

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ К КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ»

Необходимо изучить представленный материал и письменно ответить на вопросы по каждой главе.

## 1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 1.1. Классификация математических моделей

Математические модели технических устройств могут быть классифицированы по ряду признаков:

1. По *характеру отображаемых процессов* выделяют:

- статические
- динамические модели.

2. По *способу представления модели* различают:

- аналитические
- графические
- табличные

*Аналитические модели* определяют прибор или компоненту в виде уравнений, описывающих его ВАХ или в форме дифференциальных уравнений описывающих переходные процессы в моделируемой схеме и характеризующие инерционность элемента.

*Графические модели* позволяют представить компоненты в виде графиков ВАХ или в виде эквивалентных схем замещения.

*Табличные модели* позволяют представить схему или элемент в виде цифровых таблиц, полученных в ходе экспериментального исследования объекта моделирования и соответствующих графикам экспериментальных ВАХ. Табличные модели используют обычно в том случае; если аналитическую модель построить трудно вследствие сложной зависимости. Иногда при сложных функциональных аналитических зависимостях для ВАХ их сознательно табулируют, если это позволяет объем памяти ЭВМ, и создают таким образом, возможно менее точную, но более удобную модель [34].

Перечисленные выше модели могут быть выполнены в виде подпрограмм, при таком представлении они превращаются в цифровую модель.

Аналитические и графические модели могут быть также заданы в виде алгоритма вычисления внешних параметров модели, при этом модель носит название алгоритмической модели. После оформления подпрограммы в соответствии с приведенным алгоритмом модель становится цифровой [39].

Цифровые модели могут быть достаточно точными, т.к. степень их сложности в основном определяется сложностью программы и допустимыми

для расчета затратами машинного времени. В настоящее время цифровые модели используются все более широко в связи с развитием САПР РЭА.

3. По *характеру зависимостей* модели делятся на [40]:

- линейные
- нелинейные

Имеется особый класс кусочно-линейных моделей, нелинейность которых проявляется в ограниченном количестве точек стыка линейных участков.

Нелинейные модели, естественно, оказываются более точными, но и более сложными.

4. По *диапазону рабочих сигналов* модели классифицируются на:

- модели большого сигнала
- малосигнальные

Малосигнальные модели, как правило, представляют собой линейные модели; модели для большого сигнала учитывают нелинейность характеристик активных и пассивных элементов схемы (биполярных и полевых усилительных приборов).

5. По *диапазону рабочих частот* выделяют:

- низкочастотные
- высокочастотные
- сверхвысокочастотные

Низкочастотные модели не учитывают инерционность компонентов модели и, поэтому низкочастотные модели используют для расчета схем по постоянному току (в статическом режиме).

Высокочастотные модели — модели более высокого уровня, они учитывают помимо особенностей статического режима инерционность компонентов. Поэтому такие модели дополняют системой дифференциальных уравнений, учитывающей инерционность компонентов, или эквивалентными схемами реальных приборов на высоких частотах — индуктивностями и емкостями выводов, инерционностями, определяющими физические процессы в компонентах (например, накопление заряда), емкостями областей структур и т.п.

## 1.2. Основные термины и определения.

### Концепция структурного моделирования электромеханических систем

До введения общих понятий *моделирования* и *математической модели* определим *объект моделирования* с точки зрения теории моделирования [33]. Таким объектом в нашем случае является электромеханическая система, включающая в себя совокупность электродвигательного, преобразовательного, передаточного и управляющего устройств, и являющаяся с точки зрения теории моделирования *динамической системой*. Что же такое система, и когда ее следует считать динамической?

Под системой обычно понимают совокупность предметов как реальных,

так и идеальных, которая каким-то образом организована. Такую совокупность называют полем системы, а данные, которые описывают организацию системы, - *характеристиками*. Когда ни поле системы, ни ее характеристики не зависят от времени, говорят о *статической системе*. Системы, характеристики которых или их поле изменяются во времени, называются *динамическими*. Динамические системы являются главным объектом изучения имитационного моделирования. Статические системы применяются в исследовании, главным образом, как идеализированные и рассматриваются как состояния динамической системы.

Слово *модель* является очень популярным, в настоящее время его все чаще используют не в традиционном, принятом ранее, значении (например, модель самолета и т.п.), а как созданный в сознании человека идеальный образ объекта или явления окружающего мира. Для целей моделирования этот термин должен получить точное определение, на котором можно основывать дальнейшее изложение материала без опасности возникновения недоразумений.

*Модель* - это некоторая аналогия: для одной системы должна существовать другая система, элементы которой с определенной точки зрения подобны элементам первой; существует некоторое отображение, которое элементам *моделируемой* системы ставит в соответствие элементы другой системы - *моделирующей*. Такое отображение называют *элементной частью модели*. А отображение, которое свойствам элементов моделируемой системы ставит в соответствие свойства элементов моделирующей системы, будем называть *атрибутивной частью модели*.

Например, механическое передаточное устройство может быть смоделировано электронной схемой так, что механическим узлам будут соответствовать элементы электронной схемы (т.е. задана элементная часть), а механическим свойствам - электрические свойства элементов электронной схемы (т.е. задана элементная часть).

Для моделей динамических систем необходимо, чтобы одновременным явлениям в моделируемой системе соответствовали явления, происходящие в моделирующей системе также одновременно. Это необходимо для того, чтобы была возможность проводить с моделирующей системой эксперименты, зависящие от предыдущих состояний системы. В *динамических моделях* должна также существовать *временная часть*, которая отображает явления, наступающие в моделируемой системе в определенный момент  $t$ , на аналогичные явления, происходящие в моделирующей системе обычно в другое время, однако одновременным явлениям в моделируемой системе всегда соответствуют также одновременные явления в моделирующей системе.

*Имитационная модель* - это динамическая модель, временная часть которой отображает время неубывающим [1].

Кроме того, следует отметить, что модель никогда не означает просто систему. Всегда необходимо выявить, что является моделью и с какой точки

зрения. *Модель* - определенное соотношение между двумя системами, одну из которых называем моделируемой системой (оригиналом), а другую - моделирующей системой (моделью).

При использовании в качестве моделирующей системы различного рода математических формализмов получаем *математические модели*. Однако не всякая математическая модель содержит в явном виде информацию об особенностях функционирования изучаемой динамической системы. Необходимая информация в этом случае может быть получена после постановки серии вычислительных экспериментов с математическими моделями или с помощью имитационного моделирования.

*Имитационное моделирование* - метод исследования, основанный на том, что изучаемая динамическая система заменяется ее имитатором, и с ним проводятся эксперименты в целях получения информации об изучаемой системе.

В настоящее время большинство имитаторов реализуется на ЭВМ, однако возможна их реализация в виде физических объектов, например, в виде механических и электронных систем и т. п.

Электромеханические системы, примерами которых могут служить автоматизированный электропривод, системы управления движущимися объектами, робото-технические комплексы и т.п., относятся к классу непрерывно-дискретных динамических систем.

Исходное математическое описание любой динамической системы представляет собой совокупность дифференциальных, алгебраических, логических уравнений с нелинейными непрерывно-дискретными правыми частями, описывающих физические процессы в отдельных функциональных элементах системы. Прямое использование указанного математического описания для построения имитационных моделей представляется весьма затруднительным. Требуется методология создания универсальных имитационных моделей и средств их автоматизированной реализации.

Для специалистов в области автоматизированного электропривода и электромеханических систем наиболее предпочтительным является блочный принцип формирования моделей. Кроме того, эффективное решение задач моделирования современных электромеханических систем возможно при наличии специализированных программно-технических комплексов, построенных с учетом следующих основных требований:

- диалог с вычислительной системой должен вестись на естественном профессиональном языке специалиста в конкретной технической области;
- должна быть предоставлена возможность оперативной постановки имитационных экспериментов с моделями технических систем;
- программное обеспечение указанных комплексов должно иметь в своем составе средства настройки на конкретных классах изучаемых объектов и конкретный коллектив пользователей.

Теоретической базой указанных задач стала предложенная

В.Н. Нуждиным *концепция структурного моделирования динамических систем*, в которой можно выделить четыре основных положения [23].

1. Процесс моделирования представляется в виде комплекса действий:

- описание модели на некотором формальном языке;
- техническая реализация модели на ЭВМ;
- постановка серии экспериментов на модели;
- анализ результатов моделирования;
- оформление документации.

2. Организация взаимодействия между пользователем и вычислительной системой должна осуществляться на основе естественного языка специалистов в области электромеханических систем (ЭМС). Исходным звеном для организации этого взаимодействия должна быть *структурная модель ЭМС*.

3. Большая часть работ по формированию моделей, планированию вычислительного процесса и оформлению результатов моделирования должна быть возложена на вычислительную систему. Пользователь должен только ставить задачу и оценивать полученные результаты.

4. Постановка экспериментов на структурных моделях должна осуществляться в целях:

- имитации функционирования ЭМС в условиях взаимодействия с внешней средой;
- поиска оптимальных параметров и структур ЭМС;
- проверки адекватности и полезности новых вариантов моделей (передаточных, исследовательских и т.п.);
- обучения и тренажа;
- получения новых знаний.

Центральное место в концепции структурного моделирования отводится следующим понятиям.

*Структурная модель* - некоторая схема из взаимосвязанных элементов, выделяемых по физическому назначению или выполняемой математической функции. Соединение между элементами в структурной модели могут отражать информационные, энергетические или пространственные связи. Внешне структурная модель может представляться в виде блок-схем, функциональных схем, структурных схем, графов.

В зависимости от вида элементов модели и связей между ними можно выделить четыре уровня представления структурных моделей: *алгоритмический, математический, функциональный и описательный*.

*Алгоритмический уровень описания структурной модели* - описание модели в виде некоторой схемы, элементы которой используются ЭВМ

непосредственно для планирования вычислительного процесса. Описание модели на алгоритмическом уровне содержит все необходимые данные для организации вычислений.

*Математический уровень описания структурной модели* - описание модели в виде совокупности блоков уравнений. Блок уравнений (система уравнений) выделяется по функциональному или физическому принципу, что позволяет формировать модели, близкие по структуре реальной технической системе. При таком поэлементном описании всегда могут быть выделены динамические звенья, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями, нелинейными и дискретными функциями "вход-выход", алгебраическими и логическими уравнениями и т.д. Традиционные структурные схемы и графы являются наиболее характерными примерами структурных моделей математического уровня. Математический уровень описания структурных моделей не может непосредственно использоваться для организации вычислительного процесса, так как необходим предварительный выбор метода численного решения уравнений и условий применения этого метода.

*Функциональный уровень описания структурной модели* - описание модели в виде схемы соединения физических элементов ЭМС или их отдельных частей (электродвигатель, преобразователь и т.п.). Структура схемы должна отражать характерные свойства исследуемой ЭМС, достаточные для ее идентификации в заданном классе математических моделей.

Объединение фрагментов схем структурных моделей математического уровня, состоящих из базовых элементов или математических уравнений, в интегрированные блоки, соответствующие реальным физическим звеньям или их составным частям, позволяет перейти к *структурным моделям функционального уровня*. Последние в значительной степени адекватны функциональным схемам СУ ЭМО.

*Описательный уровень структурной модели* - представление модели в виде одного блока, параметры которого указывают структурные и параметрические свойства исследуемой системы [22].

На рис. 1.1 приведена схема возможных межуровневых преобразований структурных моделей. Эта же схема позволяет оценить степень "удобства" использования каждого уровня моделей пользователем и вычислительной системой [23].

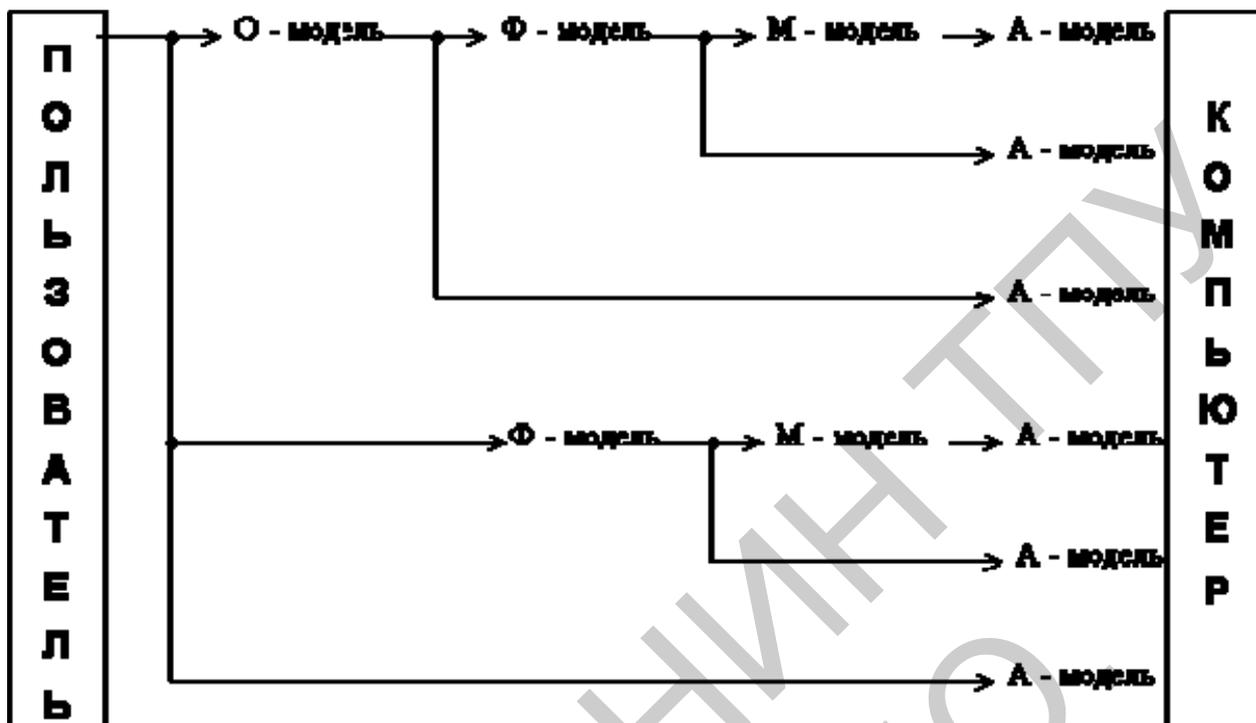


Рис. 1.1. Схема межуровневых преобразований структурных моделей

Очевидно, что описательный и функциональный уровень наиболее близки для пользователя, а с алгоритмическим уровнем описания структурных моделей непосредственно работает вычислительная система. Конструирование структурной модели алгоритмического уровня требует предварительного изучения используемого программного инструмента моделирования. Поэтому, алгоритмический уровень описания структурных моделей используется разработчиками систем моделирования для отладки создаваемых программных средств и наполнения база моделей динамических элементов и функциональных блоков.

Практический интерес для специалистов в области ЭМС представляют функциональный и математический уровни описания структурных моделей.

### Контрольные вопросы для закрепления изученного материала

1. Приведите основную классификацию математических моделей.
2. Что называется математической моделью?
3. Поясните основные пункты концепции структурного моделирования динамических систем.
4. Укажите основные цели постановки эксперимента на структурных моделях.

### Список рекомендуемой литературы, имеющейся в НТБ ТПУ

1. Математическое моделирование: Сборник / Под ред. А. Н. Тихонова. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 332 с.

2. Боголюбова М. Н. Системный анализ и математическое моделирование: учебное пособие / М. Н. Боголюбова; Томский политехнический университет. — Томск: Изд-во ТПУ, 2002. — 104 с.
3. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2002. — 320 с.
4. Введение в математическое моделирование: учебное пособие для вузов / В. Н. Ашихмин [и др.]; под ред. П. В. Трусова. — М.: Логос, 2004. — 440 с.
5. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В. П. Тарасик. — 2-е изд., испр. и доп. — Минск: Дизайн ПРО, 2004. — 640 с.

## 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТАУ

### 2.1. Понятие линейного динамического звена

САУ удобно представлять для анализа и при синтезе в виде взаимосвязанной совокупности отдельных элементов – динамических звеньев.

Под динамическим звеном понимают в общем случае абстрактное устройство, имеющее вход и выход, и для которого задано уравнение, связывающее сигналы на входе и выходе, как это показано на рис. 2.1 [29].



Рис. 2.1. Понятие динамического звена

Подробное изучение свойств реальных объектов управления и систем автоматического управления приводит к описанию динамических звеньев в виде нелинейных дифференциальных уравнений. Но во многих случаях их можно линеаризовать, то есть заменить нелинейные уравнения линейными, приближенно описывающими процессы в системах. Тем самым осуществляется декомпозиция задач анализа и синтеза систем, то есть первоначально используют линейное представление, а затем осуществляют учет вносимых нелинейностями особенностей. Такому подходу способствует то, что, в большинстве случаев, нормально функционирующая система работает в режиме малых отклонений, при которых нелинейности не проявляются. В дальнейшем мы будем рассматривать преимущественно аппарат изучения линейных систем, а особенности систем других классов: нелинейных, импульсных, цифровых и стохастических, будут излагаться позднее в других учебных дисциплинах.

Если уравнение, связывающее сигналы  $X_{\text{вх}}(t)$  и  $X_{\text{вых}}(t)$ , линейно, то говорят о линейном динамическом звене.

Уравнение линейного динамического звена имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n X_{\text{вых}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt} + a_n X_{\text{вых}}(t) = \\ b_0 \frac{d^m X_{\text{вх}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} X_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dX_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_m X_{\text{вх}}(t), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  - постоянные коэффициенты,  $m \leq n$ .

Использовать такое описание динамического звена в задачах анализа и синтеза систем и объектов управления не рационально, поэтому существуют и иные формы описания и представления динамических звеньев и систем в целом.

## 2.2. Передаточная функция

Подвергнем уравнение (2.1.1) преобразованию Лапласа, считая начальные условия нулевыми и заменяя оригиналы сигналов их изображениями по Лапласу [24]

$$X_{ex}(s) = L\{X_{ex}(t)\}, X_{вых}(s) = L\{X_{вых}(t)\}.$$

Используя теоремы преобразования Лапласа линейности и дифференцирования, получим операторное уравнение, связывающие изображения входного и выходного сигналов

$$L\{X_{вых}(t)\} = W(s)L\{X_{ex}(t)\}. \quad (2.2.1)$$

Преобразуем уравнение (3.6.1) к следующему виду

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)X_{вых}(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m)X_{ex}(s). \quad (2.2.2)$$

Получим из (2.2.2) отношение изображений выходного и входного сигналов

$$\frac{X_{вых}(s)}{X_{ex}(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (2.2.3)$$

Отношение (2.2.3) не зависит от изображений сигналов, определяется только параметрами самого динамического звена ( $a_i, b_i$ ), имеет вид дробно-рациональной функции.

Отношение изображений выходного и входного сигналов называют передаточной функцией динамического звена

$$W(s) = \frac{X_{вых}(s)}{X_{ex}(s)}.$$

Уравнение вида

$$A(s) = 0, \quad a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

называют характеристическим уравнением динамического звена, так как знаменатель передаточной функции – это характеристический полином

дифференциального уравнения, описывающего динамическое звено.

### Пример

Определим передаточную функцию динамического звена по его принципиальной электрической схеме (рис. 2.2) [27].

### Решение

По второму закону Кирхгофа запишем уравнения описывающие схему

$$\begin{cases} U_{ax}(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t), \\ U_{вых}(t) = U_R(t). \end{cases}$$

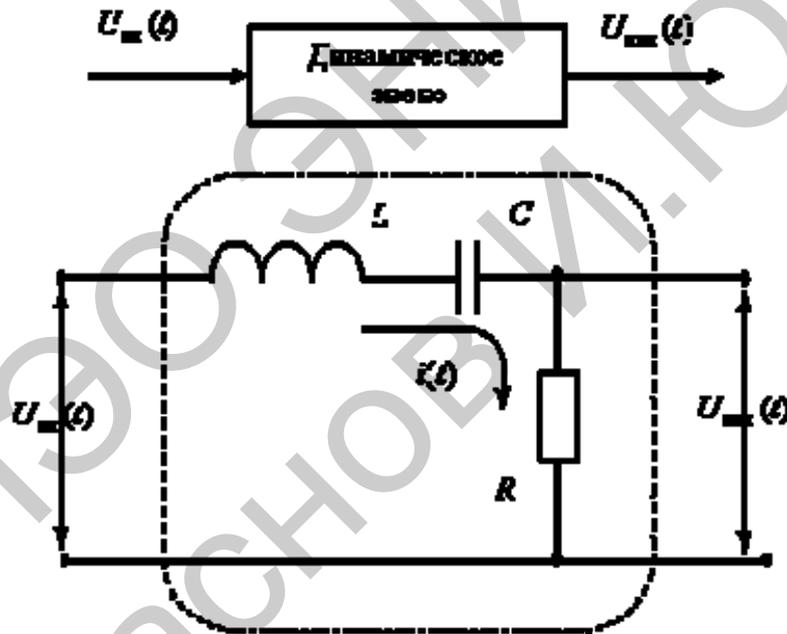


Рис. 2.2. Принципиальная схема  $RLC$ -цепи

С учетом того, что

$$U_R(t) = i(t)R, U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}, i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} \Rightarrow U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt,$$

получаем

$$\begin{cases} U_{ax}(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + U_{вых}(t), \\ U_{вых}(t) = i(t)R. \end{cases}$$

Получим операторные уравнения

$$\begin{cases} U_{\text{вх}}(t) = LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(t) + U_{\text{вых}}(t), \\ U_{\text{вых}}(t) = i(s)R. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим значение изображения тока

$$I(s) = \frac{1}{R}U_{\text{вых}}(s).$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение системы

$$U_{\text{вх}}(s) = \frac{L}{R}sU_{\text{вых}}(s) + \frac{1}{RCs}U_{\text{вых}}(s) + U_{\text{вых}}(s) = \frac{LCs^2 + CRs + 1}{CRs}U_{\text{вых}}(s).$$

В итоге получаем искомую передаточную функцию

$$W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{CRs}{LCs^2 + CRs + 1}.$$

### 2.3. Структурная схема

Графически передаточные функции динамического звена представляют в следующем виде (рис. 2.3):

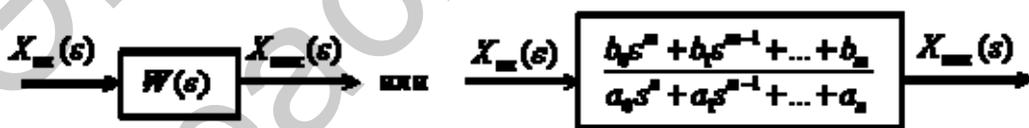


Рис. 2.3. Графическое представление передаточных функций

Если известно изображение входного сигнала и передаточная функция динамического звена, всегда можно найти изображение выходного сигнала при нулевых начальных условиях

$$X_{\text{вых}}(s) = X_{\text{вх}}(s)W(s). \quad (2.3.1)$$

В общем случае САУ состоит из множества динамических звеньев, сигналы с выходов звеньев могут суммироваться или вычитаться, суммироваться с внешними для САУ сигналами. Суммирование и вычитание изображений сигналов могут быть представлено графически с помощью

суммирующих звеньев:

$$1. X_{\text{вых}}(s) = X_{\text{ex1}}(s) + X_{\text{ex2}}(s).$$

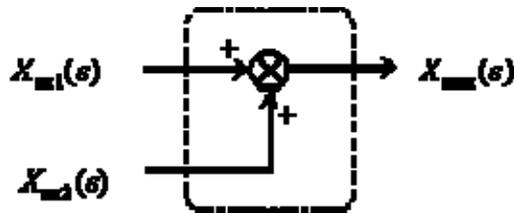


Рис. 2.4. Представление суммирующихся элементов

$$2. X_{\text{вых}}(s) = X_{\text{ex1}}(s) - X_{\text{ex2}}(s).$$

Показанная ниже неоднозначность графического представления вычитания изображений на суммирующем элементе связана с различием в стандартах разных стран.

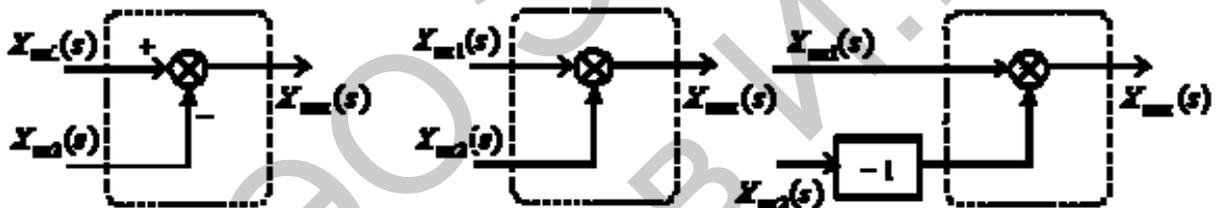


Рис. 2.5. Представление разности элементов

Используя графическое представление передаточных функций звеньев и суммирующие звенья, можно в графической форме представить операторные уравнения, описывающие САУ. Такое графическое представление операторных уравнений в ТАУ называют структурной схемой.

### Пример

По математической модели объекта управления в форме системы дифференциальных уравнений определить структурную схему объекта.

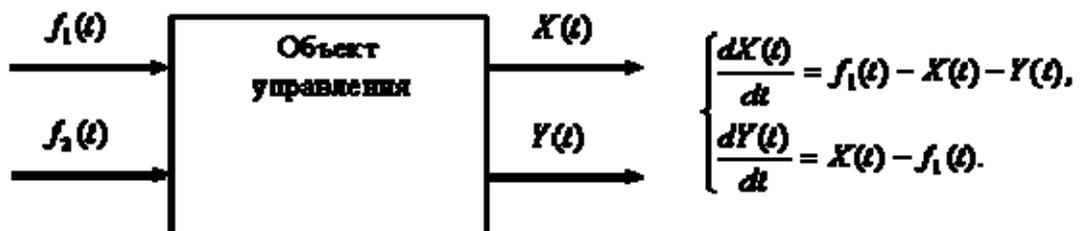


Рис. 2.6. Приведение к форме систем уравнений

## Решение

Получим систему операторных уравнений, подвергнув исходную систему дифференциальных уравнений преобразованию Лапласа и заменив оригиналы изображениями,

$$\begin{cases} sX(s) = F_1(s) - X(s) - Y(s), \\ sY(s) = X(s) - F_1(s). \end{cases}$$

Из первого уравнения системы операторных уравнений, которое описывает динамическое звено объекта управления, после преобразований получим

$$(s + 1)X(s) = F_1(s) - Y(s) = Z_1(s).$$

Тогда передаточная функция этого звена имеет вид

$$W_1(s) = \frac{X(s)}{Z_1(s)} = \frac{1}{s + 1},$$

а выражение  $F_1(s) - Y(s) = Z_1(s)$  описывает суммирующее звено  $\Sigma_1$ . Таким образом, получены два фрагмента структурной схемы

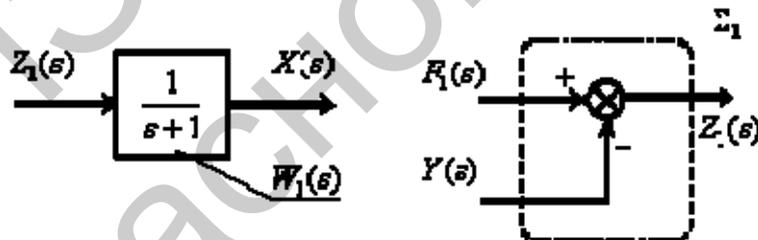


Рис. 2.7. Фрагменты структурной схемы

Из второго уравнения системы операторных уравнений, которое описывает динамическое звено объекта управления, после преобразований получим, вводя обозначение,

$$sY(s) = X(s) - F_2(s) = Z_2(s).$$

Тогда передаточная функция этого звена имеет вид

$$W_2(s) = \frac{Y(s)}{Z_2(s)} = \frac{1}{s},$$

а выражение  $X(s) - F_2(s) = Z_2(s)$  описывает суммирующее звено  $\Sigma_2$ . Таким образом, получены еще два фрагмента структурной схемы

Соединим все фрагменты структурной схемы объекта управления, объединяя одноименные сигналы, либо разветвляя их с помощью точек ветвления, показанных на схеме. В результате получим

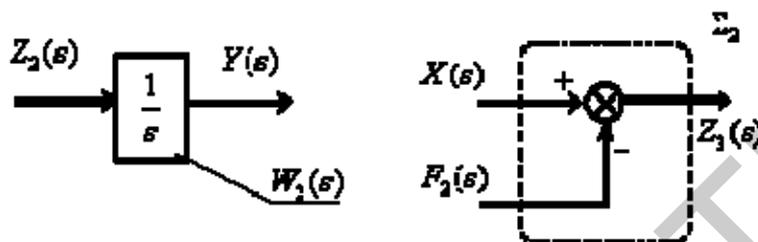


Рис. 2.8. Фрагменты структурной схемы

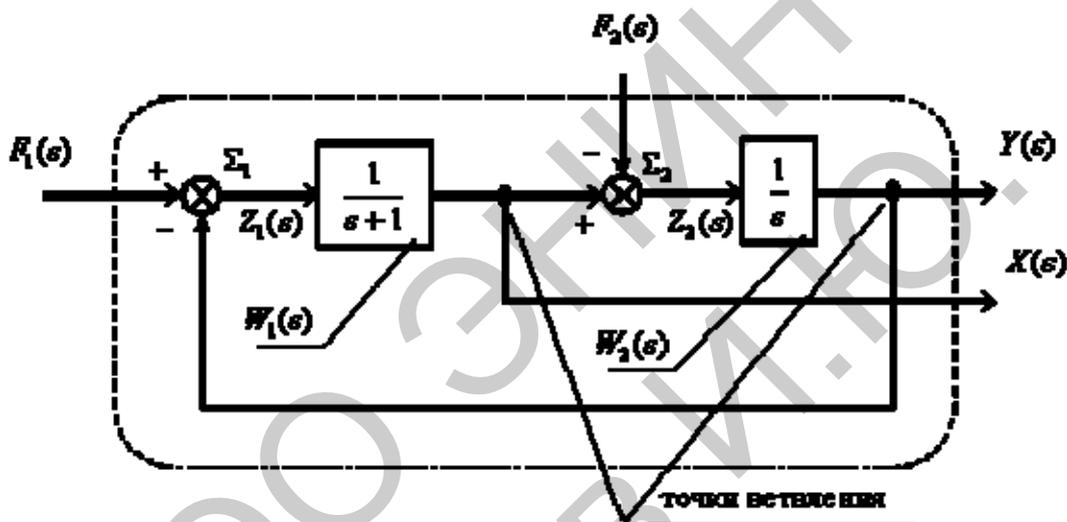


Рис. 2.9. Структурная схема с точками ветвления

#### 2.4. Временные характеристики динамического звена

Временной или импульсной характеристикой динамического звена называют реакцию звена на  $\delta(t)$ , обозначая ее как  $w(t)$ . При этом схема эксперимента имеет вид (рис. 2.10)



Рис. 2.10. Схема эксперимента

Выясним, что представляет собой временная характеристика, то есть почему ее называют характеристикой динамического звена?

Для этого рассмотрим динамическое звено с передаточной функцией  $W(s)$

(рис. 2.17)

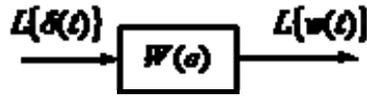


Рис. 2.11. Блок передаточной функции

В этом случае, в соответствии с (2.3.1), имеем

$$L\{w(t)\} = W(s)L\{\delta(t)\} = W(s) * 1 = W(s).$$

Таким образом

$$W(s) = L\{w(t)\}$$

Получаем, что передаточная функция звена – это изображение по Лапласу импульсной характеристики динамического звена. В свою очередь, импульсная характеристика может быть определена по передаточной функции

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$$

при использовании разложения в формулу Хэвисайта и обратное преобразование Лапласа.

Знание импульсной характеристики позволяет определить реакцию динамического звена на сигнал любой формы.

Для динамического звена с передаточной функцией  $W(s)$  преобразуем (2.3.1), используя теорему об умножении изображений преобразования Лапласа,

$$X_{\text{вых}}(t) = L^{-1}\{X_{\text{ex}}(s)W(s)\} = \int_0^t X_{\text{ex}}(\tau)w(t-\tau)d\tau,$$

а если легко получить  $X_{\text{ex}}(s) = L\{X_{\text{ex}}(t)\}$ , тогда

$$X_{\text{вых}}(s) = L^{-1}\{L\{X_{\text{ex}}(t)\}W(s)\}.$$

Переходной характеристикой или переходной функцией динамического звена называют реакцию динамического звена на  $1(t)$ , обозначая ее как  $h(t)$ . При этом схема эксперимента имеет вид (рис. 2.10)



Рис. 2.12. Схема эксперимента

Для анализа переходной характеристики рассмотрим динамическое звено с передаточной функцией  $W(s)$  (рис. 2.13)

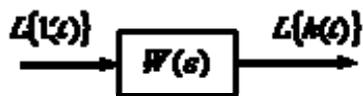


Рис. 2.13. Блок передаточной функции

В этом случае, в соответствии с (2.3.1), имеем

$$L\{h(t) = W(s)L\{1(t)\}\} = W(s)\frac{1}{s}.$$

По теореме об интегрировании оригинала имеем

$$h(t) = \int_0^t L^{-1}\{W(s)\} dt = \int_0^t w(t) dt.$$

Переходная функция является интегралом по времени от импульсной характеристике и наоборот

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Переходная характеристика динамического звена может быть определена по передаточной функции

### Контрольные вопросы для закрепления изученного материала

1. Как определить передаточную функцию линейного динамического звена?
2. Как по переходной характеристике определить импульсную характеристику динамического звена?
3. Перечислите основные элементы структурных схем систем управления.
4. Как определить по передаточной функции динамического звена его временные характеристики: импульсную и переходную?
5. Какие задачи позволяют решать правила эквивалентных преобразований структурных схем?
6. Дайте определение принципа суперпозиции применительно к структурным схемам систем автоматического управления.

### Список рекомендуемой литературы, имеющейся в НТБ ТПУ

1. Андык В. С. Теория автоматического управления: учебное пособие к практическим занятиям / В. С. Андык. — Томск: Изд-во ТПУ, 2000. — 108 с.
2. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. — 4-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Профессия, 2004. — 747 с.
3. Ерофеев А. А. Теория автоматического управления: учебник / А. А. Ерофеев. — 2-е изд., доп. и перераб. — СПб.: Политехника, 2005. — 302 с.
4. Теория автоматического управления: учебник для вузов / С. Е. Душин [и др.]; под ред. В. Б. Яковлева. — 2-е изд., перераб. — М.: Высшая школа, 2005. — 567 с.

Доц. ЭПЭО ЭНКИМТЭ  
Краснов И.Ю.

### 3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

#### 3.1. Понятие многомерной системы

Рассмотрим определение многомерной системы, используемое в теории управления [20].

Многомерными системами называют системы управления, в которых имеются несколько, больше одной, управляемых переменных величин.

Одномерная система характеризуется тем, что контролируется (измеряется, регулируется) лишь одна переменная величина объекта управления. Рассмотрим структуру типичной одномерной системы управления на примере управления скоростью вращения электродвигателя.

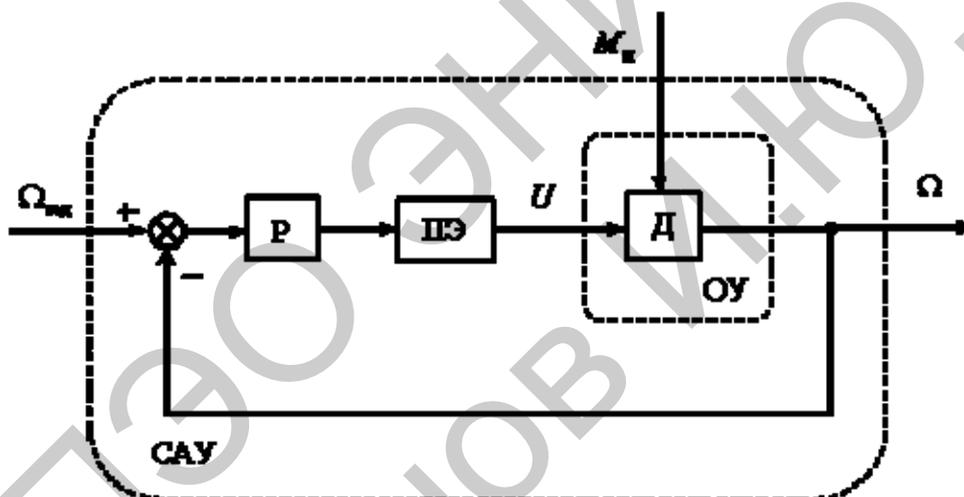


Рис. 3.1. Структурная схема САУ скоростью вращения вала электродвигателя

В системе, показанной на рис. 3.1 объектом управления (ОУ) является электродвигатель (Д). На двигатель воздействует преобразователь энергии (ПЭ), приводящий двигатель в движение и изменяющий скорость посредством величины напряжения ( $U$ ), подводимого к двигателю. На двигатель так же воздействует рабочая нагрузка, создающая на валу двигателя момент ( $M_n$ ), приводящий к изменению скорости ( $\Omega$ ) в отличие от заданной скорости ( $\Omega_{зад}$ ). В процессе работы двигателя, при изменении нагрузки будет меняться и скорость, что является недопустимым с точки зрения требований к качеству выпускаемой продукции, на пример, скорость подачи металлорежущего станка. В функции отклонения скорости от задания регулятор (Р) воздействует на преобразователь энергии таким образом, чтобы снизить отклонение скорости.

В этом случае, как система управления в целом, так и объект управления, представляются в виде математической модели, имеющей скалярные вход, выход и возмущающее воздействие.

Для анализа и синтеза в таких системах используют математические модели в виде дифференциальных уравнений, передаточных функций, структурной схемы, частотных и временных характеристик, которые были рассмотрены в нашем курсе ранее.

Общая тенденция развития промышленных устройств состоит в повышении качества и снижении затрат. При повышении качества управления приходится учитывать большее число возмущающих факторов и требуется управлять несколькими переменными объекта. Это должно обеспечивать требования к точности, динамичности, стабильности и экономичности процесса движения вала двигателя. Тогда и объект управления (двигатель) и система управления рассматривается как многомерные.

Структура системы управления скоростью двигателя принимает вид, показанный на рис. 3.2.

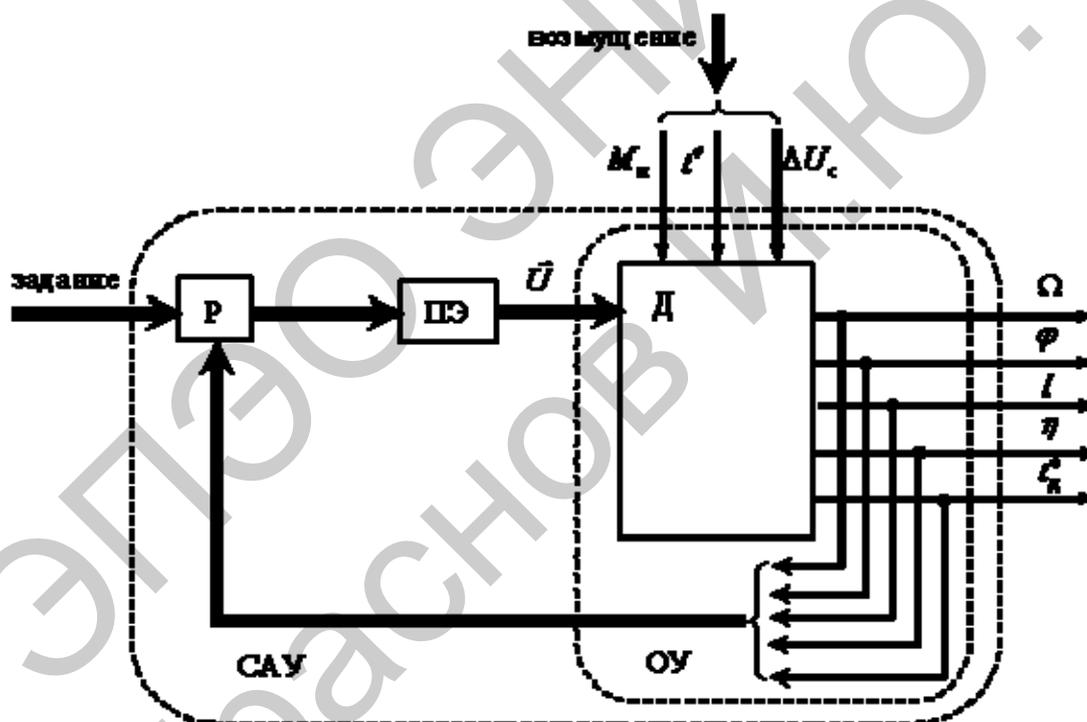


Рис. 3.2. Подробная структурная схема

Как мы видим здесь в качестве контролируемых переменных двигателя не только скорость, но и угол поворота вала  $\varphi$ , что часто требуется при точном останове вала. Также контролируют нагрузку двигателя по потребляемому току  $I$ , экономичность по коэффициенту полезного действия  $\eta$ , нагрев двигателя по температуре двигателя  $t^0$ . На систему действует возмущение, имеющее так же несколько компонент: момент нагрузки, температура окружающей среды  $t^0$ , что важно для установок, работающих на открытом воздухе, и отклонение параметров питающего преобразователь энергии источника энергии, что важно для автономных установок. В этом

случае управляющее воздействие на двигатель так же является векторной величиной  $\vec{U}$ . И таким образом обстоит дело не только в системах электропривода, но и в целом, при разработке систем автоматизации промышленных установок [37].

Во многих случаях разработки промышленных установок решается задача обеспечения заданного качества технологического процесса при минимизации энергетических и экономических затрат. При этом необходимо не только учитывать многочисленные возмущающие объект управления факторы, но и использовать несколько точек приложения управляющих воздействий.

Рассмотрим наиболее характерные примеры многомерных систем в различных отраслях промышленности.

На рис. 3.3 показана примерная структура установки, которая реализует процесс обработки гибких материалов. Такая структура является характерной для обработки таких материалов, как нить, проволока, ткань, тонколистовой металл, пленки, многослойные материалы.

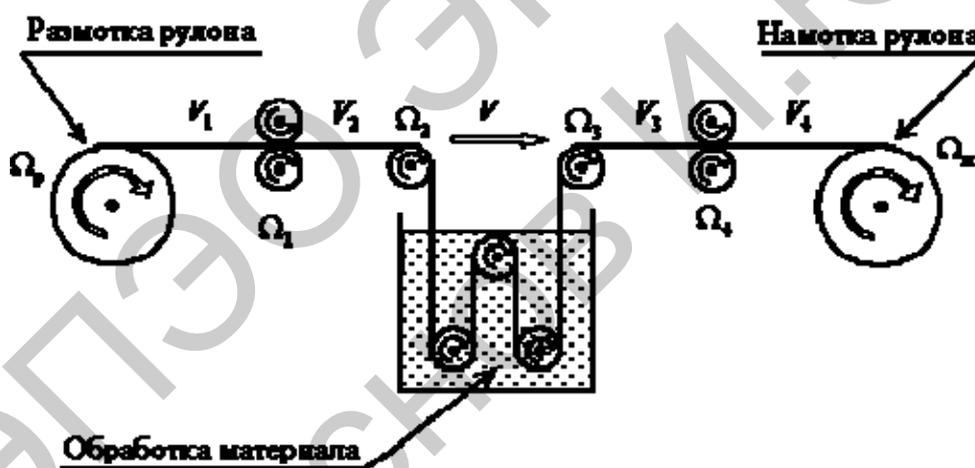


Рис. 3.3. Структурная схема установки

Основная задача таких систем – это стабилизация скорости обработки материала  $V$  с обеспечением отсутствия деформации материала. Для этого максимальное количество вращающихся роликов оснащают регулируемыми приводами, чтобы с помощью управляющих воздействий – соотношений скоростей  $\Omega_p, \Omega_n, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ , воздействовать на линейные скорости  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , а тем самым и на другие параметры обрабатываемого материала, особенно это важно в тех случаях, когда материал является легко деформируемым, на пример, обработка марли или бинтов в текстильной промышленности.

На рис. 3.4 показана типичная кинематическая схема промышленного робота для манипулирования и транспортирования предметов.

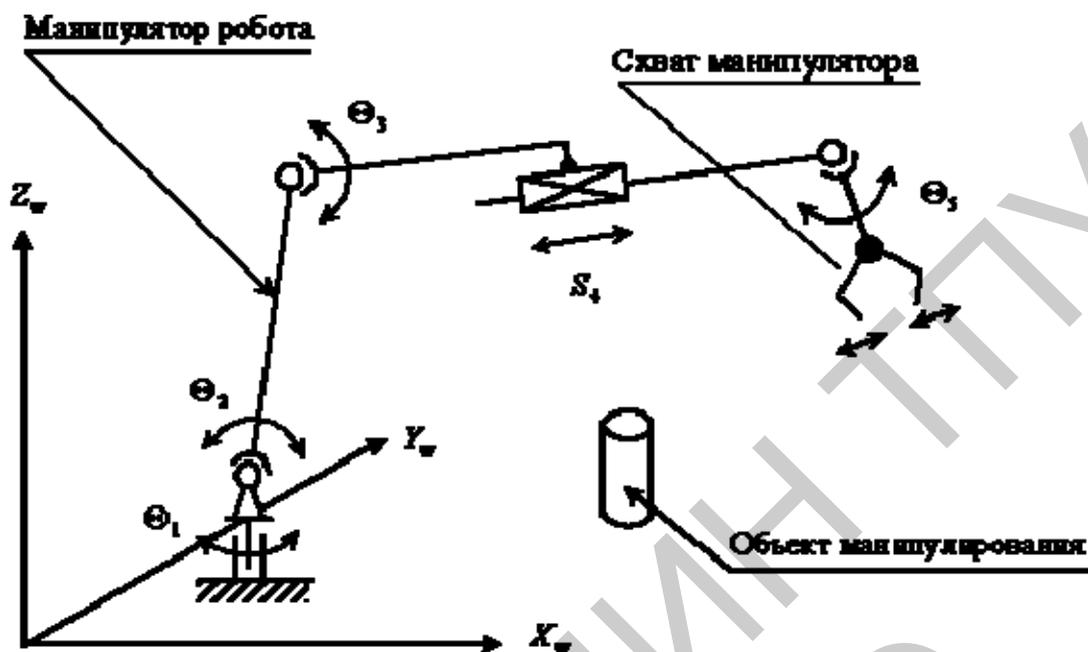


Рис. 3.4. Кинематическая схема промышленного робота

Основная задача таких систем — перемещение схвата манипулятора в заданную точку пространства рабочей зоны робота ( $X_w, Y_w, Z_w$ ). Эту задачу можно реализовать, воздействуя на величины углов поворота и перемещения в сочленениях манипулятора ( $P$ ), с помощью электромеханических, пневматических или гидравлических приводов.

Таким образом, здесь также мы имеем объект и систему с большим числом входных воздействий, то есть многомерную систему.

Обобщенная структура таких многомерных систем будет иметь вид, показанный на рис. 3.5.

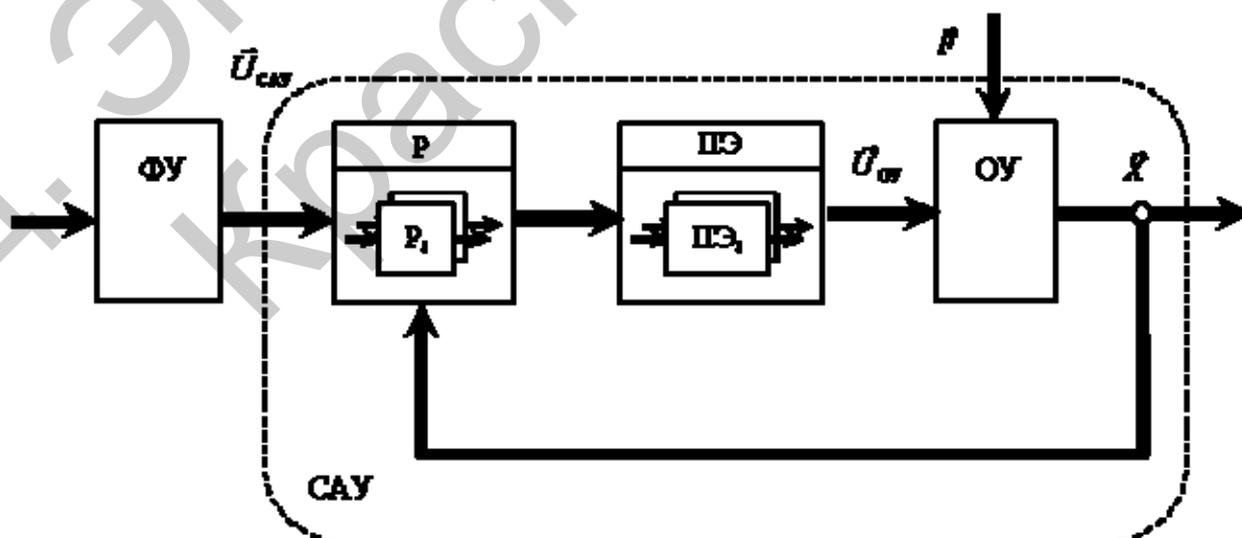


Рис. 3.5. Обобщенная схема

Блок формирования управления (ФУ) преобразует задания оператора в вектор управления системой  $\vec{U}_{САУ}$ . Блок регуляторов ( $P$ ), действующий в

функции отклонений измеренных регулируемых величин  $\vec{X}$  от заданных, управляет преобразователями энергии (ПЭ), которые осуществляют управляющие воздействия  $\vec{U}_{OY}$  на объект управления (ОУ). На объект управления действуют возмущающие воздействия  $\vec{F}$ .

Мы видим, что в этом случае многомерная система имеет векторный характер входов, выходов и возмущающих воздействий, что хорошо иллюстрирует рис. 3.6.

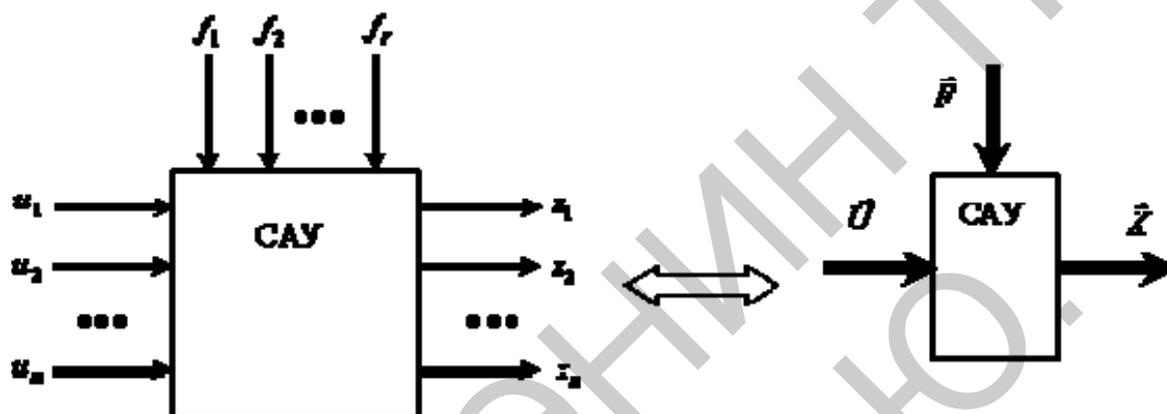


Рис. 3.6. Многомерная система

Как и в случае с одномерными (скалярными) системами ограничимся рассмотрением линейных систем управления.

На рис. 3.6 показаны векторы –  $\vec{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}$ ,  $\vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_r \end{bmatrix}$ ,  $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ .

Многомерные системы и объекты управления называют линейными и стационарными, если они описываются системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В настоящее время в практике анализа и синтеза многомерных систем сложились два подхода к проблеме получения математической модели таких систем.

### Первый подход

Многомерная система рассматривается, как многосвязная совокупность динамических звеньев и представляется в виде структурной схемы или ориентированного графа.

## Второй подход

Учитывая векторный характер связей между функциональными элементами САУ, при построении математических моделей используют векторно-матричное представление уравнений и структурных схем, описывающих объект управления или систему в целом.

В рамках этого подхода существует деление математических моделей на две группы.

### Математические модели в частотной области

Они базируются на операторной форме представления уравнений и использовании преобразования Лапласа. Это такие модели как:

- матричные структурные схемы,
- передаточные матрицы, которые иногда называют эквивалентными матрицами или матрицы "вход-выход".

### Математические модели во временной области

Они базируются на векторно-матричной форме представления систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, широкое использование понятий и методов теории пространства состояний.

## 3.2. Структурные матричные схемы и передаточные матрицы

### 3.2.1. Матричные структурные схемы

Матричные структурные схемы являются, по сути, компактным графическим представлением классической структурной схемы многомерного объекта или системы управления. Они основываются на операторной форме представления уравнений, на замене реальных сигналов их изображениями по Лапласу [25].

Используя несколько уровней представления схем, различающихся степенью агрегатирования (объединения) связей и элементов системы.

Рассмотрим различные уровни представления матричных структурных схем на примере некоторой обобщенной структуры многомерной системы автоматического управления.

#### I уровень

На рис. 3.7 показаны  $\vec{Y}_0(s), \vec{E}(s), \vec{U}_0(s), \vec{F}(s), \vec{U}(s), \vec{Y}(s)$  – векторы изображений переменных,

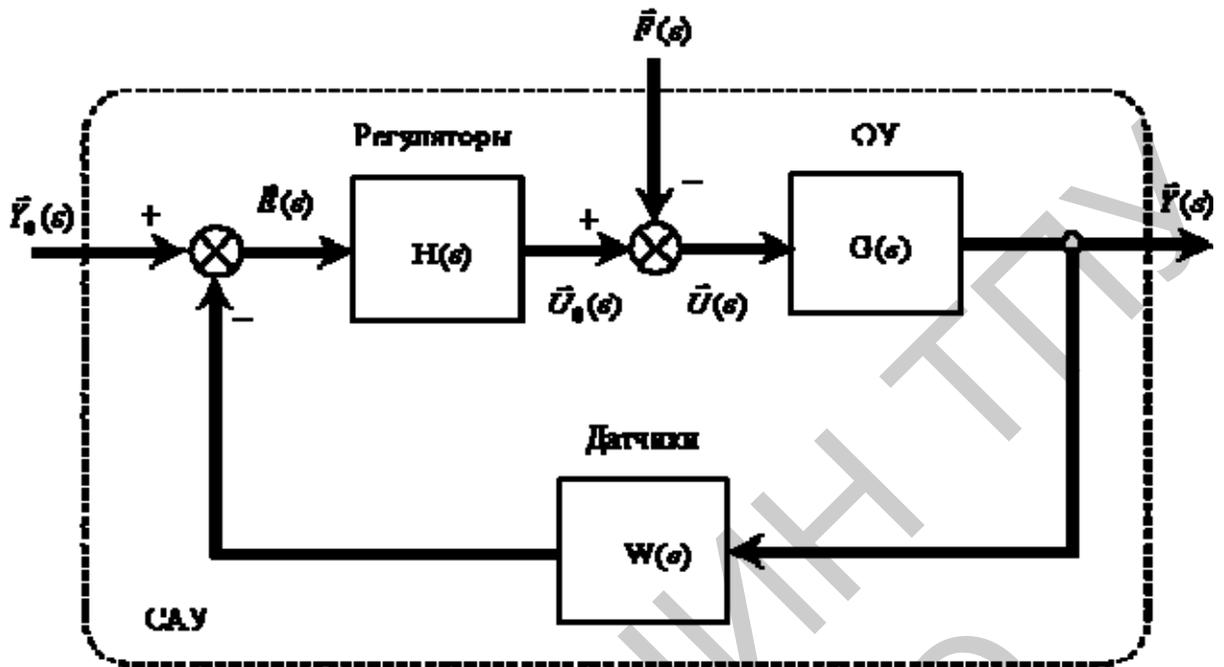


Рис. 3.7. Структурная схема (1-ый уровень)

$$\vec{Y}_0(s) = \begin{bmatrix} Y_{01}(s) \\ Y_{02}(s) \\ \dots \\ Y_{0n}(s) \end{bmatrix}, \vec{E}(s) = \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \dots \\ E_n(s) \end{bmatrix}, \vec{F}(s) = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \dots \\ F_n(s) \end{bmatrix}, \vec{U}_0(s) = \begin{bmatrix} U_{01}(s) \\ U_{02}(s) \\ \dots \\ U_{0n}(s) \end{bmatrix}, \vec{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \dots \\ U_n(s) \end{bmatrix}, \vec{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \dots \\ Y_n(s) \end{bmatrix}.$$

$H(s)$ ,  $G(s)$ ,  $W(s)$  – матрицы передаточных функций,

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \dots & H_{1n}(s) \\ H_{12}(s) & H_{22}(s) & \dots & H_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1}(s) & H_{n2}(s) & \dots & H_{nn}(s) \end{bmatrix}, G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ G_{12}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \dots & G_{nn}(s) \end{bmatrix},$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1n}(s) \\ W_{12}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}(s) & W_{n2}(s) & \dots & W_{nn}(s) \end{bmatrix}.$$

На показанной на рис. 3.8 матричной структурной схеме суммирующие элементы, матричные звенья и точки ветвления выполняют те же функции, что и на обычных структурных схемах. Поэтому в соответствии со схемой можно записать систему матричных уравнений

$$\begin{cases} \vec{E}(s) = \vec{Y}_0(s) - \vec{W}(s)\vec{Y}(s), \\ \vec{U}(s) = H(s)\vec{E}(s) - \vec{F}(s), \\ \vec{Y}(s) = G(s)\vec{U}(s). \end{cases}$$

## II уровень

Рассмотри второй уровень, полагая для матричной структурной схемы  $n = 2$ .

Рассмотрим на этом уровне ОУ, описываемый матрицей  $G(s)$

$$\vec{Y}(s) = G(s)\vec{U}(s). \quad (3.2.1)$$

Перейдем от матричных уравнений к скалярным

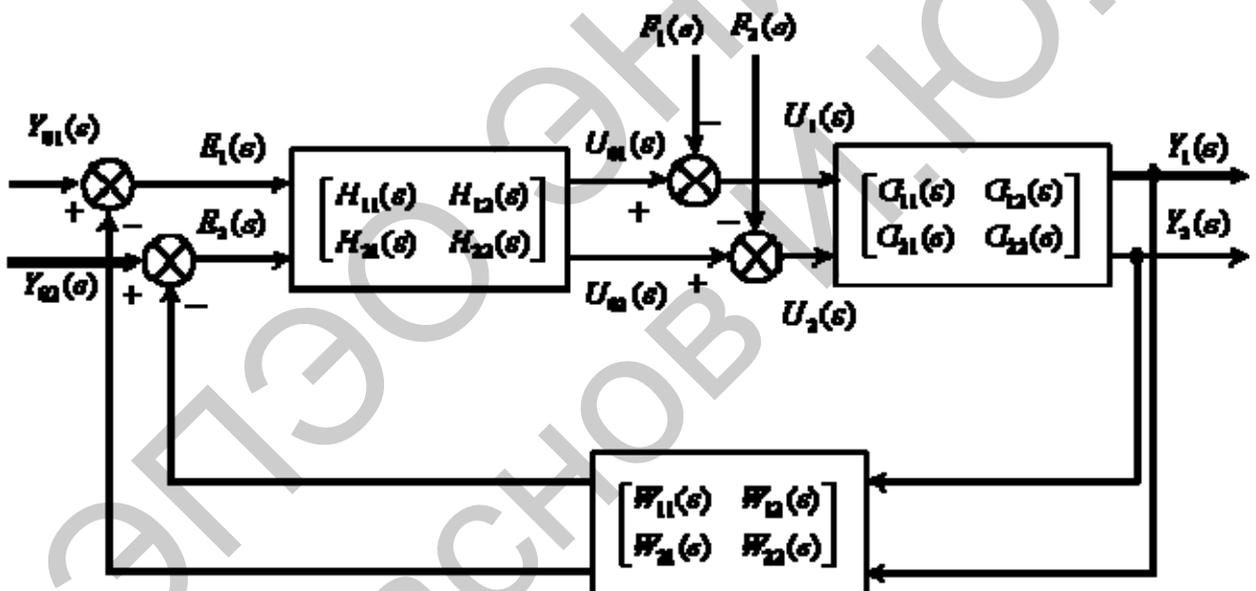


Рис. 3.8. Структурная схема (2-ой уровень)

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s), \\ Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s). \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Из последнего выражения видно, что передаточная функция  $G_{ij}(s)$  в соответствии с принципом суперпозиции является передаточной функцией между  $j$ -м входом и  $i$ -м выходом, при отсутствии сигналов на всех входах, кроме  $i$ -го.

### III уровень

Рассмотри третий уровень матричной структурной только для объекта управления. На основании полученной для объекта системы операторных уравнений (3.2.2) можно изобразить структурную схему объекта управления (рис. 3.9)

Из предложенного примера уровней сложности матричной структурной схемы видно, что представление даже не очень сложных многомерных систем управления в виде схем III уровня, то есть в виде классических структурных схем, приводит к громоздкому графическому представлению, не отражающему характерных связей и функциональных элементов системы.

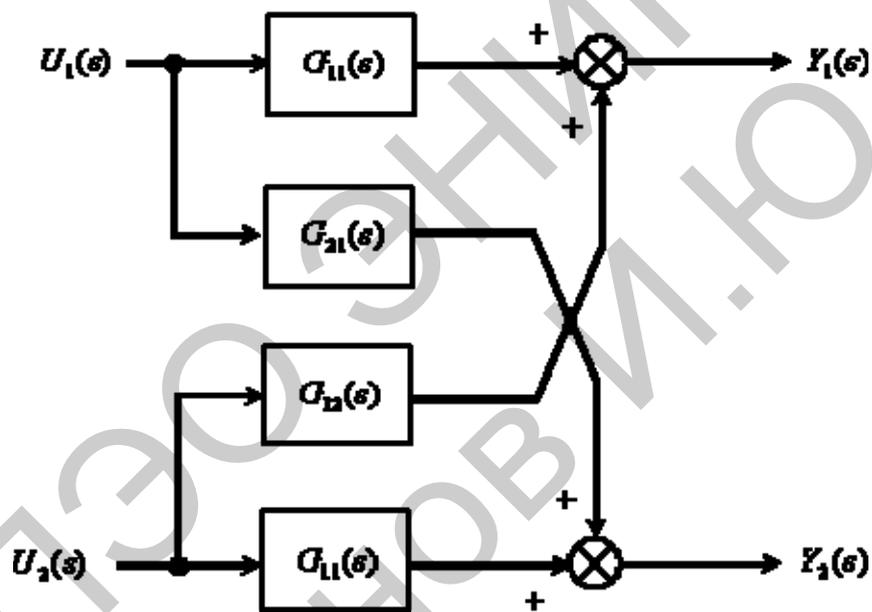


Рис. 3.9. Структурная схема (3-ий уровень)

#### 3.2.2. Передаточные матрицы

Передаточные или эквивалентные матрицы относятся к моделям типа "вход-выход" и представляют собой матрицы, связывающие вход и выход многомерной системы. На рис. 3.10 показана многомерная система [28].

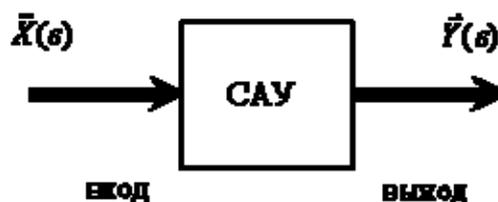


Рис. 3.10. Вид многомерной системы

Матричное операторное уравнение описывающее систему имеет вид

$$\vec{Y}(s) = H_{\text{экв}}(s)\vec{X}(s),$$

где  $H_{\text{экв}}(s)$  – передаточная или матрица системы, компонентами, которой будут передаточные функции, связывающие компоненты векторов входа и выхода системы.

Аналогами эквивалентных матриц в одномерных системах являются передаточные функции, связывающие вход и выход объекта или системы. Матрицы  $H(s)$ ,  $G(s)$ ,  $W(s)$  из рассмотренной выше матричной структурной схемы (см. рис. 3.7) являются, по сути, передаточными матрицами многомерных функциональных элементов системы.

Эквивалентные матрицы многомерных систем могут быть получены двумя способами.

1. Определяются передаточные функции, связывающие соответствующие входы и выходы системы. То есть матрица определяется по ее компонентам. Компоненты определяются известными способами в соответствии с принципом суперпозиции.

2. Передаточные матрицы определяются в результате эквивалентных преобразований матричных структурных схем или по матричным операторным уравнениям. Преобразование матричных структурных схем осуществляется в соответствии с правилами эквивалентных преобразований обычных структурных схем, необходимо лишь учитывать специфику операций с векторами и матрицами (не соблюдение коммутативного закона, замена деления умножением на обратную матрицу, понятие единичной и нулевой матрицы и т. п.).

В качестве примера найдем передаточную матрицу, связывающую вход и выход рассматриваемой выше системы (рис. 3.7), при этом полагаем в соответствии с принципом суперпозиции, что сигнал возмущения отсутствует ( $\vec{F}(s) = 0$ ). Тогда структурная схема примет вид, показанный на рис. 3.11.

Определим  $H_{\text{экв}}(s)$ , удовлетворяющую следующему матричному операторному уравнению

$$\vec{Y}(s) = H_{\text{экв}}(s)\vec{Y}_0(s).$$

Для определения  $H_{\text{экв}}(s)$  воспользуемся преобразованием матричных операторных уравнений, которые могут быть записаны по матричной структурной схеме.

$$\vec{Y}(s) = G(s)\vec{U}(s), \quad (3.2.3)$$

$$\vec{U}(s) = H(s)\vec{E}(s), \quad (3.2.4)$$

$$\vec{Y}(s) = H_{\text{экв}}(s)\vec{X}(s), \quad (3.2.5)$$

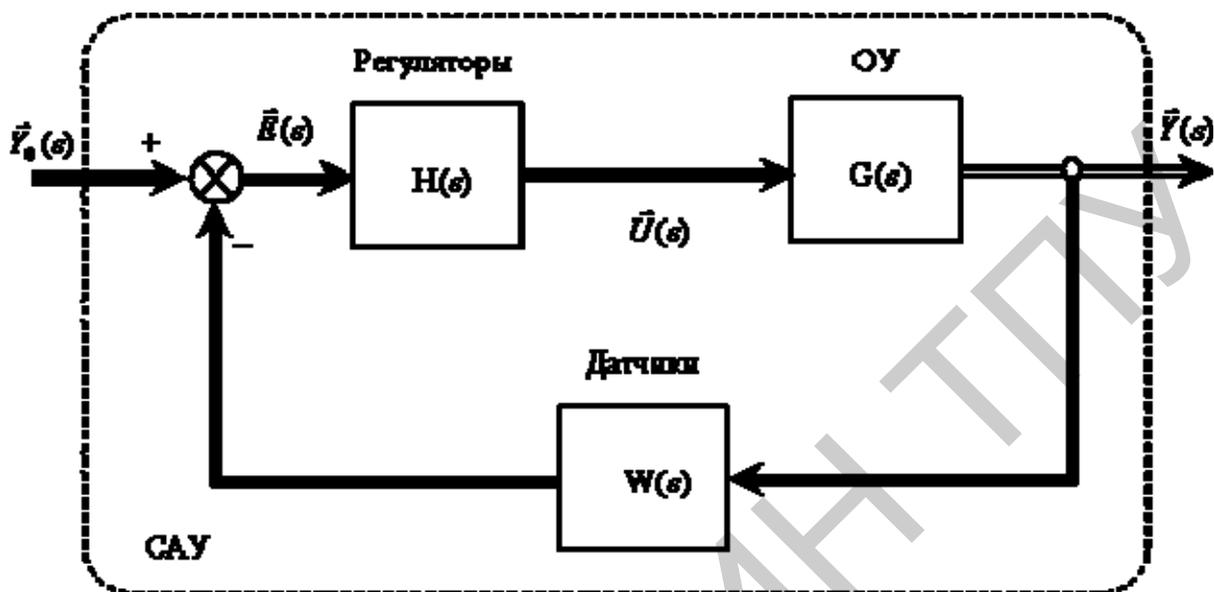


Рис. 3.11. Структурная схема системы без возмущений

Подставим  $\vec{U}(s)$  из (3.2.4) в (3.2.3)

$$\vec{Y}(s) = G(s)H(s)\vec{E}(s). \quad (3.2.6)$$

Подставим  $\vec{E}(s)$  из (3.2.5) в (3.2.6)

$$\vec{Y}(s) = G(s)H(s)(\vec{Y}_0(s) - W(s)\vec{Y}(s)). \quad (3.2.7)$$

Раскроем скобки в правой части (3.2.7)

$$\vec{Y}(s) = G(s)H(s)\vec{Y}_0(s) - G(s)H(s)W(s)\vec{Y}(s). \quad (3.2.8)$$

Перенесем слагаемое с  $\vec{Y}(s)$  из правой части выражения (3.2.8) в левую часть

$$\vec{Y}(s) + G(s)H(s)W(s)\vec{Y}(s) = G(s)H(s)\vec{Y}_0(s). \quad (3.2.9)$$

Вынесем  $\vec{Y}(s)$  за скобку вправо

$$(I + G(s)H(s)W(s))\vec{Y}(s) = G(s)H(s)\vec{Y}_0(s). \quad (3.2.10)$$

где  $I$  - единичная матрица  $n$ -го порядка.

Если  $\det(I + G(s)H(s)W(s)) \neq 0$ , тогда матрица  $(I + G(s)H(s)W(s))$  является невырожденной и от нее может быть получена обратная матрица

$$(I + G(s)H(s)W(s))^{-1} \quad (3.2.11)$$

Умножим левую и правую части уравнения (3.2.10) справа на обратную матрицу (3.2.11), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} (I + G(s)H(s)W(s))^{-1}(I + G(s)H(s)W(s))\vec{Y}(s) &= (I + G(s)H(s)W(s))^{-1}G(s)H(s)\vec{Y}_0(s), \\ I\vec{Y}(s) &= (I + G(s)H(s)W(s))^{-1}G(s)H(s)\vec{Y}_0(s), \\ \vec{Y}(s) &= (I + G(s)H(s)W(s))^{-1}G(s)H(s)\vec{Y}_0(s), \end{aligned}$$

Тогда получаем окончательно

$$\vec{Y}(s) = (I + G(s)H(s)W(s))^{-1}G(s)H(s)\vec{Y}_0(s) = H_{\text{экв}}(s)\vec{Y}_0(s).$$

Следовательно

$$H_{\text{экв}}(s) = (I + G(s)H(s)W(s))^{-1}G(s)H(s). \quad (3.2.12)$$

По выражению (3.2.12), зная выражения матриц элементов системы, всегда можно определить передаточную матрицу системы в целом.

### 3.3. Математические модели в пространстве состояний

Основу математической модели многомерной системы во временной области составляет векторно-матричная форма записи системы дифференциальных уравнений первого порядка, которая носит название уравнения состояния. Уравнение состояния имеет вид

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = A\vec{X}(t) + B\vec{U}(t), \quad (3.3.1)$$

где  $\vec{X}(t)$  — вектор состояния размерности  $n$ , который включает в себя переменные объекта, однозначно определяющие его состояние,

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \dots \\ X_n(t) \end{bmatrix},$$

$\vec{U}(t)$  — вектор управления или входа размерности  $m$ , который включает в себя сигналы, действующие на систему извне,

$$\vec{U}(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_m(t) \end{bmatrix},$$

$A, B$  — матрицы параметров, включающие в себя параметры системы, размерность которых соответственно  $(n \times n), (n \times m)$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

$n$  — порядок системы.

Иногда уравнение состояния (3.3.1) записывают в развернутой форме

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \dots \\ X_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \dots \\ X_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_m(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнение состояния и структура полностью описывают объект управления, вектор состояния содержит переменные объекта, которые однозначно описывают его состояние.

Но в реальных системах многие компоненты не могут быть измерены или наблюдаемы с помощью датчиков. Эту ситуацию разрешает введение дополнительного уравнения выхода, которое определяет те переменные, которые доступны для наблюдения (на выходе системы)

$$\vec{Y}(t) = C \vec{X}(t), \quad (3.3.2)$$

где  $\vec{Y}(t)$  — вектор выхода размерности  $p$ , который содержит переменные объекта, доступные для наблюдения,

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \dots \\ Y_p(t) \end{bmatrix},$$

$C$  — матрица параметров размерности  $(p \times n)$ ,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix}$$

в системах управления  $p \leq n$ .

Уравнение выхода (3.3.2) также можно записать в развернутой форме

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \dots \\ Y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \dots \\ X_n(t) \end{bmatrix}$$

Графически уравнение состояния и уравнение выхода могут быть представлены в виде, показанном на рис. 3.12.

Символ интегрирования на схеме означает покомпонентное интегрирование векторной величины.

В общем виде пространство состояний  $n$  — мерной системы задается радиус-вектором  $\vec{X}(t)$  в координатной системе, оси которой определяются компонентами вектора состояния, как это показано на рис. 3.13.

Рассмотрим несколько примеров представления процессов в пространстве состояний.

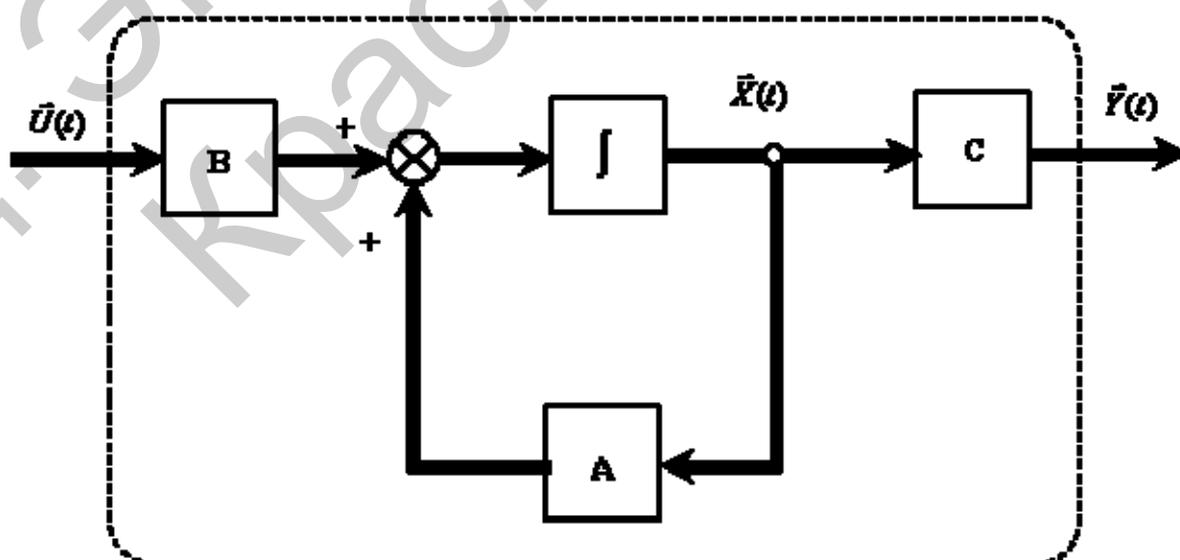


Рис. 3.12. Уравнение состояния системы

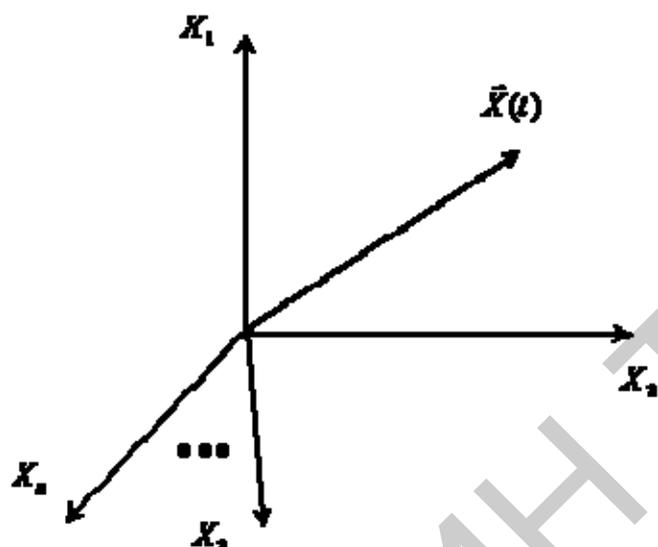


Рис. 3.13. Оси координат состояний системы

### Пример

Рассмотрим в пространстве состояний процесс пуска электродвигателя ( $M$ ) постоянного тока с постоянными магнитами, принципиальная схема установки показана на рис. 3.14. Пуск производится подключением с помощью контакта ( $K$ ) напряжения  $U(t)$ , при этом в цепи будет протекать ток  $I(t)$  и двигатель будет вращать вал с нагрузкой ( $H$ ) со скоростью  $\Omega(t)$ , ток и скорость определяются с помощью датчиков соответственно ДТ ДС [26].

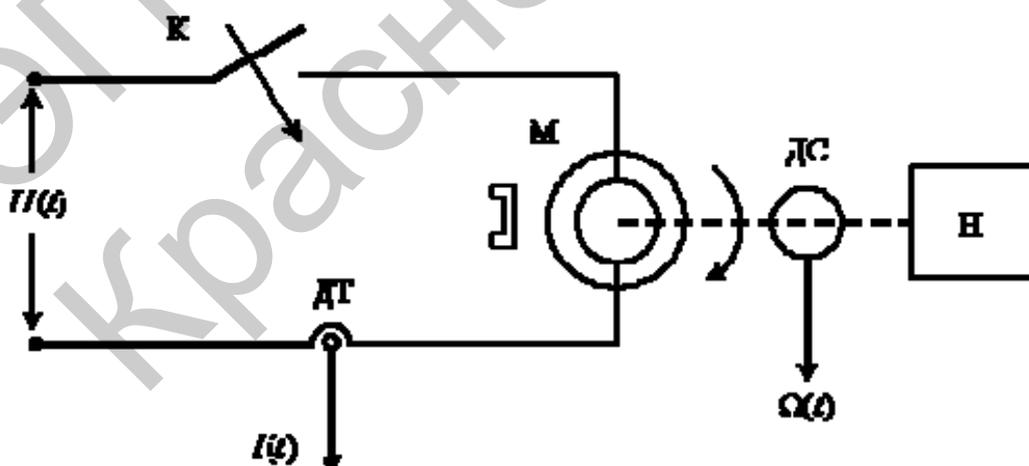


Рис. 3.14. Структурная схема системы пуска электродвигателя

Состояние двигателя в данном случае однозначно определяется током и скоростью двигателя, поэтому вектор состояния задаем в следующем виде

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \Omega(t) \\ I(t) \end{bmatrix}.$$

Вектор входа будет иметь только одну компоненту  $U(t)$ . Графики изменения во времени переменных двигателя показаны на рис. 3.15.

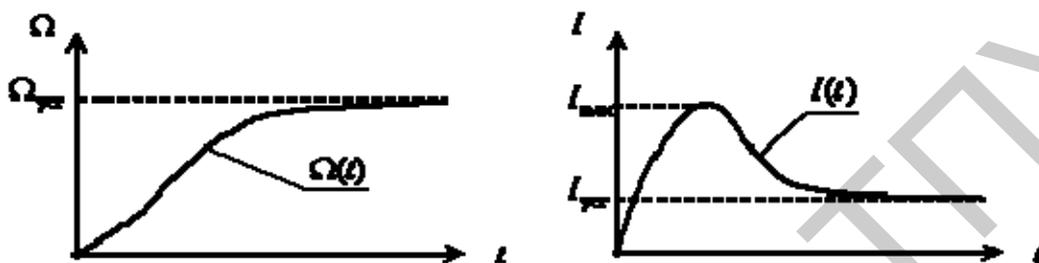


Рис. 3.15. Переходные процессы двигателя

На рис. 3.15, 3.16 введены обозначения:  $\Omega_{уст}$ ,  $I_{уст}$  — установившиеся значения соответственно скорости и тока,  $I_{max}$  — максимальное значение тока при пуске.

Сформируем двумерное пространство состояний двигателя с траекторией движения конца вектора состояния в процессе пуска, для этого откладываем проекции вектора, то есть ток и скорость, в одинаковые моменты времени.

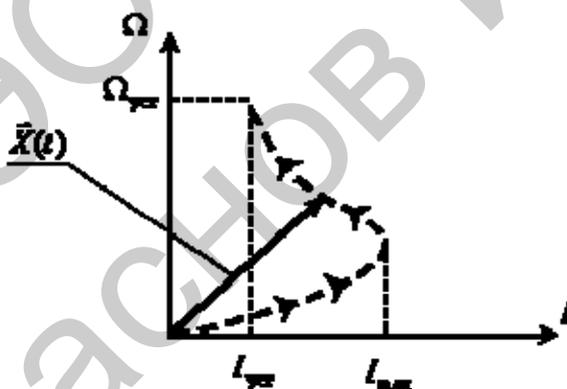


Рис. 3.16. График зависимости частоты вращения от тока

### Пример

Рассмотрим в пространстве состояний процесс позиционирования, то есть перемещения вала в заданное положение  $\varphi_{уст}$ , в автоматизированном электроприводе, показанном на рис. 3.17 [13].

В этом случае состояние двигателя и всей системы электропривода в целом определяют три переменные двигателя ток  $I(t)$ , скорость  $\Omega(t)$  и положение вала  $\varphi(t)$

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \Omega(t) \\ I(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$$

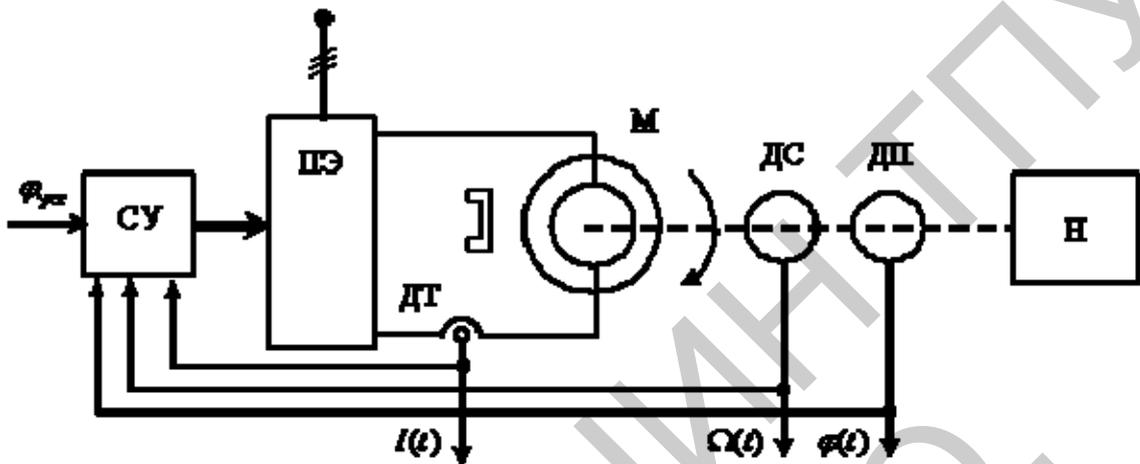


Рис. 3.17. Структурная схема электропривода

Графики изменения во времени переменных двигателя показаны на рис. 3.18.

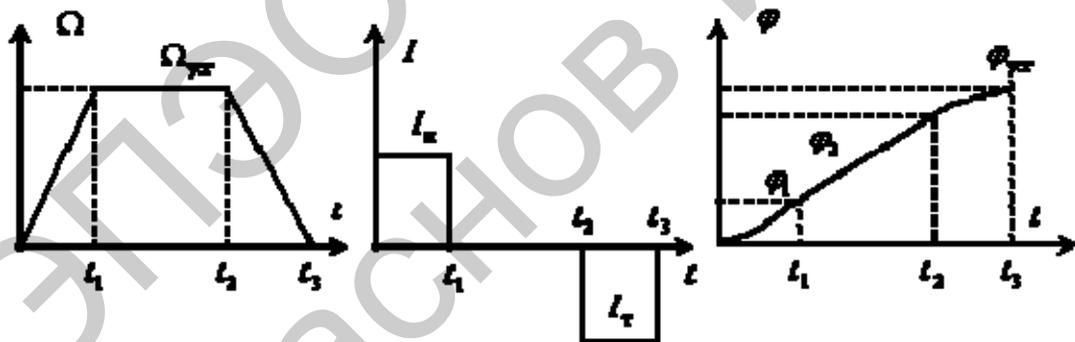


Рис. 3.18. Изменение переменных состояния привода

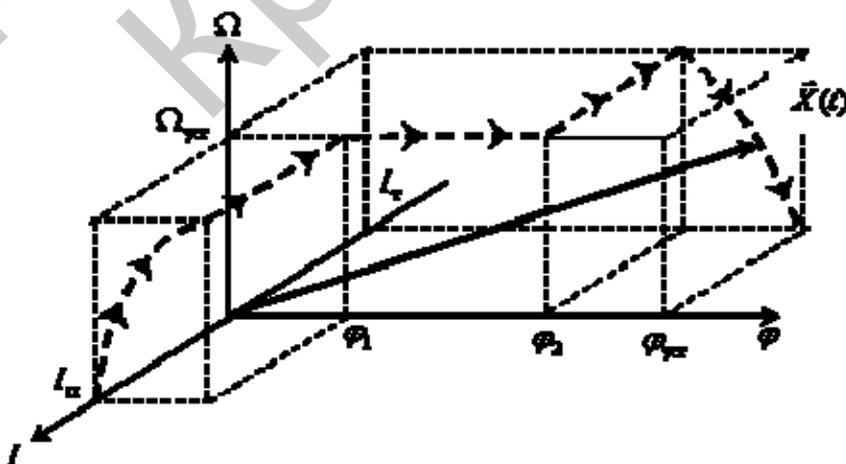


Рис. 3.19. Оси координат и значения переменных состояния

Сформируем трехмерное пространство состояний электропривода с траекторией движения конца вектора состояния в процессе позиционирования по временным графикам изменения компонент вектора состояния (рис. 3.19).

Теперь рассмотрим получения математической модели многомерного объекта в виде уравнений состояния на примере двухмассовой упругой механической системы, показанной на рис. 3.20.

Двухмассовая упругая система представляет собой механическую систему, состоящую из двух вращающихся масс с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$ . К каждой массе прикладывается извне момент ( $M_1$  и  $M_2$ ), массы соединены валом, обладающим упругими свойствами ( $c$ ), массы вращаются со скоростями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

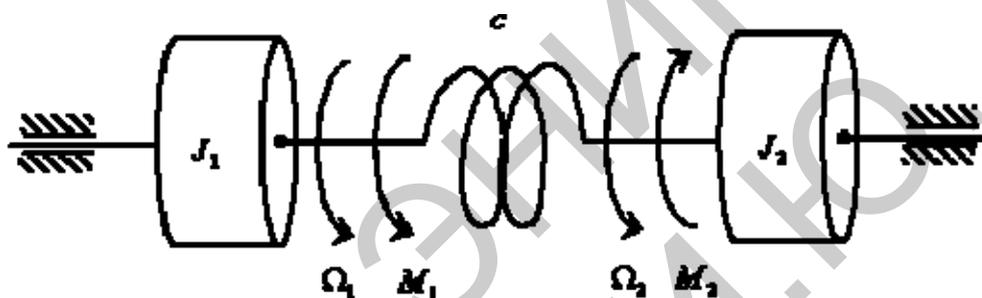


Рис. 3.20. Схема двухмассовой механической системы

Система дифференциальных уравнений, описывающих систему, имеет вид

$$\begin{cases} M_y = c\Delta\varphi = c(\varphi_1 - \varphi_2) = c \int_0^t (\Omega_1 - \Omega_2) dt, \\ M_1 - M_y = J_1 \frac{d\Omega_1}{dt}, \\ M_y - M_2 = J_2 \frac{d\Omega_2}{dt}. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

где  $\Delta\varphi$  – разность углов положения первой  $\varphi_1$  и второй  $\varphi_2$  масс.

Так как уравнения состояния (3.3.1) и выхода (3.3.2) имеют единый для всех линейных систем вид, поэтому, чтобы определить их для конкретной системы мы должны выполнить следующее:

- задать векторы состояния и входа, определив тем самым порядок системы и порядок вектора входа,
- определить матрицы параметров уравнений.

Состояние системы определяется тремя переменными  $\Omega_1, \Omega_2, M_y$ , поэтому задаем вектор состояния следующего вида

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ M_y \end{bmatrix}.$$

Порядок системы  $n = 3$ . Заметим, что положение переменных в векторе состояния можно задать произвольно, но в дальнейшем изменять его нельзя. Вектор входа определяется сигналами, действующими на систему извне, а это – моменты  $M_1$  и  $M_2$ , поэтому вектор входа имеет вид

$$\vec{U}(t) = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Порядок вектора выхода  $m = 2$ . Здесь также порядок следования компонент может быть произвольным, но фиксированным в дальнейших операциях.

Преобразуем уравнения системы (3.3.3) к форме Коши

$$\begin{cases} \frac{dM_y}{dt} = c(\Omega_1 - \Omega_2), \\ \frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1}M_1 - \frac{1}{J_1}M_y, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{1}{J_2}M_y - \frac{1}{J_2}M_2. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Нам требуется получить уравнение состояния для системы третьего порядка с вектором входа второго порядка, посмотрим, что представляет собой это уравнение в общем виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{bmatrix}.$$

Раскрывая матричные скобки, получим

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_1(t) = a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t) + a_{13}X_3(t) + b_{11}U_1(t) + b_{12}U_2(t), \\ \frac{d}{dt} X_2(t) = a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t) + a_{23}X_3(t) + b_{21}U_1(t) + b_{22}U_2(t), \\ \frac{d}{dt} X_3(t) = a_{31}X_1(t) + a_{32}X_2(t) + a_{33}X_3(t) + b_{31}U_1(t) + b_{32}U_2(t). \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Теперь можно сформулировать задачу следующего этапа. Необходимо привести систему (3.3.4) в виду (3.3.5), для этого следует:

- расположить уравнения в порядке следования компонент в векторе состояния,
- расположить слагаемые в правых частях слева на право в порядке следования сначала компонент вектора состояния, затем вектора входа,
- отсутствующие слагаемые заменяем произведениями переменных на нулевые коэффициенты.

В результате коэффициенты в правых частях при соответствующих компонентах векторов состояния и входа будут компонентами искомых матриц уравнения состояния.

Преобразуем систему (3.3.4) к виду (3.3.5), в результате получим

$$\begin{cases} \frac{d\Omega_1(t)}{dt} = 0 \cdot \Omega_1(t) + 0 \cdot \Omega_2(t) - \frac{1}{J_1} M_y(t) + \frac{1}{J_1} M_1(t) + 0 \cdot M_2(t), \\ \frac{d\Omega_2(t)}{dt} = 0 \cdot \Omega_1(t) + 0 \cdot \Omega_2(t) + \frac{1}{J_2} M_y(t) + 0 \cdot M_1(t) - \frac{1}{J_1} M_2(t), \\ \frac{dM_y}{dt} = c \Omega_1(t) - c \Omega_2(t) + 0 \cdot M_y(t) + 0 \cdot M_1(t) + 0 \cdot M_2(t). \end{cases} \quad (3.3.6)$$

В результате по коэффициентам слагаемых в правых частях (3.3.7) получим искомые матрицы параметров уравнения состояния

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{J_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} \\ c & c & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение состояния в развернутом виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{J_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} \\ c & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix}.$$

Вид уравнения выхода определяется тем, какие компоненты вектора состояния доступны для наблюдения. В электромеханических системах электроприводов, эквивалентом которых является упругая двухмассовая система, возможны три варианта датчиковых систем (полагаем датчики безынерционными, а коэффициенты преобразования датчиков единичными):

1. Датчики скорости установлены на обеих массах. Тогда имеем следующее уравнение выхода

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix}.$$

То есть имеем  $p = 2$ :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Датчик скорости установлен на первой массе, уравнение выхода

$$Y(t) = \Omega_1(t) = C \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix}.$$

$$p = 1, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Датчик скорости установлен на второй массе, уравнение выхода

$$p = 1, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Y(t) = \Omega_2(t) = C \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix}.$$

### 3.4. Взаимосвязь видов математических моделей многомерных систем

Выше были рассмотрены два вида моделей многомерной системы. Установим связь между этими двумя видами. Так как исходной базой для математических моделей являются дифференциальные уравнения, то логичным будет определить связь уравнений состояния с передаточными матрицами САУ. Для этого применим преобразование Лапласа к уравнениям состояния и выхода

$$\frac{d}{dt} \vec{X}(t) = A\vec{X}(t) + B\vec{U}(t), \quad (3.4.1)$$

$$\vec{Y}(t) = C \vec{X}(t). \quad (3.4.2)$$

При нулевых начальных условиях, заменим оригиналы переменных изображениями по Лапласу и получим систему векторно-матричных операторных уравнений

$$\begin{cases} s\vec{X}(s) = A\vec{X}(s) + B\vec{U}(s), \\ \vec{Y}(s) = C \vec{X}(s). \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Определим связь между вектором входа и векторами состояния и выхода. Из первого уравнения системы (3.4.3) имеем

$$s\vec{X}(s) - A\vec{X}(s) = B\vec{U}(s),$$

$$(sI - A)\vec{X}(s) = B\vec{U}(s).$$

и если матрица  $(sI - A)$  не вырожденная, то есть  $\det(sI - A) \neq 0$ , получим

$$\vec{X}(s) = (sI - A)^{-1} B\vec{U}(s) = H_{\text{экв1}}(s)\vec{U}(s). \quad (3.4.4)$$

Откуда следует, что

$$H_{\text{экв1}} = (sI - A)^{-1} B. \quad (3.4.5)$$

Подставив (3.4.4) в (3.4.3), получаем

$$\vec{Y}(s) = C\vec{X}(s) = C(sI - A)^{-1} B\vec{U}(s) = H_{\text{экв2}}(s)\vec{U}(s).$$

В результате получаем

$$H_{\text{экв2}}(s) = C(sI - A)^{-1} B. \quad (3.4.6)$$

Вспомним, что компонентами эквивалентных матриц являются передаточные функции системы. Следовательно, выражения (3.4.5) и (3.4.6) представляют собой универсальные формулы для вычисления всех необходимых для анализа передаточных функций многомерной системы, по которым могут быть получены структурные схемы и частотные характеристики.

Заметим, что каждый элемент эквивалентных матриц (передаточных функций) имеет, по определению обратной матрицы, множитель

$$\frac{1}{\det(sI + A)}$$

То есть полином  $\det(sI + A)$  является общим знаменателем для всех передаточных функций, а уравнение

$$\det(sI + A) = 0 \quad (3.4.7)$$

является характеристическим уравнением системы.

Таким образом, мы не только получили связь между математическими моделями во временной и частотной областях, но и универсальные выражения для определения передаточных функций и характеристических уравнений любых линейных объектов или систем управления. Исходными параметрами для выражений (3.4.5), (3.4.6) и (3.4.7) являются матрицы параметров уравнений состояния и выхода. Выполнить преобразования (3.4.5), (3.4.6) и (3.4.7) можно с помощью компьютера, имеющего программу символьной математики, например, такую, как *MathCad*, разработанную *MathWorks*. В системах второго и третьего порядка эти преобразования можно производить и вручную.

Рассмотрим несколько примеров получения и преобразования моделей.

### Пример

Рассмотрим объект, принципиальная электрическая схема которого показана на рис. 3.21 [14].

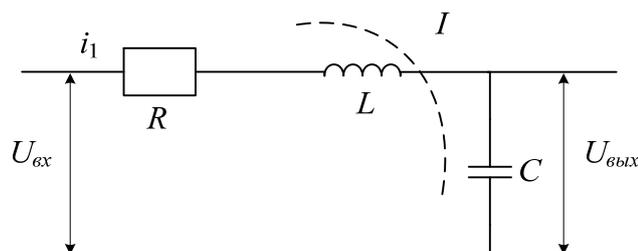


Рис. 3.21. Схема RLC-цепи

Выполним для этого объекта следующие задачи:

1. Получить уравнение состояния.
2. Определить характеристическое уравнение объекта.
3. Определить передаточную матрицу объекта.

### Получение уравнения состояния

Запишем дифференциальные уравнения, описывающие процессы в схеме

$$\begin{cases} U_{ex} = RI + L \frac{dI}{dt} + U_{\text{вблх}}, \\ U_{\text{вблх}} = \frac{1}{C} \int Idt, \Rightarrow \frac{dU_{\text{вблх}}}{dt} = \frac{1}{C} I. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Зададим векторы состояния и входа:

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} I \\ U_{\text{вблх}} \end{bmatrix}, \vec{U}(t) = U_{ex}.$$

Получаем, что  $n = 2$ ,  $m = 1$ . Запишем уравнение состояния в развернутой форме для нашего случая:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I \\ U_{\text{вблх}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ U_{\text{вблх}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} U_{ex}. \quad (3.4.9)$$

Раскроем в (3.4.9) матричные скобки:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} I = a_{11} I + a_{12} U_{\text{вблх}} + b_1 U_{ex}, \\ \frac{d}{dt} U_{\text{вблх}} = a_{21} I + a_{22} U_{\text{вблх}} + b_2 U_{ex}. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Приведем систему уравнений (3.4.8) к виду (3.4.10), используя при отсутствии переменной в правых частях нулевые коэффициенты:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} I = -\frac{R}{L} I - \frac{1}{L} U_{\text{вблх}} + \frac{1}{L} U_{ex}, \\ \frac{d}{dt} U_{\text{вблх}} = \frac{1}{C} I + 0 \cdot U_{\text{вблх}} + 0 \cdot U_{ex}. \end{cases}$$

Теперь известны все компоненты матриц параметров, и можно записать уравнение состояния

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I \\ U_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ U_{\text{вых}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U_{\text{вх}}.$$

Следовательно, матрицы параметров имеют следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4.11)$$

### **Определение характеристического уравнения объекта**

Характеристическое уравнение системы определим по матрицам параметров уравнения состояния (3.4.11), используя выражение (3.4.7)

$$\varphi_A(s) = \det(sI - A) = 0. \quad (3.4.12)$$

Подставив в (3.4.12) выражения для матрицы параметров  $A$  и единичной матрицы  $I$ , получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \varphi_A(s) &= \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s \end{bmatrix} = \\ &= s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

### **Определение передаточной матрицы объекта**

Определим эквивалентную матрицу передаточных функций, которая связывает векторы состояния и управления по выражению (3.4.5), которое для нашего случая имеет вид:

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ U_{\text{вых}}(s) \end{bmatrix} = H_{\text{экв}}(s)U_{\text{вх}}(s) = (sI - A)^{-1}BU_{\text{вх}}. \quad (3.4.14)$$

Матрица  $(sI - A)$  может быть определена из (3.4.13)

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s \end{bmatrix}.$$

Определим обратную матрицу, помня о том,  $adj$  – адьюнкт исходной матрицы представляет собой транспонированную матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы, а алгебраические дополнения определяются для каждого элемента исходной матрицы по следующему выражению

$$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \det M_{ij},$$

где  $M_{ij}$  – минор исходной матрицы, полученный вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot adj \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$H_{экс}(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{s}{L} \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \\ \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, получаем передаточные функции объекта

$$H_1(s) = \frac{I(s)}{U_{ex}(s)} = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}, \quad H_2(s) = \frac{U_{вых}(s)}{U_{ex}(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

### Пример

Электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения (с постоянными магнитами) как объект управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} J \frac{d\Omega}{dt} = cI - M_n, \\ U = RI + L \frac{dI}{dt} + c\Omega, \end{cases} \quad (3.4.15)$$

где  $U$  – напряжение, подаваемое на двигатель,  $\Omega, I$  – скорость и ток двигателя,  $J, R, L, c$  – параметры двигателя, соответственно момент инерции, сопротивление и индуктивность обмотки якоря, конструктивный коэффициент.

### ***Получение уравнения состояния***

Зададим векторы состояния и входа:

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \Omega \\ I \end{bmatrix}, \quad \vec{U}(t) = \begin{bmatrix} U \\ M_n \end{bmatrix}.$$

Получаем, что  $n = 2, m = 2$ . Запишем уравнение состояния в развернутой форме для нашего случая:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_n \end{bmatrix}. \quad (3.4.16)$$

Раскроем в (3.4.16) матричные скобки:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Omega = a_{11} \Omega + a_{12} I + b_{11} U + b_{12} M_n, \\ \frac{d}{dt} I = a_{21} \Omega + a_{22} I + b_{21} U + b_{22} M_n. \end{cases} \quad (3.4.17)$$

Приведем систему уравнений (3.4.15) к виду (3.4.17), используя при отсутствии переменной в правых частях нулевые коэффициенты:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Omega = 0 \cdot \Omega + \frac{c}{J} I + 0 \cdot U - \frac{1}{J} M_n, \\ \frac{d}{dt} I = -\frac{c}{L} \Omega - \frac{R}{L} I + \frac{1}{L} U + 0 \cdot M_n. \end{cases}$$

Теперь известны все компоненты матриц параметров, и можно записать уравнение состояния в развернутой форме

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Omega \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M_n \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрицы параметров имеют следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4.18)$$

### **Определение характеристического уравнения объекта**

Характеристическое уравнение системы определим по матрицам параметров уравнения состояния (3.4.18), используя выражение (3.4.7)

$$\varphi_A(s) = \det(sI - A) = 0. \quad (3.4.19)$$

Подставив в (3.4.19) выражения для матрицы параметров  $A$  и единичной матрицы  $I$ , получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \varphi_A(s) &= \det \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \right) = \\ & \det \begin{bmatrix} s & -\frac{c}{J} \\ \frac{c}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ} = 0. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

### **Определение передаточной матрицы объекта**

Определим эквивалентную матрицу передаточных функций, которая связывает векторы состояния и управления по выражению (3.4.5), которое для нашего случая имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \Omega(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = H_{\text{экв}}(s) \begin{bmatrix} U(s) \\ M_H(s) \end{bmatrix} = (sI - A)^{-1} B \begin{bmatrix} U(s) \\ M_H(s) \end{bmatrix}. \quad (3.4.21)$$

Матрица  $(sI - A)$  может быть определена из (3.4.20)

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -\frac{c}{J} \\ \frac{c}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}.$$

Определим обратную матрицу

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \cdot \text{adj} \begin{bmatrix} s & -\frac{c}{J} \\ \frac{c}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & s \end{bmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$H_{\text{экв}}(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{c}{LJ} & -\frac{1}{J}(s + \frac{R}{L}) \\ \frac{1}{L}s & \frac{c}{LJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{c}{LJ}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} & \frac{-\frac{1}{J}(s + \frac{R}{L})}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \\ \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} & \frac{\frac{c}{LJ}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, получаем передаточные функции объекта

$$H_{11}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{c}{LJ}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}},$$

$$H_{12}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_n(s)} = \frac{-\frac{1}{J}(s + \frac{R}{L})}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}},$$

$$H_{21}(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}},$$

$$H_{22}(s) = \frac{I(s)}{M_n(s)} = \frac{\frac{c}{LJ}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}}.$$

### Контрольные вопросы для закрепления изученного материала

1. Какую систему автоматического управления или объект управления называют многомерными?
2. Какие многомерные системы называют линейными стационарными?
3. Перечислите компоненты уравнения состояния (векторы и матрицы), их размерности.
4. Поясните смысл уравнения выхода, перечислите компоненты и их размерности.
5. Какие модели многомерных объектов или систем управления относят к моделям в частотной области?
6. Дайте определение компонентам передаточной матрицы объекта управления.
7. Какими способами могут быть определены передаточные матрицы многомерных объектов.
8. Поясните, как связаны между собой модели во временной и частотной области?
9. Как определить по уравнению состояния характеристическое уравнение?
10. Как определить по уравнению состояния матрицу передаточных функций системы?
11. В каких формах могут быть представлены матричные структурные схемы?

### Список рекомендуемой литературы, имеющейся в НТБ ТПУ

1. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем: учебник / В. П. Тарасик. — Минск: Дизайн ПРО, 1997. — 640 с.
2. Андрейченко К. П. Математическое моделирование динамических систем: учебное пособие / К. П. Андрейченко, Д. К. Андрейченко.

3. Зарубин В. С. Математическое моделирование в технике: учебник для вузов / В. С. Зарубин; Под ред. В. С. Зарубина; А. П. Крищенко. — 2-е изд., стер. — М.: Изд-во МГТУ, 2003. — 495 с.
4. Математическое моделирование: методы описания и исследования сложных систем / Академия Наук СССР, Отделение информатики, вычислительной техники и автоматизации; под ред. А. А. Самарского; Н. Н. Моисеева; А. А. Петрова. — М.: Наука, 1989. — 271 с.

Доц. ЭПЭО ЭНИНТТНУ.  
Краснов И.Ю.

## 4. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ

Под устойчивостью системы понимается способность ее возвращаться к состоянию установившегося равновесия после снятия возмущения, нарушившего это равновесие. Неустойчивая система непрерывно удаляется от равновесного состояния или совершает вокруг него колебания с возрастающей амплитудой [18].

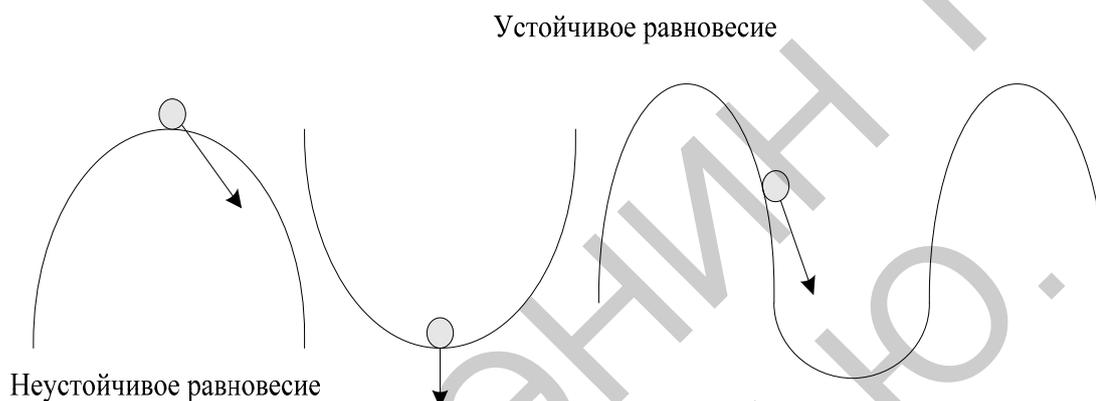


Рис. 4.1. Наглядное представление устойчивости

Устойчивость линейной системы определяется не характером возмущения, а структурой самой системы (рис. 4.1). Говорят, что система устойчива "в малом", если определен факт наличия устойчивости, но не определены ее границы. Система устойчива "в большом", когда определены границы устойчивости и то, что реальные отклонения не выходят за эти границы.

В соответствии с классическим методом решение дифференциального уравнения ищется в виде:

$$y(t) = y_{одн}(t) + y_ч(t).$$

Здесь  $y_{одн}(t)$  - общее решение однородного дифференциального уравнения, то есть уравнения с нулевой правой частью:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Физически это означает, что все внешние воздействия сняты и система абсолютно свободна, ее движения определяются лишь собственной структурой. Поэтому решение данного уравнения называется свободной составляющей общего решения.  $y_ч(t)$  - частное решение неоднородного дифференциального уравнения, под которым понимается уравнение с ненулевой правой частью. Физически это означает, что к системе приложено

внешнее воздействие  $u(t)$ . Поэтому вторая составляющая общего решения называется вынужденный. Она определяет вынужденный установившийся режим работы системы после окончания переходного процесса.

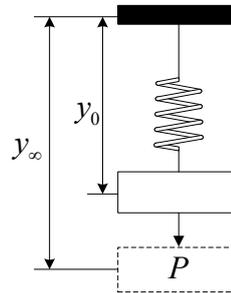


Рис. 4.2. Упругая пружина

Можно провести аналогию между САУ и пружиной, колебания которой описываются аналогичным дифференциальным уравнением (рис. 5.2). Оттянем пружину, а затем отпустим, предоставив ее самой себе. Пружина будет колебаться в соответствии со свободной составляющей решения уравнения, то есть характер колебаний будет определяться только структурой самой пружины. Если в момент времени  $t = 0$  подвесить к пружине груз, то на свободные колебания наложится внешняя сила  $P$ . После затухания колебаний, описываемых только свободной составляющей общего решения, система перейдет в новый установившийся режим, характеризуемый вынужденной составляющей  $y_{одн} = y(t \rightarrow \infty)$ . Если внешнее воздействие само будет изменяться по синусоидальному закону  $P = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , то после затухания переходного процесса система будет совершать вынужденные колебания с той же частотой, что и вынуждающая сила, то есть  $y_{одн} = y_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$ .

Каждая составляющая общего решения уравнения динамики ищется отдельно. Вынужденная составляющая ищется на основе решения уравнения статики для данной системы для времени  $t \rightarrow \infty$ . Свободная составляющая представляет собой сумму из  $n$  отдельных составляющих:  $y_{св}(t) = \sum_{i=1}^n A_i p^{-p_i t}$ , где  $p_i$  корни характеристического уравнения  $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$ . Корни могут быть либо вещественными  $p_i = a_i$ , либо попарно комплексно сопряженными  $p_i = a_i \pm j\omega_i$ . Постоянные интегрирования  $A_i$  определяются исходя из начальных и конечных условий, подставляя в общее решение значения  $u$ ,  $y$  и их производные в моменты времени  $t = 0$  и  $t \rightarrow \infty$ .

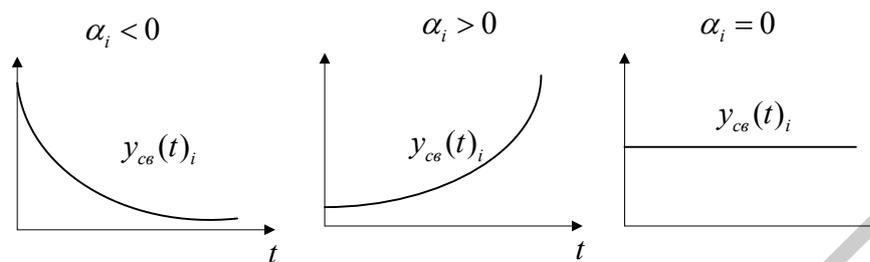


Рис. 4.3. Виды монотонных процессов

Каждому отрицательному вещественному корню соответствует экспоненциально затухающая во времени составляющая  $y_{cb}(t)_i$ , каждому положительному - экспоненциально расходящаяся, каждому нулевому корню соответствует  $y_{cb}(t)_i = const$  (рис. 4.3). Пара комплексно сопряженных корней с отрицательной вещественной частью определяет затухающие колебания с частотой  $\omega_i$ , при положительной вещественной части - расходящиеся колебания, при нулевой - незатухающие (рис. 4.4).

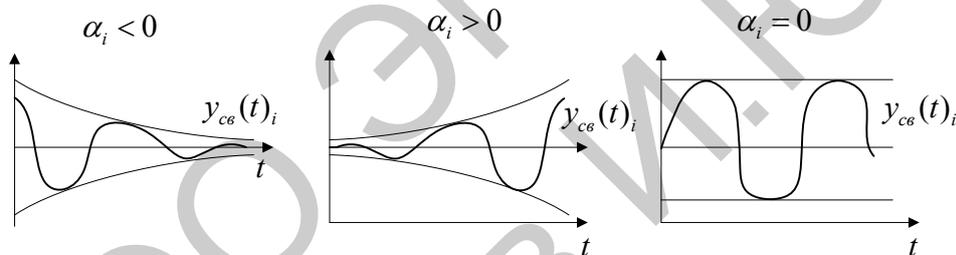


Рис. 4.4. Виду колебательных процессов

Так как после снятия возмущения  $y_{одн}(t) = 0$ , то устойчивость системы определяется только характером свободной составляющей  $y_{cb}(t)$ . Поэтому условие устойчивости систем по Ляпунову формулируется так: в устойчивой системе свободная составляющая решения уравнения динамики, записанному в отклонениях, должна стремиться к нулю, то есть затухать.

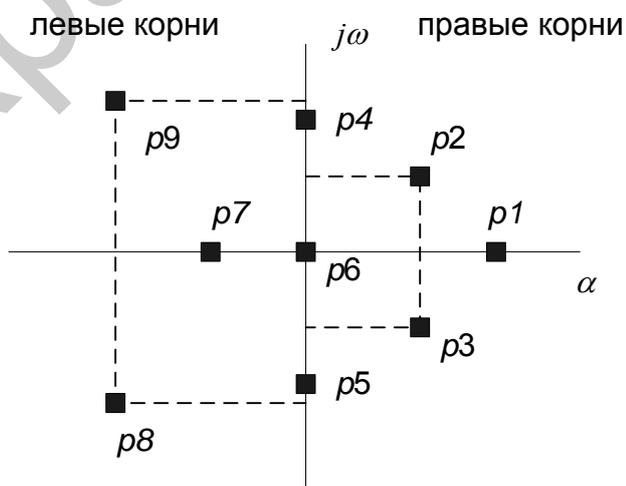


Рис. 4.5. Распределение корней на комплексной плоскости

Исходя из расположения на комплексной плоскости корни с отрицательными вещественными частями называются левыми, с положительными - правыми (рис. 4.5).

Поэтому условие устойчивости линейной САУ можно сформулировать следующим образом: для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми. Если хотя бы один корень правый, то система неустойчива. Если один из корней равен нулю (в системах, где  $a_n = 0$ ), а остальные левые, то система находится на границе аperiodической устойчивости. Если равны нулю вещественные части одной или нескольких пар комплексно сопряженных корней, то система находится на границе колебательной устойчивости.

Правила, позволяющие судить о знаках корней характеристического уравнения без его решения, называются критериями устойчивости. Их можно разделить на алгебраические (основаны на составлении по данному характеристическому уравнению по определенным правилам алгебраических выражений, по которым можно судить об устойчивости САУ) и частотные (основаны на исследовании частотных характеристик).

### ***Необходимое условие устойчивости***

Характеристическое уравнение системы с помощью теоремы Виета может быть записано в виде

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = a_0 (p - p_1) \dots (p - p_n) = 0,$$

где  $p_1, \dots, p_n$  - корни этого уравнения. Если система устойчива, значит все корни левые, то есть вещественные части всех корней отрицательны, что можно записать как  $a_j = -|a_j| < 0$ . Подставим их в уравнение:

$$a_0 (p + |a_1|)(p + |a_2| - j\omega_2)(p + |a_2| + j\omega_2) \dots = 0.$$

Перемножая комплексно сопряженные выражения, получим:

$$a_0 (p + |a_1|)((p + |a_2|)^2 + (\omega_2)^2) \dots = 0.$$

После раскрытия скобок должно получиться выражение  $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ .

Так как в скобках нет ни одного отрицательного числа, то ни один из коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  не будет отрицательным. Поэтому необходимым условием устойчивости САУ является положительность всех коэффициентов

характеристического уравнения:  $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0$ . В дальнейшем будем рассматривать только уравнения, где  $a_0 > 0$ . В противном случае уравнение домножается на -1.

Рассмотренное условие является необходимым, но не достаточным условием. Необходимые и достаточные условия дают алгебраические критерии Рауса и Гурвица.

#### 4.1.1. Критерий Рауса

Раус предложил критерий устойчивости САУ в виде алгоритма, по которому заполняется специальная таблица с использованием коэффициентов характеристического уравнения:

- 1) в первой строке записываются коэффициенты уравнения с четными индексами в порядке их возрастания;
- 2) во второй строке - с нечетными;
- 3) остальные элементы таблицы определяется по формуле:  $c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i \cdot c_{k+1,i-1}$ , где  $r_i = c_{1,i-2} / c_{1,i-1}$ ,  $i \geq 3$  - номер строки,  $k$  - номер столбца.
- 4) Число строк таблицы Рауса на единицу больше порядка характеристического уравнения.

						Таблица 2
						Таблица Раусса
$r_i$	$i \backslash k$	1	2	3	4	
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$	...	
-	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$	...	
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	3	$c_{13} = c_{21} - r_3 c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3 c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3 c_{42}$	...	
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	4	$c_{14} = c_{22} - r_3 c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_3 c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - r_3 c_{43}$	...	
...	...	...	...	...	...	

Критерий Рауса: для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots$  были положительными. Если это не выполняется, то система неустойчива, а количество правых корней равно числу перемен знака в первом столбце.

Достоинство - критерий прост в использовании независимо от порядка характеристического уравнения. Он удобен для использования на ЭВМ. Его недостаток - малая наглядность, трудно судить о степени устойчивости системы, на сколько далеко отстоит она от границы устойчивости.

### 4.1.2. Критерий Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Гурвиц предложил другой критерий устойчивости. Из коэффициентов характеристического уравнения строится определитель Гурвица  $\Delta$  по алгоритму:

- 1) по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$ ;
- 2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;
- 3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше  $n$  ставятся нули.

Критерий Гурвица: для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все  $n$  диагональных миноров определителя Гурвица были положительны. Эти миноры называются определителями Гурвица.

Рассмотрим примеры применения критерия Гурвица:

- 1)  $n = 1 \Rightarrow$  уравнение динамики:  $a_0 p + a_1 = 0$ .

Определитель Гурвица:  $\Delta = \Delta_1 = a_1 > 0$  при  $a_0 > 0$ , то есть условие устойчивости:  $a_0 > 0, a_1 > 0$ ;

- 2)  $n = 2 \Rightarrow$  уравнение динамики:  $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$ .

Определители Гурвица:  $\Delta_1 = a_1 > 0, D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = a_1 a_2 > 0$ , так как  $a_3 = 0$ , то есть условие устойчивости:  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$ ;

- 3)  $n = 3 \Rightarrow$  уравнение динамики:  $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$ .

Определители Гурвица:

$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0$ , условие устойчивости:  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым и достаточным условием устойчивости САУ. При  $n > 2$  появляются дополнительные условия.

Критерий Гурвица применяют при  $n \leq 4$ . При больших порядках возрастает число определителей и процесс становится трудоемким. Имеется ряд модификаций данного критерия, расширяющие его возможности.

Недостаток критерия Гурвица - малая наглядность. Достоинство - удобен для реализации на ЭВМ. Его часто используют для определения влияния

одного из параметров САУ на ее устойчивость. Так равенство нулю главного определителя  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$  говорит о том, что система находится на границе устойчивости. При этом либо  $a_n = 0$  - при выполнении остальных условий система находится на границе аperiodической устойчивости, либо предпоследний минор  $\Delta_{n-1} = 0$  - при положительности всех остальных миноров система находится на границе колебательной устойчивости.

Параметры САУ определяют значения коэффициентов уравнения динамики, следовательно изменение любого параметра  $K_i$  влияет на значение определителя  $\Delta_{n-1}$ .

Исследуя это влияние можно найти, при каком значении  $K_i$  определитель  $\Delta_{n-1}$  станет равен нулю, а потом - отрицательным (рис. 5.6).

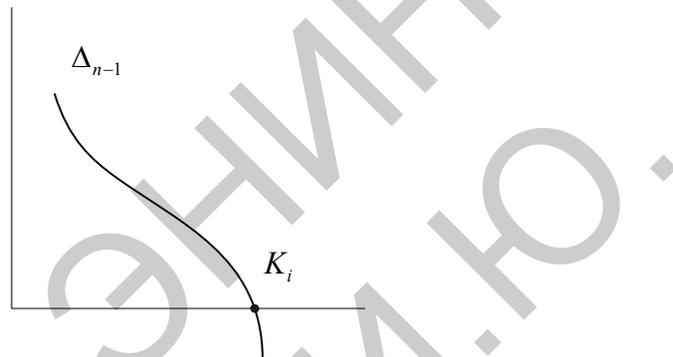


Рис. 5.6. Зависимость устойчивости от параметра системы

Это и будет предельное значение исследуемого параметра, после которого система становится неустойчивой.

### 4.1.3. Критерий устойчивости Михайлова

Так как для устойчивой САУ число правых корней  $m = 0$ , то угол поворота вектора  $D(j\omega)$  составит

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = n \frac{\pi}{2}.$$

То есть САУ будет устойчива, если вектор  $D(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  повернется на угол  $n\pi/2$ .

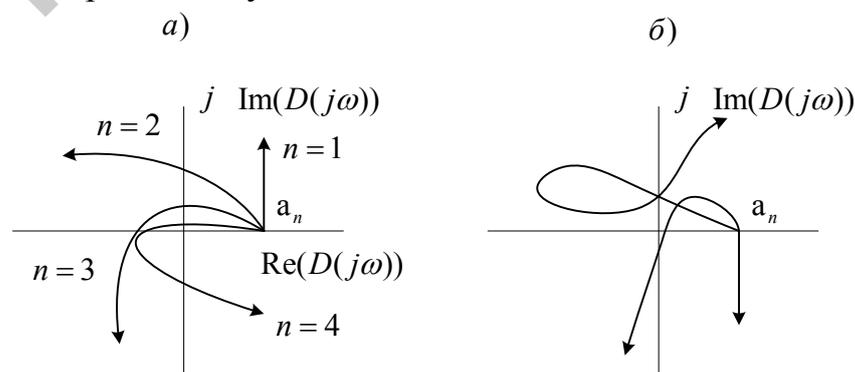


Рис. 4.8. Прохождение кривой квадрантов комплексной плоскости

При этом конец вектора опишет кривую, называемую годографом Михайлова. Она начинается на положительной полуоси, так как  $D(0) = a_n$ , и последовательно проходит против часовой стрелки  $n$  квадрантов комплексной плоскости, уход в бесконечность в  $n$ -ом квадранте (рис. 4.8а).

Если это правило нарушается (например, число проходимых кривой квадрантов не равно  $n$ , или нарушается последовательность прохождения квадрантов (рис. 4.8б)), то такая САУ неустойчива - это и есть необходимое и достаточное условие критерия Михайлова.

Достоинства. Этот критерий удобен своей наглядностью. Так, если кривая проходит вблизи начала координат, то САУ находится вблизи границы устойчивости и наоборот. Этим критерием удобно пользоваться, если известно уравнение замкнутой САУ.

Для облегчения построения годографа Михайлова выражение для  $D(j\omega)$  представляют суммой вещественной и мнимой составляющих:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = \operatorname{Re}(D(j\omega)) + j \operatorname{Im}(D(j\omega)),$$

где

$$\operatorname{Re}(D(j\omega)) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 + \dots,$$

$$\operatorname{Im}(D(j\omega)) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 + \dots$$

Меняя  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  по этим формулам находят координаты точек годографа, которые соединяют плавной линией.

### Контрольные вопросы для закрепления изученного материала

1. Какой вид имеют корни характеристического уравнения?
2. Что понимают под устойчивостью САУ в малом и в большом?
3. Чем отличаются правые и левые корни характеристического уравнения?
4. Что такое граница устойчивости?
5. Что такое критерии устойчивости?
6. Сформулируйте критерий Рауса.
7. Сформулируйте критерий Гурвица.
8. Что называется частотными критериями устойчивости САУ?
9. Сформулируйте критерий устойчивости Михайлова.
10. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста.
11. В чем особенность использования критерия Найквиста для астатических САУ?

### Список рекомендуемой литературы, имеющейся в НТБ ТПУ

1. Торбунов С. С. Математическое моделирование и параметрическая устойчивость динамических систем с детерминированными

- параметрами: Монография / С. С. Торбунов. — Томск: Изд-во ТПУ, 2002. — 230 с.
2. Воротников В. И. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения: учебное пособие / В. И. Воротников, В. В. Румянцев. — М.: Научный мир, 2001. — 320 с.
  3. Теория автоматического управления: учебник / Под ред. Ю. М. Соломенцева. — 4-е изд., стер. — М.: Высшая школа, 2003. — 268 с.

Доц. ЭПЭО ЭНИН ТПУ.  
Краснов И.Ю.

## 5. КАЧЕСТВО САУ

### 5.1. Методы оценки качества систем управления

К процессам систем автоматического управления предъявляются три основные группы требований:

1. Требования по точности в установившихся режимах.
2. Требования к устойчивости.
3. Требования к качеству переходных процессов.

Кроме этих к системам на практике так же предъявляются требования технико-экономического характера, связанные со спецификой объекта управления или технологического процесса.

В нашем курсе мы будем рассматривать только требования к качеству переходных процессов, динамики систем, как вопрос не только тесно связанный с математическим моделированием систем, но и связанный с использованием разнообразного математического аппарата. Требования по точности в установившихся режимах и требования к устойчивости будут рассмотрены в дисциплинах "Теория автоматического управления", "Системы управления электроприводами", "Автоматизация типовых производственных процессов и промышленных установок".

В промышленных установках с системами автоматического управления можно выделить две большие группы:

1. Установки, в которых время переходного процесса пренебрежимо мало по сравнению с установившимся режимом. В этих случаях динамические режимы не оказывают существенного влияния ни на качество продукции, ни на производительность оборудования, на пример, насосы, вентиляторы, транспортеры и т. д.

2. Установки, в которых время переходного процесса соизмеримо с временем установившихся режимов, или, такие, в которых отклонение регулируемой переменной в динамике существенно влияет на качество продукции, на пример, станки, роботы, следящие системы и т. д.

Устойчивость, то есть способность к затуханию переходных процессов, является необходимым, но далеко не достаточным условием практической пригодности систем. Этот критерий позволяет очень грубо оценить переходные процессы. Рассмотрим, как выглядят переходные характеристики для трех основных режимов с точки зрения устойчивости.

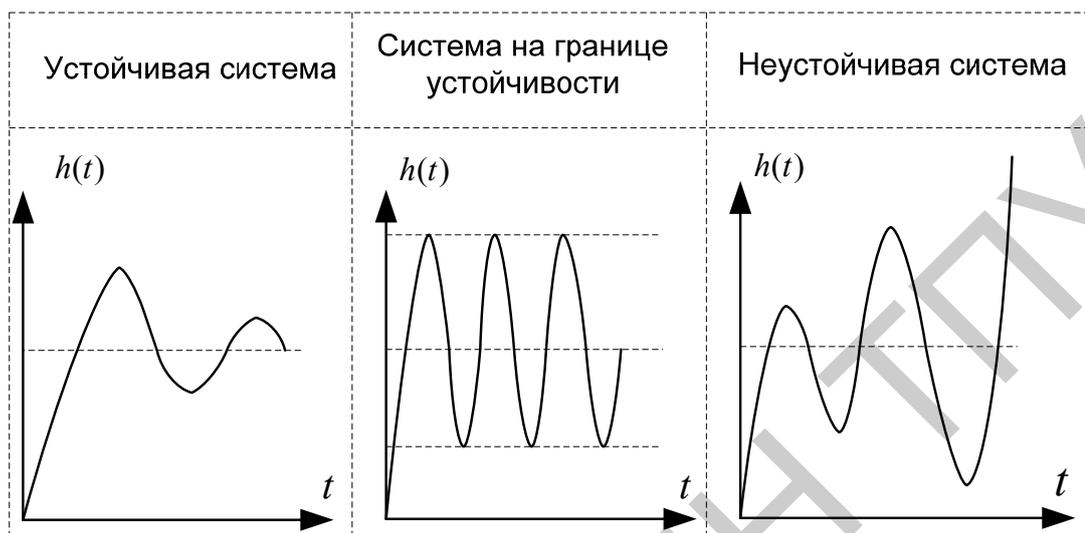


Рис. 5.1. Виды процессов

Используя, как показано на рис. 5.1, критерий устойчивости по виду переходной характеристики (переходного процесса), мы можем сказать, что система устойчива, если переходный процесс затухает. Однако система может быть устойчивой, но ее переходные процессы, в зависимости от изменения параметров, будут сильно различаться, как это показано на рис. 5.2.



Рис. 5.2. Виды устойчивых процессов

Мы видим, что эти процессы существенно отличаются по виду, имеют разные частоту колебаний, время завершения, амплитуду отклонения от заданной величины. В связи с этим возникает необходимость сравнения, оценки устойчивых временных характеристик систем.

Следует отметить, что специалистов интересует не только переходные процессы при изменении управляющих воздействий, но и переходные процессы при изменении возмущающих воздействий.

Таким образом, важным понятием для систем управления является понятие качества переходных процессов, то есть становится важным сам характер протекания процессов, особенно такие факторы, как длительность, колебательность и динамическое отклонение регулируемой переменной от заданной величины.

Для оценки качества переходных процессов требуются характеристики, критерии или показатели качества, которые могут быть выражены численно.

Критерии качества имеют следующие области применения:

1. Сравнительный анализ систем автоматического управления при изменении параметров объекта управления, или при сравнении систем разного вида для одного и того же объекта управления.

2. Синтез, выбор параметров систем автоматического управления, обеспечивающих заданные критерии качества переходных процессов, требованиям технического задания на разработку системы.

Известно, что переходный процесс в системе управления зависит не только от свойств самой системы, но и от характера (вида) входного воздействия. Поэтому поведение системы при оценке качества переходных процессов рассматривают при типовых внешних воздействиях. В качестве таких типовых воздействий чаще всего используют:

- единичную ступенчатую функцию, режу, линейно нарастающий сигнал,
- воздействие гармонической функцией.

Оценки качества делятся на две группы:

- Прямые показатели качества переходных процессов. Они характеризуют непосредственно сам переходный процесс, реакцию системы на типовое воздействие, чаще всего, на единичную ступенчатую функцию.

- Косвенные показатели (критерии) качества. Они оценивают качество переходных процессов по другим характеристикам системы, таким как частотные характеристики, характер и расположение корней характеристического уравнения (полюсов передаточной функции), интегралы временной функции переходного процесса.

### ***5.1.1. Оценка качества переходного процесса при воздействии ступенчатой функции***

Прямые оценки качества определяют по графику переходной характеристики системы управления  $h(t)$ , то есть при воздействии на систему единичной ступенчатой функции

$$1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases}$$

и при нулевых начальных условиях, или по кривой переходного процесса регулируемой переменной  $X(t)$  при воздействии на вход ступенчатой функции с амплитудой, соответствующей номинальному или иному

определенному значению регулируемой переменной.

- Рассмотрим систему управления с единичной отрицательной обратной связью, структурная схема которой показана на рис. 5.3.

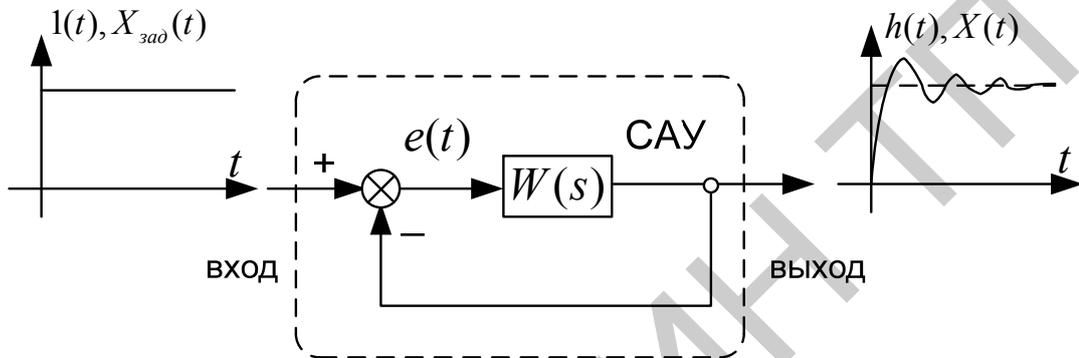


Рис. 5.3. Структурная схема системы с единичным входным воздействием

На вход системы поступает ступенчатый сигнал, на выходе можно наблюдать реакцию системы, кроме того, в качестве переходного процесса может рассматриваться изменение ошибки регулирования

$$e(t) = X_{зад}(t) - X(t).$$

Примерные графики изменения сигнала на выходе и ошибки регулирования показаны соответственно на рис. 5.4 и 5.5.

Рассмотрим прямые оценки качества переходных процессов, показанные на рис. 5.4 и 5.5:

1.  $t_p$  – минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью

$$|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta, \Delta = const.$$

$\Delta$  предварительно задается в процентах от установившегося значения  $h_{уст}$ , где нет определенных требований – принимают  $\Delta = 5\%$ .

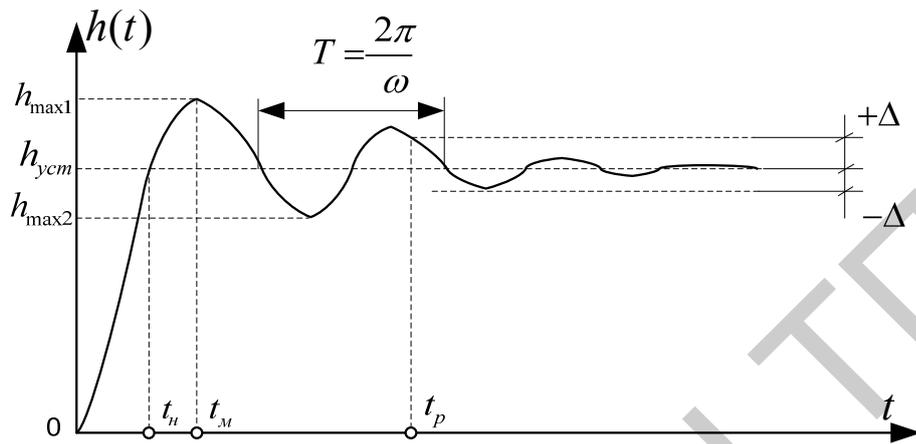


Рис. 5.4. Вид выходного процесса

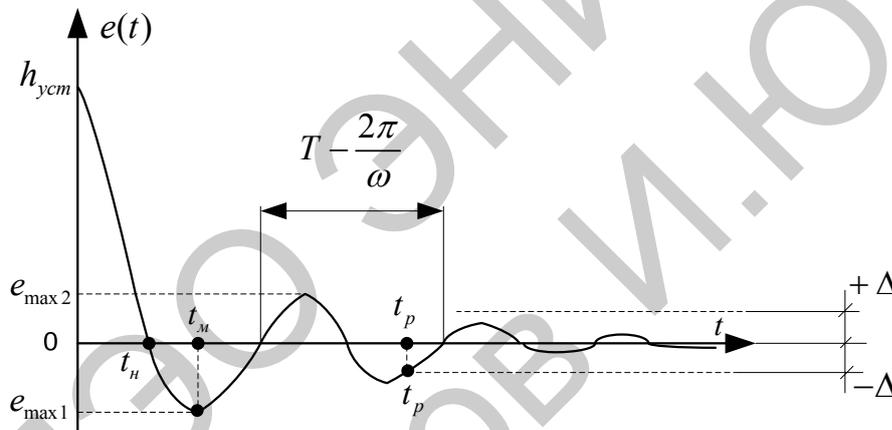


Рис. 5.5. Вид ошибки рассогласования управляемой переменной.

2.  $\sigma$  – перегулирование – максимальное отклонение от установившегося значения, выраженное в относительных единицах или процентах

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{ycm}}{h_{ycm}} 100\% \text{ или } \sigma = \frac{|e_{\max}|}{e(0)} 100\% = \frac{|e_{\max}|}{h_{ycm}} 100\%.$$

Обычно требования по перегулированию составляют  $\sigma \approx 10 \div 30\%$ , иногда к качеству процессов может быть предъявлено требование  $\sigma = 0\%$ , на пример в системах позиционирования манипуляторов промышленных роботов.

3.  $\omega$  - частота колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где  $T$  – период колебаний для колебательных процессов.

4.  $N$  – это число полных колебаний, которое имеет  $h(t)$  или  $e(t)$  за время регулирования  $t_p$ , обычные требования по числу колебаний  $N \approx 1 \div 2$ , в некоторых системах накладывают ограничение на колебательность  $N = 0$ , на пример, в системах с существенным люфтом в механических передачах.

5.  $t_M$  – время достижения первого максимума.

6.  $t_H$  – время нарастания переходного процесса, время от начала переходного процесса до момента первого пересечения графиком линии установившегося значения.

7.  $k$  – декремент затухания, равный отношению модулей двух смежных переуправлений

$$k = \frac{|h_{\max 1} - h_{\text{уст}}|}{|h_{\max 2} - h_{\text{уст}}|}$$

Перечисленные выше показатели могут быть дополнены и другими, если этого требуют специфические технические задания на разработку или исследование систем управления.

Устойчивые переходные процессы, возникающие при ступенчатом воздействии, принято делить на три группы:

1. Монотонные процессы. Такие процессы, где первая производная выходной величины по времени не меняет знак.

2. Аперiodические процессы. Здесь производная меняет знак не более одного раза.

3. Колебательные процессы. Производная меняет свой знак периодически

На рис. 5.6 показан примерный вид колебательного, аперiodического и монотонного процессов.

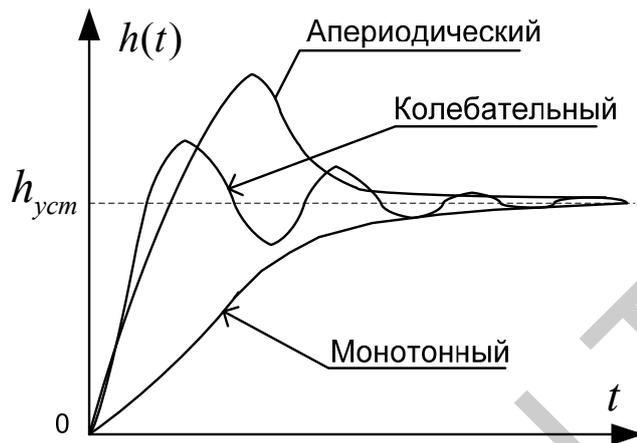


Рис. 5.6. Типы процессов

Требования к качеству переходного процесса могут быть представлены графически. Они сводятся к требованию, чтобы отклонение регулируемой величины при ступенчатом воздействии не выходило за границы некоторой области, изображенной на диаграмме качества процесса. Простейшая диаграмма показана на рис. 5.7.

Уточненная диаграмма, в которой накладываются ограничения на скорость нарастания сигнала, показана на рис. 5.8. На уточненной диаграмме  $t_z$  обозначает время запаздывания, равное отрезку времени, заключенному между моментами приложения скачкообразного сигнала ( $t = 0$ ) и моментом времени, при котором выходная величина достигает половины установившегося значения.

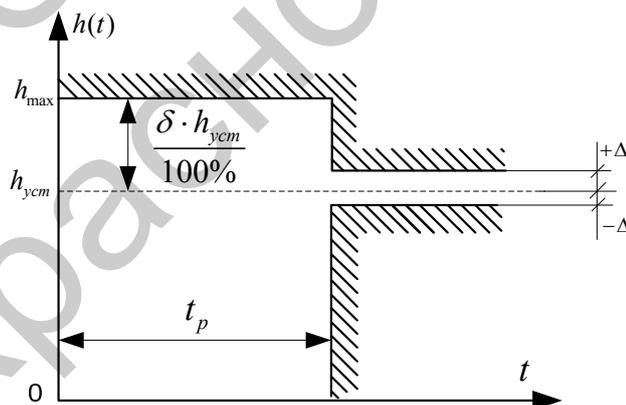


Рис. 5.7. Области качества

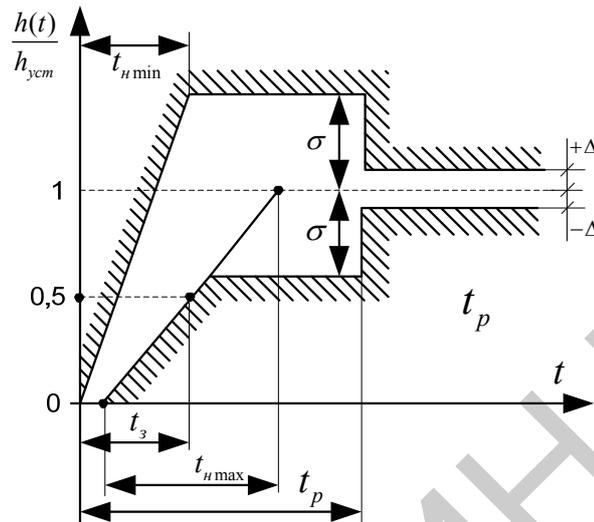


Рис. 5.8. Диаграмма качества процесса

### 5.1.2. Оценка качества при гармонических воздействиях

Качество переходных процессов в системах и объектах при гармонических воздействиях оценивают по частотным характеристикам, снятым экспериментально или рассчитанным по параметрам математической модели. В этом случае получают частотные критерии качества переходных процессов, которые относят к косвенным критериям.

Частотные критерии определяют по одной из частотных характеристик: амплитудно-фазовой, амплитудной, вещественной или логарифмической амплитудной. Рассмотрим в качестве основы определение косвенных показателей качества по амплитудной частотной характеристике (АЧХ) систем.

1.  $M$  – показатель колебательности, определяемый как отношение максимального значения АЧХ к ее значению при  $\omega = 0$

$$M = \frac{|W(j\omega)|_{\max}}{|W(j\omega)|_0}$$

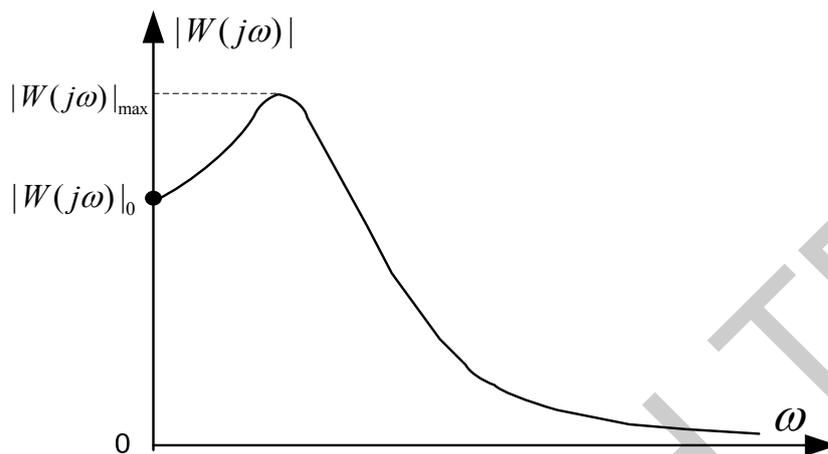


Рис. 5.9. Вид АЧХ

Показатель колебательности характеризует склонность систем или объектов к колебательности. Чем выше показатель колебательности, тем более колебательна система, то есть менее качественна.

При  $M < 0$  переходная характеристика системы неколебательная, а АЧХ системы имеет примерный вид, показанный на рис. 5.10.

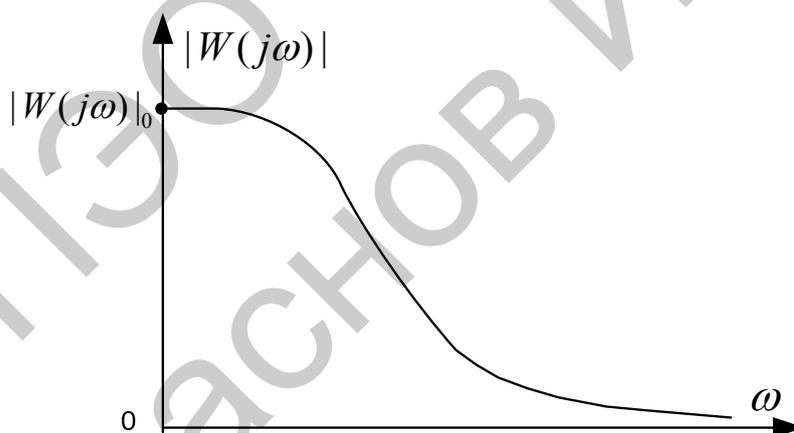


Рис. 5.10. Вид АЧХ

Если  $M \rightarrow \infty$ , то говорят о незатухающих колебаниях переходной характеристики, а АЧХ системы имеет вид, показанный на рис. 5.11.

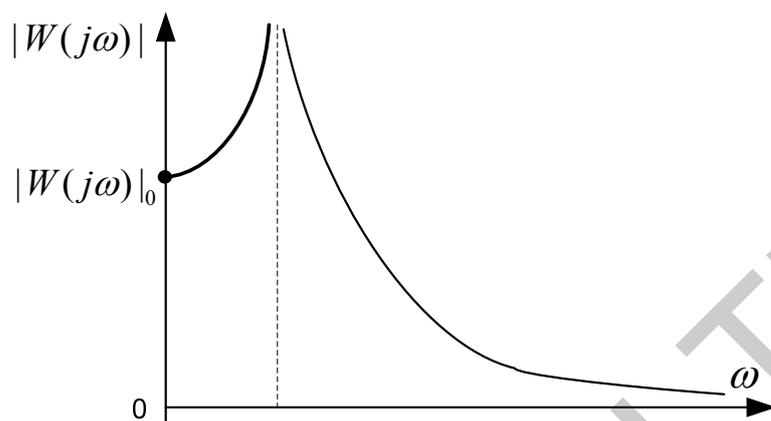


Рис. 5.11. Вид АЧХ

Считается допустимым, если  $1.1 \leq M \leq 1.5$ .

2.  $\omega_p$  – резонансная частота системы или объекта, при которой АЧХ имеет максимум.

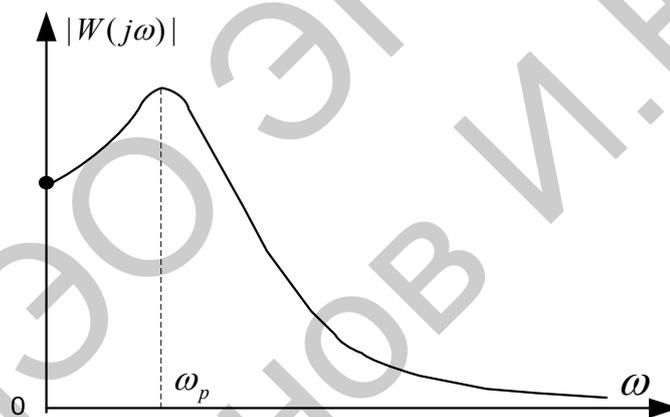


Рис. 5.12. Вид АЧХ

При  $\omega_p$  гармонические сигналы проходят через систему с наибольшим усилением (рис. 5.12).

3. Полоса пропускания системы управления – это интервал частот от  $\omega=0$  до частоты  $\omega_0$ , в котором выполняется условие (рис. 5.13)

$$|W(j\omega)| \geq 0.707|W(j\omega)|_0.$$

Полоса пропускания систем не должна быть очень широкой, чтобы не проходили высокочастотные помехи. С другой стороны, чем выше частота сигналов, которые пропускает система, тем выше ее быстродействие.

В электроприводах полосу пропускания задают в герцах, для систем управления скоростью вращения двигателя полоса пропускания, в зависимости от типа двигателя и преобразователя энергии, находится в диапазоне

$$f_0 = 50 \div 150 \text{ Гц}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi},$$

при этом накладывается дополнительное ограничение о том, что фазочастотная характеристика в полосе пропускания не должна опускаться ниже  $-90^\circ$ .

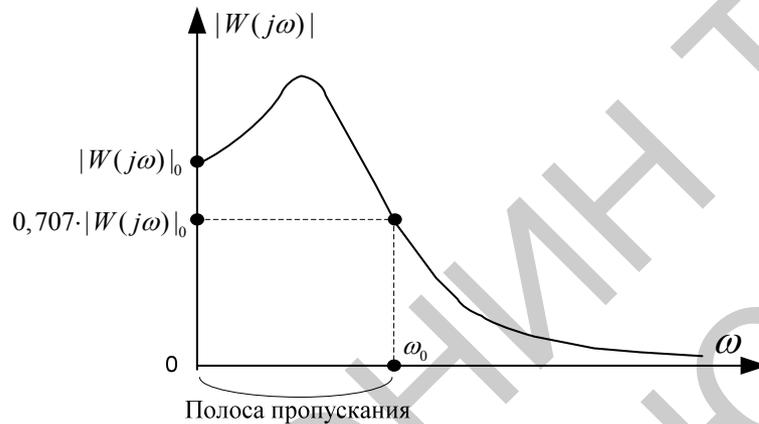


Рис. 5.13. Определение полосы пропускания

4.  $\omega_{cp}$  – частота среза, при которой АЧХ системы принимает значение, равное единице

$|W(j\omega)|_{\omega=\omega_{cp}} = 1$ , как это показано на рис. 5.14.

$\omega_{cp}$  косвенно характеризует длительность переходного процесса, так же как и  $\omega_0$ . Время регулирования системы обратно пропорционально частоте среза

$$t_p \cong (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}},$$

если переходный процесс имеет  $1 \div 2$  колебания, то можно установить связь между частотой среза и временем достижения первого максимума

$$t_M \cong \frac{2\pi}{\omega_{cp}}.$$

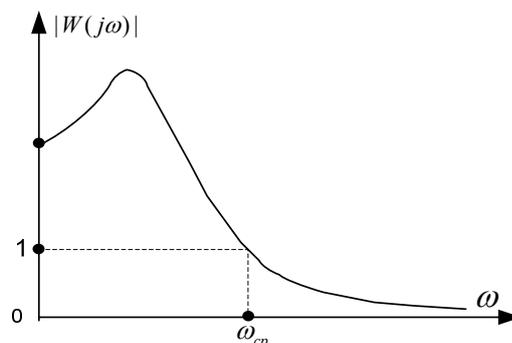


Рис. 5.14. Определение частоты среза

Полоса среза, как характеристика быстродействия систем получила

распространение, так как она легко определяется на логарифмических частотных характеристиках (см. рис. 5.15).

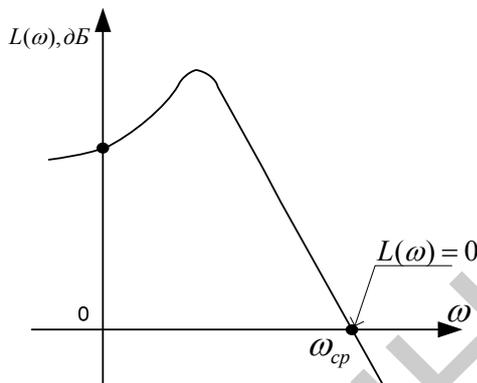


Рис. 5.15. Определение полосы среза на ЛЧХ

## 5.2. Интегральные оценки качества

Интегральными оценками качества переходного процесса систем управления называют интегралы по времени от некоторых функций переходного процесса изменения ошибки регулирования.

Рассмотрим скалярную линейную систему, показанную на рис. 7.16. На вход управления системы поступает ступенчатый сигнал с амплитудой  $X_{зад}$ , система предназначена для стабилизации заданного значения регулируемой переменной  $X$ , на систему так же может действовать скалярное ступенчатое возмущение  $Z(t)$  стремящееся снизить значение регулируемой переменной.

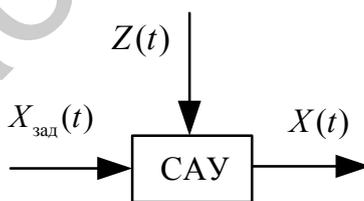


Рис. 5.16. Вид системы с возмущением

Примерный вид графиков переходных процессов регулируемой величины  $X(t)$  и ошибки регулирования

$$e(t) = X_{зад}(t) - X(t),$$

показаны соответственно на рис. 5.17 и 5.18.

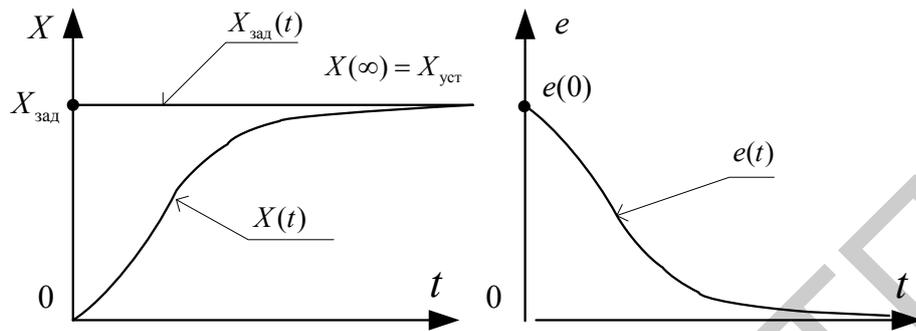


Рис. 5.17. Регулируемая величина и ошибка рассогласования

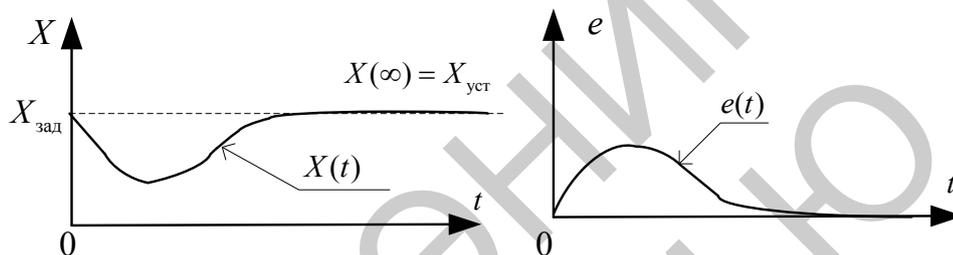


Рис. 5.18. Регулируемая величина и ошибка рассогласования

Основные области применения интегральных оценок в теории автоматического управления:

1. Общая оценка быстроты затухания и величины отклонения регулируемой величины в совокупности, без определения того и другого в отдельности.
2. Выбор при синтезе параметров систем, обеспечивающих оптимальность переходного процесса с точки зрения достижения минимума интегральных оценок.

Простейшей интегральной оценкой может служить линейная интегральная оценка следующего вида

$$I_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt.$$

Геометрическая интерпретация этого интеграла представляет собой площадь под кривой  $e(t)$ , как это показано на рис. 5.19 для переходных процессов изменения ошибки при управлении и возмущении.

Если система управления устойчива и обладает свойством астатизма, тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

а интеграл  $I_1$  стремится к конечному значению, равному площади под кривой  $e(t)$ . Параметры системы управления стремятся выбирать таким образом, чтобы добиться минимума  $I_1$ , при этом идеальный переходный процесс будет стремиться к идеальной ступенчатой форма.

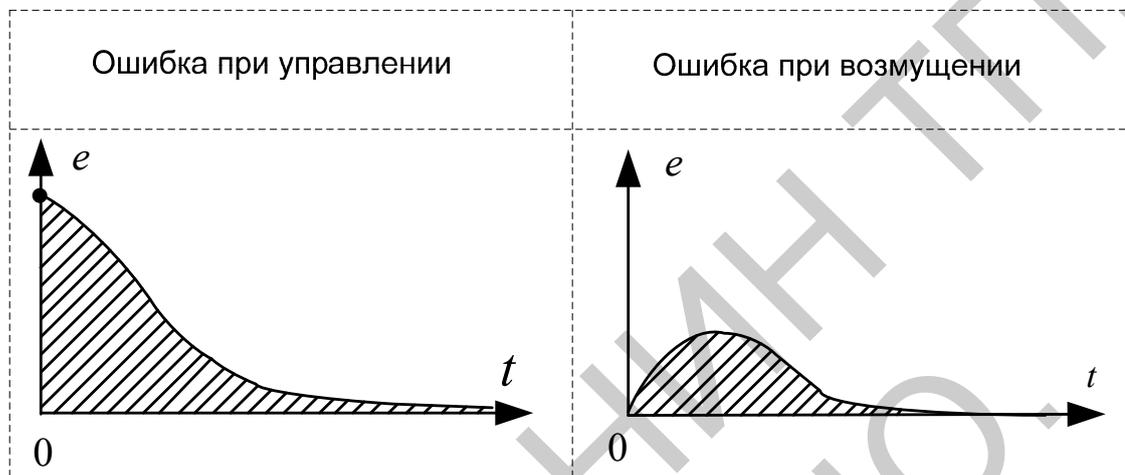


Рис. 5.19. Графическое представление интеграла ошибки

### 5.2.1. Вычисление линейных интегральных оценок

Рассмотрим проблему вычисления интеграла линейной интегральной оценки. Можно сначала решить аналитически дифференциальные уравнения, описывающие систему, далее определить ошибку регулирования, затем подставить выражение для ошибки в интеграл линейной оценки и, взяв его, получить выражение для  $I_1$ .

Но можно поступить и иначе.

Пусть свободное движение ошибки регулирования системы описывается уравнением

$$a_0 \frac{d^n e(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} e(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{de(t)}{dt} + a_n e(t) = 0. \quad (7.2.1)$$

Проинтегрируем это уравнение

$$\int_0^{\infty} \left( a_0 \frac{d^n e(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} e(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{de(t)}{dt} + a_n e(t) \right) dt = 0,$$

$$a_0 \int_0^{\infty} \frac{d^n e(t)}{dt^n} dt + a_1 \int_0^{\infty} \frac{d^{n-1} e(t)}{dt^{n-1}} dt + \dots + a_{n-1} \int_0^{\infty} \frac{de(t)}{dt} dt + a_n \int_0^{\infty} e(t) dt = 0.$$

После интегрирования получаем

$$a_0 \frac{d^{n-1}e(t)}{dt^{n-1}} \Big|_0^\infty + a_1 \frac{d^{n-2}e(t)}{dt^{n-2}} \Big|_0^\infty + \dots + a_{n-1} e(t) \Big|_0^\infty + a_n \int_0^\infty e(t) dt = 0. \quad (7.2.2)$$

Подстановки верхнего предела дают члены следующего вида

$$\left( \frac{d^k e(t)}{dt^k} \right)_{t=\infty}, \quad (7.2.3)$$

так как все производные ошибки в установившемся режиме обращаются в ноль.

Подстановки нижнего предела дают члены вида

$$\left( \frac{d^k e(t)}{dt^k} \right)_{t=0} = e_0^{(k)}, \quad (7.2.4)$$

которые являются начальными условиями уравнения (7.2.1).

Подставив (7.2.3) и (7.2.4) в (7.2.2), получим

$$-a_0 e_0^{(n-1)} - a_1 e_0^{(n-2)} - \dots - a_{n-1} e_0 + a_n \int_0^\infty e(t) dt = 0. \quad (7.2.5)$$

А так как

$$I_1 = \int_0^\infty e(t) dt,$$

окончательно получаем

$$-a_0 e_0^{(n-1)} - a_1 e_0^{(n-2)} - \dots - a_{n-1} e_0 + a_n I_1 = 0. \quad (7.2.6)$$

Решая (5.2.6) относительно  $I_1$ , получим выражение для вычисления линейной интегральной ошибки

$$-I_1 = \frac{-a_0 e_0^{(n-1)} - a_1 e_0^{(n-2)} - \dots - a_{n-1} e_0}{a_n}. \quad (7.2.7)$$

Теперь мы может определить  $I_1$  по коэффициентам характеристического уравнения системы и начальным условиям переходного процесса ошибки.

Для синтеза систем, определения параметров минимизирующих  $I_1$ , следует воспользоваться обычными методами исследования функций на экстремум. Следовательно, если мы хотим определить параметр системы, например, параметр  $\alpha_i$ , обеспечивающий  $\min I_1$ , необходимо решить относительно параметра  $\alpha_i$  следующее уравнение:

$$\frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k)}{\partial \alpha_i} = 0.$$

Рассмотрим несколько примеров использования линейной интегральной оценки.

**Пример**

Система имеет характеристическое уравнение

$$Ts + 1 = 0. \tag{7.2.8}$$

Определим выражение для  $I_1$ , если начальные условия имеют вид

$$e_0 = X_{уст}.$$

Определим значение параметра  $T$ , при котором интегральная оценка имеет минимум.

**Решение**

Обозначим  $a_0 = T, a_1 = 1$ .

Используем для нахождения  $I_1$  выражение (7.2.7)

$$I_1 = \frac{a_0 e_0^{(n-1)} + a_1 e_0^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} e_0}{a_n} = \frac{a_0 e_0}{a_1} = \frac{T e_0}{1} = T e_0. \tag{7.2.9}$$

Из рассмотрения (7.2.9) получаем, что  $I_1$  в этом случае не имеет экстремума, а меньшее значение интегральной ошибки мы будем получать при меньшем значении  $T$ . Действительно, ведь уравнение (7.2.8) является характеристическим уравнением аperiodического звена, параметр  $T$  – это постоянная времени. Переходный процесс для двух разных постоянных времени будет иметь вид, показанный на рис. 7.20.

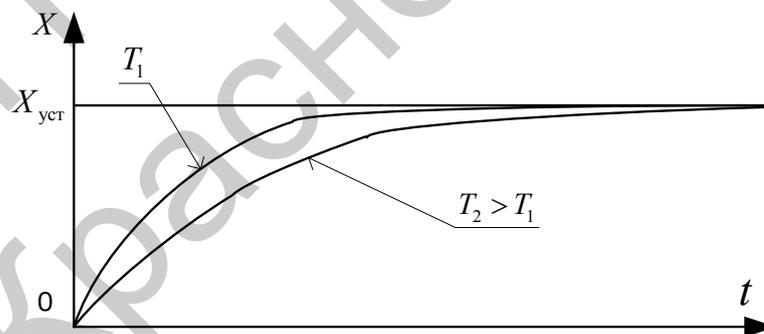


Рис. 7.20. Переходной процесс для разных постоянных времени

**Пример**

Система имеет характеристическое уравнение

$$Ts^2 + sT\xi s + 1 = 0.$$

Определим выражение для  $I_1$ , если начальные условия имеют вид

$$e_0^{(1)} = 0, e_0 = X_{уст}.$$

Определим значение параметра  $T$ , при котором интегральная оценка имеет минимум.

**Решение**

Обозначим

$$a_0 = T^2, a_1 = 2T\xi, a_2 = 1.$$

Используем для нахождения  $I_1$  выражение (7.2.7)

$$I_1 = \frac{a_0 e_0^{(n-1)} + a_1 e_0^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} e_0}{a_n} = \frac{a_0 e_0^{(1)} + a_1 e_0}{a_2} = \frac{T^2 \cdot 0 + 2T\xi e_0}{1} = 2T\xi e_0.$$

Если  $\xi \geq 1$ , то процессы монотонные,  $\min I_1$  обеспечивается при наименьших  $T$  и  $\xi$ . Если  $\xi < 1$ , то уменьшение коэффициента затухания уменьшает линейную интегральную оценку, но это приводит к ухудшению переходного процесса, повышению его колебательности.

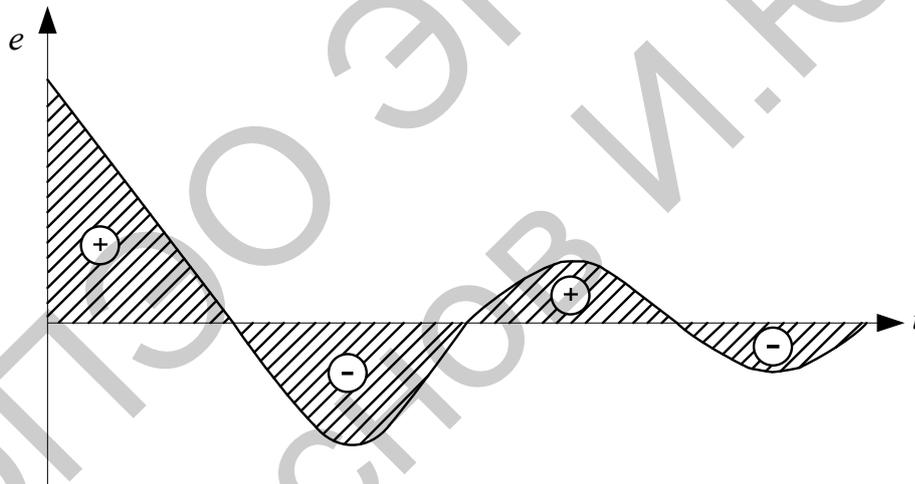


Рис. 7.21. Вид ошибки рассогласования

При колебательных процессах в системах линейная интегральная оценка дает значительную погрешность. При этом минимум оценки может соответствовать процессу с большим числом колебаний со значительной амплитудой, малым быстродействием, так как, по сути, в оценке происходит сложение положительных и отрицательных областей площади под интегральной кривой. Это иллюстрируют рис. 7.21 и 7.22, показывая два процесса, которые могут иметь одно и то же значение линейной интегральной оценки.

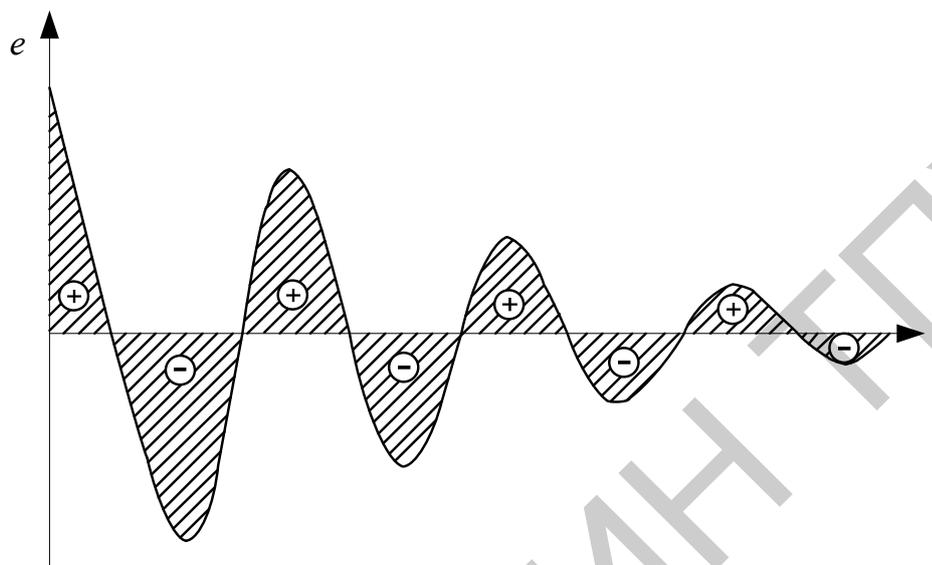


Рис. 7.22. Вид ошибки рассогласования

И так как форма переходного процесса при анализе системы автоматического управления часто заранее неизвестна, то применять линейные интегральные оценки на практике не целесообразно.

Можно попытаться использовать интеграл от модуля ошибки следующего вида

$$I_{1(M)} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt. \quad (7.2.10)$$

На рис. 7.23 показан примерный вид кривых изменения ошибки и ее модуля. Но аналитическое вычисление интеграла от модуля ошибки по математической модели системы оказалось весьма громоздким, поэтому эта оценка широкого распространения не получила.

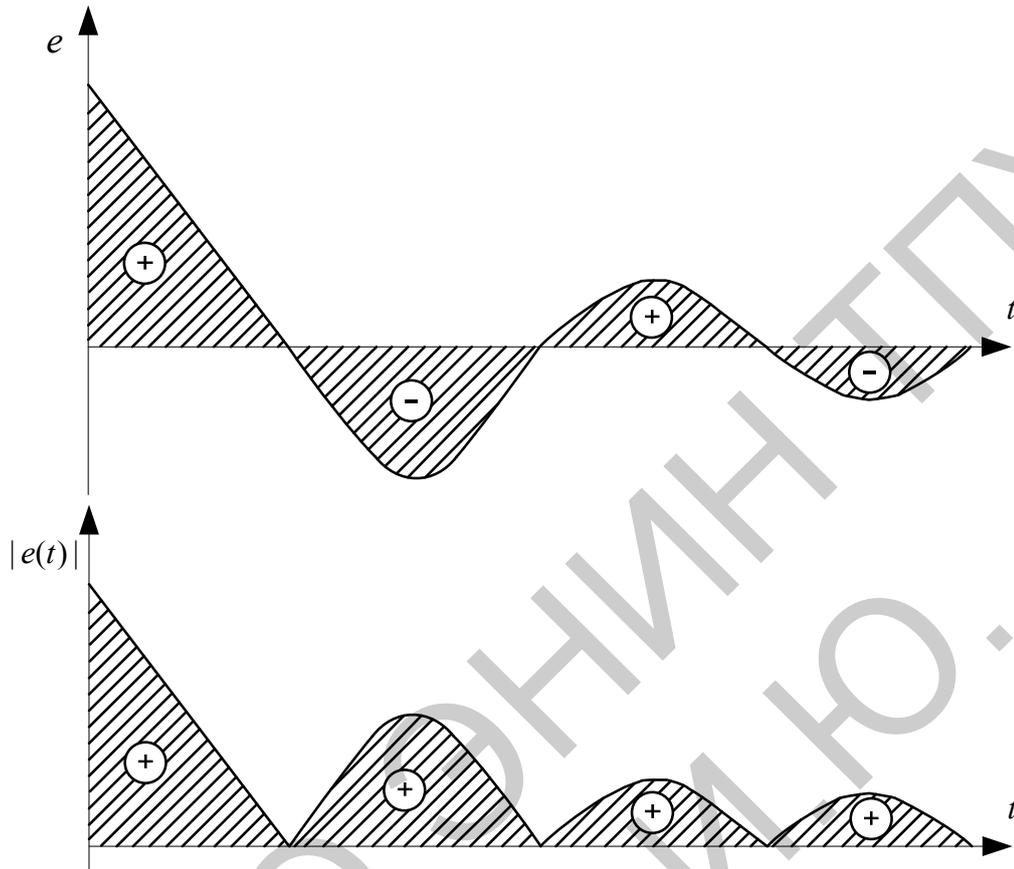


Рис. 7.23. Ошибка рассогласования и её модуль

### 5.2.2. Квадратичная интегральная оценка

В большинстве случаев, при возможности возникновения в системе колебательного переходного процесса, используют квадратичную интегральную оценку, которая имеет следующий вид

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt. \quad (5.2.11)$$

Оценка  $I_2$  не зависит от знака отклонений ошибки, а значит и от формы переходного процесса, монотонный, аperiodический или колебательный характер он будет иметь. На рис. 5.24 и 5.25 показан примерный вид кривых изменения ошибки и квадрата ошибки.

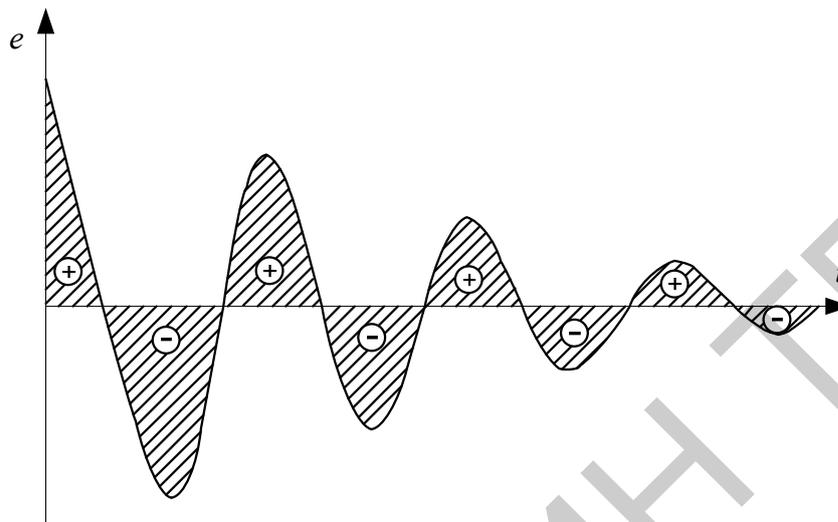


Рис. 5.24. Ошибка рассогласования



Рис. 5.25. Квадратичная оценка

Рассмотрим процедуру вычисления квадратичной оценки по математической модели системы. Система управления представляется в виде, показанном на рис. 7.26.

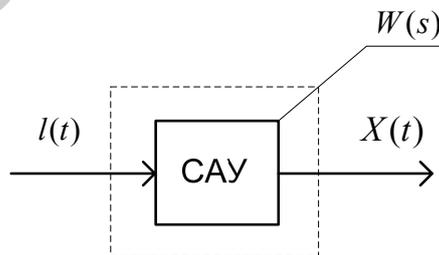


Рис. 7.26. Система управления

Изображение по Лапласу сигнала на выходе системы имеет вид

$$X(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \cdot \frac{1}{s}, \quad (7.2.12)$$

где  $\frac{1}{s} = L\{1(t)\}$  – изображение по Лапласу единичной ступенчатой функции – входного сигнала системы.

Для системы автоматического управления, математическая модель которой приведена к виду (7.2.12), интегральная квадратичная ошибка определяется по следующему выражению

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} (B_m \Delta_m + B_{m-1} \Delta_{m-1} + \dots + B_k \Delta_k + \dots + B_1 \Delta_1 + B_0 \Delta_0) - \frac{b_m b_{m-1}}{a_n^2}, \quad (7.2.13)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & -a_n & a_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}. \quad (7.2.14)$$

в  $\Delta$  все элементы с индексами меньше 0 и больше  $n$  заменяются 0.

Определители  $\Delta_k$  в (7.2.13), где  $k = m, (m-1), \dots, 2, 1, 0$ , получаются заменой в определителе  $\Delta$  (7.2.14)  $(m-k+1)$ -го столбца столбцом следующего вида

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Кoeffициенты  $B$  в выражении (7.2.13) определяются следующим образом

$$\begin{aligned} B_m &= b_m^2; \\ B_{m-1} &= b_{m-1}^2 - 2b_m b_{m-1}; \\ B_{m-2} &= b_{m-2}^2 - 2b_{m-1} b_{m-2} + 2b_m b_{m-4}; \\ &\dots \\ B_k &= b_k^2 - 2b_{k+1} b_{k-1} + 2b_{k+2} b_{k-2} + \dots + 2(-1)^k b_m b_{2k-m}; \\ &\dots \\ B_0 &= b_0^2. \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

при определении  $B_k$  коэффициенты, индексы которых меньше 0 и больше  $m$ , заменяются

0.

### 5.2.3. Квадратичная интегральная оценка с учетом производной

Недостатком квадратичной интегральной оценки  $I_2$ , как и предыдущих оценок, является то, что при минимизации оценки не накладываются ограничения на форму переходного процесса. На пример, показанные на рис. 5.27 графики  $e(t)$  – (а, б, в) могут иметь одинаковые значения  $I_2$  существенно при этом отличаясь по форме переходного процесса.

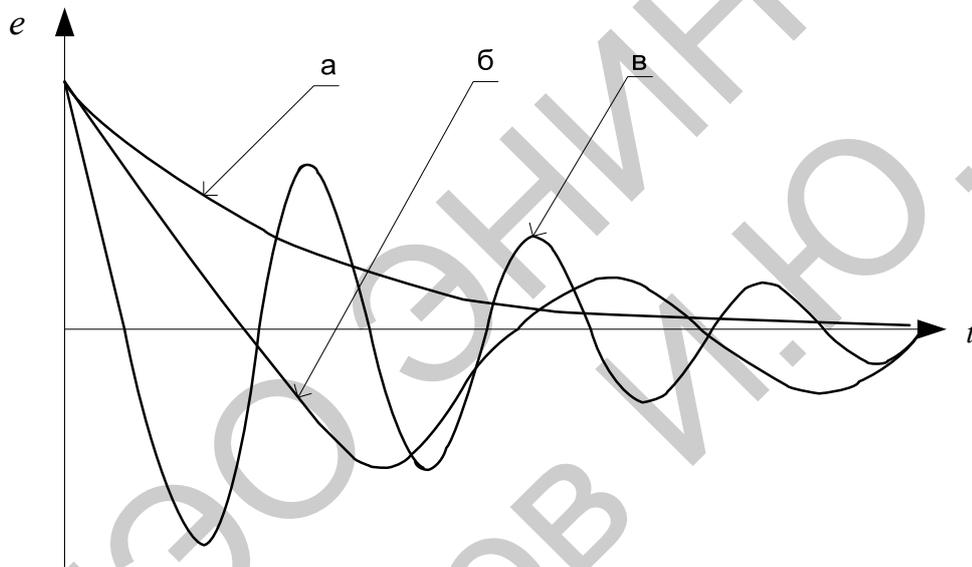


Рис. 5.27. Виды ошибки рассогласования

Кроме того, часто оказывается, что выбранные по  $\min I_2$  параметры системы приводят к существенно колебательному процессу, большим производным из-за стремления приблизить процесс к идеальному скачку.

Поэтому используют еще один вид интегрально квадратичной оценки, в которой ограничение накладывается не только на величину отклонения  $e(t)$ , но и на скорость его изменения  $\dot{e}(t)$ . Эта оценка имеет следующий вид

$$I_3 = \int_0^{\infty} (e^2(t) + T^2 \dot{e}^2(t)) dt, \quad (5.2.16)$$

где  $T$  – некоторая постоянная времени.

Разницу между оценками  $I_2$  и  $I_3$  можно представить графически, как это показано на рис. 5.28.

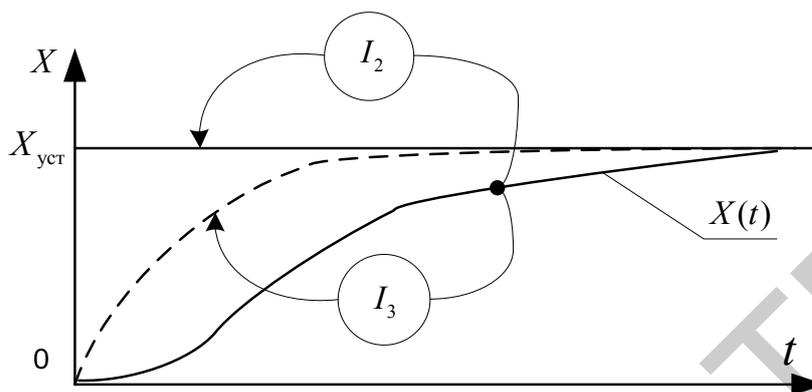


Рис. 5.28. Виды оценок

То есть оптимизированный по  $I_2$  переходный процесс стремится к идеальному скачку, а оптимизированный по  $I_3$  – к кривой экспоненциального вида, которая описывается следующим выражением

$$X(t) = X_{уст} (1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Докажем последнее утверждение. Для этого проанализируем выражение (5.2.16).

$$I_3 = \int_0^{\infty} (e^2(t) + T^2 \dot{e}^2(t)) dt = \int_0^{\infty} (e(t) + T\dot{e}(t))^2 dt - 2 \int_0^{\infty} 2e(t)T\dot{e}(t) dt,$$

с учетом того, что

$$T \frac{de^2(t)}{dt} = 2Te(t)\dot{e}(t),$$

получаем

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\infty} (e(t) + T\dot{e}(t))^2 dt - 2 \int_0^{\infty} 2e(t)T\dot{e}(t) dt = \int_0^{\infty} (e(t) + T\dot{e}(t))^2 dt - \int_0^{\infty} T \frac{de^2(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^{\infty} (e(t) + T\dot{e}(t))^2 dt - Te^2(t) \Big|_0^{\infty} = \int_0^{\infty} (e(t) + T\dot{e}(t))^2 dt + Te^2(0). \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

С учетом того, что последнее слагаемое в (5.2.17) является величиной постоянной

$$Te^2(0) = const,$$

квадратичная оценка  $I_3$  будет иметь минимум при

$$Te^2(t) + e(t) = 0. \quad (5.2.18)$$

Решение дифференциального уравнения (5.2.18) имеет вид

$$e(t) = e(0)e^{-\frac{t}{T}},$$

а если перейти от ошибок к выходным переменным, то получим

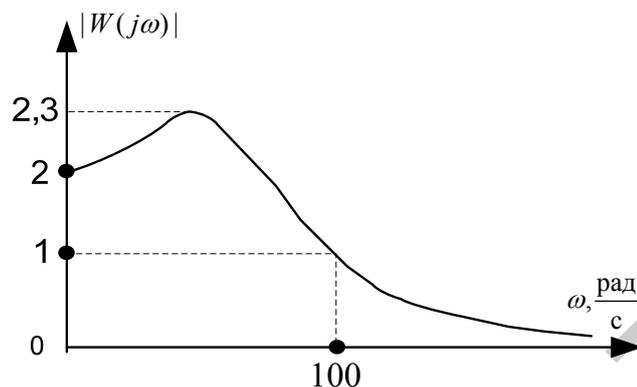
$$X(t) = X_{уст} (1 - e^{-\frac{t}{T}}),$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, выбирая параметры системы по  $\min I_3$ , можно приблизить переходный процесс к экспоненте с заданной постоянной времени  $T$ , тем самым вводится ограничение на скорость нарастания выходной величины  $X(t)$ .

### **Контрольные вопросы для закрепления изученного материала**

1. Что относится к прямым оценкам качества управления?
2. Что называется косвенными методами оценки качества управления?
3. Перечислите прямые оценки качества управления при ступенчатом воздействии?
4. Что называется диаграммой показателей качества?
5. Как определить степень устойчивости САУ?
6. Как определить колебательность САУ?
7. Что называется интегральными критериями качества САУ?
8. В чем недостатки линейной и квадратичной оценок качества управления?
9. Как оценить время переходного процесса по виду ВЧХ?
10. В каких системах автоматического управления важен характер и параметры протекания переходных процессов?
11. Перечислите основные области применения критериев качества.
12. Как определить переуправление по графику переходного процесса?
13. Какие переходные процессы относят к апериодическим процессам?
14. Как соотносятся частота среза системы и ее быстродействие?
15. По графику АЧХ системы



определить показатель колебательности и частоту среза системы.

16. Почему нельзя использовать линейную интегральную оценку в случае колебательного характера переходных процессов?
17. Дайте определение квадратичной интегральной оценке переходного процесса.
18. Дайте определение квадратичной интегральной оценки с учетом производной, поясните ее компоненты.
19. Какое влияние оказывает на переходный процесс нули передаточной функции?
20. В каких случаях следует использовать на настройки системы распределение корней характеристического уравнения Баттерворта?

#### Список рекомендуемой литературы, имеющейся в НТБ ТПУ

1. Поздеев А. Д. Устойчивость и качество процессов в импульсных системах: Текст лекций / А. Д. Поздеев. — Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 1992. — 72 с
2. Пальтов И. П. Качество процессов и синтез корректирующих устройств в нелинейных автоматических системах / И. П. Пальтов. — М.: Наука, 1975. — 367 с.

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Идентификация динамических объектов в общем случае состоит в определении их структуры и параметров по наблюдаемым данным – входному воздействию и выходным величинам.

В этом случае объект (элемент системы, объект управления, элемент технологического процесса и т. п.) представляет собой "черный ящик". Исследователю необходимо, подвергая объект внешним воздействиям и анализируя его реакции, получить математическую модель (описание его структуры и параметров), то есть превратить "черный ящик" в "белый ящик", добиться его "информационной прозрачности". Графически процесс идентификации иллюстрирует рис. 6.1.



Рис. 6.1. Процесс идентификации

Важным моментом этого процесса является выбор точек приложения внешних воздействий и сбор информации о реакциях объекта, то есть размещение управляющих устройств и датчиковых систем.

Решается при идентификации объектов и более простая (относительно простая) задача, это задача идентификации параметров, когда заранее известна структура математической модели объекта, но не известны ее параметры. В этом случае говорят о переходе от "серого ящика" к "белому ящику". Графически процесс идентификации параметров иллюстрирует рис. 6.2.

Задача идентификации параметров может либо входить компонентом в общую задачу идентификации объекта, либо решаться самостоятельно.

Рассмотрим на обобщенной структуре и процедуре процесса идентификации основы подхода к решению задач идентификации. Обобщенная структура процесса идентификации показана на рис. 6.3.



Рис. 6.2. Процесс идентификации

### 6.1. Обобщенная процедура идентификации

1. Классификация объекта.
2. Выбор для определенного класса объекта настраиваемую модель, то есть модель, структуру и параметры которой можно менять в процессе идентификации.

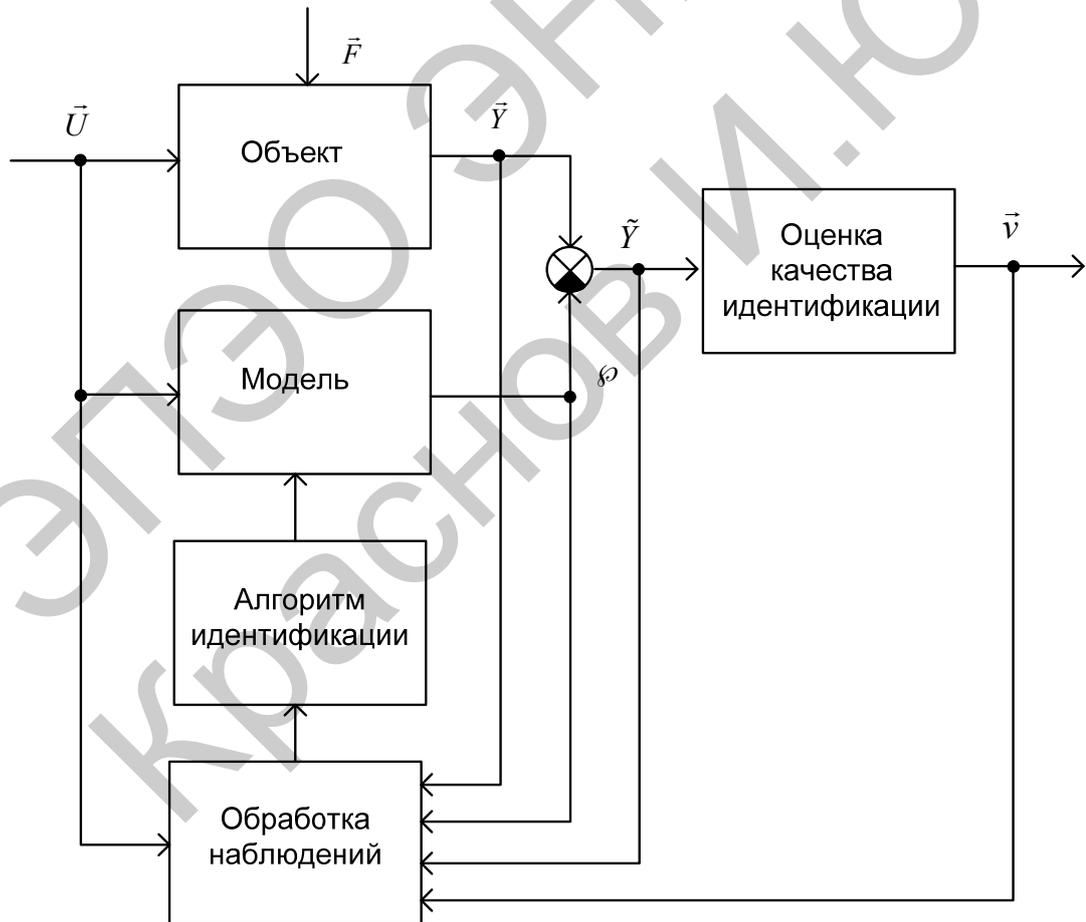


Рис. 6.3. Обобщённая структура процесса идентификации

3. Выбрать критерий (оценку) качества идентификации, характеризующий в виде функционала доступных для наблюдения переменных отличие модели и объекта.
4. Выбрать алгоритм идентификации (механизм настройки модели), обеспечивающий сходимость процесса идентификации, минимум критерия

качества идентификации.

Методы идентификации принято разделять на две группы:

- активная идентификация – идентификация вне контура управления,
- пассивная идентификация – идентификация в контуре управления.

### Активная идентификация

В этом случае объект исследования выводится из условий нормальной окружающей среды (нормальный режим эксплуатации, номинальные параметры рабочего режима и т. п.). Исследования проводятся в специализированных лабораторных условиях, как это показано на рис. 6.4. На входы объекта (рабочие и дополнительные) подаются тестовые сигналы специального вида. Это могут быть:

- ступенчатые и импульсные временные сигналы,
- гармонические сигналы,
- случайные воздействия с заданными параметрами.

Активную идентификацию используют при разработке новых технологий применительно к действующим промышленным объектам, в изучении новых явлений, в первоначальной разработке математической модели.

### Пассивная идентификация

При пассивной идентификации объект функционирует в контуре управления, находится в процессе нормальной эксплуатации. На его входы поступают только естественные сигналы управления.

Пассивную идентификацию используют для уточнения математической модели, для слежения за изменениями в объекте. Информация оперативно используется в системе управления объектом, процесс такой идентификации иллюстрируется рис. 6.5.

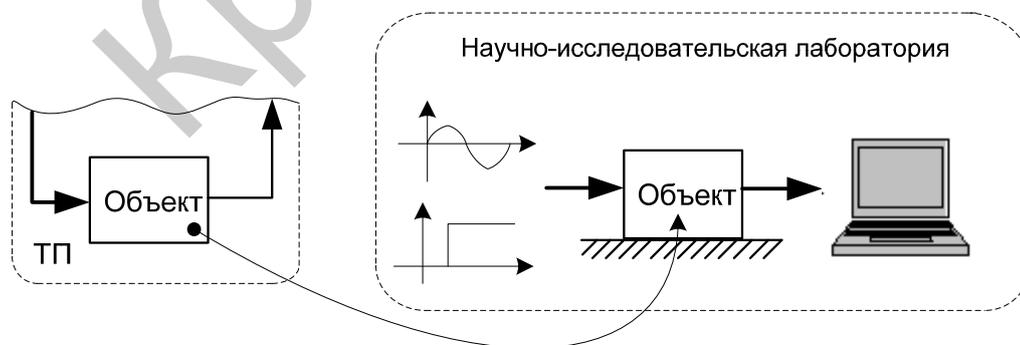


Рис. 6.4. Условия идентификации

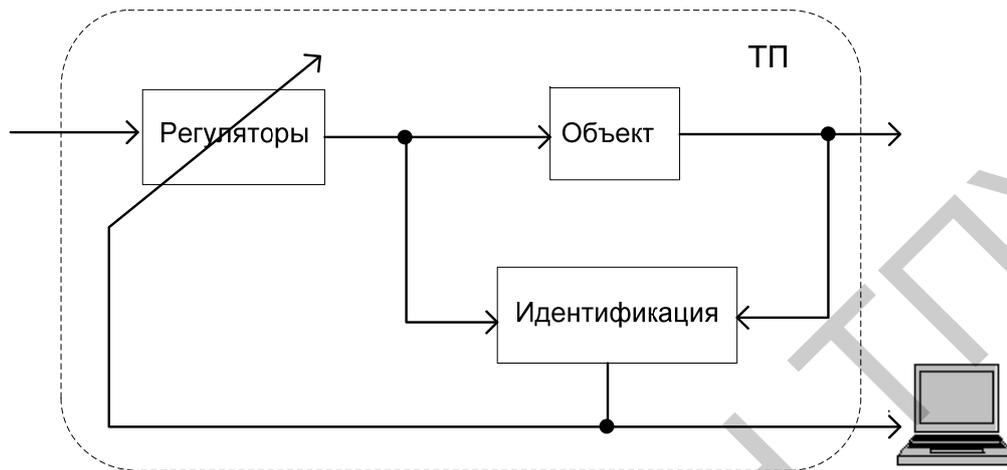


Рис. 6.5. Идентификация по информации объекта

Кроме перечисленных групп методов реализуются и системы идентификации смешанного типа, когда объект не выводится из нормального режима эксплуатации, но к управляющим сигналам добавляются тестовые воздействия, позволяющие идентифицировать объект, не ухудшая качества основного процесса управления.

Более подробно рассмотрим активную идентификацию.

Активная идентификация объектов управления может производиться как во временной области, так и в частотной области. При этом в каждой области используют собственные алгоритмы и методы идентификации.

При активной идентификации в большинстве случаев используют полученные в результате экспериментов характеристики:

- частотные характеристики (АФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ и др.),
- временные характеристики (ступенчатое изменение задания, "узкий" импульс задания и др.).

### Контрольные вопросы для закрепления изученного материала

1. Какие методы относят к методам пассивной идентификации?
2. Какие методы относят к методам активной идентификации?
3. Дайте определение процессу идентификации объекта, идентификации параметров.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматизация моделирования и функционального проектирования электромеханических систем: Учеб. пособие/ А.В. Балуюев, М.Ю. Дурдин, А.Р. Колганов. – Иваново: Иван. гос. энерг ун-т, 1993. – 84 с.
2. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами в системе MATLAB. – СПб.: Наука, 1999. – 467 с.
3. Антонию А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
4. Бенькович Е. С. Практическое моделирование динамических систем / Е. С. Бенькович, Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 464 с.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. – 747 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. 13 изд., испр. — М.: Наука, 1986. – 544 с.
7. Брюханов В. Н. и др. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / В.Н. Брюханов, М.Г. Косов, С.П. Протопопов и др.; под ред. Ю.М.Соломенцева. — 4-е изд., стер. — М.: Высшая школа, 2003. — 268 с.
8. Вульфсон А.В. О построении программы, автоматизирующей расчет на ЦВМ переходных процессов нелинейных автоматических систем. // Изв. вузов. Электромеханика, 1969, №12. — С. 25-32.
9. Егоров К.В. Основы теории автоматического регулирования, учебное пособие для вузов, изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Энергия, 1967. — 648 с.
10. Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. — М.: Наука, 1982. — 512 с.
11. Глебович Г.В. Переходные процессы и основы синтеза линейных радиотехнических цепей: Лекции по курсу "Основы теории цепей" — Горький: Институт радиоэлектроники и информационных технологий, 1968. — 83 с.
12. Карякин А.М. Основы вычислительной техники и программирования: Учебное пособие. — Иваново: Иван. гос. энерг. ун-т, 1994. — 102 с.
13. Ключев В.И. Теория электропривода. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 560 с.
14. Колганов А.Р., Буренин С.В. Алгоритмы и программы функционального проектирования систем управления электромеханическими объектами: Учебное пособие — Иваново: Иван. гос. энерг. ун-т, 1997. — 140 с.
15. Колганов А.Р., Пантелеев Е.Р. Имитационное моделирование динамических систем в САПР / Учеб. Пособие. — Иваново: Иван. энерг. ин-т, 1990 — 88 с.

16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
17. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. Учеб. пособие для электротехн. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1973. – 528 с.
18. Кухтенко А.И. Системная общая теория. В.кн. Энциклопедия кибернетики. Т.2. – Киев: Гл.редакция УСЭ, 1975. – С.335-339.
19. Математические основы теории автоматического регулирования, т. п I. изд. 2-е, доп. под ред. Б. К. Чемоданова: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1977. – 455 с.
20. Месарович М., Мако Д., Такахара Н. Теория иерархических многоуровневых систем. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
21. Модальные регуляторы и наблюдатели состояния электромеханических систем. Методические указания / С. К. Лебедев, В. Ф. Глазунов. – Иваново: ИЭИ, 1989. – 73 с.
22. Нуждин В.Н. Автоматизация проектирования и исследования электроприводов. ч.2 Автоматизация моделирования. – Иваново: ИвГУ, 1980. – 95 с.
23. Нуждин В.Н. Концептуальное программирование вычислительных моделей. – Иваново: ИЭИ, 1985. – 32 с.
24. Основы линейной теории автоматического управления в задачах электроэнергетики: Учебное пособие к компьютерным лабораторным практикумом АОС-ТАУ/ В.Ф. Коротков. – Иваново: Иван. гос. энерг. ун-т, 1994. – 392 с.
25. Остром К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ / Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. – 480 с.
26. Пантелеев А.В. Теория управления в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
27. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под редакцией В. А. Бесекерского. — М.: Наука, 1978. – 512 с.
28. Системы автоматизированного проектирования: Учебное пособие для вузов: В 9 кн. кн. 1. Принципы построения и структура. И.П. Норенков. – М.: Высшая школа, 1986. – 127 с.
29. Справочное пособие по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. П. А. Санковского. – М.: Высшая школа, 1973. – 584 с.
30. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. – М.: Машиностроение, 1972. – 552 с.
31. Теория автоматического управления. Учеб. для вузов по спец. "Автоматика и телемеханика". В 2-х ч./ Н.А. Бабаков, А.А. Воронов и др.: Под ред. А.А. Воронова. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 367с.

32. Теория автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова, ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1986, – 288 с.
33. Усенко В.В. Алгоритмизация структурного анализа систем управления. – М.: МЭИ, 1990. – 59 с.
34. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров / Пер. с англ. Под ред. Р. С. Гутера. – М.: Наука, - 1972. – 400 с.
35. Шатихин Л.Г. Структурные матрицы и их применение для исследования систем. – М.: Машиностроение, 1991. – 256 с.
36. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем: Искусство и наука / Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 400 с.
37. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 282 с.
38. Электропривод и сетевые технологии: Доклады научно-практического семинара. – М. : Изд-во МЭИ, 2003. – 144 с.
39. <http://model.exponenta.ru> – Математический Интернет-портал.
40. <http://www.mathworks.com> – MathWorks Inc.