Дисциплина «Математическое моделирование в электротехнике»

Лектор:
К.т.н., доцент ОЭЭ ИШЭ ТПУ
Воронина Наталья Алексеевна

Понятие линейного динамического звена

САУ удобно представлять для анализа и при синтезе в виде взаимосвязанной совокупности отдельных элементов – динамических звеньев.

Под динамическим звеном понимают в общем случае абстрактное устройство, имеющее вход и выход, и для которого задано уравнение, связывающее сигналы на входе и выходе, как это показано на рис. 1.

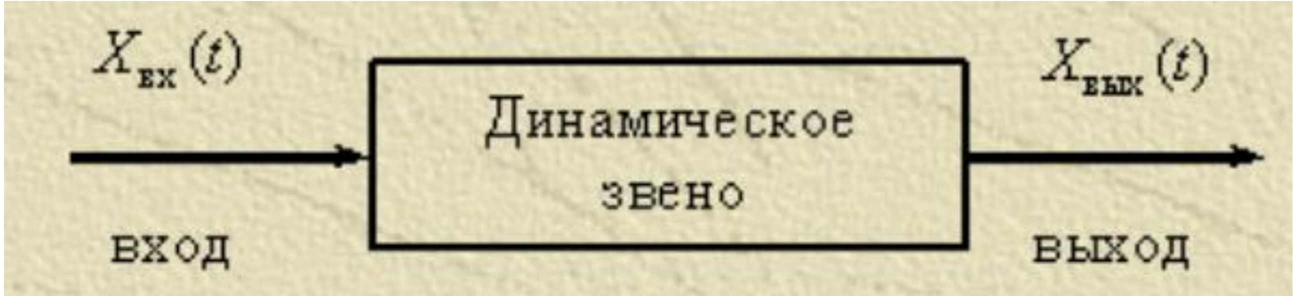


Рис. 1

Изучение свойств реальных объектов управления и САУ приводит к описанию динамических звеньев в виде нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ).

Во многих случаях нелинейные ДУ можно линеаризовать, заменить нелинейные уравнения линейными, приближенно описывающими процессы в системах.

Осуществляется декомпозиция задач анализа и синтеза систем, то есть ***первоначально используют линейное представление***, а затем ***осуществляют учет вносимых нелинейностями особенностей***.

Поэтому нормально функционирующая система работает в режиме малых отклонений, при которых нелинейности не проявляются.

Если уравнение, связывающее сигналы $X_{вх}(t)$ и $X_{вых}(t)$

линейно, то говорят о линейном динамическом звене.
Уравнение линейного динамического звена имеет следующий общий вид (1):

$$a_0 \frac{d^n X_{вых}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dX_{вых}(t)}{dt} + a_n X_{вых}(t) =$$
$$b_0 \frac{d^m X_{вх}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} X_{вх}(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dX_{вх}(t)}{dt} + b_m X_{вх}(t),$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ - постоянные коэффициенты, $m \le n$.

Использовать такое описание динамического звена в задачах анализа и синтеза систем и объектов управления не рационально, поэтому существуют и иные формы описания и представления динамических звеньев и систем в целом.

Передаточная функция

Подвергнем уравнение (1) преобразованию Лапласа, считая начальные условия нулевыми и заменяя оригиналы сигналов их изображениями по Лапласу

$$X_{вх}(s) = L\{X_{вх}(t)\},\ X_{вых}(s) = L\{X_{вых}(t)\}.$$

Используя теоремы преобразования Лапласа линейности и дифференцирования, получим операторное уравнение, связывающие изображения входного и выходного сигналов $X_{вх}(t)$ (2)

Преобразуем уравнение (2) к следующему виду

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n) X_{вых}(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m) X_{вх}(s)$$

(3)

Получим из (3) отношение изображений выходного и входного сигналов

$$\frac{X_{вых}(s)}{X_{вх}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (4)$$

Передаточная функция

Отношение (4) не зависит от изображений сигналов, определяется только параметрами самого динамического звена (a_i, b_i), имеет вид дробно-рациональной функции.

Отношение изображений выходного и входного сигналов называют передаточной функцией динамического звена

$$W(s) = \frac{X_{вых}(s)}{X_{вх}(s)}.$$

Уравнение вида

$$A(s) = 0, \quad a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

называют характеристическим уравнением динамического звена, так как знаменатель передаточной функции – это характеристический полином дифференциального уравнения, описывающего динамическое звено.

Передаточная функция. Пример.

Определим передаточную функцию динамического звена по его принципиальной электрической схеме

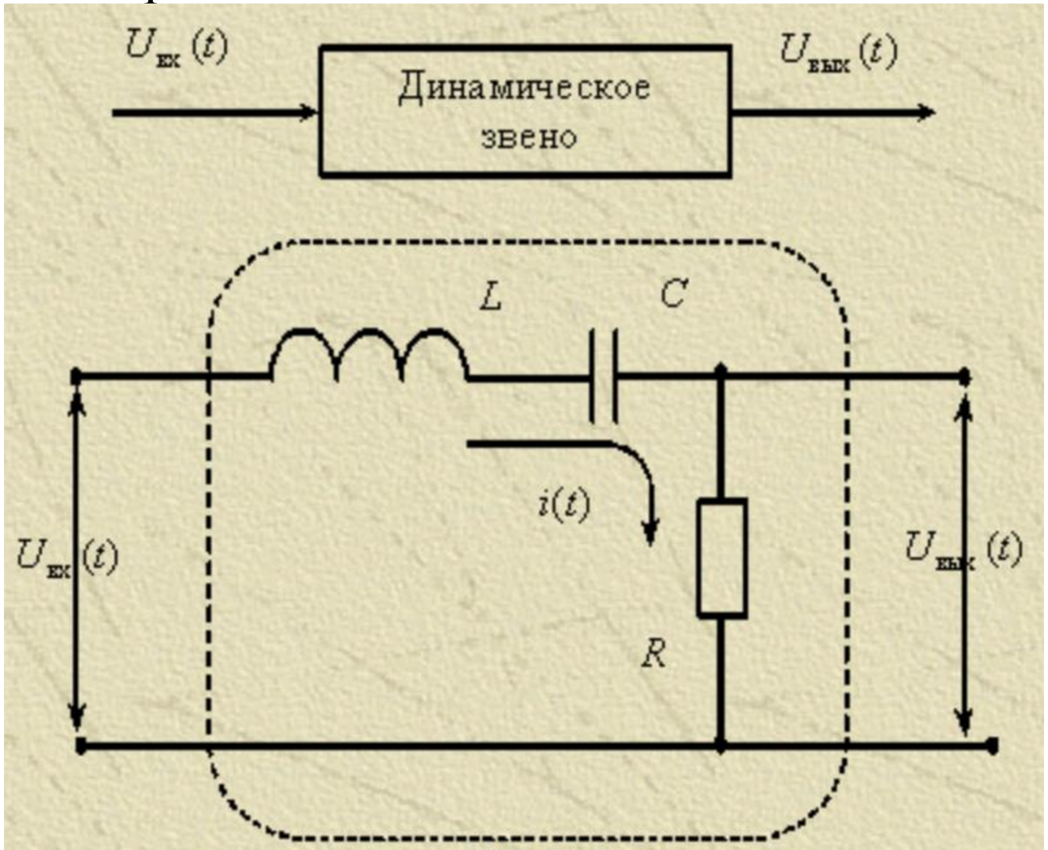


Рис. 2

Решение:

По второму закону Кирхгоффа запишем уравнения описывающие схему

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t), \\ U_{вых}(t) = U_R(t). \end{cases}$$

Передаточная функция. Пример.

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t), \\ U_{вых}(t) = U_R(t). \end{cases}$$

С учетом того, что

$$U_R(t) = i(t)R,\ U_L(t) = L\frac{di(t)}{dt},\ i(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt} \rightarrow U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt,$$

получаем

$$\begin{cases} U_{вх}(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + U_{вых}(t), \\ U_{вых}(t) = i(t)R. \end{cases}$$

Получим операторные уравнения

$$\begin{cases} U_{вх}(s) = LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) + U_{вых}(s), \\ U_{вых}(s) = I(s)R. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим значение изображения тока

$$I(s) = \frac{1}{R}U_{вых}(s).$$

Передаточная функция. Пример.

$$\begin{cases} U_{вх}(s) = LsI(s) + \dfrac{1}{Cs} I(s) + U_{вых}(s), \\ U_{вых}(s) = I(s)R. \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{1}{R} U_{вых}(s).$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение системы

$$U_{вх}(s) = \frac{L}{R} sU_{вых}(s) + \frac{1}{RCs} U_{вых}(s) + U_{вых}(s) = \frac{LCs^2 + CRs + 1}{CRs} U_{вых}(s).$$

В итоге получаем искомую передаточную функцию

$$W(s) = \frac{U_{вых}(s)}{U_{вх}(s)} = \frac{CRs}{LCs^2 + CRs + 1}.$$

Структурная схема

Графически передаточные функции динамического звена представляют в следующем виде:

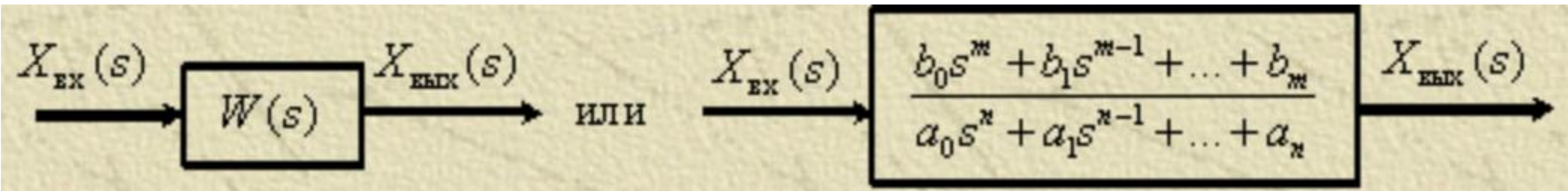


Рис. 3

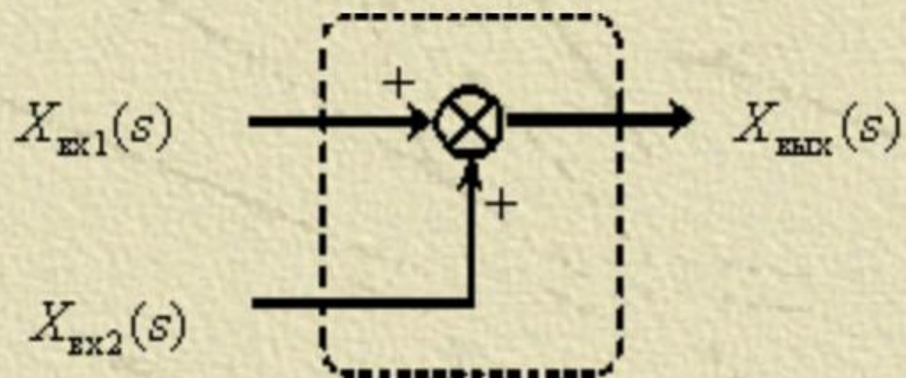
Если известно изображение входного сигнала и передаточная функция динамического звена, всегда можно найти изображение выходного сигнала при нулевых начальных условиях

$$X_{вых}(s) = X_{вх}(s) W(s).$$

Структурная схема

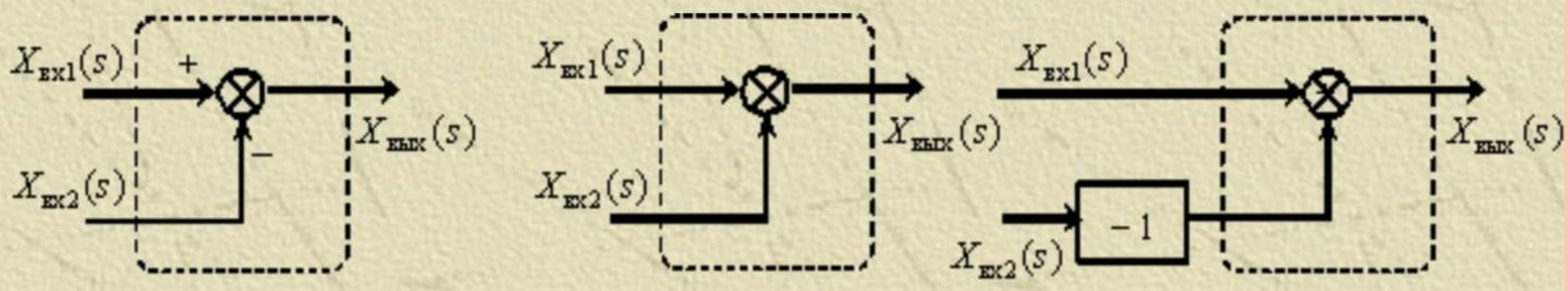
В общем случае САУ состоит из множества динамических звеньев, сигналы с выходов звеньев могут суммироваться или вычитаться, суммироваться с внешними для САУ сигналами. Суммирование и вычитание изображений сигналов могут быть представлено графически с помощью суммирующих звеньев:

1. $X_{вых}(s) = X_{вх1}(s) + X_{вх2}(s)$



Структурная схема

2. $X_{вых}(s) = X_{вх1}(s) - X_{вх2}(s)$

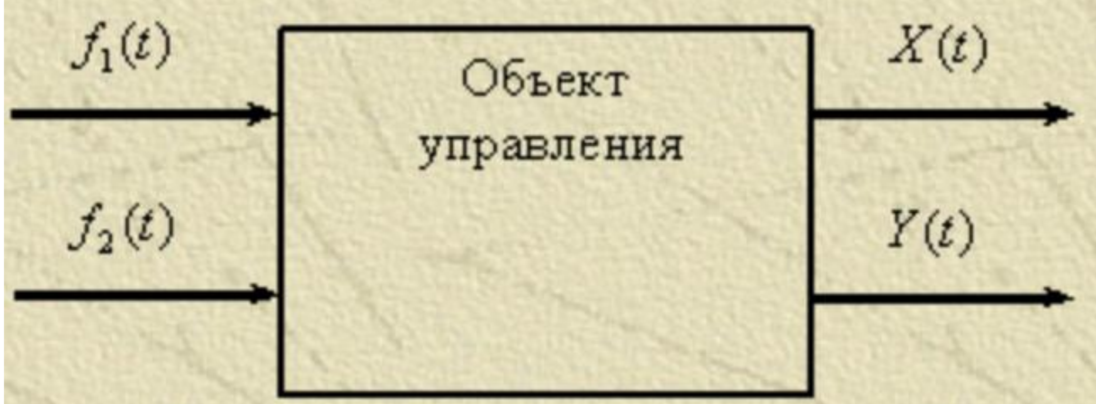


Показанная неоднозначность графического представления вычитания изображений на суммирующем элементе связана с различием в стандартах разных стран.

Используя графическое представление передаточных функций звеньев и суммирующие звенья, можно в графической форме представить операторные уравнения, описывающие САУ. Такое графическое представление операторных уравнений в ТАУ называют ***структурной схемой.***

Структурная схема. Пример.

По математической модели объекта управления в форме системы дифференциальных уравнений определить структурную схему объекта.



$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = f_1(t) - X(t) - Y(t), \\ \dfrac{dY(t)}{dt} = X(t) - f_1(t). \end{cases}$$

Получим систему операторных уравнений, подвергнув исходную систему дифференциальных уравнений преобразованию Лапласа и заменив оригиналы изображениями,

$$\begin{cases} sX(s) = F_1(s) - X(s) - Y(s), \\ sY(s) = X(s) - F_1(s). \end{cases}$$

Из первого уравнения системы операторных уравнений, которое описывает динамическое звено объекта управления, после преобразований получим

$$(s+1)X(s) = F_1(s) - Y(s) = Z_1(s).$$

Структурная схема. Пример.

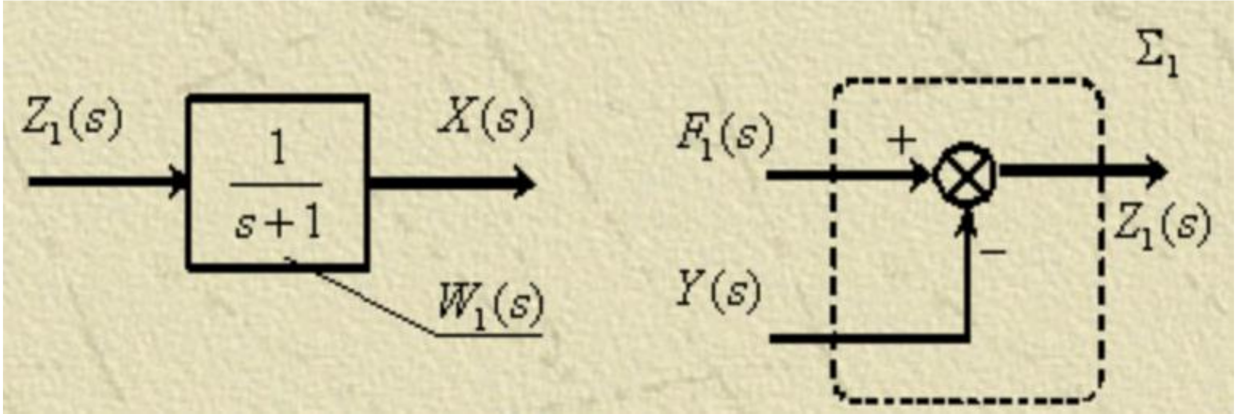
Тогда передаточная функция этого звена имеет вид

$$W_1(s) = \frac{X(s)}{Z_1(s)} = \frac{1}{s+1},$$

а выражение $F_1(s) - Y(s) = Z_1(s)$

описывает суммирующее звено Σ_1.

Таким образом, получены два фрагмента структурной схемы



Структурная схема. Пример.

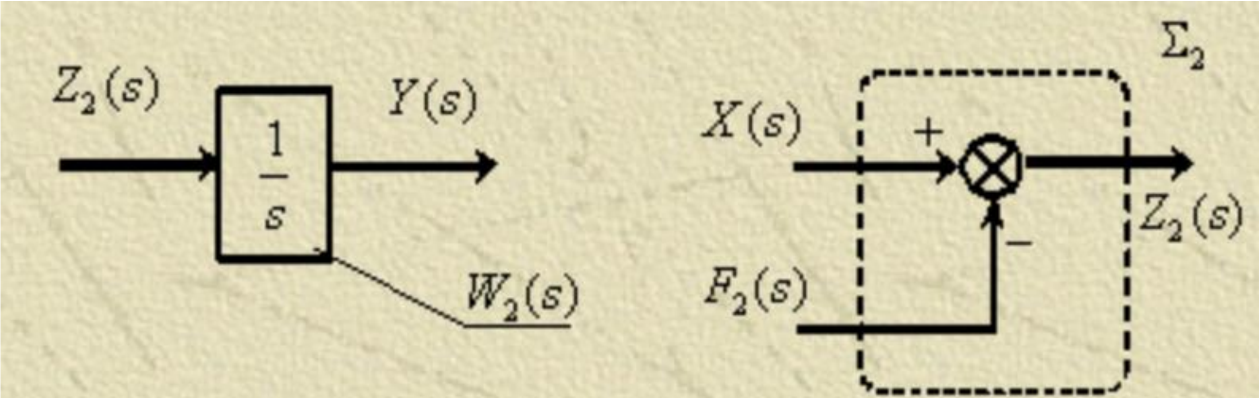
Из второго уравнения системы операторных уравнений, которое описывает динамическое звено объекта управления, после преобразований получим, вводя обозначение, $sY(s) = X(s) - F_2(s) = Z_2(s)$.

Тогда передаточная функция этого звена имеет вид $W_2(s) = \dfrac{Y(s)}{Z_2(s)} = \dfrac{1}{s}$,

а выражение $X(s) - F_1(s) = Z_2(s)$

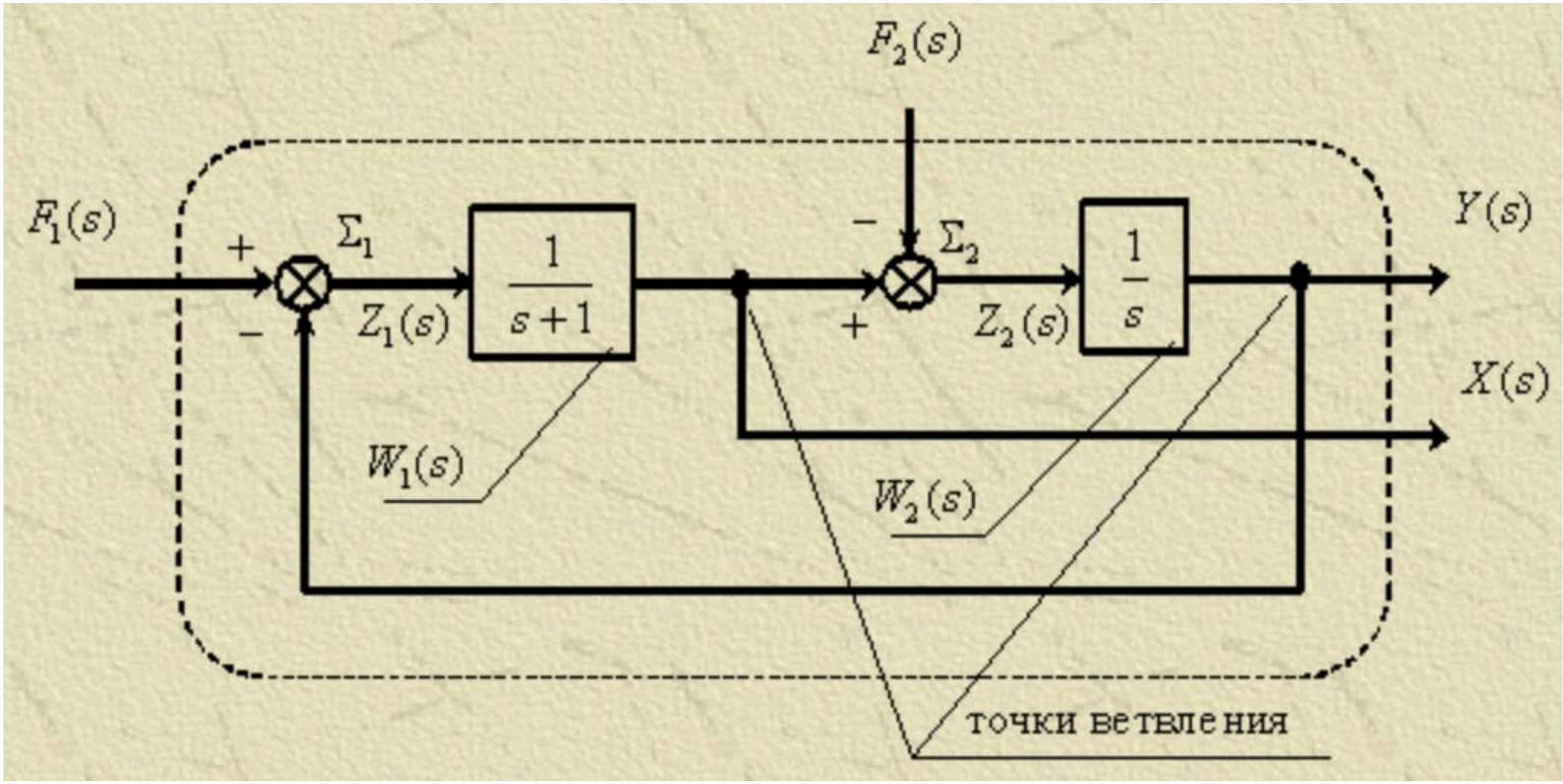
описывает суммирующее звено Σ_2.

Таким образом, получены еще два фрагмента структурной схемы



Структурная схема. Пример.

Соединим все фрагменты структурной схемы объекта управления, объединяя одноименные сигналы, либо разветвляя их с помощью точек ветвления , показанных на схеме. В результате получим



Временные характеристики динамического звена

Временной или импульсной характеристикой динамического звена называют реакцию звена на $\delta(t)$, обозначая ее как $w(t)$.

При этом схема эксперимента имеет вид –

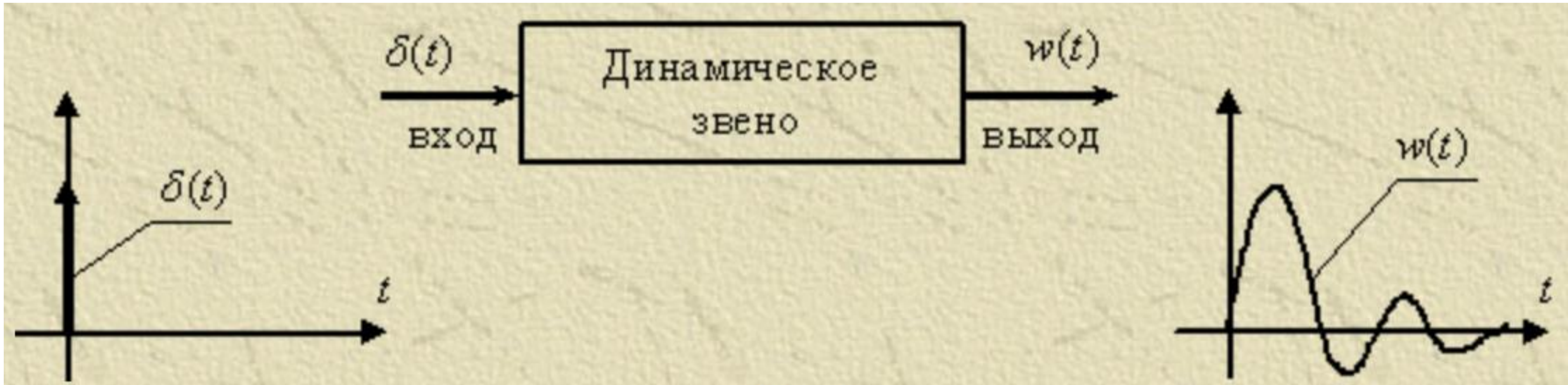


Рис. 4

Временные характеристики динамического звена

Выясним, что представляет собой временная характеристика, то есть почему ее называют характеристикой динамического звена?

Для этого рассмотрим динамическое звено с передаточной функцией $W(s)$

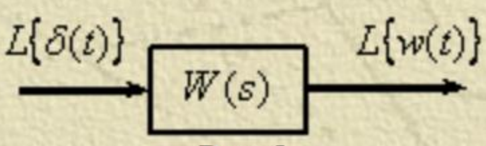


Рис. 5

В этом случае, в соответствии с (5), имеем

$$L\{w(t)\} = W(s)L\{\delta(t)\} = W(s)\cdot 1 = W(s).$$

Таким образом

$$W(s) = L\{w(t)\}$$

Получаем, что передаточная функция звена – это изображение по Лапласу импульсной характеристики динамического звена. В свою очередь, импульсная характеристика может быть определена по передаточной функции

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\},$$

при использовании разложения в форму Хэвисайта и обратное преобразование Лапласа.

Временные характеристики динамического звена

Знание импульсной характеристики позволяет определить реакцию динамического звена на сигнал любой формы.

Для динамического звена с передаточной функцией $W(s)$ преобразуем (5), используя теорему об умножении изображений преобразования Лапласа,

$$X_{вых}(t) = L^{-1}\{X_{вх}(s)W(s)\} = \int_0^t X_{вх}(\tau)w(t-\tau)d\tau,$$

а если легко получить $X_{вх}(s) = L\{X_{вх}(t)\}$, тогда

$$X_{вых}(t) = L^{-1}\{L\{X_{вх}(t)\}W(s)\}.$$

Переходной характеристикой или переходной функцией динамического звена называют реакцию динамического звена на $1(t)$, обозначая ее как $h(t)$. При этом схема эксперимента имеет вид –

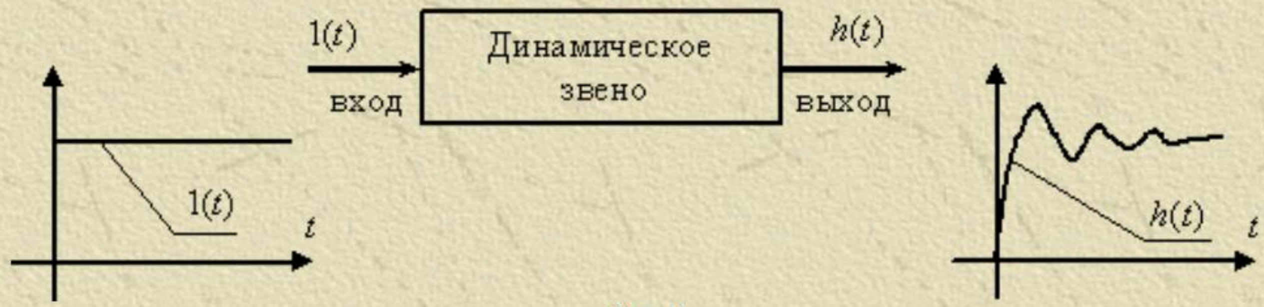


Рис. 6

Временные характеристики динамического звена

Для анализа переходной характеристики рассмотрим динамическое звено с передаточной функцией $W(s)$

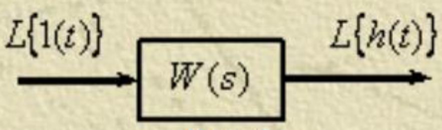


Рис. 7

В этом случае, в соответствии с (5), имеем

$$L\{h(t)\} = W(s) L\{1(t)\} = W(s) \cdot \frac{1}{s} .$$

По теореме об интегрировании оригинала имеем

$$h(t) = \int_0^t L^{-1}\{W(s)\} dt = \int_0^t w(t) dt$$

Переходная функция является интегралом по времени от импульсной характеристике и наоборот

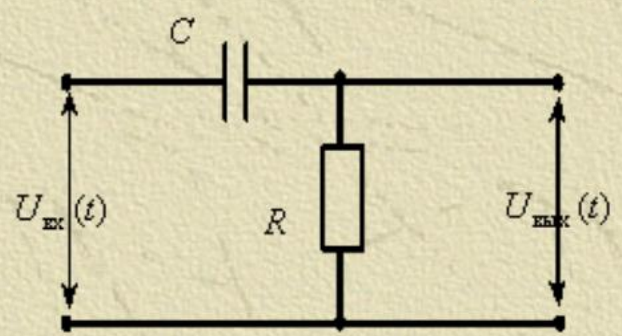
$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} .$$

Переходная характеристика динамического звена может быть определена по передаточной функции

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} W(s)\right\}.$$

Контрольные вопросы и задачи

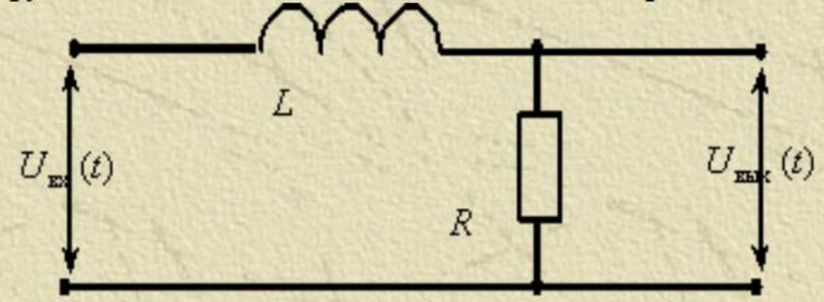
1. Что такое линейное динамическое звено?
2. Как определить передаточную функцию линейного динамического звена?
3. Перечислите основные элементы структурных схем систем управления.
4. Как определить по передаточной функции динамического звена его временные характеристики: импульсную и переходную?
5. Как по переходной характеристике определить импульсную характеристику динамического звена?
6. Определите передаточную функцию динамического звена по его принципиальной электрической схеме



Ответ:

$$W(s) = \frac{U_{вых}(s)}{U_{вх}(s)} = \frac{CRs}{CRs+1}.$$

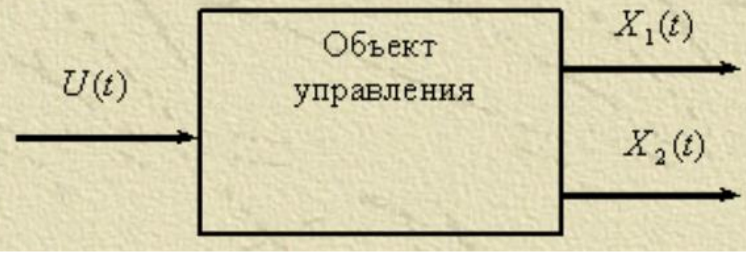
7. Определите передаточную функцию динамического звена по его принципиальной электрической схеме



Ответ:

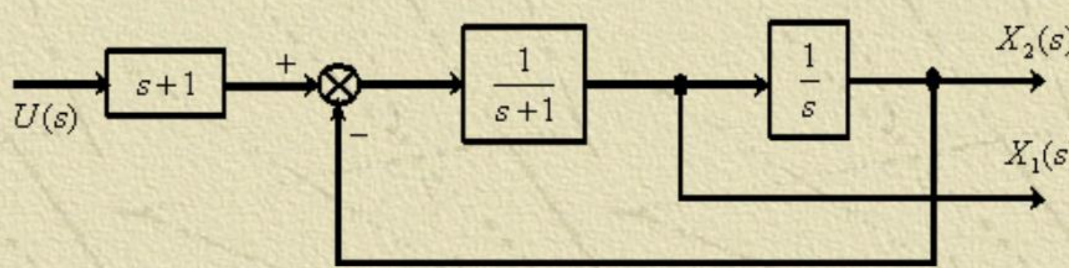
$$W(s) = \frac{U_{вых}(s)}{U_{вх}(s)} = \frac{Ls}{Ls+R}.$$

8. По математической модели объекта управления в форме системы дифференциальных уравнений определить структурную схему объекта.



$$\begin{cases} \dfrac{dX_1(t)}{dt} = \dfrac{dU(t)}{dt} + U(t) - X_1(t) - X_2(t), \\ \dfrac{dX_2(t)}{dt} = X_1(t). \end{cases}$$

Ответ:



Спасибо за внимание!