Дисциплина «Математическое моделирование в электротехнике»

Лектор:
К.т.н., доцент ОЭЭ ИШЭ ТПУ
Воронина Наталья Алексеевна

ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Под *устойчивостью системы* понимается способность ее возвращаться к состоянию установившегося равновесия после снятия возмущения, нарушившего это равновесие. Неустойчивая система непрерывно удаляется от равновесного состояния или совершает вокруг него колебания с возрастающей амплитудой

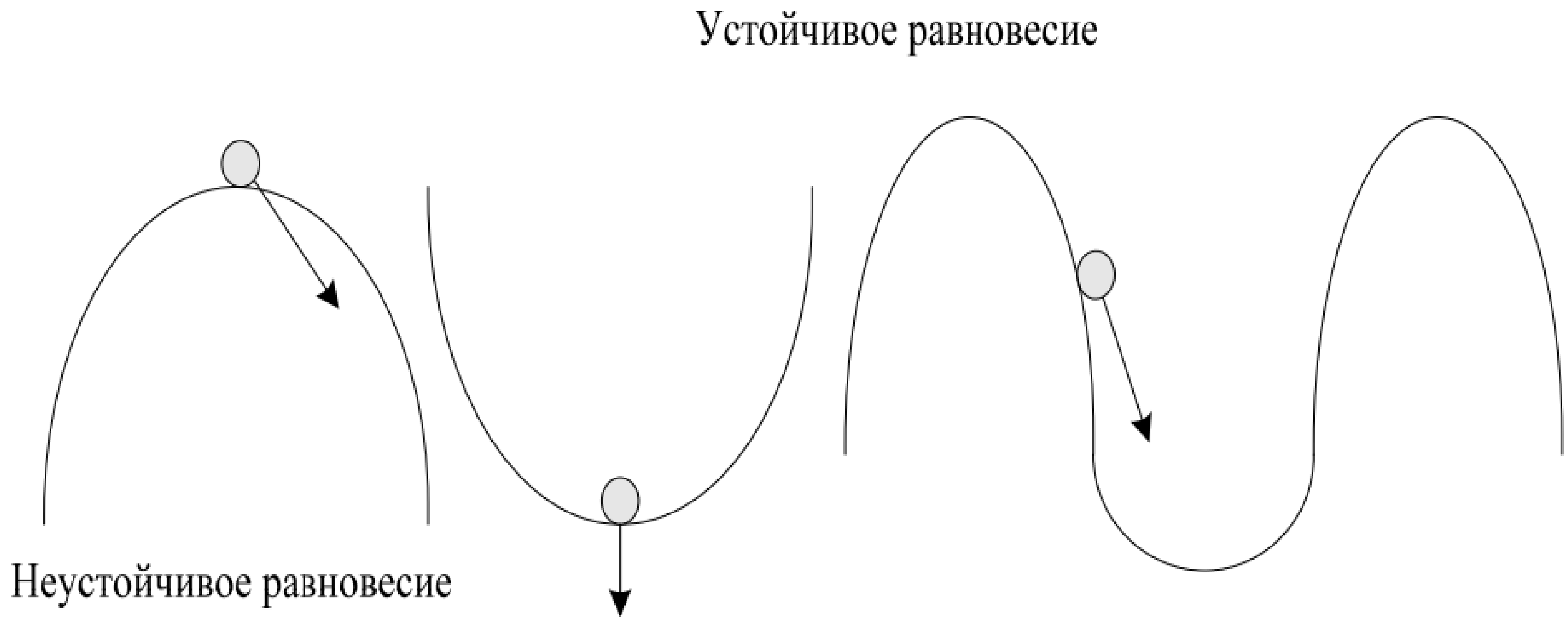


Рис. 4.1. Наглядное представление устойчивости

ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Устойчивость линейной системы определяется не характером возмущения, а структурой самой системы (рис. 4.1). Говорят, что система устойчива "в малом", если определен факт наличия устойчивости, но не определены ее границы. Система устойчива "в большом", когда определены границы устойчивости и то, что реальные отклонения не выходят за эти границы.

В соответствии с классическим методом решение дифференциального уравнения ищется в виде:

$$y(t) = y_{одн}(t) + y_{ч}(t).$$

Здесь $y_{одн}(t)$ - общее решение однородного дифференциального уравнения, то есть уравнения с нулевой правой частью:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

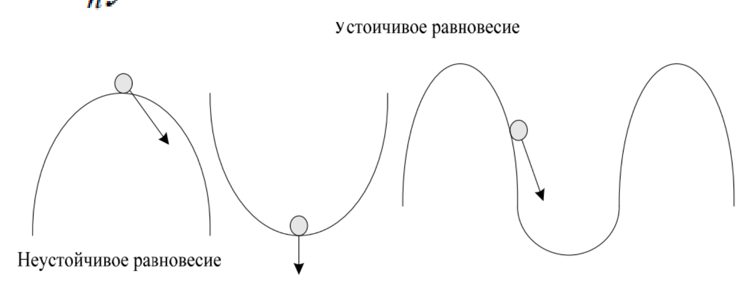
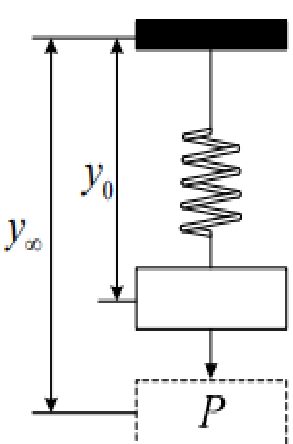


Рис. 4.1. Наглядное представление устойчивости

Физически это означает, что все внешние воздействия сняты и система абсолютно свободна, ее движения определяются лишь собственной структурой. Поэтому решение данного уравнения называется свободной составляющей общего решения. $y_ч(t)$ - частное решение неоднородного дифференциального уравнения, под которым понимается уравнение с ненулевой правой частью. Физически это означает, что к системе приложено внешнее воздействие $u(t)$. Поэтому вторая составляющая общего решения называется вынужденный. Она определяет вынужденный установившийся режим работы системы после окончания переходного процесса.

Можно провести аналогию между САУ и пружиной, колебания которой описываются аналогичным дифференциальным уравнением (рис. 5.2). Оттянем пружину, а затем отпустим, предоставив ее самой себе. Пружина будет колебаться в соответствии со свободной составляющей решения уравнения, то есть характер колебаний будет определяться только структурой самой пружины. Если в момент времени $t = 0$ подвесить к пружине груз, то на свободные колебания наложится внешняя сила P. После затухания колебаний, описываемых только свободной составляющей общего решения, система перейдет в новый установившийся режим, характеризуемый вынужденной составляющей $y_{i\,\grave{a}i} = y(t \to \infty)$. Если внешнее воздействие само будет изменяться по синусоидальному закону $P = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$, то после затухания переходного процесса система будет совершать вынужденные колебания с той же частотой, что и вынуждающая сила, то есть $y_{одн} = y_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$.



Каждая составляющая общего решения уравнения динамики ищется отдельно. Вынужденная составляющая ищется на основе решения уравнения статики для данной системы для времени $t \to \infty$. Свободная составляющая представляет собой сумму из n отдельных составляющих: $y_{св}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i p^{-p_i t}$, где p_i корни характеристического уравнения $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$. Корни могут быть либо вещественными $p_i = a_i$, либо попарно комплексно сопряженными $p_i = a_i \pm j\omega_i$. Постоянные интегрирования A_i определяются исходя из начальных и конечных условий, подставляя в общее решение значения u, y и их производные в моменты времени $t = 0$ и $t \to \infty$.

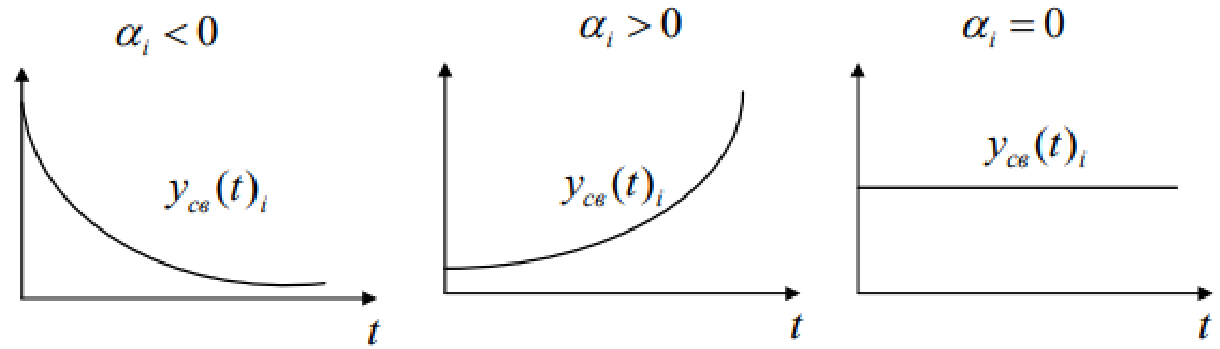


Рис. 4.3. Виды монотонных процессов

Каждому отрицательному вещественному корню соответствует экспоненциально затухающая во времени составляющая $y_{св}(t)_i$, каждому положительному - экспоненциально расходящаяся, каждому нулевому корню соответствует $y_{св}(t)_i = const$ (рис. 4.3). Пара комплексно сопряженных корней с отрицательной вещественной частью определяет затухающие колебания с частотой ω_i, при положительной вещественной части - расходящиеся колебания, при нулевой - незатухающие (рис. 4.4).

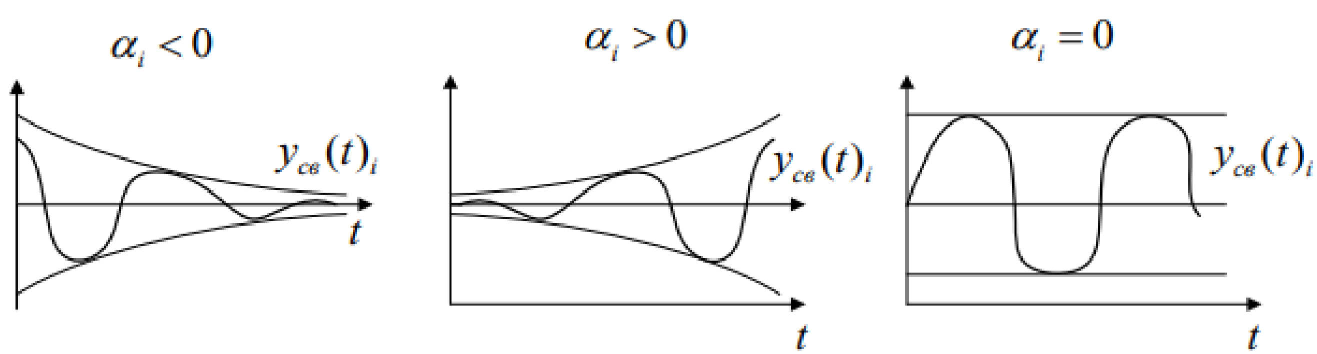


Рис. 4.4. Виду колебательных процессов

Так как после снятия возмущения $y_{одн}(t) = 0$, то устойчивость системы определяется только характером свободной составляющей $y_{св}(t)$. Поэтому условие устойчивости систем по Ляпунову формулируется так: в устойчивой системе свободная составляющая решения уравнения динамики, записанному в отклонениях, должна стремиться к нулю, то есть затухать.

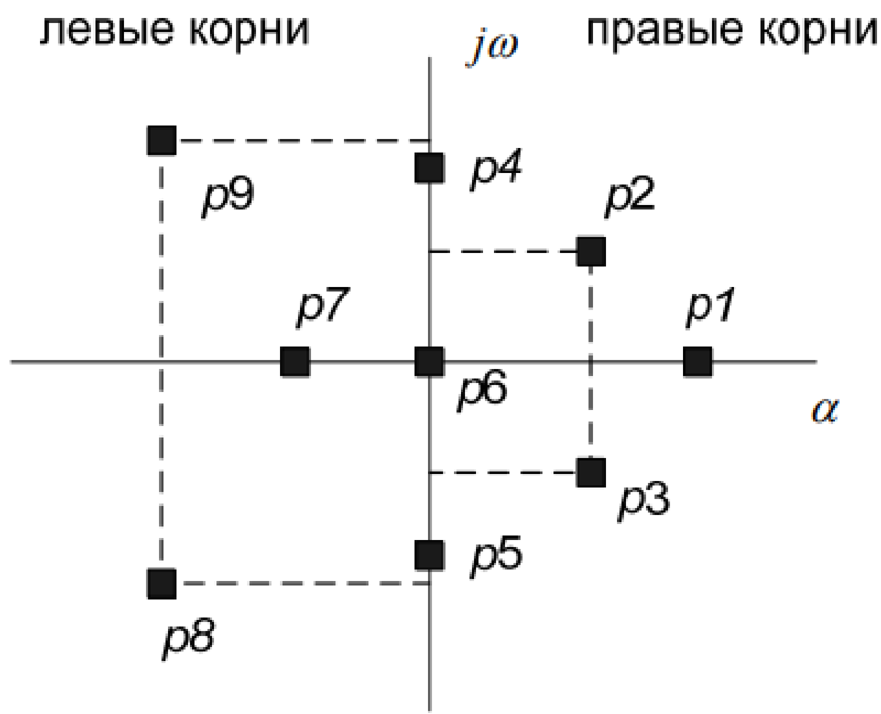


Рис. 4.5. Распределение корней на комплексной плоскости

Исходя из расположения на комплексной плоскости корни с отрицательными вещественными частями называются левыми, с положительными - правыми (рис. 4.5).

Поэтому условие устойчивости линейной САУ можно сформулировать следующим образом: для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми. Если хотя бы один корень правый, то система неустойчива. Если один из корней равен нулю (в системах, где $a_n = 0$), а остальные левые, то система находится на границе апериодической устойчивости. Если равны нулю вещественные части одной или нескольких пар комплексно сопряженных корней, то система находится на границе колебательной устойчивости.

Правила, позволяющие судить о знаках корней характеристического уравнения без его решения, называются критериями устойчивости. Их можно разделить на алгебраические (основаны на составлении по данному характеристическому уравнению по определенным правилам алгебраических выражений, по которым можно судить об устойчивости САУ) и частотные (основаны на исследовании частотных характеристик).

Необходимое условие устойчивости

Характеристическое уравнение системы с помощью теоремы Виета может быть записано в виде

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = a_0 (p - p_1) \ldots (p - p_n) = 0,$$

где $p_1, \ldots p_n$ - корни этого уравнения. Если система устойчива, значит все корни левые, то есть вещественные части всех корней отрицательны, что можно записать как $a_i = -|a_i| < 0$. Подставим их в уравнение:

$$a_0 (p + |a_1|)(p + |a_2| - j\omega_2)(p + |a_2| + j\omega_2) \ldots = 0.$$

Перемножая комплексно сопряженные выражения, получим:

$$a_0 (p + |a_1|)((p + |a_2|)^2 + (\omega_2)^2) \ldots = 0.$$

После раскрытия скобок должно получиться выражение $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$.

Так как в скобках нет ни одного отрицательного числа, то ни один из коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ не будет отрицательным. Поэтому необходимым условием устойчивости САУ является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, ... , $a_n > 0$. В дальнейшем будем рассматривать только уравнения, где $a_0 > 0$. В противном случае уравнение домножается на -1.

Рассмотренное условие является необходиным, но не достаточным условием. Необходимые и достаточные условия дают алгебраические критерии Рауса и Гурвица.

1.1.1. Критерий Рауса

Раус предложил критерий устойчивости САУ в виде алгоритма, по которому заполняется специальная таблица с использованием коэффициентов характеристического уравнения:

1) в первой строке записываются коэффициенты уравнения с четными индексами в порядке их возрастания;

2) во второй строке - с нечетными;

3) остальные элементы таблицы определяется по формуле: $c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i \cdot c_{k+1,i-1}$, где $r_i = c_{1,i-2} / c_{1,i-1}$, $i \geq 3$ - номер строки, k - номер столбца.

4) Число строк таблицы Рауса на единицу больше порядка характеристического уравнения.

Таблица 2

Таблица Раусса

r_i	$i \backslash k$	1	2	3	4
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$	...
-	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$	...
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	3	$c_{13} = c_{21}-r_3c_{22}$	$c_{23} = c_{31}-r_3c_{32}$	$c_{33} = c_{41}-r_3c_{42}$	...
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	4	$c_{14} = c_{22}-r_3c_{23}$	$c_{24} = c_{32}-r_4c_{33}$	$c_{34} = c_{42}-r_4c_{43}$	...
...	...	...	...	...	...

Критерий Рауса: для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса c_{11}, c_{12}, c_{13},... были положительными. Если это не выполняется, то система неустойчива, а количество правых корней равно числу перемен знака в первом столбце.

Достоинство - критерий прост в использовании независимо от порядка характеристического уравнения. Он удобен для использования на ЭВМ. Его недостаток - малая наглядность, трудно судить о степени устойчивости системы, на сколько далеко отстоит она от границы устойчивости.

1.1.2. Критерий Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Гурвиц предложил другой критерий устойчивости. Из коэффициентов характеристического уравнения строится определитель Гурвица Δ по алгоритму:

1) по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n;

2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;

3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули.

Критерий Гурвица: для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все n диагональных миноров определителя Гурвица были положительны. Эти миноры называются определителями Гурвица.

Рассмотрим примеры применения критерия Гурвица:

1) $n = 1$ => уравнение динамики: $a_0 p + a_1 = 0$.

Определитель Гурвица: $\Delta = \Delta_1 = a_1 > 0$ при $a_0 > 0$, то есть условие устойчивости:

$a_0 > 0, a_1 > 0;$

2) $n = 2$ => уравнение динамики: $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$.

Определители Гурвица: $\Delta_1 = a_1 > 0$, $D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = a_1 a_2 > 0$, так как $a_3 = 0$, то есть условие устойчивости: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$;

3) $n = 3$ => уравнение динамики: $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$.

Определители Гурвица:

$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0$, условие устойчивости : $a_0 > 0$, $a_1 > 0, a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

оложительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым и достаточным условием устойчивости САУ. При $n > 2$ появляются дополнительные условия.

Критерий Гурвица применяют при $n \le 4$. При больших порядках возрастает число определителей и процесс становится трудоемким. Имеется ряд модификаций данного критерия, расширяющие его возможности.

Недостаток критерия Гурвица - малая наглядность. Достоинство - удобен для реализации на ЭВМ. Его часто используют для определения влияния одного из параметров САУ на ее устойчивость. Так равенство нулю главного определителя $\Delta_n = a_n\Delta_{n\text{-}1} = 0$ говорит о том, что система находится на границе устойчивости. При этом либо $a_n = 0$ - при выполнении остальных условий система находится на границе апериодической устойчивости, либо предпоследний минор $\Delta_{n\text{-}1} = 0$ - при положительности всех остальных миноров система находится на границе колебательной устойчивости.

Параметры САУ определяют значения коэффициентов уравнения динамики, следовательно изменение любого параметра K_i влияет на значение определителя Δ_{n-1}.

Исследуя это влияние можно найти, при каком значении K_i определитель Δ_{n-1} станет равен нулю, а потом - отрицательным (рис. 5.6).

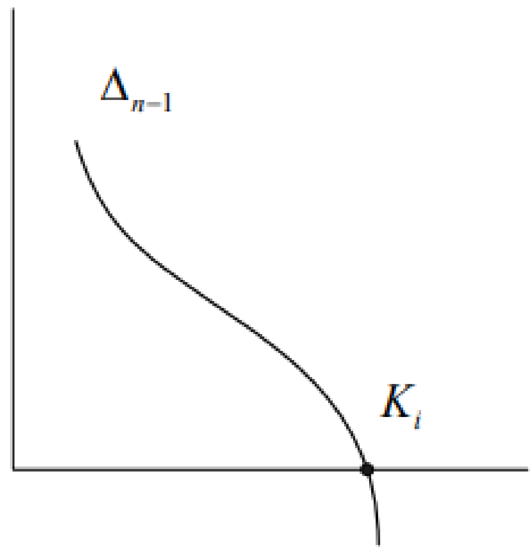


Рис. 5.6. Зависимость устойчивости от параметра системы

Это и будет предельное значение исследуемого параметра, после которого система становится неустойчивой.

1.1.3. Критерий устойчивости Михайлова

Так как для устойчивой САУ число правых корней $m = 0$, то угол поворота вектора $D(j\omega)$ составит

$$\Delta \arg(D(j\omega))\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = n\frac{\pi}{2}.$$

То есть САУ будет устойчива, если вектор $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ повернется на угол $n\pi/2$.

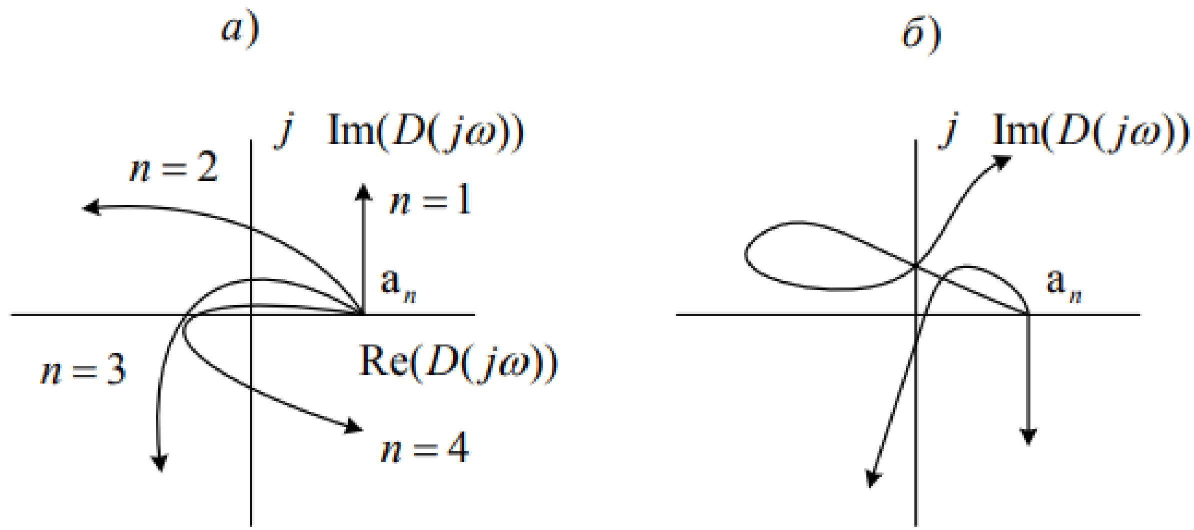


Рис. 4.8. Прохождение кривой квадрантов комплексной плоскости

При этом конец вектора опишет кривую, называемую годографом Михайлова. Она начинается на положительной полуоси, так как $D(0) = a_n$, и последовательно проходит против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, уход в бесконечность в n - ом квадранте (рис. 4.8а).

Если это правило нарушается (например, число проходимых кривой квадрантов не равно n, или нарушается последовательность прохождения квадрантов (рис. 4.8б)), то такая САУ неустойчива - это и есть необходимое и достаточное условие критерия Михайлова.

Достоинства. Этот критерий удобен своей наглядностью. Так, если кривая проходит вблизи начала координат, то САУ находится вблизи границы устойчивости и наоборот. Этим критерием удобно пользоваться, если известно уравнение замкнутой САУ.

Для облегчения построения годографа Михайлова выражение для $D(j\omega)$ представляют суммой вещественной и мнимой составляющих:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\ldots(j\omega - p_n) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n = \mathrm{Re}(D(j\omega)) + j\,\mathrm{Im}(D(j\omega)),$$

где
$$\mathrm{Re}(D(j\omega)) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 + \ldots,$$
$$\mathrm{Im}(D(j\omega)) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 + \ldots$$

Меняя ω от 0 до $+\infty$ по этим формулам находят координаты точек годографа, которые соединяют плавной линией.

Спасибо за внимание!