Тема 3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Прямое и обратное преобразования Фурье. – Спектральная характеристика сигнала. – Амплитудно-частотный и фазо-частотный спектры. – Спектральные характеристики простейших сигналов. – Свойства преобразования Фурье. – Распределение энергии в спектре непериодического сигнала.

3.1. Преобразование Фурье

Гармонический анализ можно распространить и на непериодические сигналы. Рассмотрим сигнал, который определен некоторой функцией $x(t)$ на интервале $[t_1, t_2]$ и равен нулю за пределами этого интервала (этот сигнал показан на рис.3.1 сплошной линией). Будем полагать, что эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируема.

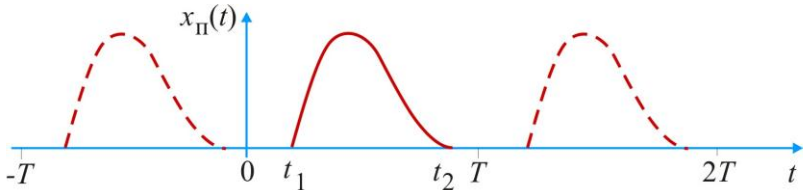

Рис.3.1. Периодическая функция, образованная повторением $x(t)$

Возьмем произвольный отрезок времени длительностью T, целиком включающий интервал $[t_1, t_2]$, и образуем периодическую функцию

$$x_п(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT).$$

в которой функция $x(t)$ повторяется через интервал T (фрагмент этой функции показан на рис. 3.1).

Очевидно, что

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_п(t). \tag{3.1}$$

Периодическую функцию $x_п(t)$ можно записать в виде ряда Фурье в комплексной форме

$$x_п(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}, \tag{3.2}$$

где

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jn\omega_1 t}\, dt. \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в (3.2) и заменив $T = 2\pi/\omega_1$, получим

$$x_п(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} [x(\tau)\, e^{-jn\omega_1\tau} d\tau]\, e^{jn\omega_1 t}\, \omega_1\right]. \tag{3.4}$$

Чтобы получить спектральное представление сигнала $x(t)$, подставим (3.4) в (3.1) и устремим T к бесконечности. При $T \to \infty$ угловая частота $\omega_1 = 2\pi/T$ превращается в бесконечно малое приращение частоты $d\omega$, частота n-ой составляющей ряда $n\omega_1$ – в текущую частоту ω, а операция суммирования может быть заменена на операцию интегрирования. В результате получим

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right] d\omega \ . \qquad (3.5)$$

С учетом, что значения t_1 и t_2 не определены, для внутреннего интеграла в (3.5) введем обозначение

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \ . \qquad (3.6)$$

Функцию $X(j\omega)$ называют *спектральной характеристикой* сигнала $x(t)$.

Выражение (3.5) с учетом (3.6) принимает вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \ . \qquad (3.7)$$

Формулы (3.6) и (3.7) образуют пару преобразований Фурье и устанавливают однозначное соответствие между представлением $x(t)$ сигнала во временной области и его представлением $X(j\omega)$ в области частот. Формулу (3.6) называют прямым преобразованием Фурье, а функцию $X(j\omega)$ – спектральной характеристикой сигнала $x(t)$. Формула (3.7) позволяет осуществить обратное преобразование и вычислить мгновенное значение сигнала $x(t)$, если известна его спектральная характеристика $X(j\omega)$. Символически эти преобразования записываются в виде

$$X(j\omega) = \Im\,[x(t)]\,, \quad x(t) = \Im^{-1}[X(j\omega)]\,.$$

Спектральная характеристика $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$ в общем случае является комплексной функцией частоты. Применив известную формулу Эйлера, ее можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos\omega t \cdot dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin\omega t \cdot dt \\ &= a(\omega) - j\, b(\omega) = X(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Действительная часть

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos\omega t \cdot dt$$

спектральной характеристики есть четная функция частоты, а мнимая часть

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin\omega t \cdot dt$$

– нечетная функция частоты. Отсюда следует, что модуль спектральной характеристики

$$X(\omega) = |\,X(j\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

есть четная функция частоты, а аргумент спектральной характеристики

$$\phi(\omega) = \arg X(j\omega)$$

– нечетная функция частоты.

Графически спектральную характеристику $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$ в общем случае можно представить в виде годографа на комплексной плоскости (рис. 3.2, *а*). Однако чаще строят амплитудно-частотную $X(\omega)$ и фазо-частотную $\phi(\omega)$ спектральные характеристики (рис. 3.2, *б*, *в*). Учитывая симметричность спектральных характеристик при положительных и отрицательных значениях частоты ω, их, как правило, строят только при положительных значениях частоты ω.

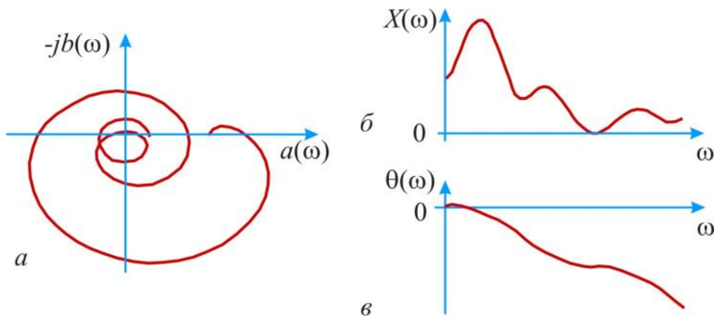

Рис.3.2. Спектральные характеристики сигнала:
а – годограф, *б* – амплитудная, *в* – фазовая

Формулу (3.7) обратного преобразования Фурье при помощи формулы Эйлера и выражения (3.8) можно преобразовать к следующему виду:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [\,a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t\,]\,d\omega\,. \qquad (3.9)$$

3.2. Спектральные характеристики простейших непериодических сигналов

Спектральная характеристика одиночного прямоугольного импульса

Прямоугольный импульс с началом отсчета, совмещенным с его серединой (рис. 3.3, *а*), описывается выражением

$$x(t) = D\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} D & \text{при} \quad -\tau/2 \le t \le \tau/2\,, \\ 0 & \text{при} \quad t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2\,. \end{cases}$$

Применяя формулу (3.6), находим

$$X(j\omega) = D\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}dt = \frac{D}{-j\omega}\left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}}\right) = D\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \qquad (3.10)$$

Спектральная характеристика прямоугольного импульса при выбранном начале отсчета является вещественной функцией (рис. 3.3, *б*). Максимальное значение $X(j\omega)$ достигается при $\omega = 0$. Его можно вычислить по правилу Лопиталя: $X(0) = D\tau$. Спектральная характеристика обращается в нуль при значениях аргумента

$$\frac{\omega\tau}{2} = \pi n \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{\tau}n\right),$$

где n – любое (положительное или отрицательное) целое число.

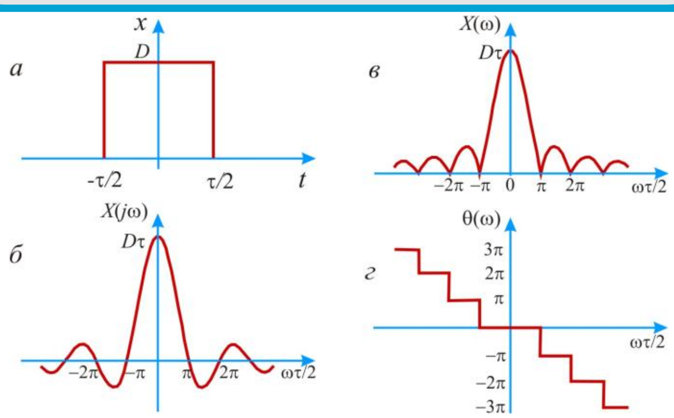

Рис.3.3. Спектральные характеристики прямоугольного импульса (*а*):
б – общая; *в* – амплитудная; *г* – фазовая

При увеличении длительности τ импульса расстояние между нулями функции $X(j\omega)$ уменьшается, то есть спектр сужается. Значение $X(0)$ при этом возрастает. При уменьшении длительности τ импульса, наоборот, расстояние между нулями функции $X(j\omega)$ увеличивается, что свидетельствует о расширении спектра, а значение $X(0)$ уменьшается.

Амплитудная спектральная характеристика $X(\omega)$ прямоугольного импульса показана на рис. 3.3, *в*. При построении фазовой спектральной характеристики $\theta(\omega)$ (рис. 3.3, *г*) каждая перемена знака функции $X(j\omega)$ учитывается приращением фазы на π.

Спектральная характеристика дельта-функции

Дельта-функция (функция Дирака) определяется следующим образом:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad t = 0, \\ 0 & \text{при} \quad t \neq 0. \end{cases}$$

Функция удовлетворяет условию $\int \delta(t)\,dt = 1$, которое означает, что площадь импульса равна единице. Получить на практике сигнал, описываемый такой функцией, нельзя. Однако дельта-функция является очень удобной математической моделью. На рис. 3.4, *а* приведено графическое представление дельта-функции в виде вертикального отрезка, заканчивающегося стрелкой. Длина этого отрезка, принимается пропорциональной площади дельта-импульса.

Найдем спектральную характеристику дельта функции. Для этого возьмем прямоугольный импульс, описываемый функцией $v(t)$ (рис. 3.4, *б*). Длительность импульса равна τ, а амплитуда – $1/\tau$. Поэтому площадь импульса равна единице. Будем уменьшать длительность импульса до нуля, при этом его амплитуда будет стремиться к бесконечности. Следовательно,

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} v(t).$$

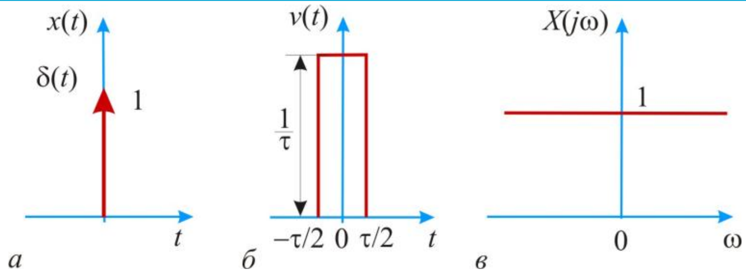

Рис.3.4. К определению спектральной характеристики дельта-функции:
а – дельта-функция; *б* – прямоугольный импульс; *в* – спектральная характеристика

Спектральная характеристика прямоугольного импульса определяется выражением (3.10). Отсюда с учетом, что $A = 1/\tau$, получим спектральную характеристику дельта-функции

$$X(j\omega) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = 1 .$$

Таким образом, дельта-импульс имеет равномерный спектр на всех частотах (рис. 3.4, *в*).

Спектральная характеристика экспоненциального сигнала

Рассмотрим сигнал, описываемый функцией

$$x(t) = A\cdot e^{-\alpha t}\cdot 1(t)$$

при положительном вещественном значении параметра α (рис. 3.5, *а*).

Спектральная характеристика экспоненциального сигнала равна

$$X(j\omega) = A\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t}\Big|_0^\infty = \frac{A}{\alpha + j\omega} .$$

Годограф спектральной характеристики приведен на рис. 3.5, *б*. Амплитудный и фазовый спектры определяются соответственно выражениями:

$$X(\omega) = |X(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} ,$$

$$\phi(\omega) = \arg X(j\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega/\alpha) .$$

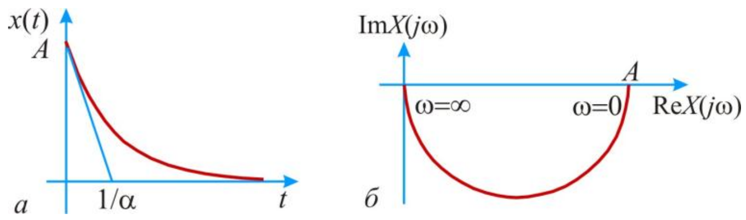

Рис.3.5. К определению спектральной характеристики экспоненциального импульса: *а* – экспоненциальный импульс; *б* – спектральная характеристика

Спектральная характеристика ступенчатого сигнала

Рассмотрим сигнал, описываемый ступенчатой функцией

$$x(t) = A\cdot 1(t) . \qquad (3.11)$$

Ступенчатая функция $1(t)$ не является абсолютно интегрируемой функцией, поэтому формулу прямого преобразования Фурье использовать нельзя. Однако функцию (3.11) можно представить как предел экспоненциальной функции:

$$x(t) = A \lim_{\alpha \to 0} e^{-\alpha t}.$$

В этом случае спектральную характеристику $X(j\omega)$ можно определить как предел спектральной характеристики экспоненциального сигнала при $\alpha \to 0$:

$$X(j\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{A}{\alpha + j\omega} = A \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - jA \lim_{\alpha \to 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

При $\alpha \to 0$ первое слагаемое в правой части этого выражения равно нулю на всех частотах, кроме $\omega = 0$, где оно обращается в бесконечность. Найдем площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega/\alpha)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

Следовательно, предел первого слагаемого равен $\pi\delta(\omega)$. Предел второго слагаемого очевиден. Поэтому окончательно получим

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

3.3. Основные свойства преобразования Фурье

Между сигналом $x(t)$ и его спектром $X(j\omega)$ существует однозначное соответствие. Для решения практических задач необходимо знать связь между изменениями сигнала и соответствующими изменениями спектральной характеристики. Рассмотрим наиболее важные преобразования сигналов и соответствующие им изменения спектральной характеристики.

Линейность преобразования Фурье

Если сигналы $x_1(t), \dots, x_n(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральными характеристиками являются соответственно функции $X_1(j\omega), \dots, X_n(j\omega)$ и если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – величины, не зависящие от t и ω, то справедливы следующие равенства:

$$\Im\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(j\omega),$$

$$\Im^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(j\omega)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t).$$

Таким образом, линейной комбинации сигналов соответствует линейная комбинация спектральных характеристик этих сигналов.

Спектральная характеристика производной

Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, и ее производная $y(t) = dx/dt$ преобразуемы по Фурье и $x(t)$ имеет спектральную характеристику $X(j\omega)$, то спектральная характеристика производной

$$Y(j\omega) = \Im\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega). \tag{3.12}$$

Таким образом, дифференцирование сигнала по времени эквивалентно простой алгебраической операции умножения спектральной характеристики на множитель $j\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $j\omega$ является оператором дифференцирования, действующим в частотной области.

Формула (3.12) обобщается на случай спектра производной n-го порядка. Легко показать, что если производная

$$y(t) = dx^n(t)\big/dt^n$$

абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, \infty)$, то

$$Y(j\omega) = (j\omega)^n X(j\omega).$$

Спектральная характеристика интеграла

Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, преобразуема по Фурье, имеет спектральную характеристику $X(j\omega)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 0$, то спектральная характеристика интеграла $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ равна

$$Y(j\omega) = \Im\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega}.$$

Таким образом, множитель $(1/j\omega)$ является оператором интегрирования в частотной области. Это свойство распространяется и на интегралы кратности n.

Спектральная характеристика смещенного сигнала

Пусть имеется сигнал $x_1(t)$ (рис. 3.6, *а*) произвольной формы, существующий на интервале $[t_1, t_2]$ и обладающий спектральной характеристикой $X_1(j\omega)$. Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на время τ позднее и поэтому описываемый функцией

$$x_2(t) = x_1(t-\tau).$$

Эта функция определена на интервале $[t_1+\tau, t_2+\tau]$ (рис. 3.6, *б*).

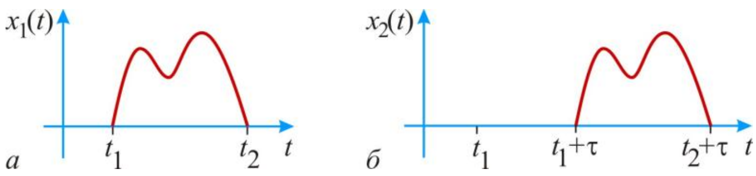

Рис.3.6. Исходный (*а*) и «запаздывающий» (*б*) сигналы

Если сигнал $x_1(t)$ преобразуем по Фурье и имеет спектральную характеристику $X_1(j\omega)$, то спектральная характеристика «запаздывающего» сигнала $x_2(t)$ равна

$$X_2(j\omega) = \Im\{x_1(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau} X_1(j\omega).$$

В случае «опережающего» сигнала $x_2(t) = x_1(t+\tau)$ будем иметь

$$X_2(j\omega) = \Im\{x_1(t+\tau\} = e^{j\omega\tau}X_1(j\omega)\,.$$

Смещение спектральной характеристики

Если функция $x(t)$ преобразуема по Фурье и имеет спектральную характеристику $X(j\omega)$, то

$$\Im\left\{ e^{-jat}x(t) \right\} = X[j(\omega + a)]\,,$$

где a – любое вещественное неотрицательное число.

Сжатие и растяжение сигналов

Пусть задан сигнал $x_1(t)$ и ее спектральная характеристика $X_1(j\omega)$. Подвергнем эту функцию изменению масштаба времени, образовав новую функцию

$$x_2(t) = x_1(kt)\,,$$

где k – некоторое вещественное число. На рис. 3.7 приведены, например, графики сигнала, описываемого функцией

$$x_2(t) = e^{-0.5kt}\cos\pi kt\,, \qquad (3.13)$$

для значений Ф$k = 0.5; 1; 2$.

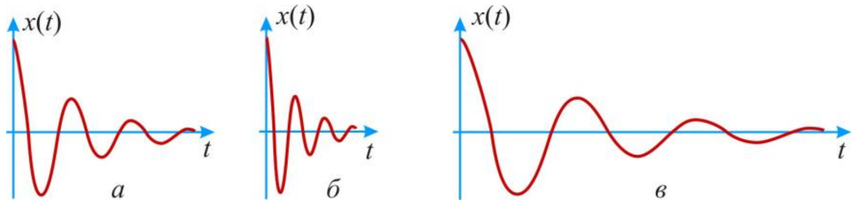

Рис.3.7. Графики сигнала (3.13): *а* – $k = 1$; *б* – $k = 2$; *в* – $k = 0.5$

Легко заметить, что при $k > 1$ происходит «сжатие» сигнала (рис. 3.7, *б*), а при $0 < k < 1$ – «растяжение» сигнала (рис. 3.7, *в*).

Можно показать, что спектральная характеристика сигнала $x_2(t)$ определяется выражением

$$X_2(j\omega) = \Im\{x_1(kt)\} = \frac{1}{k}X_1(j\frac{\omega}{k})\,.$$

Из этого выражения следует, что при сжатии сигнала на временной оси в k раз во столько же раз расширяется его спектр на оси частот. Модуль спектральной характеристики при этом уменьшается в k раз. При растяжении сигнала во времени, то есть при $0 < k < 1$, имеют место сужение спектра и увеличение модуля спектральной характеристики.

Спектральная характеристика произведения сигналов

Пусть имеются два сигнала, которые описываются функциями $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Образуем сигнал

$$y(t) = x_1(t)\,x_2(t)\,.$$

Если сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики есть соответственно $X_1(j\omega)$ и $X_2(j\omega)$, то спектральная характеристика сигнала $y(t)$ определяется выражением

$$Y(j\omega) = F\{x_1(t)\,x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1[j(\omega-\sigma)]\,X_2(j\sigma)\,d\sigma\,.$$

Теорема Парсеваля

Если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики соответственно равны $X_1(j\omega)$ и $X_2(j\omega)$, причем интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)\,d\omega\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\omega)\,d\omega$$

сходятся абсолютно, то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\,x_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)\,X_2(-j\omega)\,d\omega\,. \qquad (3.14)$$

Формула (3.14) позволяет найти интеграл в бесконечных пределах от произведения двух функций, произведя соответствующие операции со спектральными характеристиками функций.

После несложных преобразований формулу (3.14) можно записать в вещественной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\,x_2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |X_1(j\omega)|\,|X_2(j\omega)|\cos[\phi_1(\omega)-\phi_2(\omega)]\,d\omega\,.$$

Если $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, то $X_1(j\omega) = X_2(j\omega) = X(j\omega)$ и из (3.14) получим равенство, которое называют *формулой Парсеваля*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega\,.$$

Обратимость преобразования Фурье

Нетрудно заметить, что формулы прямого преобразования

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}dt\,.$$

и обратного преобразования Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega$$

очень похожи друг на друга. По этой причине все «пары» преобразований имеют близкие зеркальные образы. Покажем это на примере.

Как показано выше, прямоугольный импульс, описываемый функцией

$$x(t) = \begin{cases} D & \text{при} \quad -\tau/2 \le t \le \tau/2\,, \\ 0 & \text{при} \quad t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2\,. \end{cases}$$

имеет спектральную характеристику

$$X(j\omega) = D\,\tau\,\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\,.$$

С другой стороны, если подвергнуть прямому преобразованию Фурье сигнал

$$y(t) = \frac{D\omega_0}{2\pi} \frac{\sin(\omega t_0/2)}{\omega t_0/2}.$$

получим

$$Y(j\omega) = \begin{cases} D & \text{при} \quad -\omega_0/2 \le \omega \le \omega_0/2, \\ 0 & \text{при} \quad \omega < -\omega_0/2 \text{ и } \omega > \omega_0/2. \end{cases}$$

3.4. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала. Практическая ширина спектра

Величина

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt$$

носит название *энергии сигнала*. Именно такая энергия выделяется в резисторе с сопротивлением 1 Ом, если к его зажимам приложено напряжение $x(t)$.

С помощью формулы Парсеваля энергию сигнала можно выразить через его спектральную характеристику:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega. \qquad (3.15)$$

Соотношение (3.15) позволяет определить энергию сигнала путем интегрирования квадрата модуля спектральной характеристики по всему диапазону частот. Кроме того, это соотношение показывает, каким образом распределена энергия сигнала по различным частотным составляющим. Из него видно, что на бесконечно малый промежуток частот приходится энергия

$$dE_x = \frac{|X(j\omega)|^2}{\pi}\,d\omega.$$

Поэтому функцию

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi}|X(j\omega)|^2$$

можно назвать спектральной характеристикой энергии сигнала $x(t)$. Она характеризует распределение энергии сигнала по его гармоническим составляющим.

В процессе решения практических задач анализа и синтеза сигналов с помощью преобразования Фурье приходится ограничивать интервал частот, в котором строится спектральная характеристика. Этот интервал частот $[0, \omega_{\text{пр}}]$, называемый *практической шириной спектра*, содержит существенные для данного исследования составляющие.

При определении практической ширины спектра сигнала по заданной интенсивности гармонических составляющих используют амплитудную спектральную характеристику. Значение $\omega_{\text{пр}}$ выбирают из условия, что при $\omega > \omega_{\text{пр}}$ амплитуды гармонических составляющих не превышают заданной величины.

С энергетической точки зрения практическая ширина спектра непериодического сигнала оценивается по области частот, в пределах которой сосредоточена подавляющая часть энергии сигнала. В соответствии с формулой (3.15) энергия сигнала, сосредоточенная в полосе частот от 0 до $\omega_{\text{пр}}$, будет

$$E_x^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{пр}} |X(j\omega)|^2 d\omega .$$

В зависимости от требований к доле полезно используемой энергии сигнал и выбирается практическая ширина спектра.

Пример. Дан прямоугольный импульс, описываемый функцией

$$x(t) = \begin{cases} D & \text{при} \quad -\tau/2 \le t \le \tau/2 , \\ 0 & \text{при} \quad t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2 . \end{cases} \tag{3.16}$$

Энергия сигнала равна

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D^2 dt = D^2\tau .$$

Спектральная характеристика прямоугольного импульса найдена выше:

$$X(j\omega) = D\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.$$

Пусть $D = 1, \tau = 1$. Тогда согласно (3.16) $E_x = 1$. Интегрирование квадрата модуля спектральной характеристики в интервале частот [0, 100] дает оценку энергии импульса $E_x^* = 0.994$.

Контрольные вопросы

1. Укажите основное принципиальное отличие спектров периодического и непериодического сигналов.
2. Поясните физический смысл амплитудного и фазового спектров непериодического сигнала.
3. Поясните, что произойдет со спектром непериодического сигнала при изменении полярности последнего на противоположный.
4. Как связаны между собой спектры одиночного импульса и периодической последовательности таких же импульсов?
5. Как изменятся амплитудный и фазовый спектры сигнала при его дифференцировании (интегрировании)?
6. Поясните, какова связь между амплитудным и фазовым спектрами данного сигнала и сигнала, запаздывающего на величину τ.
7. Поясните, как изменится спектральная характеристика (3.9) прямоугольного импульса, если длительность импульса $\tau \to 0$.
8. Покажите, что для преобразования Фурье справедлив принцип суперпозиции.
9. В чем состоит физический смысл равенства Парсеваля?
10. Что означает и для чего вводится понятие практической ширины спектра?