравнению при помощи преобразования Лапласа. Применив к дифференциальному уравнению (5.1) системы преобразование Лапласа, получим

$$A(s)Y(s) = B(s)X(s) + C_{\text{н}}(s), \tag{5.3}$$

где $A(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)$, $B(s) = b_n s^m + \ldots + b_1 s + b_0$, $C_{\text{н}}(s)$ – полином, учитывающий начальные условия, и изображения $X(s)$ и $Y(s)$ входного и выходного сигналов определяются соответственно выражениями:

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)\, e^{-st} dt;$$

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st} dt.$$

Уравнение (5.3) можно привести к следующему виду:

$$Y(s) = W(s) X(s) + W_{\text{н}}(s), \tag{5.4}$$

где

$$W(s) = B(s)/A(s);\ W_{\text{н}}(s) = C_{\text{н}}(s)/A(s).$$

Уравнение (5.4) связывает изображение выходного сигнала системы с изображением входного сигнала и начальным состоянием системы. Функция $W(s)$ характеризует динамические свойства системы. Она не зависит от входного сигнала и полностью определяется параметрами системы. Эту функцию называют *передаточной функцией*.

С другой стороны, при нулевых начальных условиях $W_{\text{н}}(s) = 0$ и из уравнения (5.4) будем иметь:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

Поэтому *передаточной функцией* $W(s)$ системы называется отношение изображения $Y(s)$ выходного сигнала к изображению $X(s)$ входного сигнала при условии, что все начальные условия равны нулю. Для систем, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением, передаточная функция является дробно-рациональной функцией относительно оператора преобразования Лапласа:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_n s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}. \tag{5.5}$$

Сравнив полученное выражение с дифференциальным уравнением звена (5.2), легко заметить, что формально передаточную функцию звена можно определить как отношение оператора правой части к оператору левой части дифференциального уравнения. Очевидно, и наоборот, зная передаточную функцию системы (5.5), легко написать ее дифференциальное уравнение.

Передаточную функцию линейной стационарной системы можно представить в виде

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_n (s-\nu_1)(s-\nu_2)\ldots(s-\nu_m)}{a_n (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)}. \tag{5.6}$$

Здесь числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ называют нулями передаточной функции. Они являются корнями уравнения

$$B(s) = b_n s^m + \ldots + b_1 s + b_0 = 0$$

и могут принимать как вещественные, так и комплексные значения.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называют полюсами передаточной функции (5.6). Они находятся как корни так называемого характеристического уравнения системы

$$A(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

и так же, как нули, могут принимать вещественные и комплексные значения. Если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны, то полюсы функции (5.6) называются *простыми*. Если же среди этих чисел встречаются одинаковые, то соответствующие полюсы называются *кратными*.

Передаточная функция существует только для линейных стационарных систем. В нестационарных системах один или несколько параметров зависят от времени, поэтому использовать преобразование Лапласа нельзя. Передаточная функция описывает поведение системы в терминах вход-выход и не несет никакой информации о внутренних переменных системы и характере их изменения.

5.4. Частотная передаточная функция и частотные характеристики линейной стационарной системы

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) = (b_n p^n + \ldots + b_1 p + b_0) x(t) .$$

Применим к дифференциальному уравнению системы преобразование Фурье. Имея в виду, что

$$X(j\omega) = \Im\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

$$Y(j\omega) = \Im\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

и используя свойство линейности и формулы для изображений производных, получим

$$[a_n (j\omega)^n + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0] Y(j\omega) = [b_m (j\omega)^m + \ldots + b_1 (j\omega) + b_0] X(j\omega) .$$

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ определяется как отношение преобразований Фурье выходного и входного сигналов:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{b_n (j\omega)^m + \ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0} .$$

Функция $W(j\omega)$ характеризует динамические свойства самой системы и не зависит от характера приложенных к системе воздействий. Она легко может быть получена из передаточной функции (5.5) при чисто мнимых значениях переменной $s = j\omega$.

Зная частотную передаточную функцию линейной стационарной системы, можно найти реакцию системы на гармонический входной сигнал в установившемся режиме (рис. 5.2). Если на вход линейной стационарной системы поступает гармонический сигнал

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha_0) ,$$

то на ее выходе в установившемся режиме будем иметь гармонический сигнал, отличающийся амплитудой и частотой:

$$y(t) = B\sin(\omega_0 t + \beta_0).$$

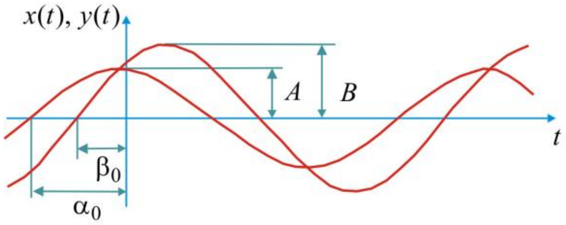

Рис. 5.2. Входной и выходной гармонические сигналы линейной системы

Амплитуда и фаза выходного сигнала определяются соответственно формулами:

$$B = |W(j\omega_0)| \cdot A\ ; \tag{5.7}$$

$$\beta_0 = \alpha_0 + \arg W(j\omega_0). \tag{5.8}$$

Для наглядного представления частотных свойств системы используются так называемые частотные характеристики.

Вектор-годограф $W(j\omega)$, построенный на комплексной плоскости при изменении частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$, называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* системы.

Представим функцию $W(j\omega)$ в следующем виде

$$W(j\omega) = W(\omega)e^{j\phi(\omega)},$$

где

$$W(\omega) = \left|W(j\omega)\right|,\ \phi(\omega) = \arg W(j\omega).$$

Функция $W(\omega), \omega \in [0, \infty)$, называется *амплитудно-частотной характеристикой* системы и представляет собой отношение амплитуды установившегося гармонического сигнала к амплитуде выходного гармонического сигнала при частоте входного сигнала, равной ω.

Функция $\phi(\omega), \omega \in [0, \infty)$, называется *фазо-частотной характеристикой* системы. Она показывает, на сколько выходной сигнал $y(t)$ при данной частоте ω сдвинут по фазе (углу) относительно входного сигнала $x(t)$.

5.5. Импульсная переходная функция линейной стационарной системы

Импульсная переходная функция (ИПФ) $w(t)$ представляет собой реакцию системы, имеющей нулевые начальные условия, на входное воздействие в виде дельта-функции $\delta(t)$.

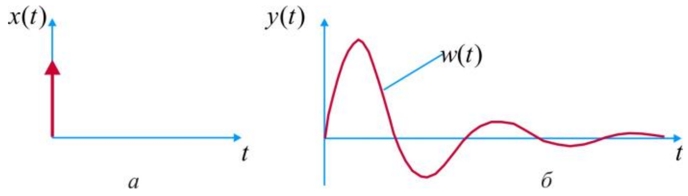

Рис. 5.3. Графическое представление дельта-функции и импульсной переходной функции

Найдем изображение ИПФ:

$$L\{w(t)\} = W(s)\cdot L\{\delta(t)\} = W(s)\cdot 1 = W(s)\,.$$

Отсюда следует, что импульсная переходная функция и передаточная функция системы связаны между собой формулами прямого и обратного преобразований Лапласа:

$$W(s) = L\{w(t)\} = \int_0^{\infty} w(t)\, e^{-st} dt\,;$$

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s)\, e^{st} ds\,.$$

ИПФ, как и передаточная функция, является исчерпывающей характеристикой системы при нулевых начальных условиях.

Очевидно, что у физически осуществимой системы всегда должен выполняться важнейший принцип: выходной сигнал не может возникнуть до момента появления входного сигнала. Поэтому $w(t) = 0$ при $t < 0$. Это условие называют *условием физической реализуемости* системы.

5.6. Расчет реакции системы при помощи интеграла свертки

Этот метод основан на временном представлении сигнала и использовании временных характеристик системы. Он позволяет найти сигнал $y(t)$ на выходе линейной стационарной системы, если детерминированный сигнал на входе задан в виде функции $x(t)$ и известна импульсная переходная функция $w(t)$ системы.

Для уяснения сути метода поступим следующим образом. Входной сигнал $x(t)$ представим в виде последовательности бесконечно узких импульсов (рис. 5.4 , *а*), имеющих высоту $x(\tau)$ и ширину $\Delta\tau$, так что площадь каждого импульса равна $x(\tau)\Delta\tau$.

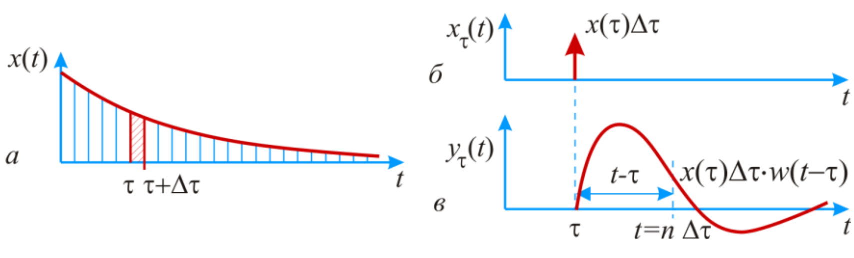

Рис. 5.4. К выводу интеграла свертки

Импульс с площадью $x(\tau)\Delta\tau$, действующий на систему в момент времени $\tau < t$ (рис. 5.4. *б*), приводит к появлению на выходе сигнала, который в момент времени t равен

$$y_\tau(t) = x(\tau)\Delta\tau \cdot w(t-\tau)\,.$$

Для определения полного значения выходного сигнала в момент времени t нужно просуммировать действие всех импульсов в промежутке от $\tau = 0$ до $\tau = t$. В результате суммирования получим

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} x(i\tau)\cdot\Delta\tau\cdot w(t-i\tau)\,.$$

Приняв $\Delta\tau \to 0$ и заменив суммирование на интегрирование, получим

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\cdot w(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Если сделать подстановку $t-\tau=\tau'$, а затем отбросить штрих у τ', то можно получить эквивалентное выражение

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)\cdot w(\tau)\,d\tau\,.$$

Пример. На RC -цепь (рис. 5.5 , *а*) при нулевых начальных условиях подается импульс тока $i(t) = A\exp(-\alpha t), t \ge 0$. При помощи интеграла свертки найти напряжение $U(t)$ на выходе цепи.

Решение. Найдем передаточную функцию RC – цепи

$$W(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1/C}{s+1/RC}\,.$$

Этой передаточной функции соответствует импульсная переходная функция

$$w(t) = L^{-1}[W(s)] = \frac{1}{C}\cdot e^{-t/RC}, t \ge 0\,.$$

В соответствии с известной формулой будем иметь

$$u(t) = \int_0^t i(\tau)w(t-\tau)d\tau = \int_0^t Ae^{-\alpha\tau}\frac{1}{C}e^{-(t-\tau)/RC}d\tau\,.$$

Выноса за знак интеграла множитель $(A/C)e^{-t/RC}$, не зависящей от переменной интегрирования, и объединяя оставшиеся экспоненты, получим

$$u(t) = \frac{A}{C(\alpha-1/RC)}\left(e^{-t/RC} - e^{-\alpha t}\right), \quad t \ge 0\,.$$

Графики функции $U_{вых}(t)$ имеет вид, показанный на рис. 5.5, *б*.

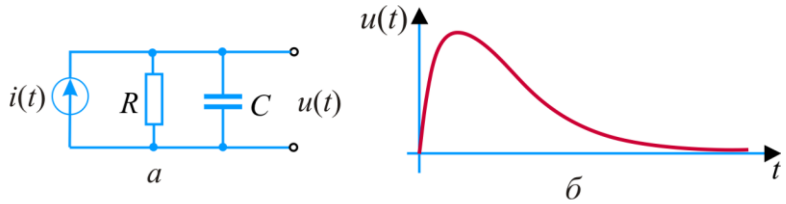

Рис. 5.5. Реакция RC – цепи на экспоненциальный импульс тока:
а – схема цепи; *б* – реакция цепи.

5.7. Спектральный метод определения реакции системы на детерминированные сигналы

Использование ряда Фурье

Данный метод основан на спектральном представлении сигналов и использовании математической модели системы в виде частотной передаточной функции $W(j\omega)$. Пусть сигнал, поступающий на вход системы, описывается периодической функцией $x(t)$. Представим его в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) .$$

Сигнал на выходе системы будет описываться периодической функцией

$$y(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} B_n \cos(n\omega_1 t + \beta_n) .$$

Здесь $B_0 = W(0) \cdot A_0$, а амплитуды и фазы гармонических составляющих рассчитываются согласно формулам (5.7) и (5.8):

$$B_n = |W(jn\omega_1)| \cdot A_n , \quad n = 1, 2, \ldots, N ;$$

$$\beta_n = \alpha_n + \arg W(jn\omega_1) , \quad n = 1, 2, \ldots, N .$$

Пример. На RC -цепь, частотная передаточная функция которой описывается выражением

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j0,01\omega} ,$$

поступает периодический сигнал в виде последовательности прямоугольных импульсов. Найти выходной сигнал $y(t)$ на выходе цепи.

Расчеты выполним в системе MathCAD с использованием вышеприведенных формул. Число учитываемых гармоник N =50. На рис. 5.6 показаны графики входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов на одном периоде.

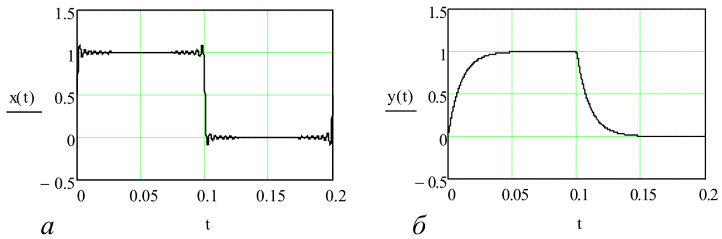

Рис. 5.6. Графики сигналов: *а* – входного $x(t)$, *б* – выходного $y(t)$

Использование преобразования Фурье

Пусть на вход линейной стационарной системы с частотной передаточной функцией $W(j\omega)$ подан произвольный сигнал $x(t)$, обладающий спектральной характеристикой $X(j\omega)$. Как известно, функции $x(t)$ и $X(j\omega)$ связаны формулами прямого и обратного преобразований Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt .$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega .$$

Согласно спектральному методу анализа спектральная характеристика $Y(j\omega)$ сигнала $y(t)$ на выходе системы равна

$$Y(j\omega) = W(j\omega)\, X(j\omega) .$$

Применив к полученному выражению обратное преобразование Фурье, найдем выходной сигнал системы:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)\, X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Таким образом, сигнал на выходе линейной стационарной системы можно получить суммированием составляющих спектра $X(j\omega)$ входного сигнала, взятых с весом $W(j\omega)$. Другими словами, частотная передаточная функция $W(j\omega)$ играет роль весовой функции, определяющей относительный вклад различных составляющих спектра $X(j\omega)$ в выходной сигнал $y(t)$.

Для сигналов, которые удовлетворяют условию $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$, используется одностороннее преобразование:

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt .$$

Недостатком интеграла Фурье является то, что он принадлежит к числу несобственных интегралов и может применяться для абсолютно интегрируемых функций времени, то есть для функций времени, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty .$$

5.8. Операторный метод определения реакции системы на детерминированные сигналы

На практике для определения реакции системы на входной сигнал, приложенный в момент времени $t = 0$, удобнее использовать операторный метод, в основе которого лежит преобразование Лапласа. При этом функция $x(t)$, описывающая входной сигнал, и функция $X(s)$,являющаяся ее изображением по Лапласу, связаны выражениями:

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-st} dt\,;$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c-j\omega} X(s)\, e^{st} ds\,,$$

где $s = \sigma + j\omega$ – комплексная переменная.

Изображение выходного сигнала находится по формуле

$$Y(s) = W(s)\, X(s)\,. \tag{5.9}$$

Выходной сигнал $y(t)$ определяется формулой обратного преобразования Лапласа

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c-j\omega} W(s)\, X(s)\, e^{st} ds \tag{5.10}$$

Интегрирование в выражении ведется снизу вверх вдоль всей прямой, параллельной мнимой оси, отстоящей от нее справа на расстоянии c (рис. 5.4 , *а*).

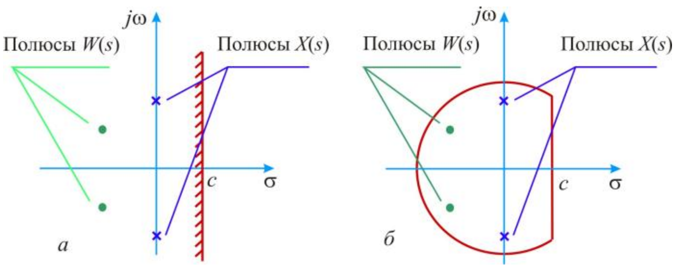

Рис. 5.7. Пути интегрирования на s -плоскости:
а – для интеграла (5.9), *б* – для интеграла (5.10).

Заметим, что интегрирование может вестись для любого $c > 0$, при этом все полюсы функции $W(s)\,X(s)$ должны лежать левее прямой интегрирования. В отличие от преобразования Фурье здесь изображение функции времени является функцией не частоты, а некоторой комплексной величины $s = c + j\omega$. Вещественная часть ее представляет собой так называемую абсциссу абсолютной сходимости, которая выбирается так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\int_0^\infty \left|x(t)\right| e^{-ct}\, dt < \infty\,.$$

Для определения функции $y(t)$ от (5.10) можно перейти к контурному интегралу

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint W(s)\, X(s)\, e^{st} ds\,, \tag{5.11}$$

где контур интегрирования образуется дополнением прямой, лежащей в комплексной плоскости, дугой бесконечно большого радиуса, охватывающей все полюса подынтегральной функции $W(s)\, X(s)$. Контур интегрирования показан на рис. 5.7, *б*.

Для определения реакции $y(t)$ динамической системы на заданный входной сигнал $x(t)$ при условии, что она находится в покое, необходимо выполнить такие действия:

1) определить передаточную функцию $W(s)$ системы;
2) определить (обычно с помощью таблиц соответствий) изображение $X(p)$ входного сигнала;
3) по формуле (5.9) найти изображение выходного сигнала;
4) по формулам (5.10) или (5.11) определить оригинал $y(t)$, соответствующий изображению $Y(s)$.

Для вычисления интегралов (5.10) и (5.11) удобно пользоваться теоремой о вычетах, согласно которой значение интеграла равно сумме вычетов подынтегрального выражения в его особых точках:

$$y(t) = \sum \operatorname{Res}[W(s) X(s)] e^{st} \Big|_{s = s_i}$$

Пример. На RC-цепь (рис. 5.8, *а*) при нулевых начальных условиях подается импульс $U_{\text{вх}}(t) = A\exp(-\alpha t), t \ge 0$; A =10 В; $\alpha = 8\cdot 10^6$ с$^{-1}$. Постоянная времени цепи RC =0.8 мкс. При помощи операторного метода найти сигнал $U_{\text{вых}}(t)$ на выходе цепи.

Решение. Найдем передаточную функцию цепи

$$W(s) = \frac{1}{RCs+1}$$

и изображение входного импульса

$$U_{\text{вх}}(s) = L\{A\exp(-\alpha t)\} = \frac{A}{s+\alpha}.$$

Изображение выходного сигнала

$$U_{\text{вых}}(s) = W(s)\, X(s) = \frac{A}{(RCs+1)(s+\alpha)} = \frac{A/RC}{(s+1/RC)(s+\alpha)}.$$

Полюса функции $U_{\text{вых}}(s)$ равны: $s_1 = -1/RC$; $s_2 = -\alpha$.

Найдем вычет в полюсе $s_1 = -1/RC$:

$$U_{\text{вых}1}(s) = \lim_{p \to -1/RC} \left[\frac{A/RC}{(s+1/RC)(s+\alpha)} (s+1/RC) e^{st} \right] = \frac{A}{\alpha RC - 1} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Аналогично для полюса $s_2 = -\alpha$ получим

$$U_{вых2}(s) = \lim_{p\to-\alpha}\left[\frac{A/RC}{(s+1/RC)(s+\alpha)}(s+\alpha)e^{st}\right] = -\frac{A}{\alpha RC-1}e^{-\alpha t}.$$

Выходной сигнал находим как сумму вычетов:

$$U_{вых}(t) = \frac{A}{\alpha RC-1}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{A}{1-\alpha RC}\cdot e^{-\alpha t}.$$

Графики функции $U_{вых}(t)$ и ее составляющих имеют вид, показанный на рис. 5.8, *б*.

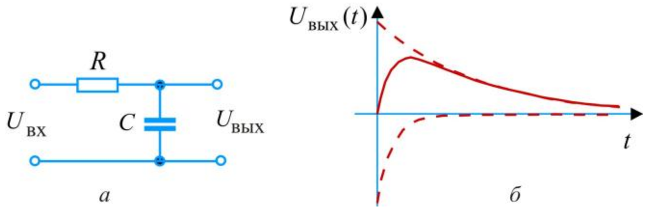

Рис. 5.8. Реакция RC – фильтра на экспоненциальный импульс:
а – схема фильтра; *б* – реакция фильтра.

5.9. Условия неискаженной передачи сигнала линейной стационарной системой

Считается, что сигнал $x(t)$ проходит через некоторую систему без искажения, если происходит только изменение масштаба и сдвиг во времени. При этом форма сигнала не изменяется. Если начало отсчета времени отнести к моменту возникновения входного сигнала $x(t)$, то неискаженный сигнал на выходе системы должен иметь вид

$$y(t) = k\cdot x(t-\tau),$$

где k – постоянный коэффициент.

Учитывая свойства линейности и временного сдвига, для спектральной характеристики выходного сигнала будем иметь

$$Y(j\omega) = k\cdot e^{-j\omega\tau}X(j\omega).$$

Следовательно, неискажающая система должна иметь частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = k\cdot e^{-j\omega\tau}. \qquad (5.12)$$

Из этого выражения видно, что система, удовлетворяющая условиям неискаженного преобразования сигнала, имеет не зависящую от частоты амплитудно-частотную характеристику

$$|W(j\omega)| = k \qquad (5.13)$$

и фазо-частотную характеристику, линейно изменяющую с частотой:

$$\phi(\omega) = -\omega\tau. \qquad (5.14)$$

Частотные характеристики, построенные по выражениям (5.12), (5.13) и (5.14), показаны на рис. 5.9.

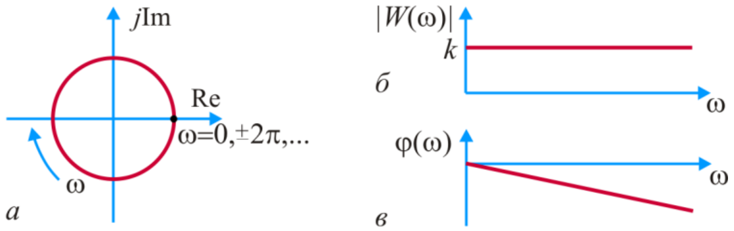

Рис. 5.9. Частотные характеристики системы, передающей сигнал без искажения: *а* – АФЧХ; *б* – АЧХ, *в* – ФЧХ

Задержка τ гармонического сигнала, создаваемая системой с частотной передаточной функцией (5.12), определяется наклоном фазо-частотной характеристики:

$$\tau = \left| d\,\phi(\omega) / d\,\omega \right| .$$

Заметим, что реализовать систему, полностью удовлетворяющую найденным условиям, нельзя. Частотные характеристики реальных систем могут приближаться к характеристикам неискажающей системы только в ограниченном диапазоне частот.

5.10. Интегрирование детерминированных сигналов

В электронике часто возникает необходимость в интегрировании сигналов. Сигнал на выходе идеального интегратора пропорционален интегралу от входного сигнала, то есть

$$y(t) = k \int_0^t x(t)\, dt, \quad k = \text{const} .$$

Этому уравнению на основании теоремы об интегрировании соответствует соотношение

$$Y(j\omega) = \frac{k}{j\omega} \cdot X(j\omega) .$$

Отсюда получим частотную передаточную функцию идеального интегратора

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} .$$

АЧХ и ФЧХ идеального интегратора показаны на рис. 5.10,в,г сплошными линиями. При $\omega > 0$ АЧХ идеального интегратора описывается гиперболой, а ФЧХ равна -90°.

При определенных условиях, на которые укажем позднее, в качестве простейшего интегратора используется RC -цепь, схема которой показана на рис. 5.10 , *а*.

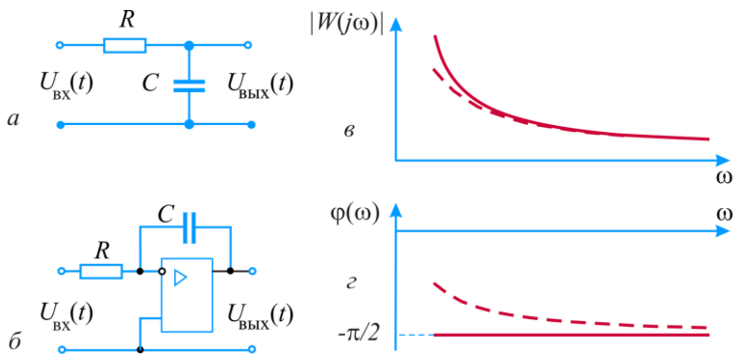

Рис. 5.10. Схемы и частотные характеристики интеграторов:
а – схема интегрирующей RC -цепи; *б* – схема активного интегратора;
в – АЧХ интеграторов; *г* – ФЧХ интеграторов

Частотная передаточная функция цепи равна

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \tag{5.15}$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи. При условии $\omega\tau >> 1$ можно считать

$$W(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega\tau}.$$

Отсюда следует, что при условии $\omega\tau >> 1$ (то есть в области высоких частот $\omega >> 1/\tau$) данная RC -цепь производит приближенное интегрирование. АЧХ и ФЧХ RC -цепи, построенные по выражению (5.15), изображены на рис. 5.9, *в* и *г* пунктирными линиями. Сравнение частотных характеристик идеального интегратора и рассматриваемой RC -цепи позволяет сказать, что они хорошо совпадают в области высоких частот ($\omega >> 1/\tau$). Следовательно, RC -цепь можно использовать для приближенного интегрирования сигналов, спектр которых содержит преимущественно высокочастотные составляющие. Зная ширину спектра сигнала, легко рассчитать постоянную времени τ интегрирования цепи и ее параметры.

Интервал частот, в котором можно выполнить интегрирование, существенно расширяется, если использовать активные RC -цепи. Схема простейшего интегратора, построенного на основе одного операционного усилителя, показана на рис. 5.10, *б*. Частотная передаточная функция интегратора равна

$$W(j\omega) = \frac{U_{вых}(j\omega)}{U_{вх}(j\omega)} = \frac{-k}{1 + j\omega RC(1+k)}, \tag{5.16}$$

где k – коэффициент усиления операционного усилителя.

Сравнение (5.16) с (5.15) показывает, что применение операционного усилителя приводит к увеличению постоянной времени в k раз. Поскольку операционный усилитель имеет коэффициент усиления k порядка десятков тысяч единиц, то диапазон частот, в котором интегрирование осуществляется с той же погрешностью, что и пассивной RC -цепью, существенно увеличивается. Частотные характеристики интегратора на операционном усилителе практически совпадают с характеристиками идеального интегратора.

5.11. Дифференцирование детерминированных сигналов

Сигнал на выходе идеального дифференциатора пропорционален производной от входного сигнала, то есть

$$y(t) = k \cdot \frac{d\,x(t)}{d\,t}, \quad k = \mathrm{const}.$$

На основании теоремы о дифференцировании функции по времени этому уравнению в частотной области соответствует следующее уравнение

$$Y(j\omega) = k \cdot j\omega \cdot X(j\omega).$$

Отсюда следует, что частотная передаточная функция идеального дифференциатора равна

$$W(j\omega) = k \cdot j\omega.$$

АЧХ и ФЧХ идеального дифференциатора показаны на рис. 5.11, *в* и *г* сплошной линией. АЧХ идеального дифференциатора линейно возрастает, а ФЧХ равна +90°.

В качестве простейшего дифференциатора часто используется RC -цепь, схема которой показана на рис. 5.11 , *а*.

Частотная передаточная функция цепи равна

$$W(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}, \tag{5.17}$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи. При условии $\omega\tau << 1$ можно считать

$$W(j\omega) \approx j\omega\tau.$$

АЧХ и ФЧХ RC -цепи, построенные по выражению (5.17), изображены на рис. 5.11, *в* и *г* пунктирными линиями. В области низких частот $\omega\tau << 1$ данная RC -цепь производит приближенное дифференцирование.

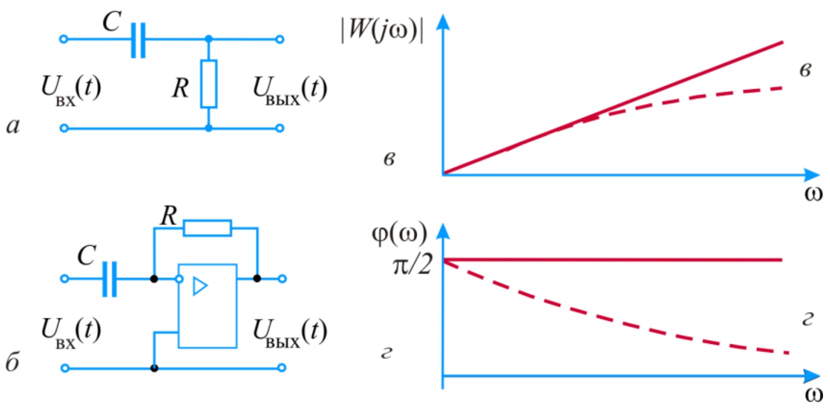

Рис. 5.11. Схемы и частотные характеристики дифференциаторов:
а – схема дифференцирующей RC -цепи; *б* – схема активного дифференциатора;
в – АЧХ дифференциаторов; *г* – ФЧХ дифференциаторов

Для дифференцирования используются активные RC -цепи. Схема простейшего дифференциатора, построенного на основе одного операционного усилителя, показана на рис. 5.11, *б*. Частотные характеристики дифференциатора на операционном усилителе при $k >> 1$ практически совпадают с характеристиками идеального дифференциатора.

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется передаточная функция линейной стационарной системы по её дифференциальному уравнению?
2. Как связаны между собой АФЧХ, АЧХ и ФЧХ линейной стационарной системы?
3. Почему АФЧХ, АЧХ и ФЧХ системы строятся только для положительных значений частоты?
4. Поясните физический смысл импульсной переходной функции линейной системы.
5. Какова связь между импульсной переходной $w(t)$ и передаточной $W(s)$ функциями системы?
6. Какому условию удовлетворяет импульсная переходная функция физически реализуемой линейной системы?
7. Поясните отличие между спектральным и операторным методами расчёта реакции системы на детерминированные воздействия.