

Тема 4. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ФУНКЦИЯМ ЛАГЕРРА И УОЛША

Полиномы и функции Лагерра. – Разложение сигналов по функциям Лагерра – Выбор значения масштабного коэффициента. – Функции Радемахера. – Функции Уолша и способы их упорядочивания. – Свойства функций Уолша. – Разложение сигналов по функциям Уолша. – Пример.

4.1. Полиномы и функции Лагерра

В настоящее время исследователи не ограничиваются применением только тригонометрической системы функций для разложения сигналов. Среди всего многообразия используемых систем ортогональных функций заметное место занимает система функций Лагерра. Это объясняется тем, что функции Лагерра обладают рядом достоинств.

Функции Лагерра получают с помощью ортогональных полиномов, расчетная формула которых имеет вид

$$L_n(\tau) = \frac{e^{-\tau} d^n}{n! d \tau^n} (\tau^n e^{-\tau}), \quad \tau \geq 0.$$

Первые пять полиномов в соответствии с этой формулой описываются выражениями:

$$L_0(\tau) = 1;$$

$$L_1(\tau) = 1 - \tau;$$

$$L_2(\tau) = 1 - 2\tau + \tau^2/2;$$

$$L_3(\tau) = 1 - 3\tau + 3\tau^2/2 - \tau^3/6;$$

$$L_4(\tau) = 1 - 4\tau + 3\tau^2 - 2\tau^3/3 - \tau^4/24.$$

Полиномы Лагерра ортогональны на полуоси $0 < \tau < \infty$ с весом $\rho(\tau) = \exp(-\tau)$, то есть они удовлетворяют условию

$$\int e^{-\tau} L_n(\tau) L_m(\tau) d\tau = \begin{cases} r_n = (n!)^2 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Поскольку полиномы Лагерра образуют систему расходящихся при $\tau \rightarrow \infty$ функций, для разложения сигналов используют функции Лагерра

$$l_n(\tau) = \sqrt{\rho(\tau)} L_n(\tau) = e^{-\tau/2} L_n(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

После замены $\tau = 2\alpha t$ и умножения на нормирующий коэффициент $\sqrt{2\alpha}$ первые пять функций Лагерра принимают вид:

$$l_0(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t};$$

$$l_1(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} (1 - 2\alpha t);$$

$$l_2(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} (1 - 4\alpha t + 2\alpha^2 t^2);$$

$$l_3(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} (1 - 6\alpha t + 6\alpha^2 t^2 - 4\alpha^3 t^3/3);$$

$$l_4(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} (1 - 8\alpha t + 12\alpha^2 t^2 - 16\alpha^3 t^3/3 + 2\alpha^4 t^4/3),$$

где α – масштабный коэффициент.

В общем виде функции описываются формулой

$$l_n(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{C_n^j}{j!} (2\alpha t)^j, \quad (4.1)$$

где C_n^j – число сочетаний из n по j .

Функции Лагерра образуют полную и ортогональную систему на одностороннем интервале $[0, \infty)$, то есть они удовлетворяют соотношению

$$\int_0^{\infty} l_n(t) l_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Графики первых пяти функций Лагерра приведены на рис. 4.1. Из них видно, что номер функции Лагерра соответствует числу пересечений ею нулевого уровня.

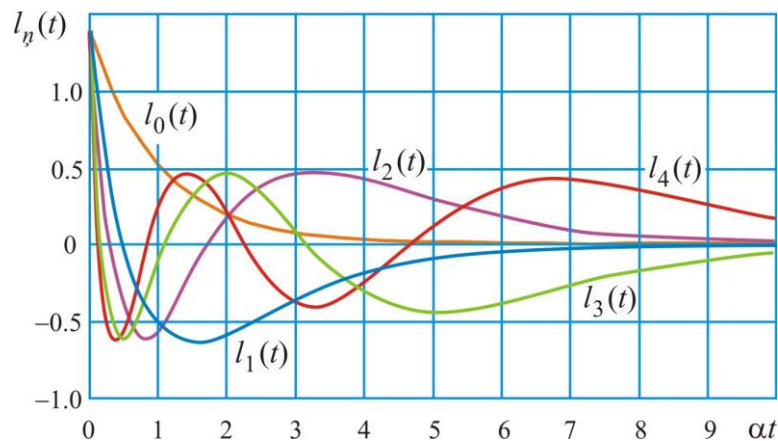


Рис. 4.1. Графики первых пяти функций Лагерра

Выражение (4.1) в области преобразования Лапласа будет иметь изображение

$$L_n(\alpha, s) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{s + \alpha} \left(\frac{s - \alpha}{s + \alpha} \right)^n. \quad (4.2)$$

Из формулы (4.2) следует, что n -я функция Лагерра определяется из функции с номером $n - 1$ путем умножения на элемент с передаточной функцией

$$L(\alpha, s) = \frac{s - \alpha}{s + \alpha}.$$

4.2. Разложение сигналов по функциям Лагерра

Сигнал $x(t)$, определенный на интервале $(0, \infty)$, можно представить в виде разложения по системе функций Лагерра:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i l_i(t).$$

Значения коэффициентов $\lambda_i, i = 0, 1, \dots$, вычисляются по формуле

$$\lambda_i = \int_0^{\infty} x(t) l_i(t) dt.$$

Совокупность коэффициентов $\lambda_i, i = 0, 1, \dots$, представляет спектр сигнала в базисе функций Лагерра.

Показано, что энергия сигнала, представленного в виде разложения по функциям Лагерра, определяется выражением

$$E_x = \int_0^{\infty} x^2(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^2.$$

Если для аппроксимации сигнала используется усеченный ряд

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i l_i(t).$$

то для оценки качества аппроксимации сигнала может быть использована величина

$$e_{xN} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{C_i^2}{E_x},$$

характеризующая часть энергии сигнала, приходящуюся на первые N членов разложения.

Важным пунктом спектрального анализа с использованием функций Лагерра является выбор значения масштабного коэффициента α . Его начальное значение рекомендуется выбирать так, чтобы длительности исследуемого сигнала и функции Лагерра с номером $i \approx N/2$ были примерно равны. В последующем значение коэффициента α уточняется.

Функции Лагерра получили широкое распространение в системах обработки сигналов различного назначения. Это в значительной степени объясняется простотой их генерирования. Оказывается, что функция Лагерра $l_i(t)$ по форме совпадает с импульсной характеристикой системы, состоящей из последовательно соединенных простых электрических цепей.

4.3. Функции Уолша и способы их упорядочения

Функции Уолша и основанное на этих функциях преобразование обладает рядом свойств, благодаря которым их применение в системах обработки сигналов часто оказывается более предпочтительным по сравнению с другими. Эти функции получили широкое распространение при обработке речевых сигналов, при обработке изображений в биологии и медицине, в цифровой голографии и многих других областях.

Система функций Уолша впервые была описана математиком Уолшем (J. Walsh) в 1923 году. В настоящее время существует несколько модификаций этой системы, отличающихся способом нумерации образующих ее функций.

Функции Уолша определяются через функции Радемахера. Последние, в свою очередь, образуются из синусоидальных функций с помощью формулы

$$r_0(\theta) \equiv 1, \quad r_i(\theta) = \text{sign}[\sin(2^i \pi \theta)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Здесь $\theta = t/T$, где T – период функций, и $0 \leq \theta < 1$. Символом sign обозначается сигнум-функция

$$\text{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Из (4.3) следует, что функции Радемахера являются дискретными и принимают только два значения: $+1$ и -1 . На рис. 4.2 представлены первые четыре функции Радемахера.

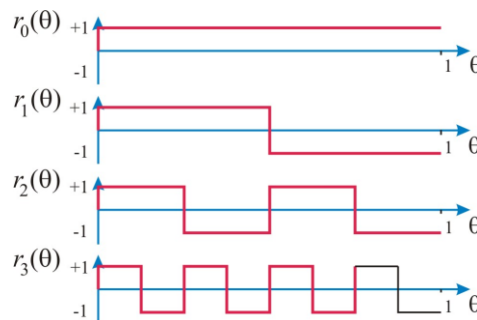


Рис. 4.2. Графики первых четырех функций Радемахера

Система функций Радемахера является ортогональной на интервале $[0, 1)$, но неполной, так как на том же интервале существуют другие функции, ортогональные им. Система функций Уолша является расширением системы функций Радемахера до полной системы.

Рассмотрим в качестве базовой систему функций Уолша, в которой функции упорядочены по числу пересечений ими нулевого уровня. Функции Уолша определяются с помощью функций Радемахера следующим образом:

$$\text{wal}_0(\theta) \equiv 1; \quad \text{wal}_i(\theta) = \prod_{j=1}^n [r_j(\theta)]^{i_j^r}, \quad (4.4)$$

где i_j^r – значение j -го разряда в записи номера функции i в коде Грея.

В табл. 4.1 показаны этапы образования системы Уолша, состоящей из $N = 2^3 = 8$ функций, в соответствии с формулой (4.4). Сначала записывается код номера i функции Уолша в двоичном коде. Затем этот номер представляется в коде Грея. Код Грея связан с обычным двоичным кодом следующим образом. Если в обычной двоичной системе счисления число

$$i = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1,$$

то в коде Грея это число записывается в виде

$$i = b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1,$$

где $b_1 = a_1 \oplus a_2, b_2 = a_2 \oplus a_3, \dots, b_{n-1} = a_{n-1} \oplus a_n, b_n = a_n$;

\oplus – знак суммирования по модулю 2 ($0 \oplus 0=0; 0 \oplus 1=1; 1 \oplus 0=1; 1 \oplus 1=0$).

Таблица 4.1

Номер i функции Уолша	Представление числа i в двоичном коде	Представление числа i в коде Грея	Формула образования функ- ции Уолша $wal_i(\theta)$
0	000	000	$wal_0(\theta) = 1$
1	001	001	$wal_1(\theta) = r_1(\theta)$
2	010	011	$wal_2(\theta) = r_1(\theta)r_2(\theta)$
3	011	010	$wal_3(\theta) = r_2(\theta)$
4	100	110	$wal_4(\theta) = r_2(\theta)r_3(\theta)$
5	101	111	$wal_5(\theta) = r_1(\theta)r_2(\theta)r_3(\theta)$
6	110	101	$wal_6(\theta) = r_1(\theta)r_3(\theta)$
7	111	100	$wal_7(\theta) = r_3(\theta)$

В последнем столбце табл. 4.1 приведены аналитические выражения для функций Уолша. Легко видеть, что четыре функции Уолша (с номерами 0, 1, 3 и 7) являются функциями Радемахера. Остальные образованы из функций Радемахера путем умножения их друг на друга. Графики функций Уолша, образованные согласно табл. 4.1, приведены на рис. 4.3.

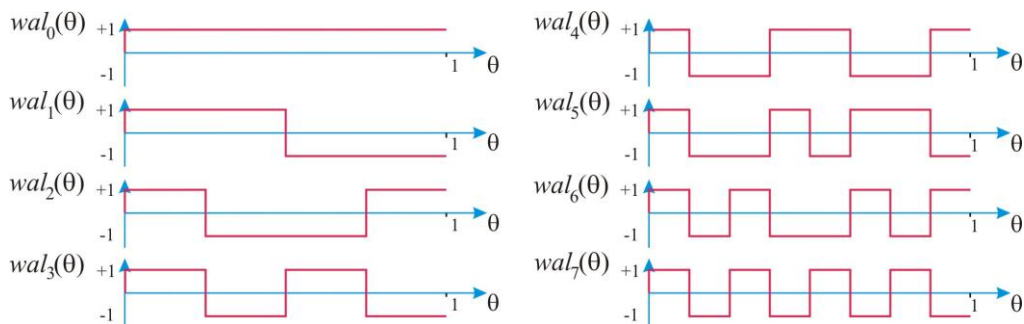


Рис. 4.3. Графики первых восьми функций Уолша

Функции Уолша являются кусочно-постоянными. Интервал определения функций можно рассматривать состоящим из $N = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$ равных подынтервалов. На каждом из них функции Уолша принимают значения $+1$ или -1 . В точках разрыва функции непрерывны справа.

В рассмотренной системе Уолша функции упорядочены по числу пересечений ими нулевого уровня, то есть каждая последующая функция имеет на одно пересечение нулевого уровня больше, чем предыдущая. На практике получили распространение и другие способы упорядочения.

В системе Пэли описанные выше функции обозначаются $pal_i(\theta)$. Их порядок определяется записью числа i в коде Грея, который читается как запись числа в двоичном коде. Систему Адамара образуют те же функции, которые обозначаются $had_i(\theta)$. Нумерация функций в этой системе определяется также кодом Грея, который читается в обратном порядке как двоичный код. В табл. 4.2 показано соответствие между номерами первых восьми функций в системах, упорядоченных по Уолшу, Адамару и Пэли.

Таблица 4.2

Запись числа i в коде Грея	000	001	011	010	110	111	101	100
Номер i функции в системе Уолша	0	1	2	3	4	5	6	7
Номер i функции в системе Пэли	0	1	3	2	6	7	5	4
Номер i функции в системе Адамара	0	4	6	2	3	7	5	1

Приведем основные свойства системы Уолша.

1. Функции Уолша ортогональны и нормированны, так как

$$\int_0^1 wal_i(\theta) wal_j(\theta) d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

2. Среднее значение функций Уолша для всех $i \neq 0$ равно нулю:

$$\int_0^1 wal_i(\theta) d\theta = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

3. Произведение двух функций Уолша равно новой функции Уолша из этой же системы:

$$wal_i(\theta) \cdot wal_j(\theta) = wal_k(\theta),$$

где $k = i \oplus j$, \oplus – символ поразрядного суммирования по модулю два: $1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$, $0 \oplus 0 = 0$. Это свойство называется свойством *мультипликативности*.

4. Четным относительно середины интервала ($\theta = 0.5$) функциям соответствуют четные значения i и наоборот.

4.4. Разложение сигналов по функциям Уолша

Рассмотрим основные особенности спектрального представления сигналов в базисе Уолша, в частности, сигналов, заданных на интервале $[0, T)$. Для разложения таких сигналов удобно использовать функции Уолша, ортогональные на отрезке $[0, 1)$, которые после преобразования их аргумента записываются в виде $wal_i(t/T)$.

Ряд Уолша одномерного сигнала $x(t)$, $t \in [0, T)$, будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i wal_i\left(\frac{t}{T}\right),$$

где

$$c_i = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) wal_i\left(\frac{t}{T}\right) dt. \quad (4.5)$$

Усеченные ряды Уолша

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i wal_i\left(\frac{t}{T}\right)$$

обладают равномерной, среднеквадратической сходимостью и сходимостью в среднем и могут быть использованы для аппроксимации сигналов, описываемых интегрируемыми функциями.

Функции Уолша на интервалах дискретности имеют значения ± 1 , что устраняет операцию умножения при вычислении их коэффициентов. Спектральный анализ по Уолшу связан с меньшими затратами машинного времени, особенно при использовании алгоритма быстрого преобразования Уолша (БПУ). В сравнении с анализом по гармоническим функциям затраты машинного времени снижаются в два раза и более.

Как отмечалось выше, на практике используются функции Уолша с различными способами упорядочения. С общей точки зрения для спектрального разложения сигналов они равноправны. Однако для некоторого конкретного сигнала спектр по функциям одной системы может сходиться быстрее, чем спектр по функциям других систем. Поэтому преимущество той или другой системы может проявляться при спектральном разложении конкретных сигналов с последующим использованием усеченных рядов.

Пример. Дан сигнал в виде треугольного импульса (рис. 4.4, а). Найдём значения первых восьми коэффициентов в разложении импульса по системе функций Уолша.

Заданный сигнал описывается выражением

$$x(t) = \frac{A}{T} \cdot t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

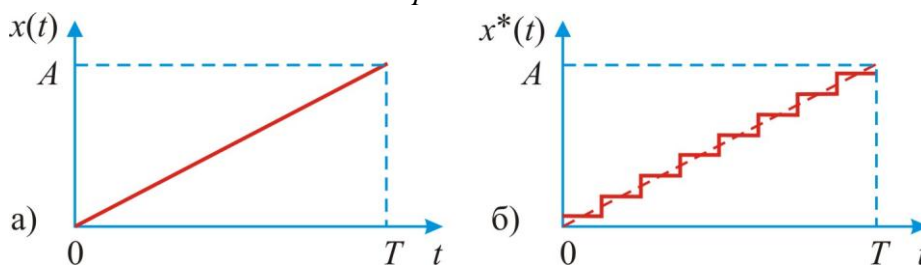


Рис. 4.4. Графики исходного (а) и аппроксимирующего (б) сигналов

Значения коэффициентов ряда Уолша рассчитываем по формуле (4.5):

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t dt = \frac{A}{T^2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{A}{2};$$

$$c_1 = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} \frac{A}{T} t dt - \int_{T/2}^T \frac{A}{T} t dt \right) = \frac{A}{T^2} \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^{T/2} - \frac{t^2}{2} \Big|_{T/2}^T \right) = -\frac{A}{4};$$

$$c_2 = 0; \quad c_3 = -\frac{A}{8}; \quad c_4 = c_5 = c_6 = 0; \quad c_7 = -\frac{A}{16}.$$

Аппроксимация рассматриваемого сигнала усеченным рядом Уолша

$$x^*(t) = c_0 wal_0\left(\frac{t}{T}\right) + c_1 wal_1\left(\frac{t}{T}\right) + c_3 wal_3\left(\frac{t}{T}\right) + c_7 wal_7\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.6)$$

показана на рис. 4.4, б.

Контрольные вопросы и задания

1. Можно ли использовать функции Лагерра для разложения сигналов, заданных на ограниченном интервале?
2. Какую роль выполняет параметр α функций Лагерра? Как его выбрать?
3. Поясните, что произойдет, если нормирующий множитель $\sqrt{2\alpha}$ в функциях Лагерра отсутствует.
4. Укажите основные преимущества и область применения функций Уолша.
5. Убедитесь, что произведение любых двух функций Уолша дает функцию Уолша. Как это свойство называется?
6. Изобразите спектральную диаграмму разложения в базисе Уолша треугольного импульса, рассмотренного в примере.
7. Перепишите формулу (4.6), используя функции $had_i(\theta)$ и $pal_i(\theta)$.
8. Укажите основные отличия ортогональных функций Лагерра и Уолша.