Дисциплина
«Математическое моделирование в электротехнике»

Лектор:
К.т.н., доцент ОЭЭ ИШЭ ТПУ
Воронина Наталья Алексеевна

Математические модели в пространстве состояний

Основу математической модели многомерной системы во временной области составляет векторно-матричная форма записи системы дифференциальных уравнений первого порядка, которая носит название уравнения состояния. Уравнение состояния имеет вид –

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \mathbf{B}\vec{U}(t), \qquad (1)$$

где $\vec{X}(t)$ - вектор состояния размерности n, который включает в себя переменные объекта, однозначно определяющие его состояние,

n

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \dots \\ X_n(t) \end{bmatrix},$$

Математические модели в пространстве состояний

$\vec{U}(t)$ - вектор управления или входа размерности m, который включает в себя сигналы, действующие на систему извне,

$$\vec{U}(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_m(t) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ - матрицы параметров, включающие в себя параметры системы, размерность которых соответственно , $n \times n, n \times m$

,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

n - порядок системы

Иногда уравнение состояния (1) записывают в развернутой форме –

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \cdots \\ X_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \cdots \\ X_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \cdots \\ U_m(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнение состояния и структура полностью описывают объект управления, вектор состояния содержит переменные объекта, которые однозначно описывают его состояние.

Но в реальных системах многие компоненты не могут быть измерены или наблюдаемы с помощью датчиков. Эту ситуацию разрешает введение дополнительного уравнения выхода, которое определяет те переменные, которые доступны для наблюдения (на выходе системы) –

$$\vec{Y}(t) = \mathbf{C}\vec{X}(s), \qquad (2)$$

где $\vec{Y}(t)$ — вектор выхода размерности p, который содержит переменные объекта, доступные для наблюдения,

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \dots \\ Y_p(t) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C}$ — матрица параметров размерности $p \times n$ –

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix},$$

в системах управления $p \le n$.

Уравнение выхода (2) также можно записать в развернутой форме

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \dots \\ Y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \dots \\ X_n(t) \end{bmatrix}.$$

Графически уравнение состояния и уравнение выхода могут быть представлены в виде, показанном на рис. 1.

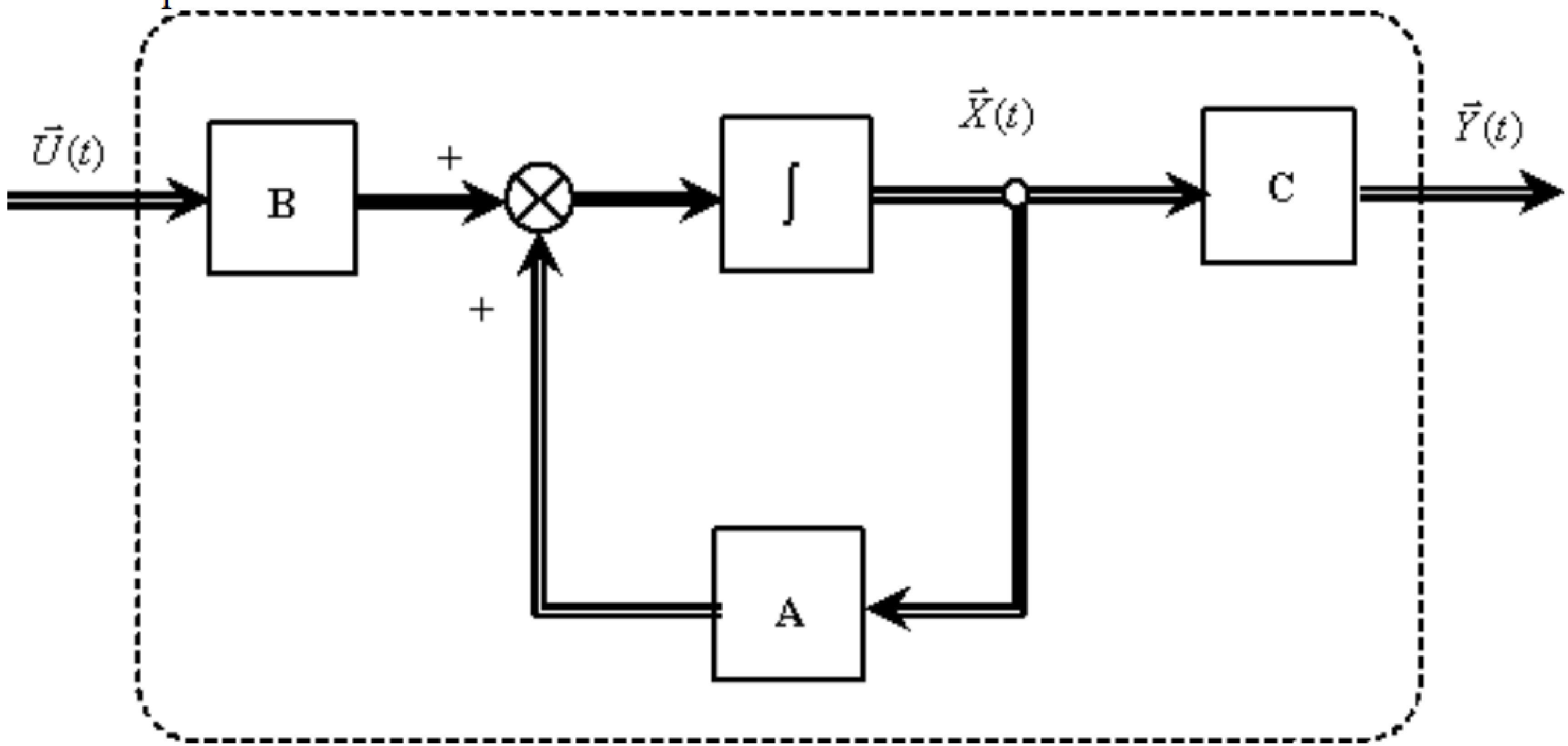

Рис. 1

Символ интегрирования на схеме означает покомпонентное интегрирование векторной величины.

В общем виде пространство состояний n — мерной системы задается радиус-вектором $\vec{X}(t)$ в координатной системе, оси которой определяются компонентами вектора состояния, как это показано на рис. 2.

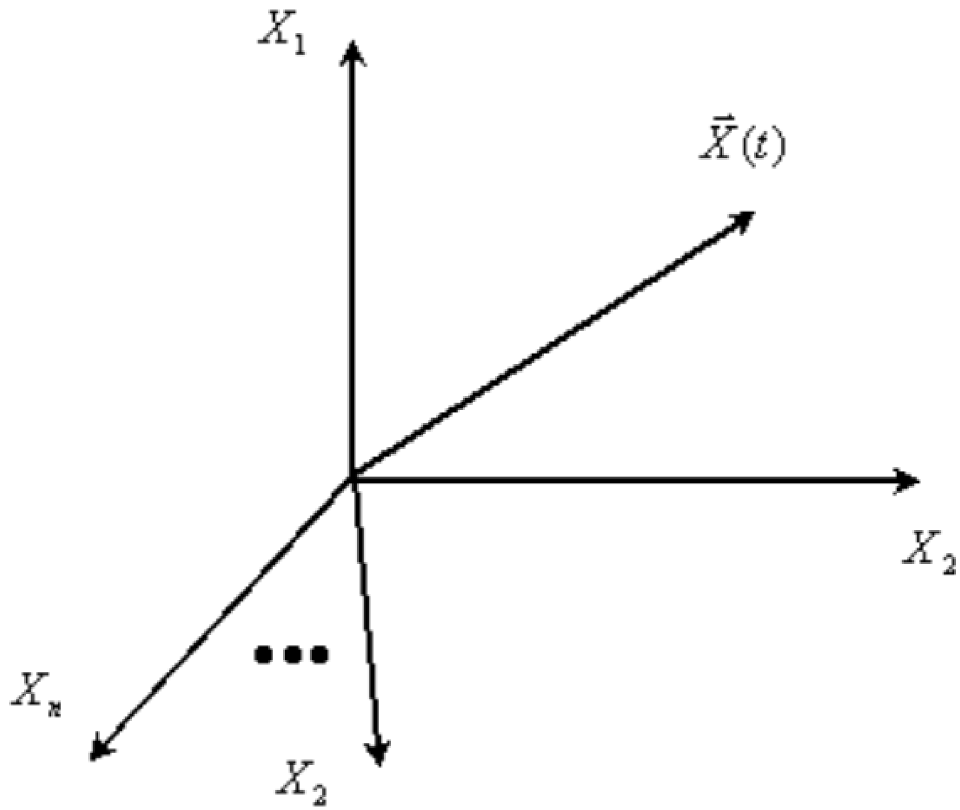

Рис. 2

Рассмотрим несколько примеров представления процессов в пространстве состояний.

Пример

Рассмотрим в пространстве состояний процесс пуска электродвигателя (М) постоянного тока с постоянными магнитами, принципиальная схема установки показана на рис. 3. Пуск производится подключением с помощью контакта (К) напряжения $U(t)$, при этом в цепи будет протекать ток $I(t)$ и двигатель будет вращать вал с нагрузкой (Н) со скоростью $\Omega(t)$, ток и скорость определяются с помощью датчиков соответственно ДТ ДС.

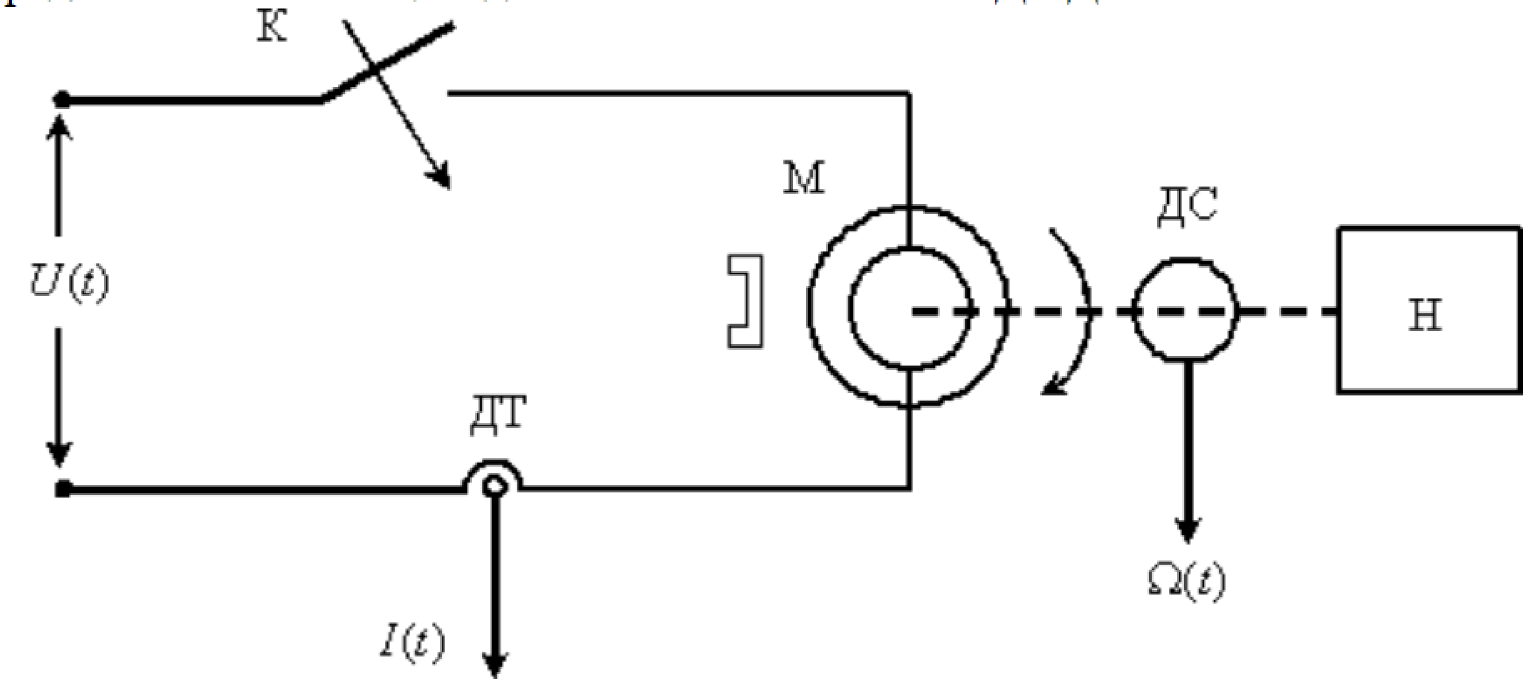

Рис. 3

Состояние двигателя в данном случае однозначно определяется током и скоростью двигателя, поэтому вектор состояния задаем в следующем виде –

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \Omega(t) \\ I(t) \end{bmatrix}.$$

Вектор входа будет иметь только одну компоненту $U(t)$. Графики изменения во времени переменных двигателя показаны на рис. 4.

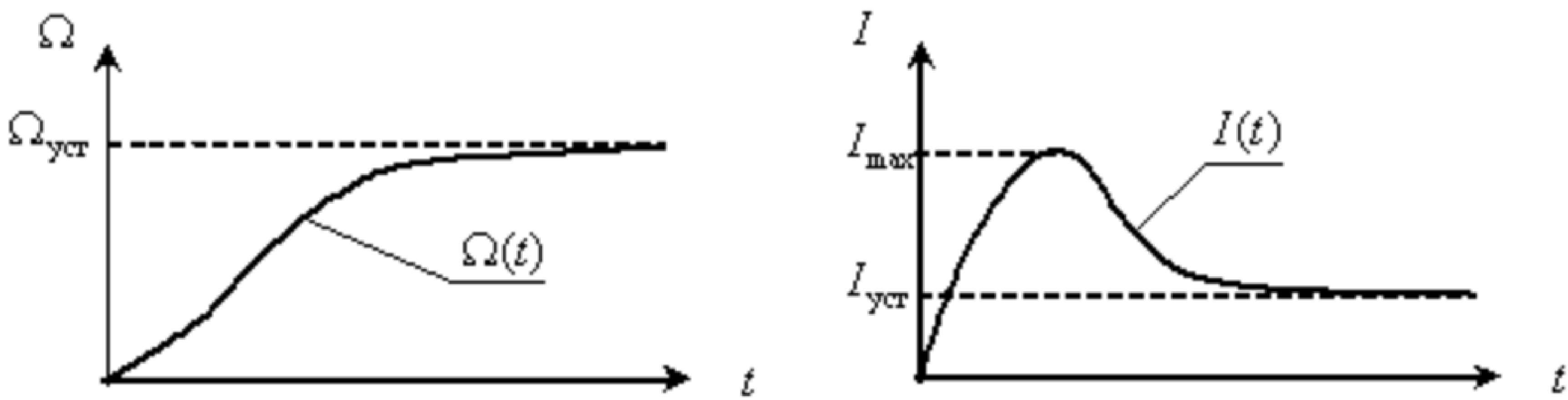

Рис. 4

На рис. 4 введены обозначения: $\Omega_{уст}, I_{уст}$ — установившиеся значения соответственно скорости и тока, I_{max} – максимальное значение тока при пуске.

Сформируем двухмерное пространство состояний двигателя с траекторией движения конца вектора состояния в процессе пуска, для этого откладываем проекции вектора, то есть ток и скорость, в одинаковые моменты времени.

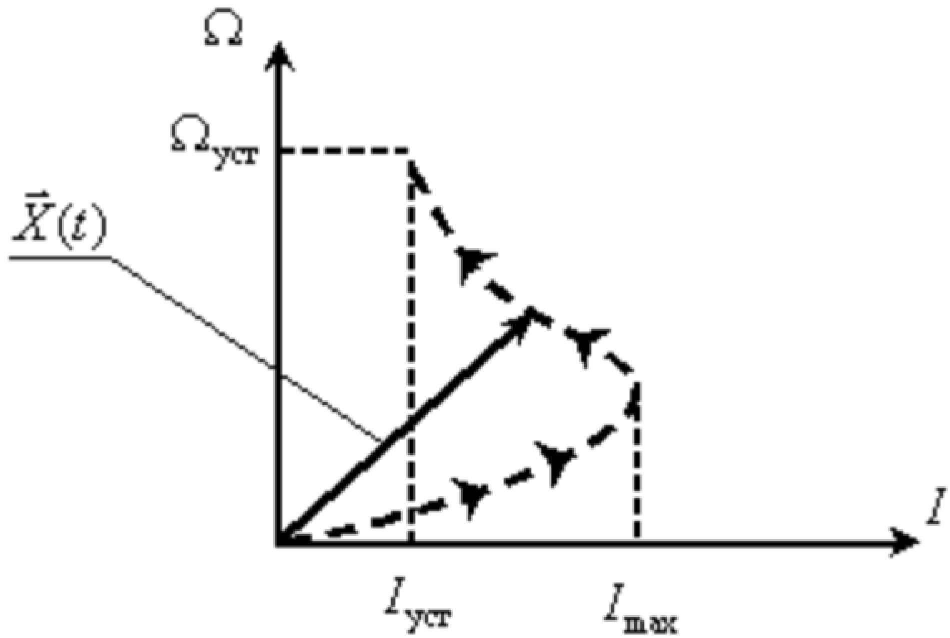

Рис. 5

Пример

Рассмотрим в пространстве состояний процесс позиционирования, то есть перемещения вала в заданное положение $\varphi_{уст}$, в автоматизированном электроприводе, показанном на рис. 6.

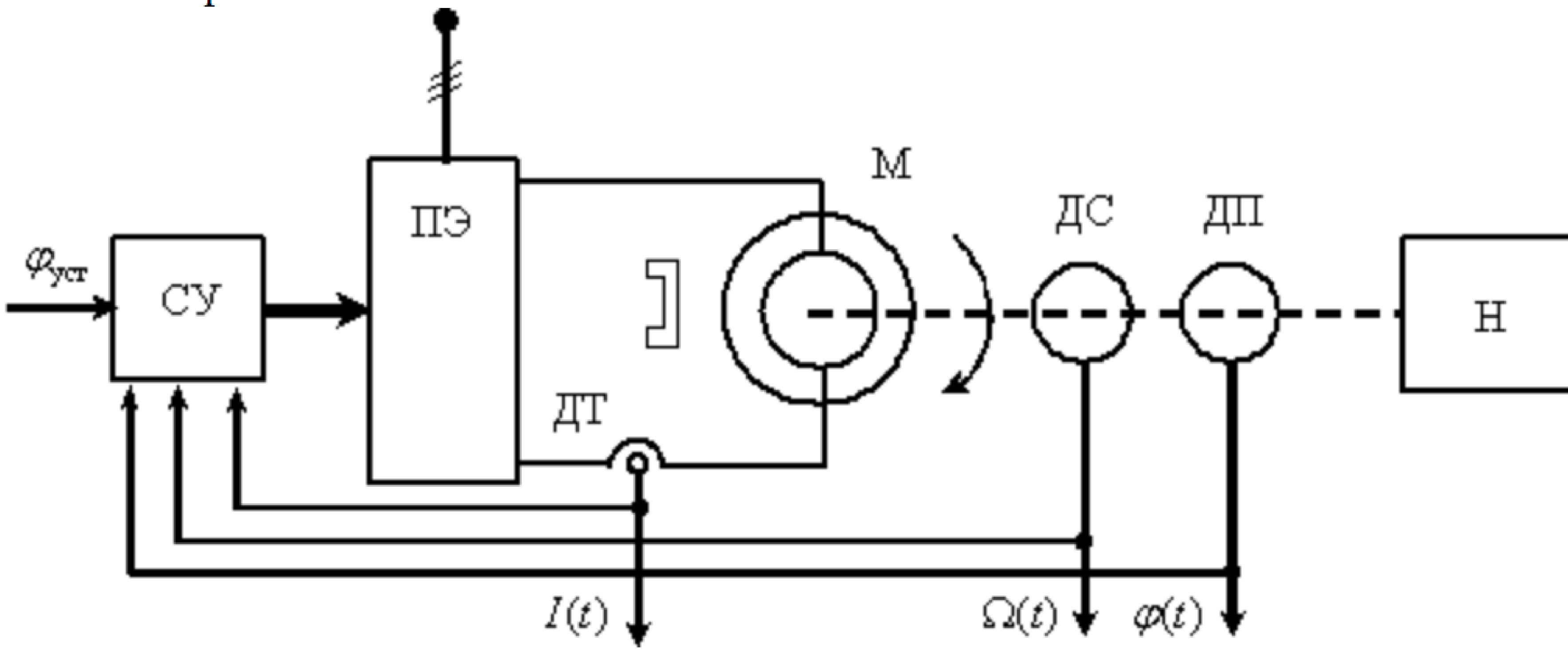

Рис. 6

В этом случае состояние двигателя и всей системы электропривода в целом определяют три переменные двигателя ток $I(t)$, скорость $\Omega(t)$ и положение вала $\varphi(t)$ –

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \Omega(t) \\ I(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}.$$

Графики изменения во времени переменных двигателя показаны на рис. 7.

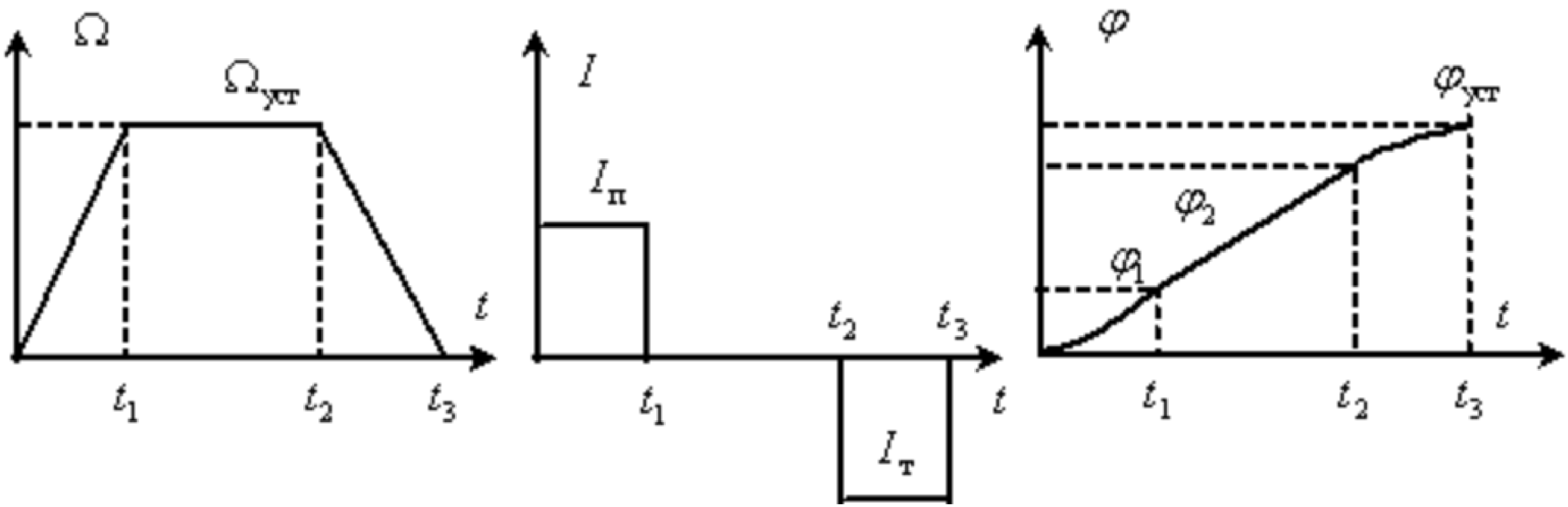

Рис. 7

Сформируем трехмерное пространство состояний электропривода с траекторией движения конца вектора состояния в процессе позиционирования по временным графикам изменения компонент вектора состояния.

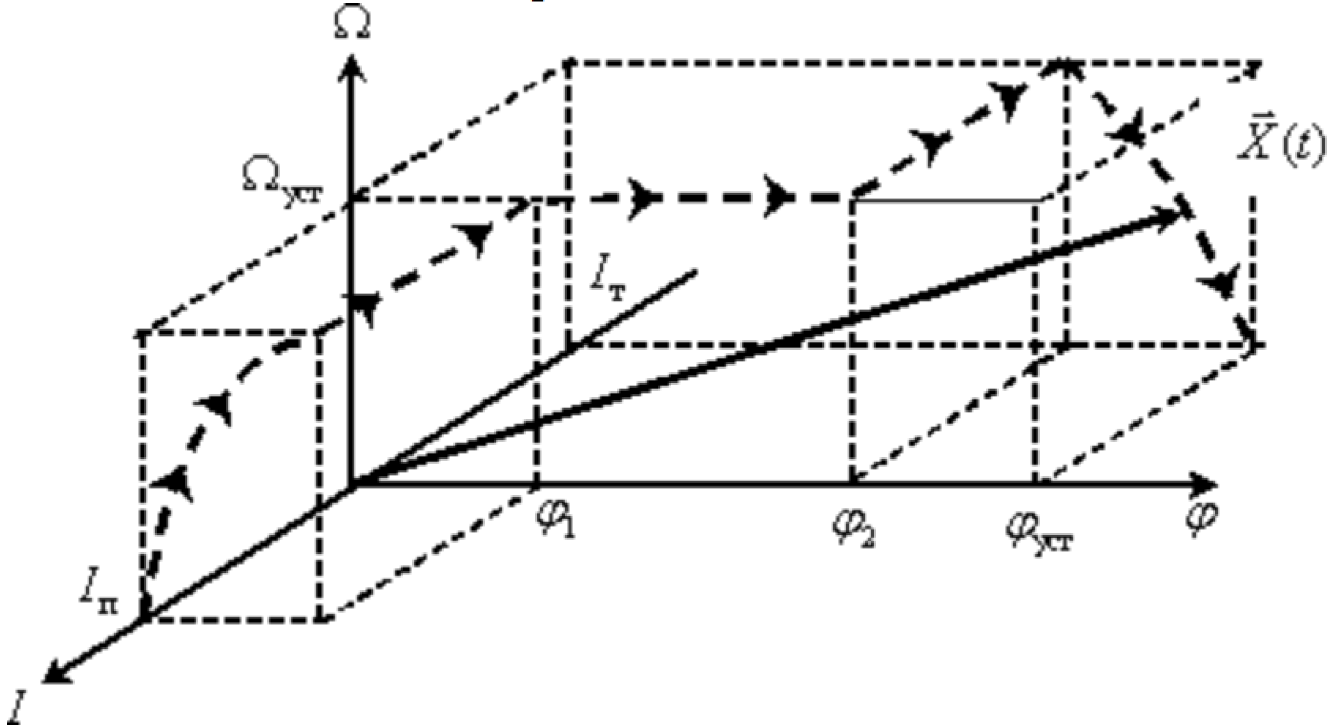

Рис. 8

Теперь рассмотрим получения математической модели многомерного объекта в виде уравнений состояния на примере двухмассовой упругой механической системы, показанной на рис. 9.

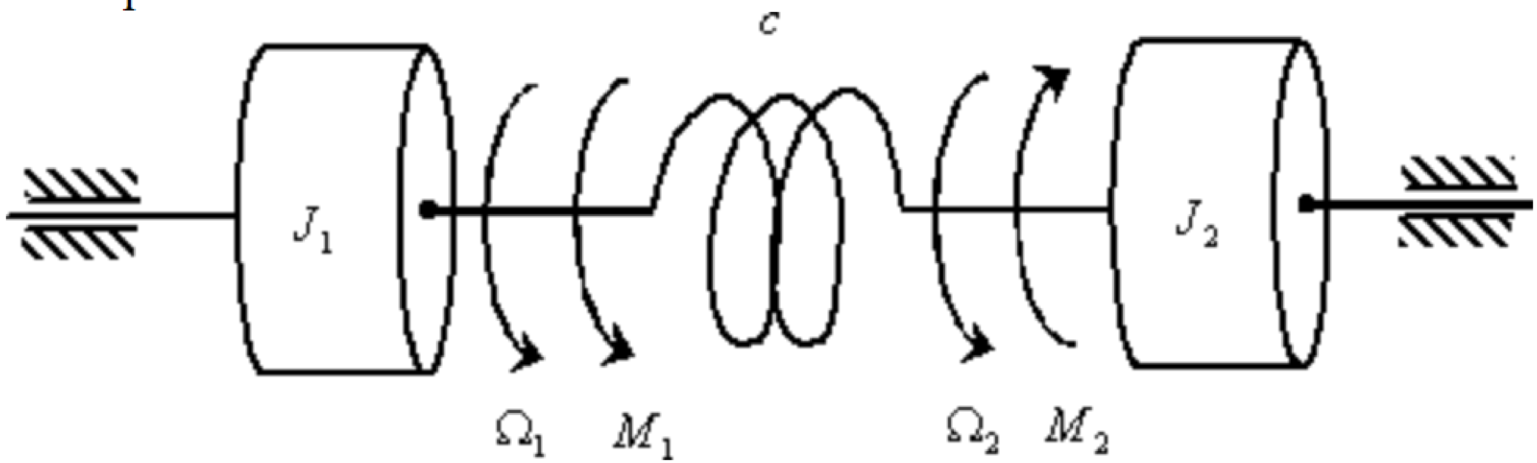

Рис. 9

Двухмассовая упругая система представляет собой механическую систему, состоящую из двух вращающихся масс с моментами инерции J_1 и J_2. К каждой массе прикладывается извне момент (M_1 и M_2), массы соединены валом, обладающим упругими свойствами (c), массы вращаются со скоростями Ω_1 и Ω_2.

Система дифференциальных уравнений, описывающих систему, имеет вид –

$$\begin{cases} M_{у} = c\Delta\varphi = c(\varphi_1 - \varphi_2) = c\int\limits_0^t (\Omega_1 - \Omega_1)dt, \\ M_1 - M_{у} = J_1 \dfrac{d\Omega_1}{dt}, \\ M_{у} - M_2 = J_2 \dfrac{d\Omega_2}{dt}. \end{cases} \qquad (3)$$

где $\Delta\varphi$ – разность углов положения первой φ_1 и второй φ_2 масс.

Так как уравнения состояния (1) и выхода (2) имеют единый для всех линейных систем вид, поэтому, чтобы определить их для конкретной системы мы должны выполнить следующее:

- задать векторы состояния и входа, определив тем самым порядок системы и порядок вектора входа,
- определить матрицы параметров уравнений.

Состояние системы определяется тремя переменными $\Omega_1, \Omega_2, M_у$, поэтому задаем вектор состояния следующего вида –

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ M_у \end{bmatrix}.$$

Порядок системы $n = 3$. Заметим, что положение переменных в векторе состояния можно задать произвольно, но в дальнейшем изменять его нельзя. Вектор входа определяется сигналами, действующими на систему извне, а это – моменты M_1 и M_2, поэтому вектор входа имеет вид –

$$\vec{U}(t) = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Порядок вектора выхода $m = 2$. Здесь также порядок следования компонент может быть произвольным, но фиксированным в дальнейших операциях.

Преобразуем уравнения системы (3) к форме Коши –

$$\begin{cases} \dfrac{dM_{\text{у}}}{dt} = c(\Omega_1 - \Omega_1), \\ J_1 \dfrac{d\Omega_1}{dt} = \dfrac{1}{J_1} M_1 - \dfrac{1}{J_1} M_{\text{у}}, \\ J_2 \dfrac{d\Omega_2}{dt} = \dfrac{1}{J_2} M_{\text{у}} - \dfrac{1}{J_2} M_2. \end{cases} \qquad (4)$$

Нам требуется получить уравнение состояния для системы третьего порядка с вектором входа второго порядка, посмотрим, что представляет собой это уравнение в общем виде –

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{bmatrix}.$$

Раскрывая матричные скобки, получим –

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1(t)}{dt} = a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t) + a_{13}X_3(t) + b_{11}U_1(t) + b_{12}U_2(t), \\ \dfrac{dX_2(t)}{dt} = a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t) + a_{23}X_3(t) + b_{21}U_1(t) + b_{22}U_2(t), \\ \dfrac{dX_3(t)}{dt} = a_{31}X_1(t) + a_{32}X_2(t) + a_{33}X_3(t) + b_{31}U_1(t) + b_{32}U_2(t). \end{cases} \tag{5}$$

Теперь можно сформулировать задачу следующего этапа. Необходимо привести систему (4) в виду (5), для этого следует:

- расположить уравнения в порядке следования компонент в векторе состояния,
- расположить слагаемые в правых частях слева на право в порядке следования сначала компонент вектора состояния, затем вектора входа,
- отсутствующие слагаемые заменяем произведениями переменных на нулевые коэффициенты.

В результате коэффициенты в правых частях при соответствующих компонентах векторов состояния и входа будут компонентами искомых матриц уравнения состояния.

Преобразуем систему (4) к виду (5), в результате получим –

$$\begin{cases} \dfrac{d\Omega_1(t)}{dt} = 0\cdot\Omega_1(t) + 0\cdot\Omega_2(t) - \dfrac{1}{J_1}M_{\text{у}}(t) + \dfrac{1}{J_1}M_1(t) + 0\cdot M_2(t), \\ \dfrac{d\Omega_2(t)}{dt} = 0\cdot\Omega_1(t) + 0\cdot\Omega_2(t) + \dfrac{1}{J_2}M_{\text{у}}(t) + 0\cdot M_1(t) - \dfrac{1}{J_2}M_2(t), \\ \dfrac{dM_{\text{у}}(t)}{dt} = c\Omega_1(t) - c\Omega_2(t) + 0\cdot M_{\text{у}}(t) + 0\cdot M_1(t) + 0\cdot M_2(t). \end{cases} \qquad (6)$$

В результате по коэффициентам слагаемых в правых частях (6) получим искомые матрицы параметров уравнения состояния –

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{J_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{J_2} \\ c & c & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{J_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение состояния в развернутом виде –

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Omega_1(t)\\ \Omega_2(t)\\ M_у(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\dfrac{1}{J_1}\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{J_2}\\ c & c & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Omega_1(t)\\ \Omega_2(t)\\ M_у(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{J_1} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{J_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}M_1(t)\\ M_2(t)\end{bmatrix}.$$

Вид уравнения выхода определяется тем, какие компоненты вектора состояния доступны для наблюдения. В электромеханических системах электроприводов, эквивалентом которых является упругая двухмассовая система, возможны три варианты датчиковых систем (полагаем датчики безынерционными, а коэффициенты преобразования датчиков единичными):

1. Датчики скорости установлены на обеих массах. Тогда имеем следующее уравнение выхода –

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_{\text{у}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_{\text{у}}(t) \end{bmatrix}.$$

То есть имеем $p = 2$,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Датчик скорости установлен на первой массе, уравнение выхода –

$$Y(t) = \Omega_1(t) = \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_{\text{у}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_{\text{у}}(t) \end{bmatrix}.$$

$p = 1$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Датчик скорости установлен на второй массе, уравнение выхода –

$$Y(t) = \Omega_2(t) = \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_{\text{у}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_{\text{у}}(t) \end{bmatrix}.$$

$p = 1$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Контрольные вопросы и задачи

1. Перечислите компоненты уравнения состояния (векторы и матрицы), их размерности.
2. Поясните смысл уравнения выхода, перечислите компоненты и их размерности.
3. По системе дифференциальных уравнений, описывающих многомерную систему –

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = x_2 + u_2, \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = -x_1 - x_2 + u_1. \end{cases},$$

полагая векторы состояния и входа –

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

записать уравнение состояния в развернутой форме.

Ответ:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

4. По уравнению состояния

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \,.$$

описывающему многомерную систему, определить систему дифференциальных уравнений, связывающих компоненты векторов состояния и входа.

Ответ:

$$\cdot\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = -x_1 - x_2 + u, \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = x_1. \end{cases} \quad .$$

5. По системе дифференциальных уравнений, описывающих многомерную систему –

$$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt} + x = 2u, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 2\dfrac{dx}{dt} + x, \end{cases}$$

полагая векторы состояния и входа –

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{U} = u \,,$$

записать уравнение состояния в развернутой форме.

Ответ:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot u \,.$$

Спасибо за внимание!