ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Примеры задач линейного программирования

1. ***Задача об использовании сырья***

Предположим, что изготовление продукции двух видов $П_1$ и $П_2$ требует использования четырех видов сырья S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы сырья каждого вида ограничены и составляют соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 условных единиц. Количество единиц сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, известно и задается табл. 1.

Таблица 1

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		$П_1$	$П_2$
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Доход		c_1	c_2

Здесь $a_{ij}\left(i=1,...,4;\ j=1,2\right)$ означает количество единиц сырья вида S_i, необходимое для изготовления продукции вида $П_j$. В последней строке таблицы указан доход, получаемый предприятием от реализации одной единицы каждого вида продукции.

Требуется составить такой план выпуска продукции видов $П_1$ и $П_2$, при котором доход предприятия от реализации всей продукции оказался бы максимальным.

Математическую форму поставленной задачи изучим на следующем числовом примере (см. табл. 2).

Таблица 2

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		$П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Доход		7	5

Допустим, что предприятие выпускает x_1 единиц продукции вида $П_1$ и x_2 единиц продукции вида $П_2$.

Для этого потребуется $2x_1 + 3x_2$ единиц сырья S_1 (см. табл. 2).

Так как в наличии имеется всего 19 единиц сырья S_1, то должно выполняться неравенство

$$2x_1 + 3x_2 \leq 19.$$

Неравенство (а не точное равенство) появляется в связи с тем, что максимальный доход может быть достигнут предприятием и в том случае, когда запасы сырья вида S_1 используются не полностью.

Аналогичные рассуждения, проведенные для остальных видов сырья, позволяют написать следующие неравенства:

$$2x_1 + x_2 \le 13, \quad \text{(сырье } S_2\text{)},$$

$$3x_2 \le 15, \quad \text{(сырье } S_3\text{)},$$

$$3x_1 \le 18. \quad \text{(сырье } S_4\text{)}.$$

При этих условиях доход F, получаемый предприятием, составит

$$F = 7x_1 + 5x_2.$$

Таким образом, математически задачу можно сформулировать так.

Дана система

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 19, \\ 2x_1 + x_2 &\le 13, \\ 3x_2 &\le 15, \\ 3x_1 &\le 18 \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

четырех линейных неравенств и линейная форма

$$F = 7x_1 + 5x_2. \qquad (6.2)$$

Требуется среди неотрицательных решений системы (6.1) выбрать такое, при котором форма F принимает наибольшее значение (максимизируется).

2. Задача об использовании мощностей оборудования

Предположим, что предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить N_1 единиц продукции вида $П_1$ и N_2 вида $П_2$.

Каждый из видов продукции может производиться двумя машинами A и B с различными мощностями. Эти мощности заданы в табл. 3.

Таблица 3

	$П_1$	$П_2$
A	a_1	a_2
B	b_1	b_2

Таблица 4

	$П_1$	$П_2$
A	α_1	α_2
B	β_1	β_2

Таблица 5

	$П_1$	$П_2$
A	x_1	x_2
B	x_3	x_4

Расходы, вызванные изготовлением каждого из видов продукции на той или иной машине, различны и задаются табл. 4. В этой таблице α_1 выражает цену единицы рабочего времени машины A при изготовлении продукции вида $П_1$. Смысл остальных величин α_2, β_1, β_2 аналогичен.

Требуется составить оптимальный (наиболее рациональный) план работы машин, а именно найти, сколько времени каждая из машин A и B должна быть занята изготовлением каждого из видов продукции $П_1$ и $П_2$ с тем, чтобы стоимость всей продукции предприятия оказалась минимальной и в то же время был бы выполнен заданный план как по времени, так и по номенклатуре.

Найдем математическую формулировку поставленной задачи. Введем для неизвестных нам времен работы машин по изготовлению продукции обозначения таблицы 5.

В этой таблице, например, x_1 означает время работы машины A по изготовлению продукции Π_1. Аналогичный смысл имеют величины x_2, x_3, x_4.

Поскольку машины A и B работают одновременно, то выполнение плана по времени будет обеспечиваться неравенствами

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le T, \\ x_3 + x_4 &\le T. \end{aligned}\right\}$$

Изготовлением продукции $П_1$ машина A занята x_1 единиц времени. При этом за единицу времени она производит a_1 единиц продукции этого вида. Следовательно, всего машина A изготовляет $a_1 \cdot x_1$ единиц продукции $П_1$.

Аналогично машина B изготовит $b_1 \cdot x_3$ единиц продукции вида $П_1$.

Поэтому для обеспечения плана по номенклатуре должно выполняться равенство

$$a_1 x_1 + b_1 x_3 = N_1.$$

Аналогично для обеспечения плана по продукции $П_2$ необходимо выполнение равенства

$$a_2 x_2 + b_2 x_4 = N_2.$$

Далее, из условий задачи вытекает, что общая стоимость всей продукции составит

$$F = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4.$$

В итоге мы приходим к следующей математической задаче:

Задана система

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \le T,\\
&x_3 + x_4 \le T,\\
&a_1 x_1 + b_1 x_3 = N_1,\\
&a_2 x_2 + b_2 x_4 = N_2
\end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

двух линейных неравенств и двух линейных уравнений и задана линейная форма

$$F = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4. \qquad (6.4)$$

Требуется среди всех *неотрицательных* решений системы (6.3) найти такое, при котором форма F принимает наименьшее значение (минимизируется).

3. Транспортная задача

На двух станциях отправления A_1 и A_2 сосредоточено соответственно a_1 и a_2 единиц некоторого однородного груза. Этот груз следует доставить в три пункта назначения B_1, B_2, B_3. Причем в каждый из них должно быть завезено соответственно b_1, b_2, b_3 единиц этого груза.

Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j обозначим через C_{ij} и будем считать заданной. Все данные полезно свести в табл. 6.

Таблица 6

Пункты назначения / Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1 A_2	c_{11} c_{21}	c_{12} c_{22}	c_{13} c_{23}	a_1 a_2
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i = \sum b_j$

Будем считать, что общий запас грузов на станциях отправления равен суммарной потребности в этом грузе всех станций назначения. Тогда

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3. \qquad (6.5)$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором их общая стоимость была бы наименьшей.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, предназначенного к отправке из пункта A_i в пункт B_j. Тогда количество груза, который планируется к доставке в пункт B_1 из пунктов A_1 и A_2, составит

$$x_{11} + x_{21}.$$

Так как потребность в грузе B_1 равна b_1, то должно выполняться равенство:

$$x_{11} + x_{21} = b_1.$$

Аналогично получим равенства

$$x_{12} + x_{22} = b_2,$$

$$x_{13} + x_{23} = b_3.$$

С другой стороны, общее количество груза, отправленного со станции A_1, выражается суммой

$$x_{11} + x_{12} + x_{13},$$

которая, очевидно, обязана совпадать с запасом a_1 груза, сосредоточенным на этой станции, то есть

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1.$$

Подобно этому

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2.$$

Из условий задачи с очевидностью вытекает, что общая стоимость F всех перевозок равна

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

Таким образом, математическая формулировка транспортной задачи (по критерию стоимости перевозок) такова. Задана система

$$\left.\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} = b_1,\\
&x_{12} + x_{22} = b_2,\\
&x_{13} + x_{23} = b_3,\\
&x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1,\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

пяти линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными и линейная форма

$$F=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=\sum_{i,j}c_{ij}x_{ij}. \qquad (6.7)$$

Требуется среди всех неотрицательных решений x_{ij} системы (6.6) выбрать такое, при котором форма F минимизируется (достигает наименьшего значения).

Отметим, что при решении транспортной задачи следует учитывать важное соотношение, вытекающее из самого условия задачи:

$$\sum_{i}a_i=\sum_{j}b_j. \qquad (6.5')$$

4. Задача о питании

Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки некоторое количество питательных веществ, например белков, жиров, углеводов, воды и витаминов. Запасы этих ингредиентов в различных видах $\pi_i \left(i = 1, 2, ...\right)$ пищи различны. Ограничимся для простоты двумя видами пищи и зададим таблицу 7, в которой, например, число a_{11} указывает на запасы жиров в пище вида π_1. Смысл остальных чисел a_{ij} аналогичен.

Таблица 7

Питательные вещества	Норма	Виды пищи	
		π_1	π_2
B_1– жиры B_2– белки B_3– углеводы B_4– вода B_5– витамины	b_1 b_2 b_3 b_4 b_5	a_{11} a_{21} a_{31} a_{41} a_{51}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42} a_{52}
Стоимость		c_1	c_2

Предположим далее, что стоимость некоторой единицы пищи вида π_i составляет c_i.

Требуется так организовать питание, чтобы стоимость его была наименьшей, но организм получил бы не менее минимальной суточной нормы питательных веществ всех видов $B_i\left(i=1,2,...,5\right)$.

Математически задачу о питании можно сформулировать так.

Задана система из пяти линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i,\ (i = 1, \ldots, 5) \qquad (6.8)$$

и линейная форма относительно этих же неизвестных:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2. \qquad (6.9)$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (6.8) найти такое, которое сообщает форме F наименьшее значение (минимизирует F).

Несмотря на внешнюю непохожесть (в особенности по содержанию) задач 6.1 – 6.4, нельзя не заметить родственности их математической формы.

Более того, далее мы покажем, что все эти различные примеры с помощью определенных приемов, в конце концов, сводятся к одной и той же задаче.

Она называется основной задачей линейного программирования.

Полученные соотношения легче запомнить, если все величины свести в так называемую *матрицу перевозок* (табл. 7). Тогда легко проверить, что сумма всех x_{ij}, расположенных на i-ой строке, равна запасу a_i в пункте назначения A_i. Сумма же всех x_{ij} из столбца j равна потребности b_j пункта назначения B_j.

Таблица 7

Пункты назначения / Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	

Основная задача линейного программирования

Основная задача линейного программирования состоит в следующем. Задана система

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1,...,x_n$ и линейная форма относительно этих же неизвестных:

$$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n + c_0. \tag{6.11}$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (6.10) выбрать такое, при котором форма F принимает наименьшее значение (минимизируется).

Определение: Система (6.10) называется системой ограничений данной задачи.

Сами равенства (6.10) называются ограничениями-равенствами.

Отметим, что кроме ограничений-равенств в основную задачу входят также ограничения-неравенства $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Определение: Всякое неотрицательное решение $x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}\left(x_i^{(0)} \geq 0;\ i=1,...,n\right)$ системы (6.10) назовем ***допустимым***. Допустимое решение часто называют *планом задачи линейного программирования*.

Определение: Допустимое решение системы (6.10), минимизирующее форму F, назовем ***оптимальным***.

Рассмотрим более подробно ограничения системы (6.10). Задача имеет смысл лишь в том случае, когда система (6.10) совместна, то есть когда (согласно теореме Кронекера-Капелли) ранги основной и расширенной матриц системы совпадают.

Этот общий ранг r не может превосходить числа n неизвестных. При $r = n$ решение $x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ системы (6.10) единственно. Если это решение допустимо, то оно является оптимальным, так как никаких других решений вообще нет.

Если же среди чисел $x_i^{(0)}$ имеется хотя бы одно отрицательное, то задача не имеет решения.

Таким образом, интерес представляет лишь случай $r < n$, и только он будет нами рассматриваться в дальнейшем.

Каждую задачу линейного программирования можно свести к форме основной задачи. Для этого нужно:

1. Уметь сводить задачу максимизации к задаче минимизации.
2. Уметь переходить от ограничений, заданных в виде неравенств, к некоторым им эквивалентным ограничениям-равенствам.

Покажем, как это сделать.

1. Очевидно, что форма F достигает наибольшей величины при тех же самых значениях неизвестных $x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}$, при которых форма $F_1 = -F$ достигает наименьшей величины.

Следовательно, максимизация формы F равносильна минимизации формы $F_1 = -F$. Тем самым задача максимизации сводится к задаче минимизации.

2. Допустим теперь, что среди ограничений задачи имеется некоторое неравенство.
Его всегда можно записать в виде

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta \geq 0. \qquad (6.12)$$

Введем новую, так называемую добавочную, неизвестную, связанную с неизвестными $x_1,\ldots,x_n$ уравнением

$$x_{n+1} = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta. \qquad (6.13)$$

Очевидно, что условие неотрицательности величины x_{n+1} эквивалентно выполнимости неравенства (6.12).

Иными словами, если система $x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},x_{n+1}^{(0)}$ неотрицательных значений $x_1,\dots,x_n,x_{n+1}$ удовлетворяет уравнению (6.13), то система $x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}$ удовлетворяет неравенству (6.12).

И обратно, если величины $x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}$ неотрицательны и удовлетворяют неравенству (6.12), то величина $x_{n+1} = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n + \beta$, найденная из уравнения (6.13), окажется неотрицательной.

Итак, ограничение-наравенство (6.12) эквивалентно ограничению-равенству (6.13).
Следовательно, ценою введения в задачу добавочных неизвестных удается все ограничения-неравенства заменить ограничениями-равенствами.
При этом число добавочных неизвестных равно числу ограничений-неравенств в исходной задаче.

Задача 1: Если все члены неравенств системы ограничений (6.1) этой задачи перенести в правую часть, то они примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&0 \le 19 - 2x_1 - 3x_2,\\
&0 \le 13 - 2x_1 - x_2,\\
&0 \le 15 - 3x_2,\\
&0 \le 18 - 3x_1.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

Введем четыре добавочные неизвестные и перейдем к новой системе ограничений-равенств:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 &= 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 &= 15 - 3x_2, \\ x_6 &= 18 - 3x_1. \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

Вместо максимизации формы $F = 7x_1 + 5x_2$ будем минимизировать форму $F_1 = -7x_1 - 5x_2$.

Итак, мы получили основную задачу линейного программирования.

Часто оказывается полезным, а для некоторых целей (например, для геометрического толкования) необходимым свести основную задачу линейного программирования к другой, эквивалентной ей задаче.

Все ограничения этой эквивалентной задачи состоят только из неравенств. К рассмотрению этой задачи мы и переходим.

Основная задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами

Рассмотрим систему (6.10) ограничений-равенств основной задачи и рассмотрим случай $r < n$ (r – ранг системы, n – число неизвестных).

Из линейной алгебры известно, что в этом случае r неизвестных линейно выражаются через остальные $r-n=k$ неизвестных (эти последние принято называть свободными).

Всегда можно занумеровать неизвестные так, чтобы последние $x_{k+1},..., x_n$ выразились через первые $x_1,..., x_k$ (поскольку $n = k - r$, то неизвестных $x_{k+1},..., x_n$ в точности r штук).

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \beta_1, \\ x_{k+2} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k + \beta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rk}x_k + \beta_r. \end{array}\right\} \quad (6.16)$$

Система (6.16) эквивалентна системе (6.10).

Если теперь вместо величин $x_{k+1},...,x_n$ в выражении для формы F подставить их значения из (6.16), то форма F примет другой вид:

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + ... + \gamma_k x_k, \qquad (6.17)$$

то есть по-прежнему остается линейной, но выразится только через свободные неизвестные $x_1,...,x_k$.

Решая основную задачу, мы ограничиваемся лишь неотрицательными решениями системы (6.10) (или системы (6.16)). Поэтому с необходимостью должны выполняться неравенства

$$x_i \geq 0, (i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (6.18)$$

Если при этом учесть равенства (6.16), то получаем для $i = k+1,\ k+2, \ldots, n$ неравенства

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le a_{11}x_1 + \ldots + \beta_1, \\ 0 \le a_{21}x_1 + \ldots + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \le a_{r1}x_1 + \ldots + \beta_r. \end{array}\right\}$$

Для свободных неизвестных $x_i \, (i = 1, 2, ..., k)$ переписываем неравенства (6.18) и приходим к системе

$$
\left.
\begin{array}{l}
x_1 \ge 0, \\
\dots\dots\dots \\
x_k \ge 0, \\
\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \beta_1 \ge 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{r1}x_1 + \ldots + \alpha_{rk}x_k + \beta_r \ge 0,
\end{array}
\right\} \qquad (6.19)
$$

содержащей n линейных неравенств относительно k неизвестных.

Ясно, что каждому допустимому решению системы (6.16) отвечает решение системы неравенств (6.19). И обратно, взяв произвольное решение $x_1^{(0)},...,x_k^{(0)}$ системы (6.16) и найдя по формулам (6.16) величины $x_{k+i}^{(0)}=\alpha_{i1}^{(0)}x_1+...+\alpha_{ik}^{(0)}x_k+\beta_i,\ \left(i=1,...,r\right)$, получим, очевидно, неотрицательное решение системы (6.16), а значит, и системы (6.10).

Тем самым вместо того, чтобы искать неотрицательные решения системы (6.10), можно искать все решения системы неравенств (6.19).

В результате мы пришли к следующей математической задаче. Дана система (6.19), содержащая n линейных неравенств относительно k неизвестных $x_1, \ldots, x_k$ и линейная форма (6.17) относительно тех же неизвестных.

Требуется среди всех решений системы (6.19) выбрать такое, при котором форма F достигает наименьшего значения. Такое решение будем называть, как и прежде, оптимальным.

Очевидно, что основная задача линейного программирования эквивалентна только что сформулированной задаче.
Эту задачу естественно называть основной задачей линейного программирования с ограничениями-неравенствами.
Для краткости назовем ее основной задачей в форме (A) или просто задачей (A).

Геометрическое толкование задач линейного программирования

Геометрический смысл основной задачи линейного программирования становится предельно прозрачным, если перейти от нее к эквивалентной ей задаче с ограничениями-неравенствами, то есть к задаче (A):

Дана система

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 \geq 0, \\
&x_2 \geq 0, \\
&\dots\dots\dots \\
&x_k \geq 0, \\
&\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \beta_1 \geq 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\alpha_{r1}x_1 + \ldots + \alpha_{rk}x_k + \beta_r \geq 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (6.19)$$

содержащая $n = k + r$ линейных неравенств относительно k неизвестных $x_1, \ldots, x_k$, и линейная форма

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_k x_k \qquad (6.17)$$

относительно тех же неизвестных.

Требуется среди ***всех решений*** системы (6.19) выбрать такое, которое минимизирует форму F.

Рассмотрим снова задачу 1.
В форме (А) она имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 \geq 0,\\
&x_2 \geq 0,\\
&19 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0,\\
&13 - 2x_1 - x_2 \geq 0,\\
&15 - 3x_2 \geq 0,\\
&18 - 3x_1 \geq 0.
\end{aligned}\right\}$$

$$F_1 = -7x_1 - 5x_2.$$

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат x_1Ox_2. Известно, что геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют системе линейных неравенств, образует выпуклый многоугольник.

Этот многоугольник называется многоугольником решений данной системы неравенств.

Стороны этого многоугольника располагаются на прямых, уравнения которых получаются, если в неравенствах системы знаки неравенств заменить точными равенствами.

Сам же этот многоугольник есть пересечение полуплоскостей, на которые делит плоскость каждая из указанных прямых.
В нашем случае такими прямыми являются

$$\left.\begin{array}{ll}
x_1 = 0, & \text{(I)} \\
x_2 = 0, & \text{(II)} \\
19 - 2x_1 - 3x_2 = 0, & \text{(III)} \\
13 - 2x_1 - x_2 = 0, & \text{(IV)} \\
15 - 3x_2 = 0, & \text{(V)} \\
18 - 3x_1 = 0. & \text{(VI)}
\end{array}\right\}$$

Вычертим эти прямые (рис. 13).
На этом рисунке стрелки указывают, какие полуплоскости в пересечении дают многоугольник решений.

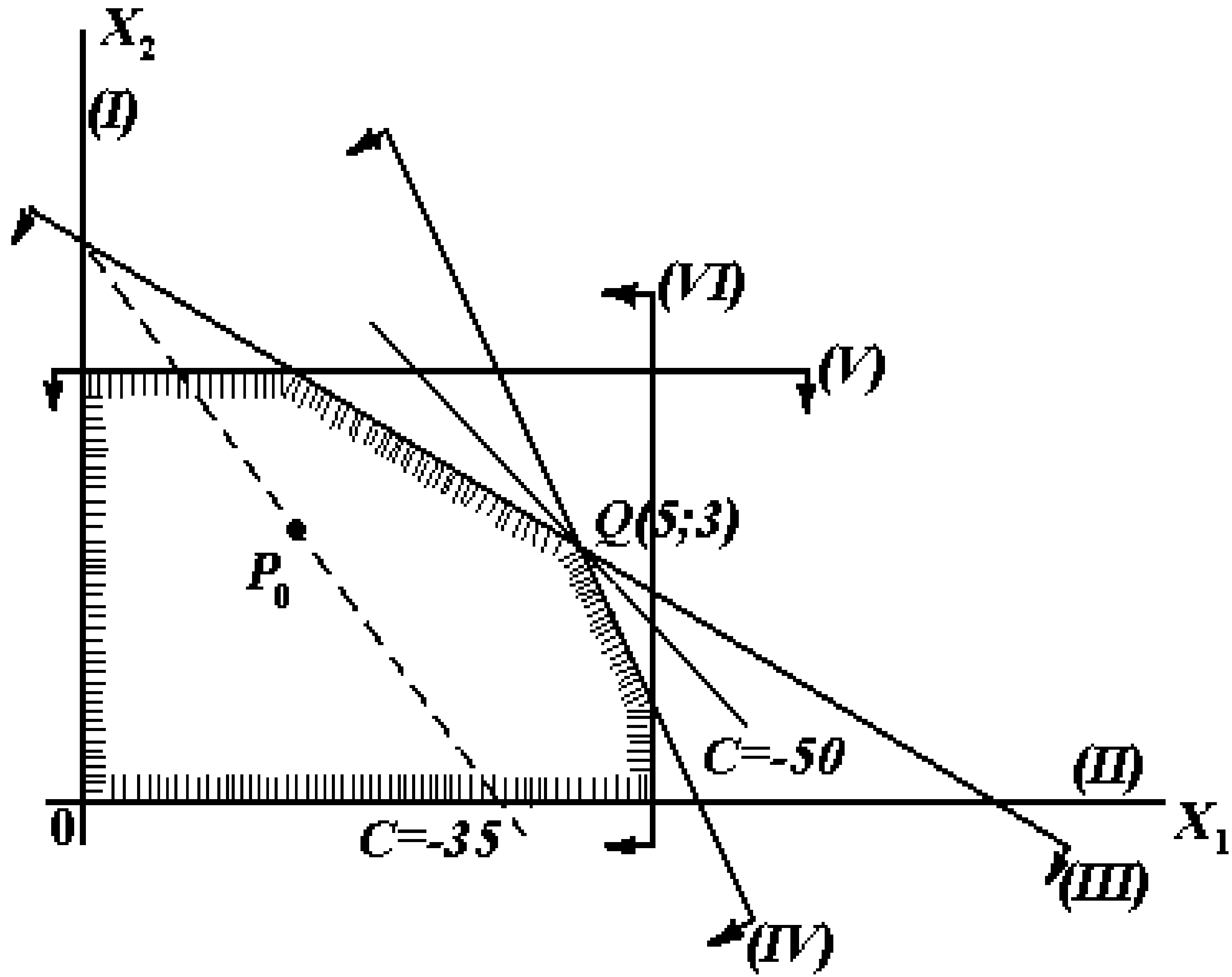

Рис. 13

Наряду с этим рассмотрим форму

$$F_1 = -7x_1 - 5x_2,$$

которая является линейной функцией координат (x_1, x_2) точки на плоскости.

Линии уровня формы F_1 определяются уравнением

$$-7x_1 - 5x_2 = C. \tag{6.20}$$

Меняя значение C, получаем различные прямые, однако все они параллельны между собой, то есть образуют семейство ***параллельных прямых***.

На рис. 14 показаны линии уровня формы F_1 при различных значениях константы C.

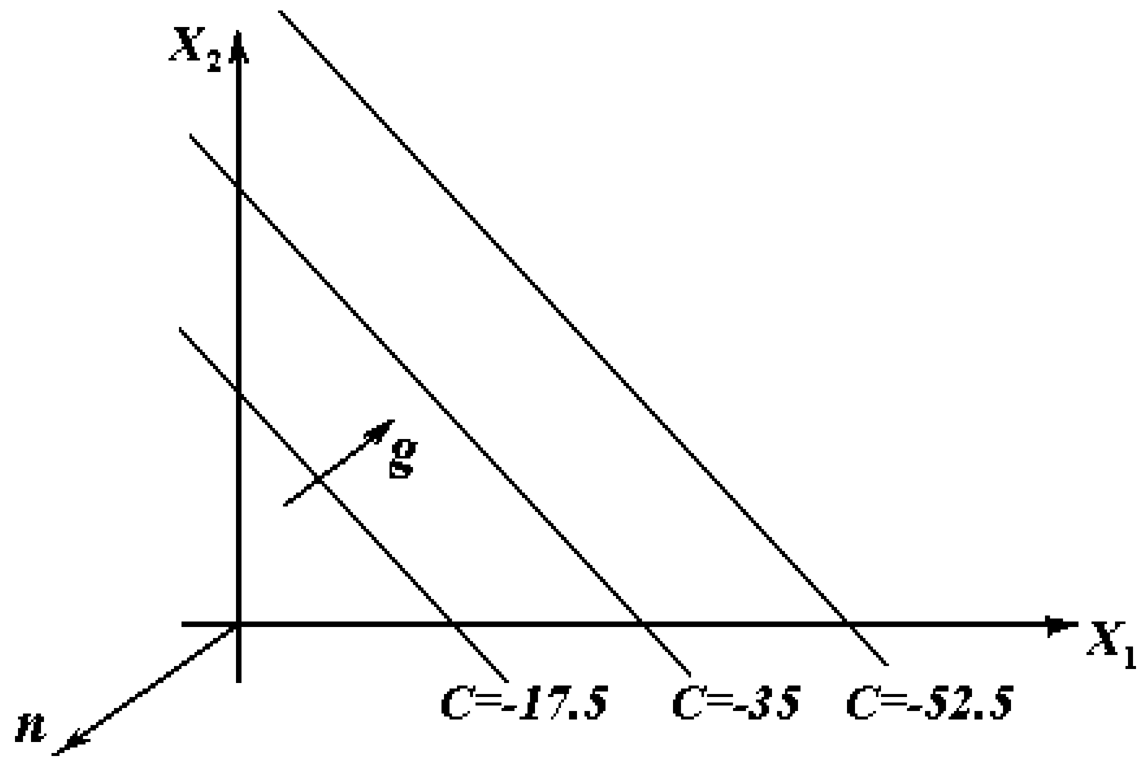

Рис. 14

При переходе от одной прямой к другой значение формы F_1 изменяется. Вектор $\boldsymbol{g}$ указывает направление, двигаясь в котором мы переходим от больших значений формы к меньшим.

Из аналитической геометрии известно, что коэффициенты при переменных в уравнении прямой – это проекции вектора нормали n, перпендикулярного прямой.

В нашем случае $n=\{-7; -5\}$.

Мы видим, что направление убывания формы F_1 противоположно направлению вектора n.

Обратимся вновь к рис. 13. Рассмотрим любую точку $P_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$ многоугольника решений.

Через эту точку проходит прямая семейства (6.20).

Вдоль всей этой прямой форма F_1 принимает такое же значение, как и в точке P_0, т. е. $C_0 = -7x_1^{(0)} - 5x_2^{(0)}$.

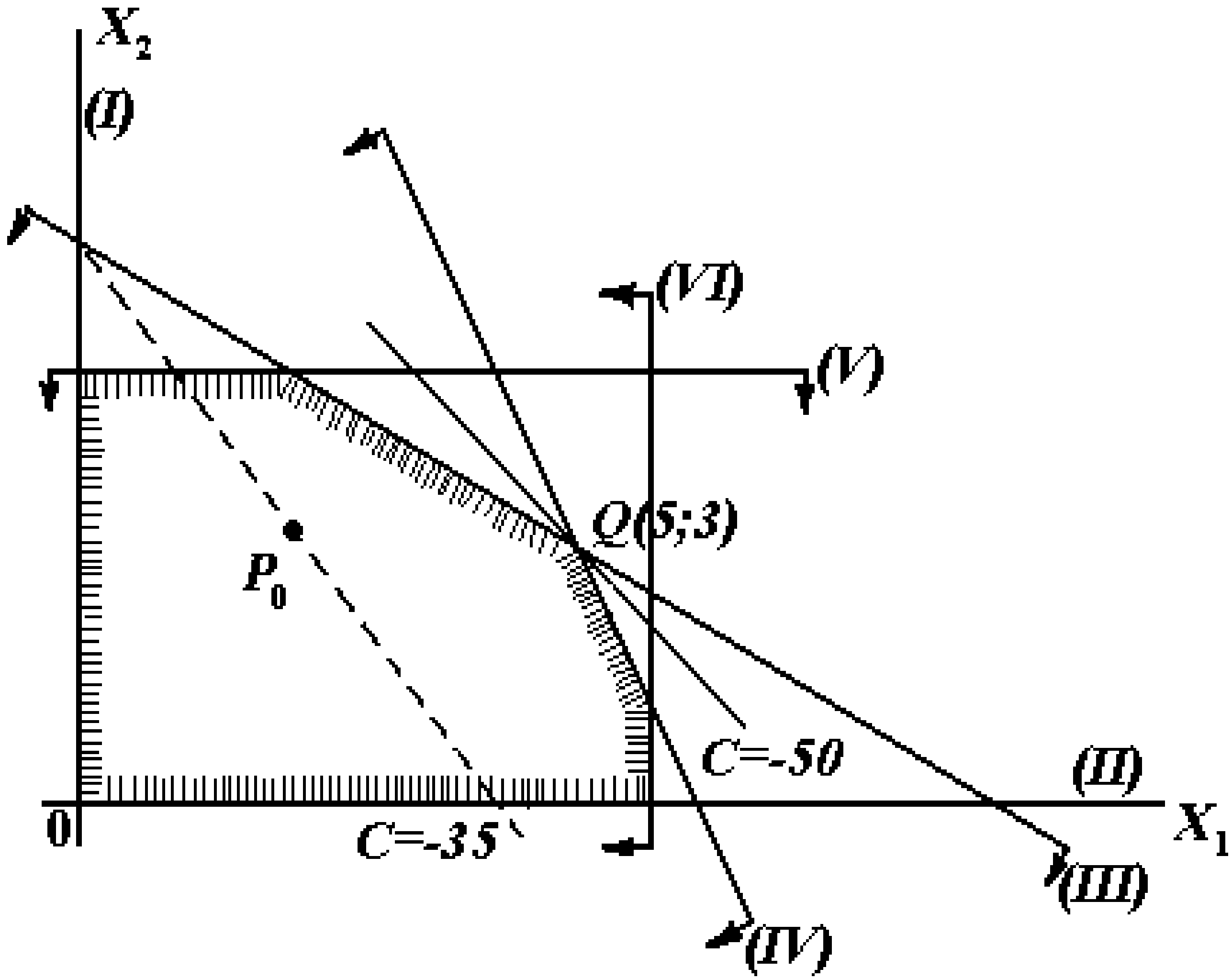

Рис. 13

На рис. 13 пунктиром показана прямая, отвечающая значению $C = -35$. Очевидно, что точка P_0 не соответствует оптимальному решению задачи.

Действительно, внутри многоугольника решений можно найти точки, отвечающие значениям формы меньшим, чем C_0.
Для этого достаточно перейти в направлении вектора g от прямой C_0 к другой параллельной ей прямой семейства (6.20), все еще пересекающей многоугольник решений.

Видно, что оптимальное решение соответствует вершине многоугольника решений Q, в которой пересекаются прямые III и IV.

Решая совместно уравнения, соответствующие прямым III и IV, определим координаты искомого минимума.

В результате найдем оптимум $Q(5, 3)$, и наименьшее значение формы F_1 будет

$$F_{1\min} = -7 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = -50.$$

Итак, оптимальное решение задачи 1 найдено: $x_1 = 5,\ x_2 = 3$.

Если вспомнить условие этой задачи, то мы видим, что для наиболее рационального плана использования сырья, гарантирующего предприятию наибольший доход, следует выпускать 5 единиц продукции вида Π_1 и 3 единицы вида Π_2. При этом максимальный доход составит $F_{\max} = -F_{1\min} = 50$. Отметим, что при этом сырье видов S_1 и S_2 используется полностью, а S_3 и S_4 не полностью.

Задача 4.

Решим задачу о питании, принимая для известных по условию задачи величин следующие числовые значения (они носят иллюстрированный характер и не соответствуют действительности):

Таблица 9

Питательные вещества	Минимальная норма	Виды пищи	
		π_1	π_2
B_1-жиры	10	1	5
B_2-белки	12	3	2
B_3-углеводы	16	2	4
B_4-вода	10	2	2
B_5-витамины	1	1	0
Стоимость		2	3

Ограничения (6.8) и минимизируемая форма (6.9) задачи 4, при выбранных выше данных примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 + 5x_2 \geq 10, && \text{(I)}\\
&3x_1 + 2x_2 \geq 12, && \text{(II)}\\
&2x_1 + 4x_2 \geq 16, && \text{(III)}\\
&2x_1 + 2x_2 \geq 10, && \text{(IV)}\\
&x_1 \geq 1, && \text{(V)}\\
&x_2 \geq 0, && \text{(VI)}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

$$F = 2x_1 + 3x_2. \qquad (6.22)$$

Неравенство $x_1 \geq 0$ не включено в систему (6.21) потому, что оно является следствием неравенства (V): $x_1 \geq 1$.

Вычертим многоугольник решений и одну из линий уровня формы (рис. 15).

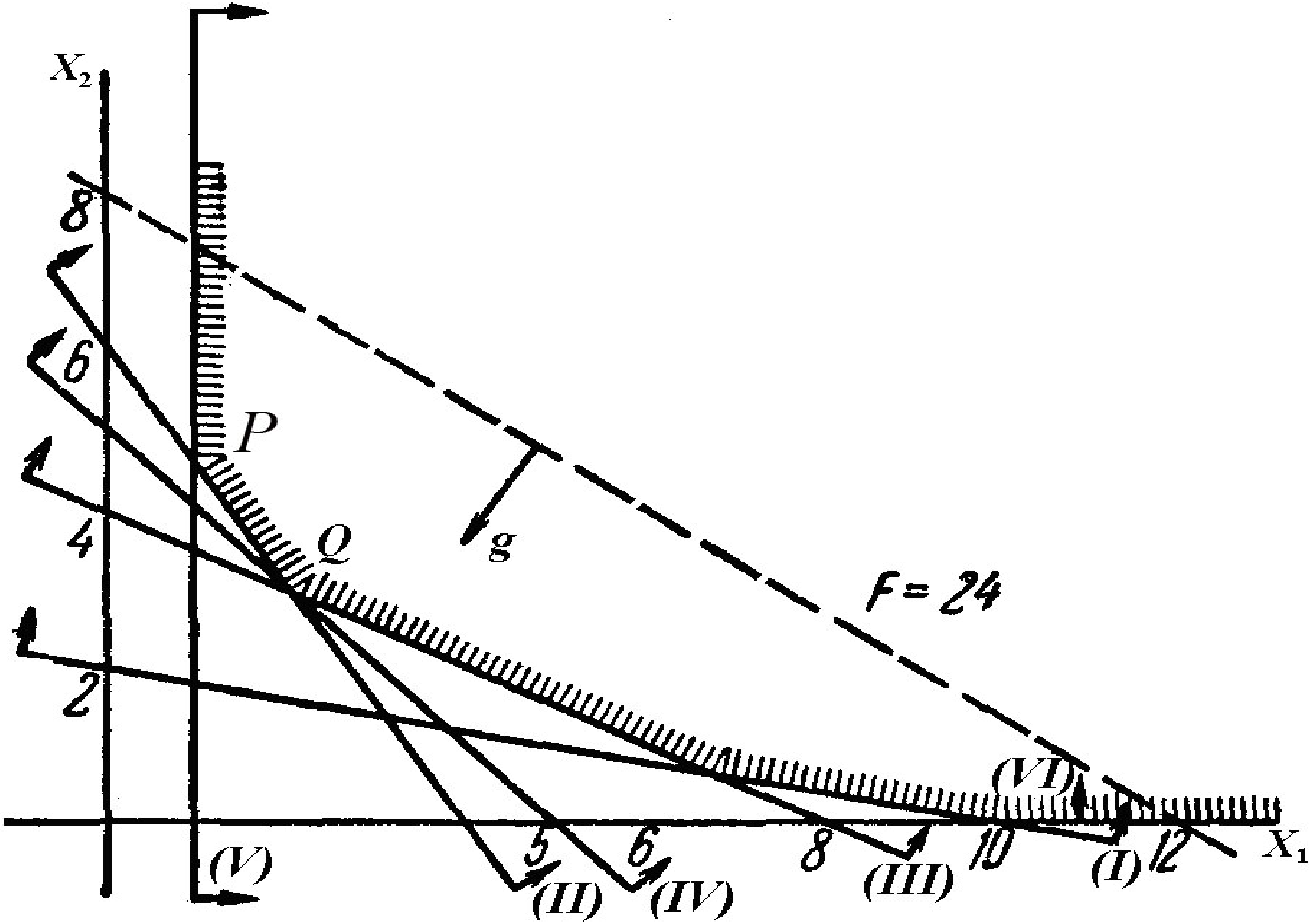

Рис. 15

Оптимальное решение достигается в точке $Q(2;\ 3)$ (Это точка пересечения прямых II, III, и IV).

Следовательно, $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ F = 13.$

Отметим, что в рассматриваемой задаче «многоугольник» решений неограничен сверху и потому не существует на этом многоугольнике наибольшего значения формы F. Это означает, очевидно, что питание можно организовать сколь угодно дорого.

Замечание: Изменим теперь стоимости видов пищи π_1 и π_2.

Зададим их равными соответственно 3 и 2 единицам.

В этом случае минимизировать следует форму

$$F = 3x_1 + 2x_2.$$

Линии уровня этой формы будут параллельны стороне PQ{II} многоугольника решений.
Оптимум формы достигается в любой точке стороны PQ (эта сторона располагается на линии уровня F'=12).

Вывод: Решенные задачи свидетельствуют о справедливости следующего положения: если оптимальное решение задачи существует и единственно, то оно достигается в некоторой вершине многоугольника решений.

Если же оптимальное решение не единственное, то таких решений бесчисленное множество, и они достигаются ***во всех точках некоторой стороны***
(и, в частности, в ограничивающих эту сторону вершинах) ***многоугольника***.

Таким образом, всегда найдется вершина многоугольника решений, в которой достигается оптимальное решение (если оно, конечно, существует).

В рассмотренных задачах число переменных, входящих в систему ограничений-неравенств, равнялось двум. Это обстоятельство давало возможность изобразить область решений системы неравенств в виде многоугольника на плоскости.

Рассмотрим простой пример задачи (А), когда число переменных равно трем. Зададим систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} &x_1 \geq 0, \\ &x_2 \geq 0, \\ &x_3 \geq 0, \\ &x_1 \leq 2, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 4. \end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

Требуется в области решений этой системы минимизировать форму

$$F = -x_1 - 2x_2 - 3x_3.$$

Введем в пространстве прямоугольную систему координат x_1, x_2, x_3. Известно, что геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе линейных неравенств, образует выпуклый многогранник, называемый многогранником решений данной системы.

Грани этого многогранника расположены на плоскостях, уравнения которых получаются, если в неравенствах системы знак неравенства заменить точным равенством.

Сам многогранник решений является пересечением полупространств, на которые делит пространство каждая из указанных плоскостей. Вычертим эти плоскости (рис. 16).

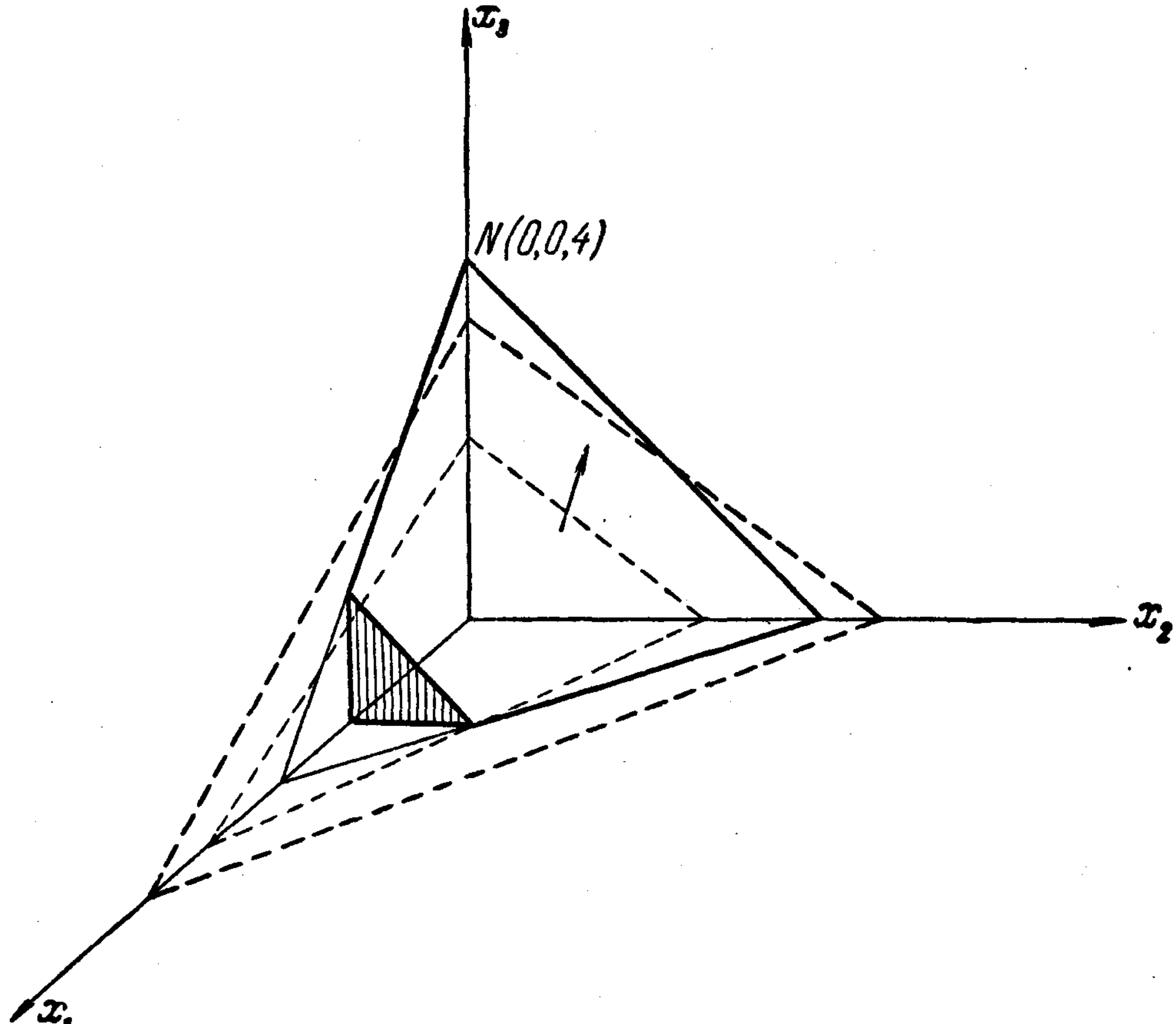

Рис. 16

Форма $F = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$ является линейной функцией координат (x_1, x_2, x_3) точек пространства. Координаты всех точек, в которых форма принимает одно и то же фиксированное значение C, удовлетворяют уравнению $F = C$, или, подробнее,

$$F = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = C. \qquad (6.24)$$

Это уравнение определяет в пространстве плоскость, называемую поверхностью уровня (поверхностью равных значений) формы F.

Придавая C различные значения, получим семейство (6.24) параллельных между собой плоскостей. Переход от одной плоскости к другой сопровождается изменением значений формы F.

На рис. 16 изображены две плоскости:

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6,$$

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -10,$$

отвечающие значениям F, равным соответственно -6 и -10.

Вектор на рис. 16 указывает направление, двигаясь в котором мы переходим от больших значений формы к меньшим.

Коэффициенты при переменных в уравнении плоскости есть проекции вектора n, перпендикулярного к плоскости. Мы видим, что в нашем случае вектор $n = \{-1, -2, -3\}$ и его направление противоположно направлению, в котором убывает форма F.

Из чертежа видно, что наименьшее значение формы достигается в вершине $N(0,0,4)$.

Следовательно, оптимальным будет решение

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4,$$

$$F_{\min} = -12.$$

Замечание.
Отметим, что в пространстве, как и на плоскости, оптимальное решение (если оно существует) достигается в некоторой вершине многоугольника решений.

Вернемся снова к общей задаче (А). Напомним вид ее ограничений и минимизируемую форму:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 \geq 0,\\
&x_2 \geq 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&x_k \geq 0,\\
&\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \beta_1 \geq 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{r1}x_1 + \ldots + \alpha_{rk}x_k + \beta_r \geq 0,
\end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_k x_k. \tag{6.17}$$

Эта задача эквивалентна основной задаче линейного программирования, т.е. канонической задаче
(6.10, 6.11).

По аналогии с плоским и трехмерным случаями имеет место общая

Теорема:

Если оптимальное решение задачи (А) существует, то оно достигается на некоторой вершине многогранника решений.

Несмотря на кажущуюся простоту этой теоремы, доказательство ее далеко не просто.