

Математические методы в инженерии

Доцент, к.ф.-м.н. Демидов Валерий Николаевич

Курс V

1. Цели освоения модуля (дисциплины)

В результате освоения данной дисциплины выпускник приобретает знания, умения и навыки, обеспечивающие достижение целей Ц1, Ц2 и Ц5 образовательной программы по подготовке магистров «Физика высоких технологий в машиностроении».

Эксперимент, в широком понимании этого слова, ставится во всех областях человеческой деятельности. Цель эксперимента – это, как правило, построение приближенной математической модели исследуемого явления, процесса. Поэтому обойтись без математической обработки результатов эксперимента в настоящее время не могут не только представители «точных» наук, но и типичные «гуманитарии» - историки и социологи, медики и биологи, психологи и агрономы и т. д.

Что касается студентов технических вузов, будущих инженеров, то курс «Математические методы в инженерии» является необходимейшим элементом их образования, поскольку в своей работе - исследовательской, конструкторской, производственной - они постоянно будут сталкиваться с необходимостью математической обработки информации.

При подготовке магистров по направлению 150700 «Машиностроение» данный курс дает студентам необходимые знания о современных методах обработки и анализа опытных данных и прививает навыки применения этих методов с использованием компьютерной техники. Курс ориентирован в основном на научно-исследовательскую работу.

В результате математической обработки результатов эксперимента извлекается максимум полезной информации об объекте исследования. Однако на протяжении всего курса неоднократно подчеркивается мысль о том, что математическая обработка эксперимента существенно опирается на вероятностные представления и, следовательно, все получаемые выводы даются лишь с определенной «доверительной вероятностью». Более того, даже если статистические тесты надежно подтверждают наличие стохастической зависимости между результатами измерений, отсюда еще не следует наличие причинно-следственной зависимости между соответствующими физическими величинами. Поэтому принятие окончательного решения всегда остается за самим экспериментатором. Это очень важный и ответственный момент, что ярко подтверждают слова известного американского ученого К.А. Браунли: «...многие исследователи в различных областях науки техники очень часто спешат объявить об очередном «открытии», в то время как в действительности в их наблюдениях ничего не было, кроме случайных флуктуаций». Поэтому помимо чисто утилитарных целей данный курс преследует также цель воспитания у будущих инженеров предельно объективного и ответственного отношения к результатам собственных исследований.

2. Место модуля (дисциплины) в структуре ООП

Дисциплина относится к специальным дисциплинам профессионального цикла (М.3.6.). Она непосредственно связана с дисциплинами естественнонаучного и математического цикла (математика, информационные технологии) и опирается на освоенные при изучении данных дисциплин знания и умения.

3. Результаты освоения модуля (дисциплины).

После изучения данной дисциплины магистрант приобретает знания, умения и навыки, соответствующие результатам основной образовательной программы ФВТМ и направленные на формирование профессиональных (P1, P3, P4, P5) и универсальных (P9, P11) компетенций. Соответствие результатов освоения дисциплины «Математические методы в инженерии» формируемым компетенциям ООП представлено в таблице.

Формируемые компетенции в соответствии с ООП*	Результаты освоения модуля (дисциплины)
Знать (З.1.1.; 3.3.1.; 3.3.2.; 3.3.3.; 3.11.2.)	<i>В результате освоения дисциплины студент должен знать:</i> современные методы сбора, обработки и анализа экспериментальных данных; инновационные методы инженерного и научного анализа, соответствующие мировому уровню; компьютерные и информационные технологии, применяемые при обработке, анализе и интерпретации опытных данных; современные тенденции развития технического прогресса;
Уметь (У.1.1.; У.2.1.; У.3.1; У.4.1.; У5.1.; У.5.2.; У5.3.; У.9.2.; У.9.3. У10.2.)	<i>В результате освоения дисциплины студент должен уметь:</i> анализировать полученную информацию; самостоятельно решать технологические задачи на основе анализа существующих знаний и методик; решать комплексные проблемы на основе интеграции различных методов и методик с целью достижения определенного технологического результата; формулировать научно-технические задачи; систематизировать данные экспериментальных исследований и технологических процессов; модернизировать и совершенствовать методики получения и обработки экспериментальных данных; ответственно подходить к результатам собственных исследований и четко формулировать их результаты; брать ответственность на себя за принимаемые решения; прогнозировать технико-экономические показатели развития производства.
Владеть (В.3.1.; В.3.3.; В.5.2. В.10.1.)	<i>В результате освоения дисциплины студент должен владеть:</i> специализированным программным обеспечением для решения профессиональных задач; методами получения статистических оценок и проверки статистических гипотез; техникой метода наименьших квадратов; методикой подбора оптимальных эмпирических зависимостей; опытом работы с научно-технической информацией, Интернет-ресурсами, базами данных и др; навыками критического подхода к анализу экспериментальных данных, ответственного отношения к порученным заданиям и выполнению своих профессиональных обязанностей.

*Расшифровка кодов результатов обучения и формируемых компетенций представлена в документе Основная образовательная программа подготовки магистров по направлению 150700 «Машиностроение» Магистерская программа «Физика высоких технологий в машиностроении».

4. Структура и содержание дисциплины

№	Название раздела/темы	Аудиторная работа (час)			КП	СРС (час)	Итого (час)	Форма текущего контроля
		ЛК	ЛБ	ПР				
1.	Случайные события, случайные величины и их математические модели	2	4	6		32	44	Отчет
2.	Погрешности измерений	1	4	2		18	25	Отчет
3.	Проверка статистических гипотез	1	4	2		18	25	Отчет
4.	Статистические методы построения эмпирических формул	2	4	2		32	40	Отчет
5.	Анализ и интерпретация результатов экспериментальных исследований	2	8	4		32	46	Отчет
	ВСЕГО (час)	8	24	16		132	180	

ЛК – лекция, ЛБ – лабораторные работы; ПР – практические занятия, СРС – самостоятельная работа студента.

При сдаче отчетов и индивидуальных домашних заданий проводится устное собеседование с каждым студентом в отдельности.

4.1. Наименование тем и содержание лекций, лабораторных работ

Тема 1. Случайные события, случайные величины и их математические модели. Случайные явления и их математические модели. Пространство элементарных событий. Операции над событиями. Статистическая устойчивость частоты события. Вероятность события, суммы и произведения событий. Формула полной вероятности и формула Байеса. Случайные величины. Функция распределения и плотность распределения случайной величины. Квантили, медиана, мода, моменты непрерывного распределения. Математическое ожидание и дисперсия. Асимметрия и эксцесс. Многомерные случайные величины. Плотность совместного распределения случайных величин. Ковариационная матрица. Выборочный метод. Общие понятия о генеральной совокупности и выборке. Эмпирическая функция распределения. Числовые характеристики выборки: эмпирическое среднее, дисперсия, размах выборки, коэффициент вариации, стандартное отклонение, мода, медиана, моменты, асимметрия, эксцесс.

Лабораторная работа 1. Анализ эмпирических распределений. Числовые характеристики выборки.

Практическое занятие 1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей (приложения к решению инженерных задач).

Практическое занятие 2. Приложение теории вероятностей к решению простейших задач теории надежности.

Практическое занятие 3. Основные вероятностные распределения (доклады по рефератам).

Тема 2. Погрешности измерений. Классификация ошибок измерения: грубые, систематические, случайные ошибки. Закон распределения случайных ошибок измерения: вероятностная модель, нормальный закон распределения, функция Лапласа, правило «трех сигм». Закон больших чисел, неравенство и теорема Чебышева, теорема Ляпунова.

Понятие о точечных и интервальных оценках параметров распределения случайной величины. Свойства точечных оценок: состоятельность, несмещенность, эффективность. Точечная и интервальная оценка истинного значения измеряемой величины. Точечная и интервальная оценка погрешности измерений. Использование неравенства Чебышева при построении доверительных интервалов.

Лабораторная работа 2. Точечные и интервальные (доверительные) оценки параметров нормально распределенной случайной величины.

Практическое занятие 4. Обработка результатов прямых многократных измерений.

Тема 3. Проверка статистических гипотез. Основные понятия и определения. Алгоритм проверки статистических гипотез. Критерии согласия Колмогорова, омега-квадрат, «хи-квадрат». Приближенная проверка гипотезы о нормальности распределения с помощью выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса. Проверка однородности наблюдений, исключение грубых ошибок измерений. Сравнение средних, критерий Стьюдента. Сравнение дисперсий, критерии Фишера, Бартлета.

Лабораторная работа 3. Предварительная статистическая обработка экспериментальных данных. Проверка статистических гипотез.

Практическое занятие 5. Основные параметрические гипотезы о равенстве дисперсий и математических ожиданий.

Тема 4. Статистические методы построения эмпирических формул. Понятие о прямых и косвенных измерениях. Задача подбора эмпирической формулы. Метод наименьших квадратов. Нормальная система уравнений. Полиномиальная аппроксимация эмпирических данных методом наименьших квадратов: линейная и квадратичная зависимости, общий случай многочлена произвольной степени. Простейшие нелинейные зависимости, спрямляющая замена переменных. Общий случай моделей нелинейных по параметрам, понятие о нелинейном методе наименьших квадратов. Обобщенные полиномы, ортогональные системы функций, полиномы Чебышева, тригонометрические полиномы. Выбор оптимальной формы связи между измеряемыми физическими величинами.

Лабораторная работа 4. Линейная регрессия.

Лабораторная работа 5. Нелинейная регрессия. Выбор оптимальной степени аппроксимирующего многочлена.

Практическое занятие 6. Линейный и нелинейный метод наименьших квадратов

Тема 5. Математические методы анализа и интерпретация результатов экспериментальных исследований. Сглаживание эмпирических данных и численное дифференцирование. Линейное сглаживание по трем и пяти точкам. Нелинейное сглаживание по семи точкам. Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности и повышение точности численного дифференцирования по правилу Рунге. Выбор оптимального шага численного дифференцирования. Постановка задачи приближения функций. Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона. Интерполяция сплайнами. Простейшие квадратурные формулы: прямоугольников, трапеций, Симпсона, Буля. Практическая оценка погрешностей квадратурных формул и уточнение результатов численного интегрирования по правилу Рунге.

Лабораторная работа 6. Интерполяция экспериментальных данных и численное интегрирование.

Лабораторная работа 7. Сглаживание экспериментальных данных и численное дифференцирование.

Практическое занятие 7. Математические методы построения интерполяционных зависимостей.

Практическое занятие 8. Сглаживание экспериментальных данных, численное дифференцирование и интегрирование.

5. Образовательные технологии

В дисциплине используются следующие сочетания видов учебной работы с методами и формами активизации познавательной деятельности студентов для достижения запланированных результатов обучения и формирования компетенций.

Методы и формы активизации деятельности	Виды учебной деятельности			
	Лекции	Консультации	Лаб. раб.	СРС
Дискуссия	+	+		
IT-методы	+	+	+	+
Командная работа		+	+	+
Разбор кейсов				
Опережающая СРС	+	+	+	+
Индивидуальное обучение		+	+	+
Проблемное задание		+	+	+
Обучение на основе опыта		+	+	+

Распределение результатов обучения – знаний, умений, навыков и соответствующих компетенций, формируемых в рамках изучаемой дисциплины и указанных в п. 3, сведены в нижеприведенной таблице по разделам дисциплины.

№	Результаты обучения	Разделы дисциплины								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.1.1.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	3.3.1.				+	+	+	+		
3	3.3.2.					+	+	+		
4	3.3.3.			+	+	+	+	+	+	+
5	3.11.2				+					
6	У.1.1.			+	+	+	+	+		
7	У.2.1.			+	+	+	+	+	+	+
8	У.3.1.				+			+	+	+
9	У.4.1.					+	+	+		
10	У.5.2.		+	+	+	+	+	+		
11	У.5.3.			+	+	+	+	+		
12	У.9.2.	+	+							
13	У.9.3.			+	+					
14	У.10.2					+	+	+		
15	В.3.1.				+	+	+	+	+	+
16	В.3.3.	+	+	+	+	+	+	+	+	+
17	В.5.2.				+					
18	В.10.1			+	+	+	+	+		

Для достижения поставленных целей преподавания дисциплины должны быть реализованы следующие средства, способы и организационные мероприятия:

- изучение теоретического материала дисциплины на лекциях с использованием компьютерных технологий;
- самостоятельное изучение теоретического материала дисциплины с использованием Интернет-ресурсов, информационных баз, методических разработок, специальной учебной и научной литературы;
- закрепление теоретического материала при проведении лабораторных работ, выполнении индивидуальных домашних заданий.

6. Организация и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

6.1. Текущая и опережающая СРС, направленная на углубление и закрепление знаний студента, развитие практических умений заключается в:

- работе студентов с лекционным материалом, поиск литературы и электронных источников информации по индивидуально заданной проблеме выбранной теме магистерской работы;
- выполнении индивидуальных домашних заданий;
- изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку;
- изучении теоретического материала к лабораторным занятиям;
- подготовке к экзамену.

6.1.2. Темы, выносимые на самостоятельную проработку

- Вычисления и программирование в системе Mathcad.
- Основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин, используемые при решении инженерных задач.

7. Средства текущей и итоговой оценки качества освоения дисциплины

Контроль текущей и итоговой успеваемости студентов осуществляется в виде:

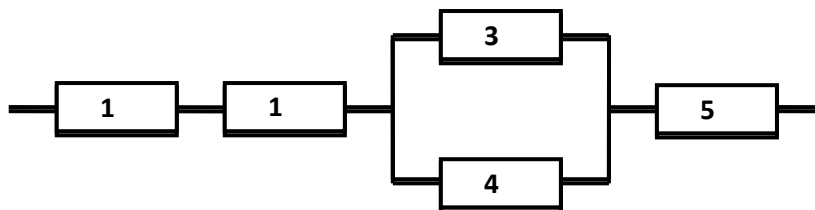
- собеседования при сдаче отчетов по лабораторным работам;
- собеседования при сдаче отчетов по индивидуальным домашним заданиям;
- собеседования при сдаче экзамена.

В течение семестра каждый студент получает по 5 индивидуальных домашних заданий и одну тему для написания реферата.

7.1. Примеры индивидуальных домашних заданий

Задание 1

- Что такое случайная величина. Что необходимо знать о случайной величине, чтобы описать ее математически? Каков минимальный набор числовых характеристик и в чем заключается полное, исчерпывающее описание случайной величины.
- Эксперимент состоит в бросании монеты n раз. Что является элементарным исходом данного эксперимента? Постройте пространство элементарных событий, обозначив через Γ событие «выпал герб», через P – «выпала решетка». Сколько элементов содержит пространство элементарных событий?
- Техническая система состоит из пяти элементов:



Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что i -й элемент работает безотказно в течение времени t . Выразите через A_i событие, состоящее в том, что вся система в течение времени t работает безотказно. Найти вероятность отказа

системы, предполагая, что отказы отдельных элементов независимы, а вероятность безотказной работы каждого элемента равна $p_i = 0.9$.

Задание 2

- Как строится доверительная область для эмпирической функции распределения?
- Докажите, что дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D[X + Y] = DX + DY.$$

Указание: воспользуйтесь формулами

$$DX = M(X^2) - (MX)^2, \quad M[X \cdot Y] = MX \cdot MY$$

- Десять студентов проходят тестирование по пятибалльной системе (отлично – 5, хорошо – 4, удовлетворительно – 3, плохо – 2, очень плохо – 1), т.е. каждый из них может набрать от 1-го до 5-ти баллов включительно. Что в данном опыте представляет собой генеральная совокупность, перечислите элементы генеральной совокупности. Что представляет собой выборка; приведите пример выборки. Оформите выборку в виде вариационного ряда. Найдите эмпирическую функцию распределения выборки, изобразите ее графически. Постройте полигон относительных частот. Вычислите выборочное среднее, выборочную дисперсию, среднеквадратичное отклонение, размах выборки, моду и медиану.

Задание 3

- Приведите точечную и интервальную оценки истинного значения измеряемой величины.
- Используя неравенство Чебышева докажите следующее утверждение: если оценка $\hat{\theta}_n$ параметра θ , вычисленная по выборке объема n , является несмещенной и ее дисперсия стремится к нулю с увеличением объема выборки, т.е. $D(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\hat{\theta}_n$ - состоятельная оценка.
- Для проверки «правильности» (симметричности) игральной кости был проведен опыт, состоящий из 60-ти бросков. Результаты опыта приведены в таблице. Используя критерий хи-квадрат, проверьте на 5%-ном уровне значимости гипотезу «кость симметрична».

Количество выпавших очков	1	2	3	4	5	6
Частота	10	9	8	9	16	8

Задание 4

- Какие измерения называются косвенными? В чем заключается задача обработки косвенных измерений? Приведите пример.
- В чем состоит задача подбора эмпирической формулы? Каков критерий эффективности той или иной формулы?
- Таблицу экспериментально полученных значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ предполагается аппроксимировать с использованием зависимости

$$y = \frac{1}{a + be^{-x}}.$$

Опишите алгоритм вычисления входящих в эту формулу коэффициентов a, b ; дайте геометрическую интерпретацию рассматриваемой зависимости. В каких случаях при поиске эмпирической формулы целесообразно использовать указанную функцию?

Задание 5

- Опишите последовательность действий при сглаживании эмпирических данных по пяти точкам.
- Функция $y = f(x)$ задана на интервале $[a, b]$ со среднеквадратичной ошибкой $\sigma = 0.01$. Найти оптимальный шаг численного дифференцирования и оценить предельную точность, с которой может быть вычислена производная $y' = f'(x)$ при $x \in [a, b]$, если использовать центральную разностную производную

$$f(x) = -x + \cos(x), \quad a = -\pi, \quad b = \pi.$$

- По результатам, приведенным в таблице, постройте интерполяционный многочлен, используя три способа: метод неопределенных коэффициентов, запись многочлена в форме Лагранжа, запись многочлена в форме Ньютона. Убедитесь, что все три способа приводят к одному и тому же результату

Номер узла i	0	1	2	3
x_i	-1	0	2	3
y_i	5	2	8	17

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Для выполнения лабораторно-практических работ с использованием системы Mathcad каждый студент получает индивидуальное задание. В комплект учебно-методического материала для проведения лабораторных работ входит следующее:

- Краткое изложение теоретического материала, необходимого для выполнения каждой лабораторной работы.
- Подробное описание последовательности действий при выполнении задания.
- Конкретный пример выполнения задания, с иллюстрацией применения того или иного метода и встроенных функций системы Mathcad.
- Кроме этого, на компьютерах кафедры подготовлено краткое изложение лекционного курса, оформленного в виде документов PowerPoint, обратившись к которому студент может получить справку по всем вопросам, необходимым для выполнения индивидуальных заданий.

Основная литература

1. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. – М.: Физматлит, 2005.
2. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968.
3. Румшицкий Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971.
4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994, 2003, 2008.

Дополнительная литература

1. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике. – М.: Наука, 1977.
2. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1965.
3. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006.
4. Крянев А.В., Лукин Г.В. Математические методы обработки неопределенных данных. – М.: Физматлит, 2006.
5. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2007 (1973, 1984).
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 1987, 2008.

Интернет-ресурсы

1. <http://www.exponenta.ru/>
2. <http://www.statsoft.ru/home/portal/>
3. <http://www.statsoft.ru/home/textbook/default.htm>
4. <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>
5. <http://protein.bio.msu.su/~akula/Podr2~1.htm>

8. Материально-техническое обеспечение модуля (дисциплины)

При изучении основных разделов дисциплины и проведении лабораторно- практических работ студенты используют компьютеры и специализированное программное обеспечение.