МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

В.С. Деева

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НЕФТЕГАЗОВОМ ДЕЛЕ

Практикум

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2018

УДК 622.276:004.94(076.5)
ББК 33.36:32.971.3я73
Д26

Деева В.С.

Д26 Компьютерное моделирование в нефтегазовом деле : практикум / В.С. Деева ; Томский политехнический университет. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2018. – 80 с.

ISBN 978-5-4387-0807-0

Издание подготовлено в соответствии с программой дисциплины «Компьютерное моделирование в нефтегазовом деле» как краткое руководство к практической работе по освоению студентами методов математического моделирования путем последовательного выполнения комплекса заданий. Содержит примеры решения задач на основе пакета Excel с необходимыми комментариями и пояснениями, а также задания для индивидуального выполнения.

Предназначено для студентов, обучающихся по всем специальностям направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело».

УДК 622.276:004.94(076.5)
ББК 33.36:32.971.3я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой динамики полета НИ ТГУ
В.И. Биматов

Доктор технических наук, профессор
заведующий кафедрой химии ТГАСУ
Ю.С. Саркисов

ISBN 978-5-4387-0807-0

Содержание

Предисловие

Изложение настоящего практикума базируется на предположении о знакомстве читателя со стандартным общим курсом разделов высшей математики, согласованным с государственным стандартом программ обучения в университете технического профиля.

Целью практикума являются систематизация, углубление знаний о методах исследования моделей физических явлений, закрепление навыков практической работы в пакете Excel, а также самостоятельного моделирования, проведения расчетов и анализа расчетных показателей в области нефтегазового дела.

Главная задача бакалавра, аспиранта, инженера, изучающего любой физический процесс, заключается в выявлении особенностей закономерности его поведения, в получении функциональной зависимости между входными параметрами и выходным результатом. Большинство таких задач сводится к решению математически формализованного описания процесса – уравнений. Именно это и обуславливает задачи курса: 1) уметь описывать физические процессы нефтегазовой отрасли и поведение технических систем уравнениями; 2) обрабатывать экспериментальные данные исследования объектов и процессов с помощью современных методов математического моделирования и программных средств; 3) владеть навыкам работы на компьютере: интерпретировать и наглядно представлять полученные результаты, используя программные средства, в том числе встроенные в программное обеспечение функции.

Для каждого из разделов практикума студент должен изучить методы решения соответствующей задачи, а затем выполнить индивидуальное задание, узнав номер и данные варианта у преподавателя. Прежде чем решать самостоятельное задание, студент должен разобрать типовой пример по соответствующей теме.

Автор выражает благодарность рецензентам – В.И. Биматову, заведующему кафедрой динамики полета Томского государственного университета, профессору, доктору физико-математических наук, а также Ю.С. Саркисову, заведующему кафедрой химии Томского государственного архитектурно-строительного университета, профессору, доктору технических наук, за ценные замечания и помощь при подготовке пособия.

Введение

При исследованиях практически на всех предприятиях нефтегазового сектора быстрыми темпами накапливается большое количество информации: результаты геологической документации скважин, выработок, спектральных и химических анализов руд, пород и минералов, данные геофизических и геохимических измерений и др. Одно из важнейших направлений научно-технического прогресса состоит в широком внедрении автоматизированных методов накопления, хранения, обработки и передачи информации с целью повышения эффективности.

Построение компьютерной модели базируется на отвлечении от конкретной природы изучаемого объекта или явления. Чем больше существенных, важных свойств выявлено и учтено в компьютерной модели, тем более приближенной она окажется к реальной модели. Компьютерное моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов на компьютере, целью которых является анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого объекта и, при необходимости, последующее уточнение модели.

Математические методы исследования используются для решения задач, которые решаются с определенной точностью и достоверностью с помощью математической модели, и при этом на выходе получается оптимальное решение. Понятие «математические методы» ассоциируется сознанием с определением «математической модели». В практикуме представлено решение практически значимых задач нефтегазовой отрасли, которые можно решить математическими методами (линейные и нелинейные уравнения, системы линейных уравнений, аппроксимация, интерполяция, соответствие законам распределения, статистические методы) с помощью одной из современных компьютерной систем – Excel. Excel – это мощный инструмент, позволяющий использовать встроенные функции и сосредоточить внимание на логике методов и алгоритмов, освобождая от необходимости освоения громоздких вычислительных процедур.

Согласно ISO/TS I6949: «Организация должна обеспечить персонал, который был бы компетентен в степени, обеспечивающей выполнение требований к проектированию, и обладал соответствующими навыками использования приемлемых приемов и методов».

Практическая работа № 1
Работа с Excel

Цель работы: отработка практических навыков работы в Excel.

Задачи: ознакомление с интерфейсом Excel и стандартными функциями; овладение навыками работы в программной среде и проведение расчетов с использованием программных средств, в том числе строенных в программное обеспечение функций.

Окна Excel. Верхняя строка окна – заголовок с кнопками управления его размерами. Вторая строка – главное меню. Третья и четвертая строки – панели инструментов *Стандартная* и *Форматирование* соответственно. Назначение кнопок можно прочитать, медленно перемещая курсор по ним. Пятая строка – ввод и редактирование, слева в ней – поле имени, справа – поле ввода. Под этой строкой расположен рабочий лист. Нижняя строка – строка состояния.

Структура рабочего листа. Рабочий лист разбит на ячейки (клетки – cells), которые расположены на пересечении столбцов (columns) и строк (rows). Слева и вверху расположены адресные полосы: на левой – номера строк: 1, 2, 3, …, на верхней – адреса столбцов: A, B,…, AA, AB. Адрес ячейки составлен из имени столбца и номера строки. Если щелкнуть мышкой по ячейке, то она становится текущей и ее адрес отображается в поле имени.

Для перемещения на самую нижнюю строку рабочего листа нужно нажать Ctrl + ↓. Номер последней строки 65 536 = 2^{16}. Для перемещения в крайний правый столбец нужно нажать Ctrl + →. Чтобы вернуться в левую верхнюю ячейку, нужно нажать Ctrl + Home. Для перемещения по листам можно использовать клавиши PgDn и PgUp, Tab – слева направо, Shift + Tab – справа налево, Enter – сверху вниз, Shift + Enter – снизу вверх.

В нижней части рабочего листа имеются ярлычки листов, на которых размещены имена: *Лист1*, *Лист2*, ... Ярлычок активного листа выделен белым цветом, имя – полужирным шрифтом.

При работе в среде Excel необходимо сначала выделить объект, а затем над выделенным объектом выполнять операцию. Для выделения с помощью мышки: столбца – щелкнуть мышкой по верхней адресной строке; несколько столбцов – щелкнуть мышкой по заголовку первого столбца и, не отпуская левую клавишу мыши, протащить ее по адресной строке по соответствующим заголовкам; строк – аналогично; всех ячеек рабочего листа – щелкнуть мышкой по кнопке на пересечении адресных полос. Для снятия выделения достаточно щелкнуть мышкой по любой невыделенной ячейке рабочего листа.

В любую ячейку таблицы Excel можно записать число или текст. Для выполнения операций над содержимым ячеек используются формулы, которые состоят из выражений. Формула начинается со знака равенства (=). Все формулы записываются в одну строку, поэтому иногда необходимо вводить дополнительные скобки, которых нет в исходных формулах.

Проведем расчет по формулам, зависящим от двух аргументов: X и Y. Сначала отведем для X, Y две ячейки и для наглядности дадим им имена. Введем в ячейку A1 букву ‘X’, в ячейку A2 – букву ‘Y’. Присвоим значения переменных, поместив в ячейку B1 число 4, в ячейку B2 число 3. Далее выполним расчет по формуле, которую введем в ячейку B3.

Пример 1. Рассчитаем значение выражения $\frac{x-2}{5+\frac{2x}{3+y^2}}+1$.

Для этого в ячейку B3 введем формулу =(x – 2)/(5 + (2*x/(3 + y ^ 2))) + 1. После нажатия клавиши Enter в ячейке B3 появится результат 1,352941.

Возможности, заложенные в Excel, позволяют достаточно просто вычислять значения элементов арифметических и геометрических прогрессий.

Пример 2. Пусть надо получить 10 элементов арифметической прогрессии с начальным значением 10 и шагом 5.

Эта задача решается с использованием верхнего меню. В ячейку C1 заносим начальное значение, выделяем 10 ячеек для элементов прогрессии. Затем открываем в верхнем меню: редактирование/прогрессия. В открывшемся окошке выбираем тип прогрессии, указываем величину шага. В результате в столбце C1–C10 находятся элементов прогрессии (10, 15, 20, …, 55).

Рассчитать сумму элементов этой прогрессии можно как сумму элементов столбца, выбрав редактирование/автосумма (∑). В результате в ячейке C11 появится результат 325.

Логические операции используются в том случае, когда значение ячейки необходимо вычислять в зависимости от выполнения или невыполнения одного или нескольких условий. В ячейку записывается условие в виде функции логического ветвления (ЕСЛИ), с тремя аргументами:

ЕСЛИ (логич. выраж.; значение 1, если истина; значение 2, если ложь)

Логическое выражение – любое значение или выражение, принимающие значения ИСТИНА или ЛОЖЬ. Например, B2 > 47 – логическое выражение, принимающее значение 1, если в ячейке B2 находится число, больше чем 47, в противном случае функция принимает значение 2.

Пример 3. Дан объем добычи нефти (баррелей в сутки) по каждой скважине в течение недели. Требуется получить информацию о скважинах, у которых средняя добыча за неделю выше среднего значения. Использовать логические операции.

Решение. Для начала найдем средние значения добычи каждой скважины с использованием функции СРЗНАЧ, выбрав «вставить функцию/СРЗНАЧ», разместив их в ячейках B11:G11. Затем, используя эту же функцию, найдем среднее значение добычи нефти в ячейке C15, появится результат 239,09524 (рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			***Объём добычи за неделю***					
3	*День*	*скважина 1*	*скважина 2*	*скважина 3*	*скважина 4*	*скважина 5*	*скважина 6*	***Всего***
4	Пн.	147	802	185	202	246	202	**1 784**
5	Вт.	161	285	382	285	300	158	**1 571**
6	Ср.	182	301	400	187	189	285	**1 544**
7	Чт.	201	250	192	385	101	168	**1 297**
8	Пт.	158	247	166	277	135	350	**1 333**
9	Сб.	190	499	235	150	206	189	**1 469**
10	Вск.	243	285	140	102	189	85	**1 044**
11	Сред. Зн.	183,14286	381,28571	242,85714	226,85714	195,14286	205,28571	
12	Всего	**1 282**	**2 669**	**1 700**	**1 588**	**1 366**	**1 437**	**10 042**
13			лучшая	лучшая				
14	*Среднее значение*							
15		239,09524						

Рис. 1. Рабочий лист с исходными данными и вычислениями

Далее используем функцию ЕСЛИ, записав в ячейку B13 для первого продавца условие следующим образом:

=ЕСЛИ(B11>=$B$15;"лучшая";"***") (рис. 2).

Затем скопируем эту функцию для других скважин в ячейки C11:G11. В итоге в строке 13 мы увидим информацию о скважинах, у которых средний объем добычи нефти за неделю выше среднего: в столбце такой скважины будет текст «лучшая».

В данном примере перед номером строки и столбца ячейки B15 знак $. Знак $ перед номером строки и столбца ячейки используется в случаях, когда адрес ячейки не должен меняться. При обычном копировании формул из одной ячейки в другую в Excel автоматически меняются ссылки на ячейки, т. е. сохраняется относительное расположение ячеек результата и ячеек операндов. Такая адресация называется относительной. В случае, когда адрес ячейки операнда не должен меняться, используют абсолютную адресацию, записывая перед номером строки и(или) столбца знак $.

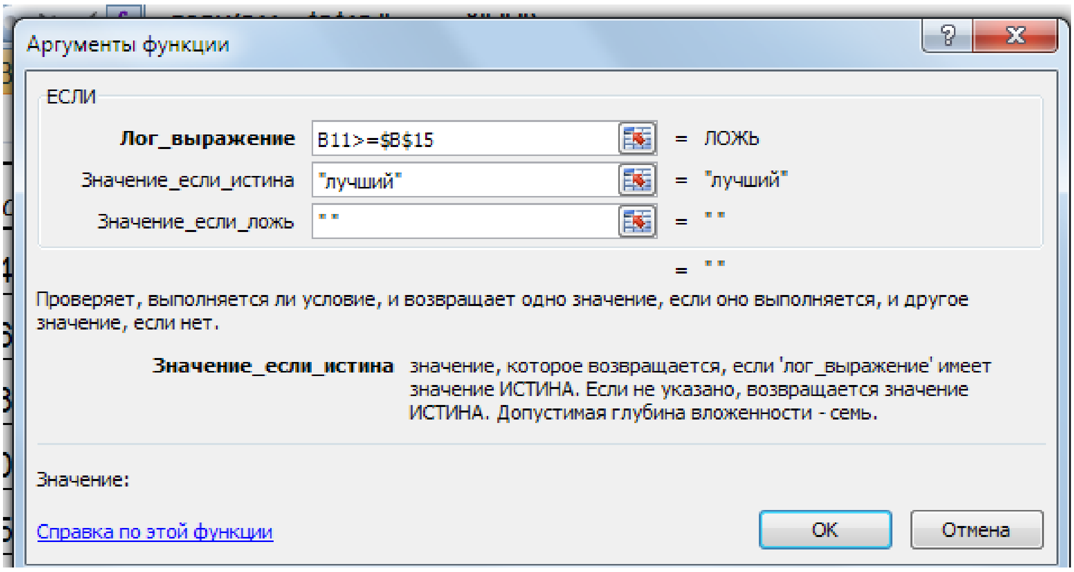


Рис. 2. Окно мастера функции ЕСЛИ для примера 3

В Excel записано более 400 стандартных функций. Для работы с ними используется мастер функций, к которому можно обратиться, нажав кнопку f_x на панели инструментов Стандартная.

Пример 4. Вычислить выражение $\lg_3 2 + \sqrt{14}$. При обращении к мастеру функций выбираем категорию математические, находим функцию LOG, вводим аргументы функции: число (в данном примере 2) и основание (в данном примере 3). Если нажать Enter, то ввод формулы завершится, в текущей ячейке появится результат 0,63092975 и придется корректировать формулу. Чтобы избежать этого следует, находясь в окне мастера функций, щелкнуть мышкой в поле ввода сразу за сформированной первой частью формулы LOG(2,3) и, набрав знак +, снова нажать кнопку f_x на панели инструментов *Стандартная*. Затем найти функцию КОРЕНЬ(), ввести аргумент число (в данном примере 14), при этом в окне мастера функций появится результат вычисления 3,7416574. После нажатия клавиши Enter в текущей ячейке появляется общий результат вычисления выражения $\lg_3 2 + \sqrt{14}$ – 4,372587.

Задачи для самостоятельного решения

Взять у преподавателя свой вариант. В соответствии с полученным вариантом рассчитать значения функции, используя встроенные в Excel функции, для каждого (I, II, III) столбца.

№1	$\left(\frac{(a-b)\cdot(m+1)}{\lg(c)\cdot\sqrt[m]{n}}\right)^3$			**№2**	$\frac{(\sqrt{a}+b)\sqrt{2m}}{\ln^2(n)\cdot(c-n)^4}$			**№3**	$\frac{2m-\sqrt[3]{\sin\sqrt[5]{c}}}{\sqrt[2n-1]{(a+b)}}$		
	I	**II**	**III**		**I**	**II**	**III**		**I**	**II**	**III**
a	13.5	18.5	11.8	a	2.754	3.236	4.523	a	23.16	17.41	32.37
b	3.7	5.6	7.4	b	11.7	15.8	10.8	b	8.32	1.27	2.35
c	4.22	3.42	5.82	c	0.65	0.65	0.85	c	145.5	342.3	128.7
m	1	3	5	m	2	3	1	m	28.6	11.7	27.3
n	23.725	14.782	11.234	n	6.32	7.18	4.17	n	1	2	3
№4	$\sqrt[5]{\sqrt{\lvert b-a^2\rvert}\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{\mathrm{m}-\mathrm{n}}\right)^3}$			**№5**	$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{c+1}}{\sqrt[3]{\lvert n-m\rvert}}$			**№6**	$\sqrt{\frac{a^n}{3\sqrt{c}}+b^m\sqrt{\frac{\pi}{m^2}}}$		
	I	**II**	**III**		**I**	**II**	**III**		**I**	**II**	**III**
a	22.16	15.71	12.31	a	16.342	12.751	31.456	a	23.16	17.41	32.37
b	5.03	3.28	1.73	b	2.5	3.7	7.3	b	8.32	1.27	2.35
c	3.6	7.2	3.7	c	1	2	3	c	145.5	342.3	128.7
m	5	6	7	m	9.14	8.12	6.71	m	2	4	6
n	7	3	5	n	6.35	7.06	5.8	n	3	6	9

Практическая работа № 2
Построение графиков функций

Цель работы: формирование умений представлять результаты исследований, используя программные возможности Excel: строить графики и диаграммы, а также оформлять их согласно предъявляемым требованиям.

Задачи: научиться строить графики функций одной переменной; строить графики поверхностей 1-го и 2-го порядков, используя встроенный в Excel *Мастер диаграмм* и наглядно оформлять их.

Для отражения полученных или собранных числовых данных в Excel имеются средства для создания графиков и диаграмм, которые в наглядной форме представляют зависимости и тенденции. Microsoft Excel позволяет создавать множество различных типов графиков: линейчатая диаграмма, гистограмма, линейный график, точечная, круговая и пузырьковая диаграмма, диаграмма-поверхность и др. За построение графиков и диаграмм в Excel отвечает *Мастер диаграмм*, который вызывается через функцию *Вставки* → *Диаграмма* главного меню. Эта функция считается одним из основных достоинств Excel. Поэтому важно научиться строить графики для получения максимальной отдачи от Excel. Рассмотрим несколько примеров построения графиков.

Построение графика функции одной переменной

Пример 5. Построим график функции $y = \sin(x)$ в диапазоне [–2π; +2π] с шагом π/6.

Заголовок задания запишем в ячейке F1. Затем укажем заголовки столбцов в ячейках: A3 – «№» – порядковый номер точки, B3 – «x» – значение аргумента, C3 – «$y = \sin(x)$» – вычисленное значение функции соответствующего аргумента.

1. Заполним диапазон ячеек A4–A23 последовательностью 1, 2, …, 20. При этом возможно использовать автозаполнение, для чего в ячейках A4–A5 ввести числа 1 и 2 соответственно, а затем, выделив их, потянуть за нижний правый угол до достижения необходимого значения.

2. Заполним диапазон ячеек B4–B23 последовательностью от –2π до +2π с шагом π/6. Для того чтобы ввести значение π, нажимаем кнопку f_x на панели инструментов *Стандартная*, выбираем категорию *Математические*, находим и выбираем функцию ПИ(). Можно также воспользоваться средствами автозаполнения.

3. В ячейках C4–C23 рассчитаем значения функции $y = \sin(x)$, для этого находим и выбираем функцию SIN(число). В качестве аргумента

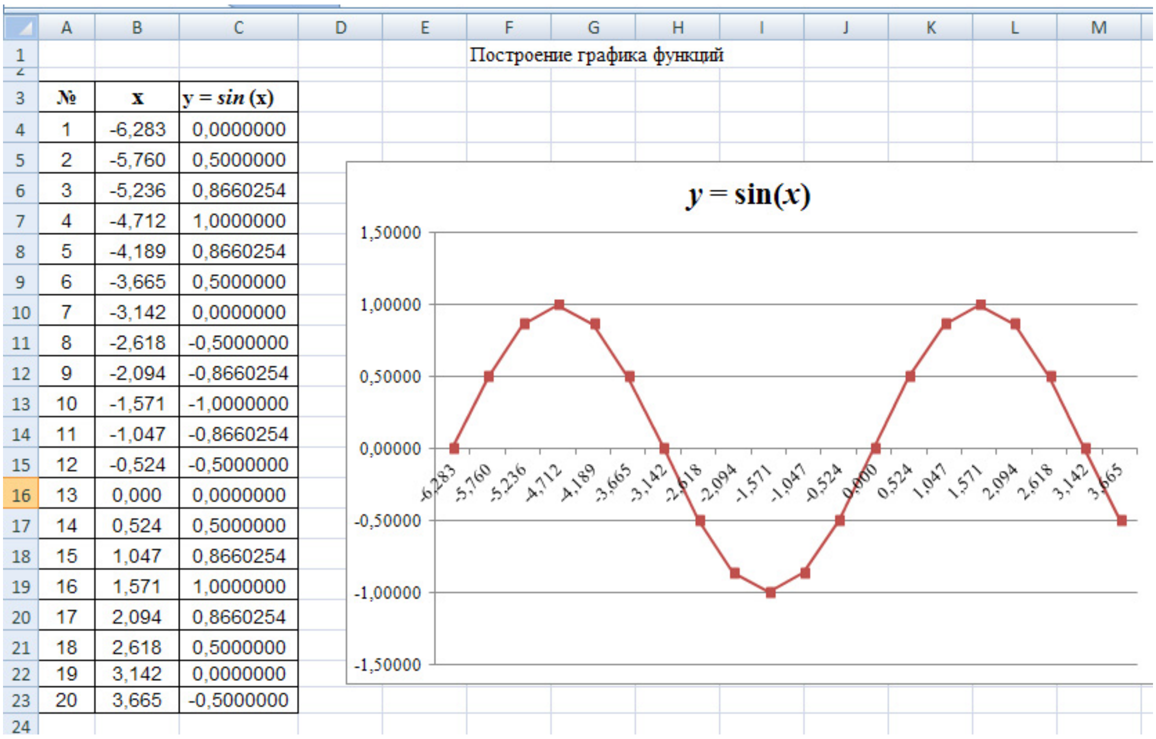
функции указываем адрес соответствующей ячейки в столбце B, для чего щелкаем мышкой по нужной ячейке. В данном случае также есть возможность использовать автозаполнение.

4. Строим график функции, выполняя последовательно следующие шаги:

4.1. Выделим диапазон ячеек C3:C23 (вместе с заголовком).

4.2. В главном меню вызываем *Вставка* → *График* и выбираем один вариант из предложенных типов графиков. На экране появляется график функции в первоначальном варианте. Теперь необходимо привести его в соответствие требованиям стандарта НИ ТПУ.

В третьей строке меню выбираем подменю *Выбрать данные*, после чего на экране появится окно *Выбор источника данных*. В нашем случае необходимо изменить подписи горизонтальной оси. Для этого надо нажать «изменить» – в появившемся окне курсор будет в строке *Диапазон подписи оси*, мышкой выделяем диапазон аргументов – ячейки B4–B23 – и нажимаем OK. Видим, что на графике по оси *x* появились необходимые значения – снова нажимаем OK (рис. 3).



№	x	y = sin (x)
1	-6,283	0,0000000
2	-5,760	0,5000000
3	-5,236	0,8660254
4	-4,712	1,0000000
5	-4,189	0,8660254
6	-3,665	0,5000000
7	-3,142	0,0000000
8	-2,618	-0,5000000
9	-2,094	-0,8660254
10	-1,571	-1,0000000
11	-1,047	-0,8660254
12	-0,524	-0,5000000
13	0,000	0,0000000
14	0,524	0,5000000
15	1,047	0,8660254
16	1,571	1,0000000
17	2,094	0,8660254
18	2,618	0,5000000
19	3,142	0,0000000
20	3,665	-0,5000000

Рис. 3. Построение графика функций (рабочий лист Excel)

Видим, что шрифт на графике не Time New Roman, поэтому двойным щелчком мышки поочередно выделяем значения оси *y*, значения оси *x*, название графика и, выходя в главное меню, изменим шрифт и при необходимости его размер. Также можно уменьшить (или увеличить) разрядность значений по оси, если они имеют слишком большую (или недостаточную) разрядность, используя кнопки на панели инструментов.

Построение плоскости 1-го порядка

Уравнение вида Ax + By + Cz + D = 0 называется общим уравнением плоскости. Важные частные случаи уравнения плоскости возникают при равенстве нулю некоторых коэффициентов A, B, C, D. Если D = 0, то уравнение Ax + By + Cz = 0 определяет плоскость, проходящую через начало координат. Если A = 0, то уравнение By + Cz + D = 0 определяет плоскость, параллельную оси x, аналогично при B = 0 и C = 0.

Пример 6. Построить плоскость, заданную уравнением

$$2x + 4y - 2z + 2 = 0.$$

Построим часть плоскости, лежащей в 1-м квадранте для x от 0 до 6 с шагом 0,5 и для y от 0 до 6 с шагом 1,0. Для этого решим уравнение относительно z: $z = x + 2y + 1$. Значения x вводим в столбец A (можно использовать автозаполнение), начиная со строки 2 и до строки 14. Значения y вводим в строку 1, начиная со столбца B и заканчивая столбцом H. В ячейку B2 записываем формулу для расчета z: =$A2+2*B$1+1 и, нажав указателем мыши на черную точку в нижнем правом углу ячейки B2, заполняем этой формулой весь диапазон ячеек B2:H14 (рис. 4).

E5 =$A5+2*E$1+1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*x*/*y*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**0**	1	3	5	7	9	11	13
3	**0,5**	1,5	3,5	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5
4	**1**	2	4	6	8	10	12	14
5	**1,5**	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5
6	**2**	3	5	7	9	11	13	15
7	**2,5**	3,5	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5	15,5
8	**3**	4	6	8	10	12	14	16
9	**3,5**	4,5	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5	16,5
10	**4**	5	7	9	11	13	15	17
11	**4,5**	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5	15,5	17,5
12	**5**	6	8	10	12	14	16	18
13	**5,5**	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5	16,5	18,5
14	**6**	7	9	11	13	15	17	19
15								

Рис. 4. Исходные данные решения уравнения z = x + 2y + 1

Теперь обращаемся к *Мастеру диаграмм*. Выделив весь диапазон ячеек B2:H14, в главном меню выбираем *Вставка* → *Другие диаграммы* → *Проволочная поверхность* и нажимаем OK. На экране появляется плоскость в первоначальном варианте. В третьей строке меню выбираем подменю *Выбрать данные*, после чего на экране появится окно *Выбор источника данных*. Для изменения подписей по оси x надо нажать «изменить» – в поле *Подписи горизонтальной оси (категории)* и мышкой выделить диапазон аргументов – ячейки A2–A14. Для изменения подписей по оси y в поле *Элементы легенды (ряды)* необходимо последовательно поменять каждый из семи рядов: в рабочее поле *Имя ряда* для ряда 1 вводим ячейку B1, после нажатия OK первым элементом показано значение 0. Для ряда 2 вводим ячейку C1, после нажатия OK вторым элементом показано значение и т. д. Таким образом, после ввода последнего значения ряда $y = 6$, и закрытия окна нажатием OK мы получаем практически готовый график. Остается только изменить шрифт на Time New Roman и в результате получаем плоскость, представленную на рис. 5.

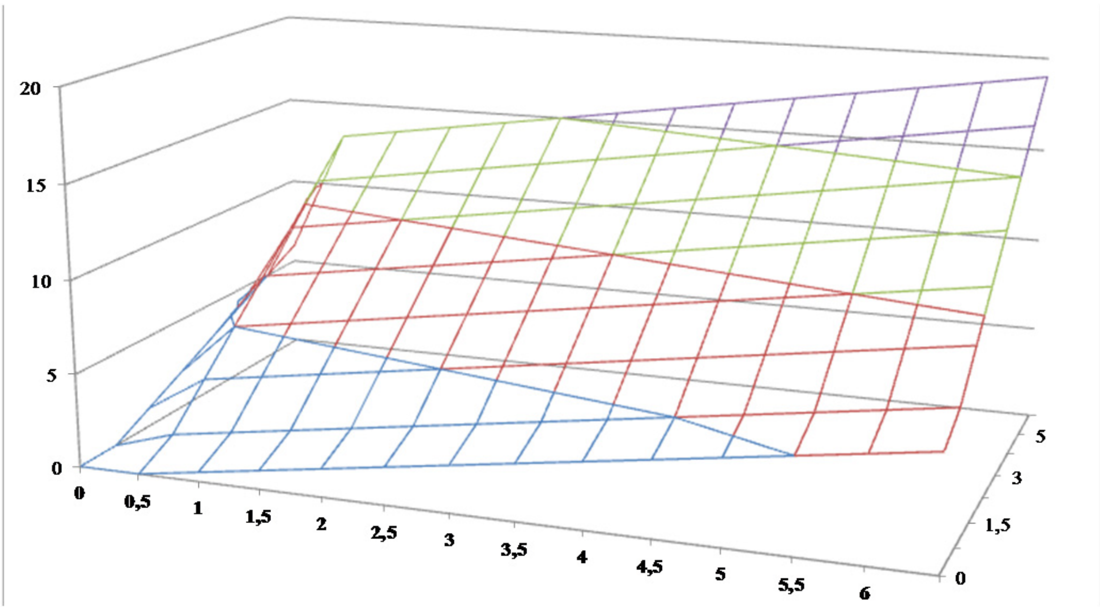


Рис. 5. Вид построенной в программе Excel плоскости z = x + 2y + 1

Построение плоскости 2-го порядка

***Пример** 7*. Построить двухполосный гиперболоид, заданный уравнением $x^2 / 9 + y^2 / 4 - z^2 = -1$.

Переменная x имеет диапазон изменений (–3; +3), y – (–2; +2), шаг 0,5 для обеих переменных. Решим уравнение относительно z:

$$z = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}.$$

Как и в примере 6, значения x вводим в столбец А, начиная со строки 2 и до строки 14, Значения y – в строку 1, начиная со столбца В**,** в ячейку В2 вводим уравнение для z:

z = КОРЕНЬ(1+($A2^2)/9+(B$1^2)/4).

Далее заполняем этой формулой весь диапазон ячеек В2:J14 (рис. 6).

C3 =КОРЕНЬ(1+($A3^2)/9+(C$1^2)/4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	*x*/*y*	**-2**	**-1,5**	**-1**	**-0,5**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
2	**-3**	1,7321	1,6008	1,5	1,4361	1,4142	1,4361	1,5	1,6008	1,7321
3	**-2,5**	1,6415	1,5023	1,3944	1,3255	1,3017	1,3255	1,3944	1,5023	1,6415
4	**-2**	1,5635	1,4167	1,3017	1,2276	1,2019	1,2276	1,3017	1,4167	1,5635
5	**-1,5**	1,5	1,3463	1,2247	1,1456	1,118	1,1456	1,2247	1,3463	1,5
6	**-1**	1,453	1,2937	1,1667	1,0833	1,0541	1,0833	1,1667	1,2937	1,453
7	**-0,5**	1,424	1,2611	1,1304	1,0442	1,0138	1,0442	1,1304	1,2611	1,424
8	**0**	1,4142	1,25	1,118	1,0308	1	1,0308	1,118	1,25	1,4142
9	**0,5**	1,424	1,2611	1,1304	1,0442	1,0138	1,0442	1,1304	1,2611	1,424
10	**1**	1,453	1,2937	1,1667	1,0833	1,0541	1,0833	1,1667	1,2937	1,453
11	**1,5**	1,5	1,3463	1,2247	1,1456	1,118	1,1456	1,2247	1,3463	1,5
12	**2**	1,5635	1,4167	1,3017	1,2276	1,2019	1,2276	1,3017	1,4167	1,5635
13	**2,5**	1,6415	1,5023	1,3944	1,3255	1,3017	1,3255	1,3944	1,5023	1,6415
14	**3**	1,7321	1,6008	1,5	1,4361	1,4142	1,4361	1,5	1,6008	1,7321
15										

Рис. 6. Исходные данные решения уравнения $z = \sqrt{1+\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}$

Теперь обращаемся к *Мастеру диаграмм*. Выделив весь диапазон ячеек В2:J14, в главном меню выбираем *Вставка* → *Другие диаграммы* → *Проволочная поверхность* и нажимаем ОК. По аналогии с предыдущим примером изменяем подписи по осям. Теперь для более наглядного представления графика поменяем минимальное значение вертикальной оси. Для этого активируем меню вертикальной оси двойным щелчком мышки и в открывшимся окне вместо минимального значения авто руками заносим 1,0.

Для изменения подписей по оси x надо нажать «изменить» – в поле *Подписи горизонтальной оси (категории)* и мышкой выделить диапазон аргументов – ячейки А2–А14. Для изменения подписей по оси y в поле *Элементы легенды (ряды)* необходимо последовательно поменять каждый из рядов: в рабочее поле *Имя ряда* для ряда 1 вводим ячейку В1, после нажатия ОК первым элементом показано значение –3. Для ряда 2 вводим ячейку С1, после нажатия ОК вторым элементом показано значение и т. д. Таким образом, после ввода последнего значения ряда $y = 3$, и закрытия окна нажатием ОК мы получаем практически готовый график. Остается только изменить шрифт на Time New Roman и в результате получаем плоскость, представленную на рис. 7.

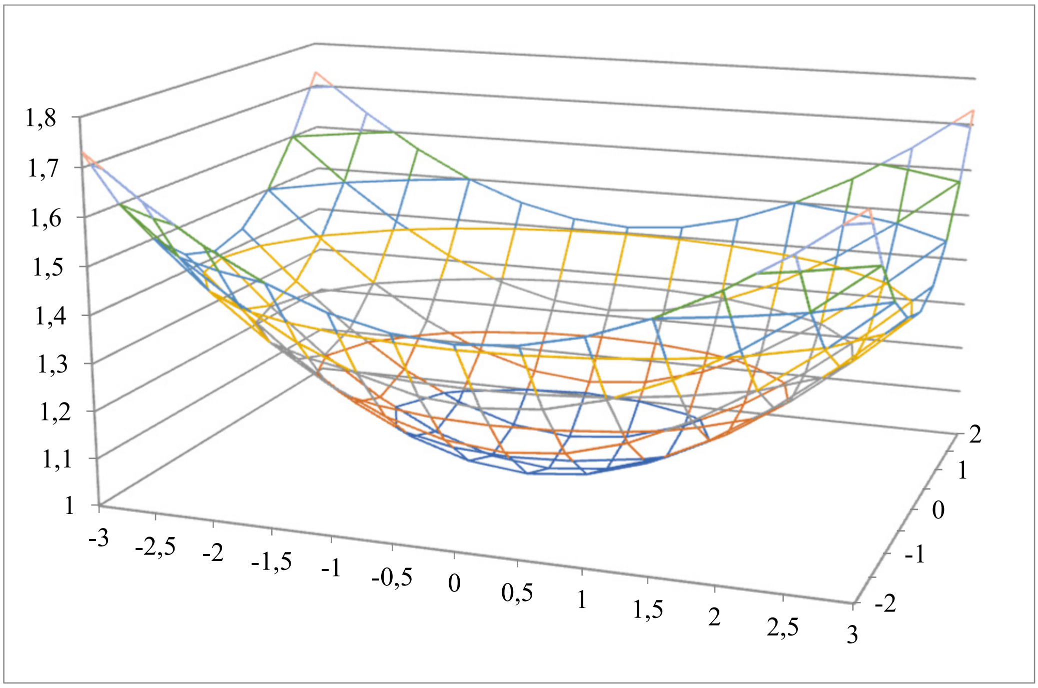


Рис. 7. Вид построенной в программе Excel поверхности $z = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$

Задачи для самостоятельного решения

Взять у преподавателя свой вариант. В соответствии с полученным вариантом построить графики функций $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=f$ и $\frac{x^2}{d^2}+\frac{y^2}{e^2}=z$, где a, b, c, d, e – коэффициенты согласно варианту.

1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=4 \quad z=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{1}$.
2. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{1}=5 \quad z=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}$.
3. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=4 \quad z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}$.
4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=3 \quad z=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}$.
5. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{9}=4 \quad z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}$.
6. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1 \quad z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}$.

Практическая работа № 3
Статистическая обработка экспериментальных данных

Выборка. Точечные оценки результатов измерений

Цель работы: расширение, систематизация и углубление знаний в области математической статистики, используя программные возможности средств статистической обработки данных Excel.

Задачи: приобретение практического опыта вычисления статистических характеристик и доверительных интервалов с использованием специальных функций Excel, построения функций распределения, проверки соответствия данных теоретическому распределению, а также исследования данных на наличие грубых ошибок и их последующее исключение из выборки.

Большое значение в нефтегазовой отрасли имеют экспериментальные исследования. В тех случаях, когда необходимо многократное повторение эксперимента для получения значения некоторой величины, оценки ее истинного значения могут быть получены с помощью аппарата математической статистики.

Пакет Excel богато оснащен набором средств статистической обработки данных. В него включены наиболее часто используемые статистические процедуры: средства описательной статистики, вычисления критериев различия, корреляционные и другие методы, позволяющие проводить необходимый статистический анализ различных типов данных.

В *Мастере функции* Excel (категория статистические) имеется ряд специальных функций, предназначенных для вычисления выборочных характеристик.

СРЗНАЧ вычисляет среднее арифметическое значение нескольких аргументов чисел.

СРГАРМ позволяет получить среднее гармоническое значение множества данных. Это обратная к среднему арифметическому величина.

СРГЕОМ вычисляет среднее геометрическое значение массива положительных чисел. Функцию можно использовать для вычисления средних показателей динамического ряда.

МЕДИАНА позволяет получить медиану заданной выборки. Медиана – такой элемент выборки, для которого число элементов выборки со значениями больше медианы равно числу элементов выборки со значениями меньше медианы.

МОДА вычисляет наиболее часто встречающееся значение в выборке.

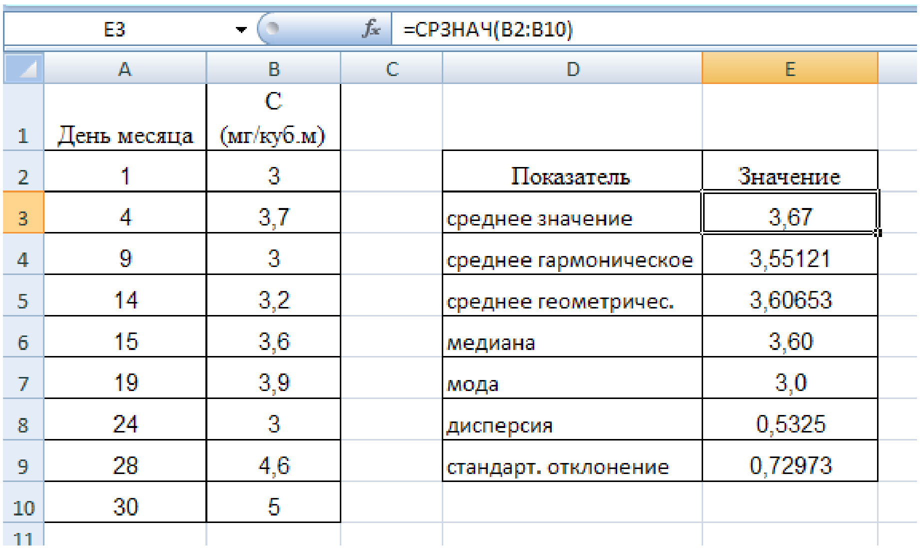
ДИСП позволяет оценить дисперсию по выборочным данным.

ДИСПР оценивает дисперсию по генеральной совокупности данных.

СТАНДОТКЛОН вычисляет стандартное отклонение.

ПЕРСЕНТИЛЬ позволяет получить квантили заданной выборки. Квантиль – числовая характеристика закона распределения случайной величины.

Пример 8. Пусть дана выборка из 10 экспериментальных значений загрязненности воздуха (концентрации угарного газа), полученных в течение месяца. Используя мастер функций, рассчитаем статистические характеристики для этой выборки (рис. 8).



E3 =СРЗНАЧ(B2:B10)

	A	B	C	D	E
1	День месяца	С (мг/куб.м)			
2	1	3		Показатель	Значение
3	4	3,7		среднее значение	3,67
4	9	3		среднее гармоническое	3,55121
5	14	3,2		среднее геометричес.	3,60653
6	15	3,6		медиана	3,60
7	19	3,9		мода	3,0
8	24	3		дисперсия	0,5325
9	28	4,6		стандарт. отклонение	0,72973
10	30	5			
11					

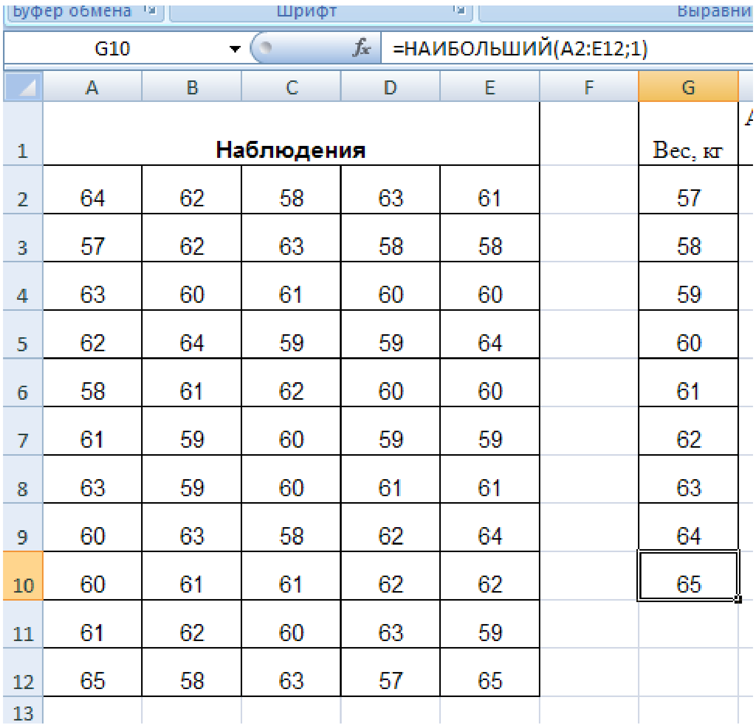
Рис. 8. Результат расчета статистических характеристик выборки

Выборочный метод. Задача выборочного метода состоит в том, чтобы сделать правильные выводы относительно всего собрания объектов. Выборочной (эмпирической) функцией распределения случайной величины X, построенной по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется функция $F(x)$, равная доле значений x_i, удовлетворяющих условию $x_i < x$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для построения выборочной функции распределения весь диапазон изменения случайной величины X разбивают на ряд интервалов одинаковой ширины. Число интервалов обычно выбирают не менее 5 и не более 15. Затем определяют число значений случайной величины X, попавших в каждый интервал. Поделив эти числа на общее количество наблюдений n, находят относительную частоту попадания случайной величины X в заданные интервалы. По найденным относительным частотам строят гистограмму выборочных функций распределения. Если соответствующие точки относительных частот соединить ломаной линией, то полученная диаграмма будет называться полигоном частот. При увеличении размера выборки до бесконечности (на практике больше 30) выборочные функции распределения превращаются в теоретические. Гистограмма превращается в график плотности распределения, а кумулятивная прямая, в которой по оси абсцисс откладываются интервалы, а по оси ординат – число или доли элементов совокупности, имеющих значение, меньшее или равное заданному, – в график функции распределения.

В Excel для построения выборочной функции распределения используется специальная функция ЧАСТОТА и процедура пакета анализа ГИСТОГРАММА.

Пример 9. Построить эмпирическое распределение профиля высот в метрах для следующей выборки:
64, 57, 63, 62, 58, 61, 63, 60, 60, 61, 65, 62, 62, 60, 64, 61, 59, 59, 63, 61, 62, 58, 58, 63, 61, 59, 62, 60, 60, 58, 61, 60, 63, 63, 58, 60, 59, 60, 59, 61, 62, 62, 63, 57, 61, 58, 60, 64, 60, 59, 61, 64, 62, 59, 65.

В диапазон A2:E12 вводим значения профиля высот. Ширину интервала выбираем сами равной 1 м. Используя функцию НАИМЕНЬШИЙ, найдем минимальное значение выборки – 57 м и с помощью функции НАИБОЛЬШИЙ – максимальное значение 65 м. В результате получаем 9 интервалов. В диапазон G2:G10 введем значения интервалов (рис. 9).



	A	B	C	D	E	F	G
1	Наблюдения						Вес, кг
2	64	62	58	63	61		57
3	57	62	63	58	58		58
4	63	60	61	60	60		59
5	62	64	59	59	64		60
6	58	61	62	60	60		61
7	61	59	60	59	59		62
8	63	59	60	61	61		63
9	60	63	58	62	64		64
10	60	61	61	62	62		65
11	61	62	60	63	59		
12	65	58	63	57	65		
13							

Рис. 9. Заполнение граничных значение интервалов

Заполним столбец абсолютных частот следующим образом. Выделим диапазон H2:H10. На панели инструментов *Стандартная* нажимаем кнопку f_x, выбираем категорию *Статистические*, находим функцию ЧАСТОТА, нажимаем ОК, появляется окно мастера функций. Мышкой выделяем ячейки A2:E12 в качестве *Массива_данных*, после чего переходим мышкой в строку формулы, нажимаем клавишу F2, в качестве *Массива_интервалов* выделяем ячейки **G2:G10**, переходим в строку формулы, нажимаем F2, а затем – сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. В результате в столбце **H2:H10** появляется массив абсолютных частот.

В ячейке **H11** найдем общее количество наблюдений. Для этого установим курсор в ячейку H11, на панели инструментов нажимаем кнопку ∑, выбираем диапазон H2:H10, нажимаем Enter.

Теперь рассчитаем относительные частоты. Результаты расположим в ячейках **I2:I10**. Сначала в ячейке **I2** введем формулу H2/$H$11, а затем скопируем ее в остальные ячейки диапазона. Получаем массив относительных частот.

Заполним столбец накопленных частот. Для этого в ячейку J2 скопируем значение I2, в ячейку J3 введем формулу = J2 + I3 и скопируем ее в остальные ячейки диапазона. Получаем массив накопленных частот. Результат вычислений представлен на рис. 10.

Буфер обмена | Шрифт | Выравнивание | Число

H2 | f_x | {=ЧАСТОТА(A2:E12;G2:G10)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Наблюдения**						Вес, кг	Абсолютные частоты	Относительные частоты	Накопленные частоты
2	64	62	58	63	61		57	2	0,036	0,036
3	57	62	63	58	58		58	6	0,109	0,145
4	63	60	61	60	60		59	7	0,127	0,273
5	62	64	59	59	64		60	10	0,182	0,455
6	58	61	62	60	60		61	9	0,164	0,618
7	61	59	60	59	59		62	8	0,145	0,764
8	63	59	60	61	61		63	7	0,127	0,891
9	60	63	58	62	64		64	4	0,073	0,964
10	60	61	61	62	62		65	2	0,036	1,0
11	61	62	60	63	59			**55**		
12	65	58	63	57	65					
13										

Рис. 10. Результат обработки выборки

Построим диаграмму относительных и накопленных частот. Сложно поверить, но в Excel 2010 нет специальной гистограммы с графиком с накоплением. Поэтому будем делать следующим образом. Обращаемся к *Мастеру диаграмм*. Выделив диапазон ячеек I2:J10, в главном меню выбираем *Вставка* → *Гистограмма* → *Гистограмма* с накоплением. На экране появляется график в первоначальном варианте. В нем по горизонтальной оси расположены деления 1, 2 и т. д. В подменю выбираем *Выбрать данные*, после чего на экране появится окно *Выбор источника данных*, в поле *Подписи горизонтальной оси* нажимаем *Изменить* и мышкой выделяем диапазон подписей оси – ячейки G2–G10, нажимаем OK и в следующем окне снова OK. На графике по горизонтальной оси появились значения профиля высот от 57 до 65 м.

Далее мышкой щелкаем в диаграмме по одному из столбцов, отражающих накопленные частоты, помеченным становится весь ряд накопленных частот, нажимаем правую клавишу мышки, и в появившемся окне выбираем *Изменить тип диаграммы для ряда* (рис. 11). На экране появляется основное меню выбора (изменения) типа диаграммы. Щелкаем мышкой по иконке *График*, нажимаем OK.

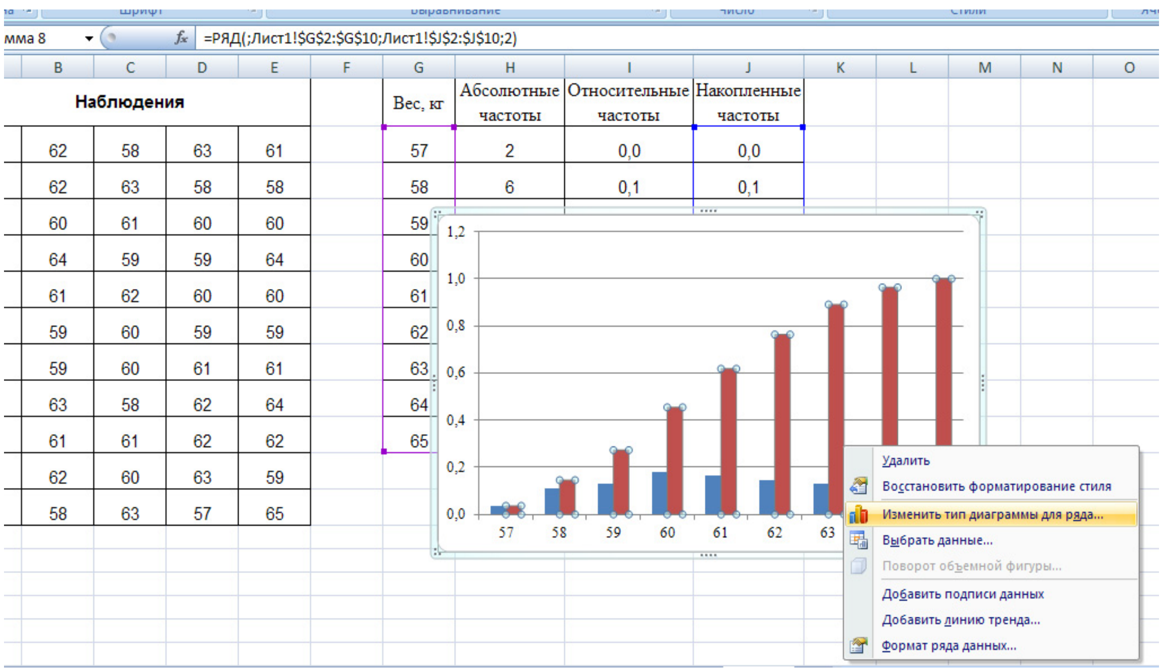


Рис. 11. Меню изменения типа диаграммы для ряда

График на экране принимает вид, показанный на рис. 12. Другими словами, вместо столбцов гистограммы накопленные частоты отображены в виде линейного графика, в то время как относительные частоты остались в виде столбцов.

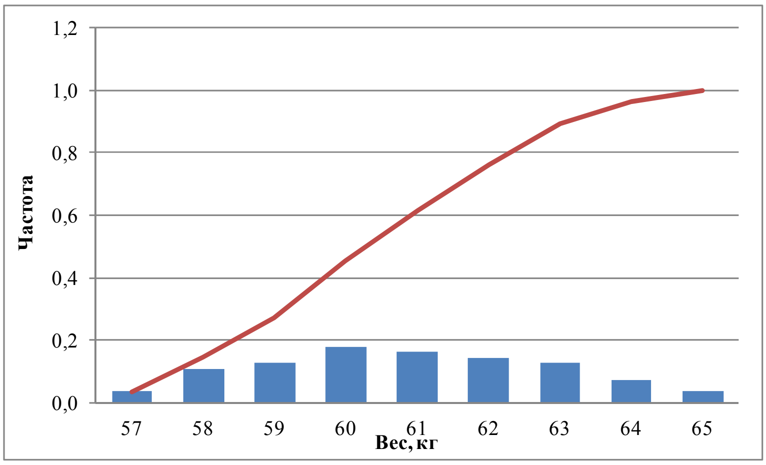


Рис. 12. Первоначальный вид диаграммы относительных и накопленных частот

Видно, что масштабы относительных и накопленных частот отличаются почти в полтора раза. Для наглядности таких диаграмм есть возможность сделать график с двумя вертикальными осями, то есть для гистограммы относительных частот – своя шкала, для графика накопленных частот – своя. Для этого выделяем в диаграмме линейный график, щелкая мышкой по нему, затем нажимаем правую клавишу мышки, и в появившемся окне *Формат ряда данных* в поле параметры ряда выбираем пункт «по вспомогательной оси» (рис. 13). Закрываем окно.

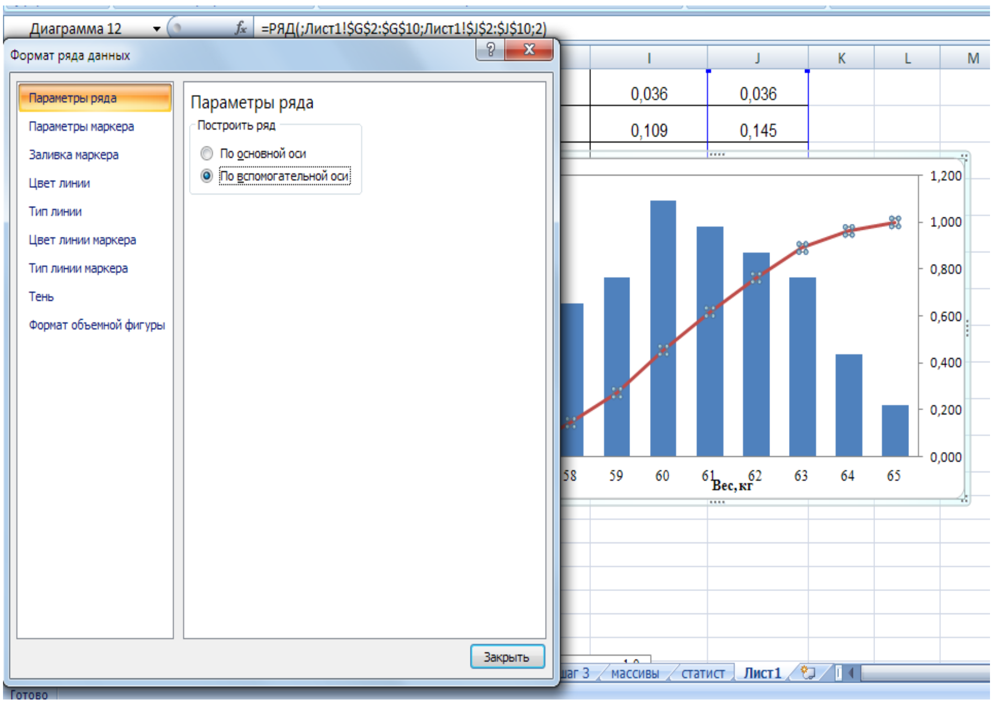


Рис. 13. Окно «Формат ряда данных»

На экране появляется график с двумя осями. Теперь нужно привести их в соответствие требованиям. Кликаем мышкой на численные значения оси – на экране появляется окно *Формат оси* (рис. 14), подбираем все необходимые параметры для каждой из осей, редактируем.

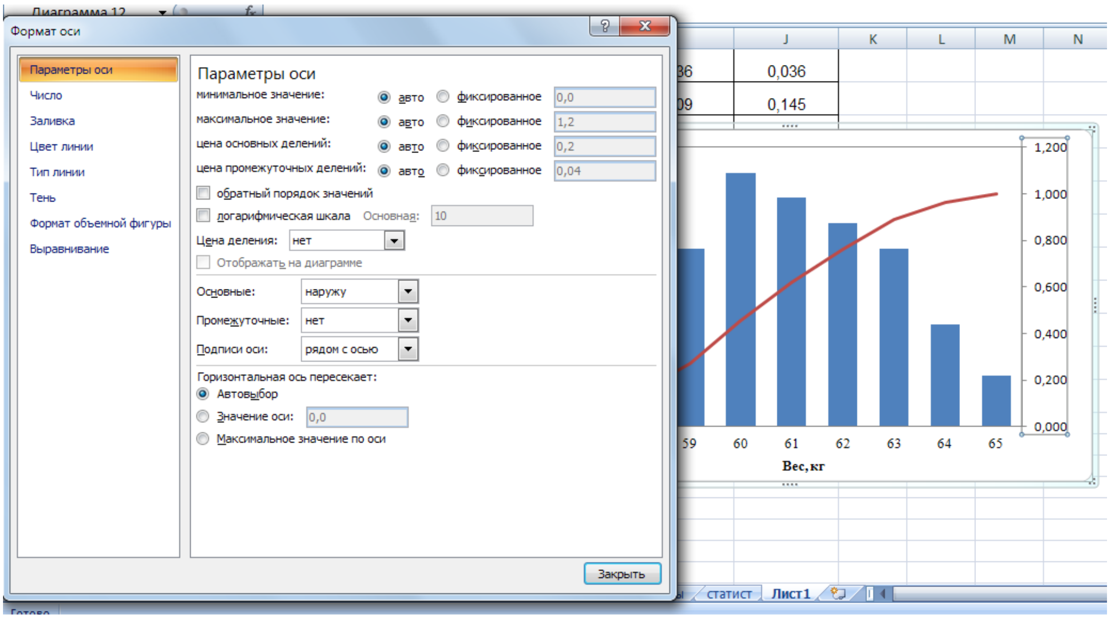


Рис. 14. Окно «Формат оси»

В результате получаем диаграмму относительных и накопленных частот на одном графике (рис. 15).

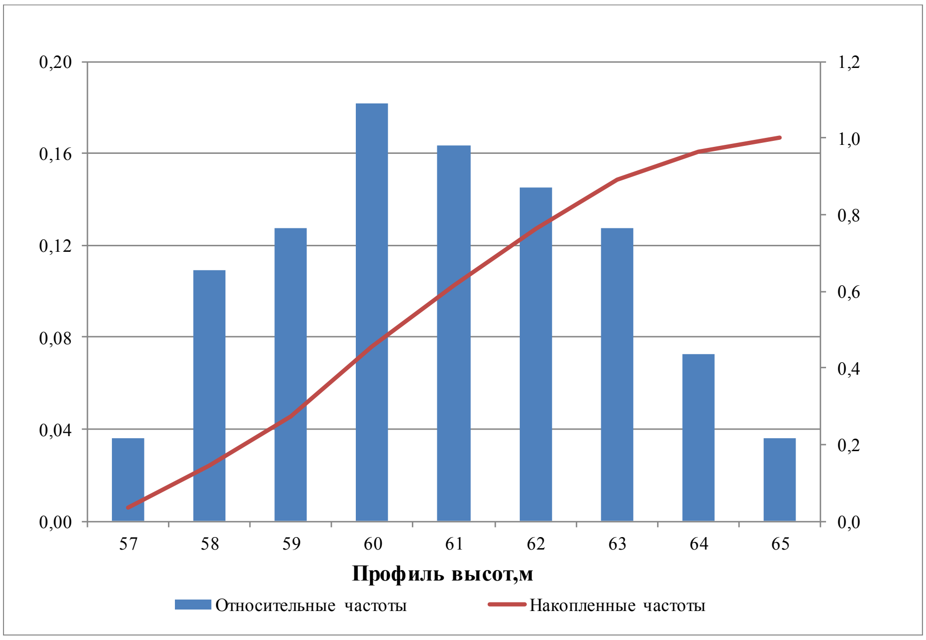


Рис. 15. Диаграмма относительных и накопленных частот

Критерий хи-квадрат (χ^2)

Проверка соответствия экспериментальных данных теоретическому распределению. В большинстве случаев при решении реальных задач закон распределения эмпирических данных и его параметры неизвестны. В то же время применяемые в обработке данных статистические методы в качестве предпосылок часто требуют определенного закона распределения. Наиболее часто проверяется предположение о нормальном распределении генеральной совокупности, так как большинство статистических процессов ориентировано на выборки, полученные из нее. Для оценки соответствия имеющихся экспериментальных данных нормальному закону распределения используют графический метод, выборочные параметры формы распределения и критерии согласия.

Критериями согласия называют статистические критерии, предназначенные для проверки согласия опытных данных и данных, рассчитанных по теоретической модели. Здесь нулевая гипотеза H_0 представляет собой утверждение о том, что распределение генеральной совокупности, из которой получена выборка, не отличается от нормального. Среди критериев согласия большое распространение получил критерий хи-квадрат (χ^2). Он основан на сравнении эмпирических частот интервалов группировки с теоретическими (ожидаемыми) частотами, рассчитанными по формулам нормального распределения. Для применения критерия желательно, чтобы объем выборки (n) был больше 40 ($n \geq 40$), выборочные данные были сгруппированы в интервальный ряд с числом интервалов не менее 7, а в каждом интервале находилось не менее 5 наблюдений (частот).

В Excel критерий χ^2 реализован в функции ХИ2ТЕСТ. Функция ХИ2ТЕСТ вычисляет вероятность совпадения наблюдаемых (фактических) значений и теоретических (гипотетических) значений. Если вычисленная вероятность ниже уровня значимости (0,05), то нулевая гипотеза отвергается и утверждается, что наблюдаемые значения не соответствуют нормальному закону распределения. Если вычисленная вероятность близка к 1, то можно говорить о высокой степени соответствия экспериментальных данных нормальному закону распределения.

Параметры функции ХИ2ТЕСТ (фактический_интервал; ожидаемый_интервал), где фактический_интервал – это интервал данных, которые содержат наблюдения, подлежащие сравнению с ожидаемыми значениями; ожидаемый_интервал – это интервал данных, которые содержат теоретические (ожидаемые) значения для соответствующих наблюдений.

Пример 10. Для выборки распределение профиля высот (в метрах) из примера 9:

64, 57, 63, 62, 58, 61, 63, 60, 60, 61, 65, 62, 62, 60, 64, 61, 59, 59, 63, 61, 62, 58, 58, 63, 61, 59, 62, 60, 60, 58, 61, 60, 63, 63, 58, 60, 59, 60, 59, 61, 62, 62, 63, 57, 61, 58, 60, 64, 60, 59, 61, 64, 62, 59, 65
проверить соответствие выборочных данных нормальному закону распределения.

Вычисления будут проходить в два этапа:

1. Найдем теоретические частоты нормального распределения, предварительно определив среднее значение и стандартное отклонение выборки. Для этого в ячейке I12 с помощью функции СРЗНАЧ находим среднее значение для диапазона A2:E12. Затем в ячейке I13 с помощью функции СТАНДОТКЛОН находим стандартное отклонение для этих данных рис. 9. Теоретические частоты определяем с помощью функции НОРМРАСП: устанавливаем курсор в ячейку K2, вызываем указанную функцию, заполняем ее параметры следующим образом: x – ячейка G2; среднее – $I$12; стандартное отклонение – $I$13; интегральный – 0. Нажимаем OK. Далее копируем формулу в ячейки K3– K10. После чего заполняем столбец L, введя формулу =K2*$H$11 в ячейку L2 и растянув ее в ячейки L3–L10. Результаты вычислений показаны на рис. 16.

2. С помощью функции ХИ2ТЕСТ определим соответствие данных нормальному закону распределения. Для этого устанавливаем курсор в ячейку L12, на панели инструментов *Стандартная* нажимаем кнопку f_x, в появившемся окне выбираем категорию *Статистические* и находим функцию ХИ2ТЕСТ(), нажимаем OK, вводим требуемые параметры (рис. 17) нажимаем OK. В ячейке L12 появляется значение 0,9842, это значит, что вероятность соответствия выборочных данных нормальному закону распределения составляет 98,42 %.

K2 fx =НОРМРАСП(G2;$I$12;$I$13;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	**Наблюдения**						Вес, кг	Абсолютные частоты	Относительные частоты	Накопленные частоты	Нормальное распределение	Теоретические частоты
2	64	62	58	63	61		57	2	0,036	0,036	0,033	1,826321
3	57	62	63	58	58		58	6	0,109	0,145	0,074	4,058756
4	63	60	61	60	60		59	7	0,127	0,273	0,129	7,109222
5	62	64	59	59	64		60	10	0,182	0,455	0,178	9,814412
6	58	61	62	60	60		61	9	0,164	0,618	0,194	10,678730
7	61	59	60	59	59		62	8	0,145	0,764	0,167	9,157735
8	63	59	60	61	61		63	7	0,127	0,891	0,113	6,189701
9	60	63	58	62	64		64	4	0,073	0,964	0,060	3,297345
10	60	61	61	62	62		65	2	0,036	1,0	0,025	1,384434
11	61	62	60	63	59			55				
12	65	58	63	57	65			среднее значение	**60,8545**			
13								стандартное отклонение	**2,049554**			

Рис. 16. Результаты вычислений теоретических частот

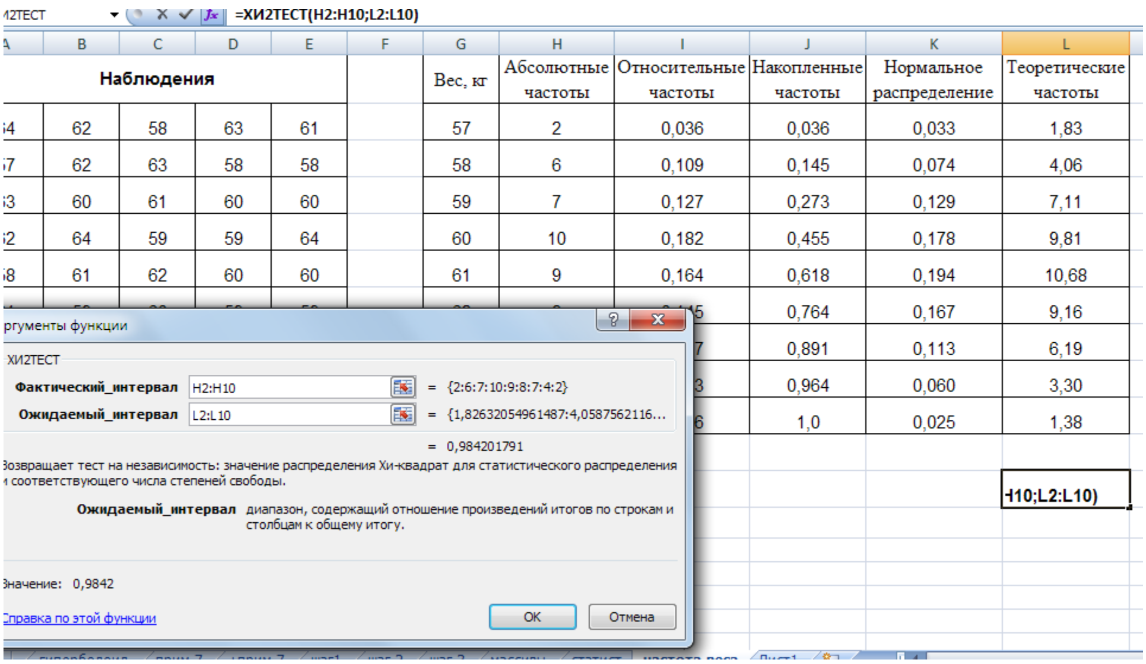


Рис. 17. Результаты вычислений χ^2-критерия

Расчет доверительного интервала

Наряду с точечными оценками случайной величины можно вычислять интервальные оценки, которые позволяют получить интервалы отклонения оценочных значений случайной величины от ее истинного значения. Другими словами, для заданной вероятности β требуется определить максимальную погрешность ε_β, которая имеется в эксперименте, если за истинное значение случайной величины принята ее оценка, полученная из опыта – среднее значение $X^{ср}$: Полученный интервал называется доверительным, его границы ($X^{ср} \pm \varepsilon_\beta$) – доверительными, вероятность β – доверительной. Чем больше величина доверительной вероятности β, тем шире доверительный интервал (больше величина ε_β), и наоборот, чем больше ширина доверительного интервала, тем с большей вероятностью истинное значение находится в этом интервале. Иногда вместо доверительной вероятности задают уровень значимости $p = 1 - \beta$, который часто выражают в процентах. Уровень значимости показывает вероятность того, что истинное значение измеряемой величины будет лежать за пределами доверительного интервала. На практике величину доверительной вероятности берут равной 0,9; 0,95; 0,99.

Расчет доверительного интервала зависит от объема выборки – n. Если объем выборки больше 30 ($n > 30$), то предполагается, что случайная величина подчиняется нормальному закону распределения и доверительный интервал можно рассчитать с использованием стандарта среднего: $S_{x ср} = S_x / \sqrt{n}$.

В Excel для вычисления границ доверительного интервала и при числе элементов выборки <30 используют функцию ДОВЕРИТ или процедуру Описательная статистика.

Функция ДОВЕРИТ (альфа; станд_откл; размер) определяет полуширину доверительного интервала, где альфа – уровень значимости (p), доверительная вероятность равна $100 \cdot (1 - \text{альфа})$ процентам, т. е. альфа = 0,05 означает 95%-й уровень доверительной вероятности; станд_откл – стандартное отклонение; размер – объем выборки (n).

Пример 11. Найти с доверительной вероятностью $\beta = 95$ % границы доверительного интервала для времени функционирования скважины, если экспериментально установлено, что у 25 скважин среднее время функционирования составило 140 месяцев, а стандартное отклонение – 2,5 месяца.

Устанавливаем курсор в ячейку A1, на панели инструментов *Стандартная* нажимаем кнопку f_x, в появившемся окне выбираем категорию *Статистические*, и находим функцию ДОВЕРИТ, нажимаем ОК, вводим требуемые параметры (рис. 18), нажимаем ОК.

В ячейке A1 появляется 0,97998 – значение полуширины 95%-го доверительного интервала для времени функционирования скважины. Другими словами, с 95%-м уровнем надежности можно утверждать, что средняя продолжительность функционирования скважины составляет $140 \pm 0,97998$ месяца или от 139,02 до 140,98 месяцев.

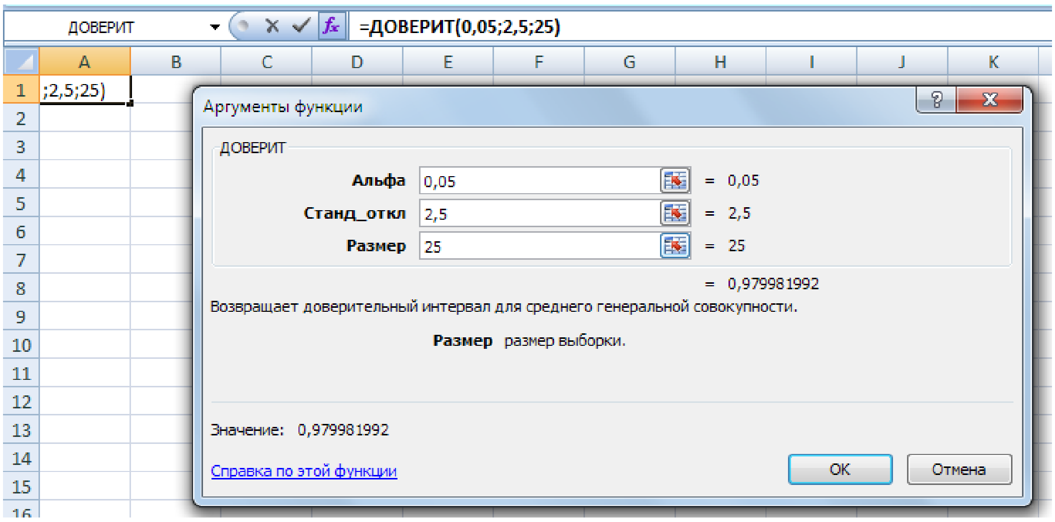


Рис. 18. Окно функции ДОВЕРИТ

Пример 12. Пусть имеется выборка, содержащая числовые значения: 13, 15, 17, 19, 22, 25, 19. Необходимо определить границы 95%-го доверительного интервала для среднего значения и для «выскакивающей» варианты – значения выборки, не принадлежащего доверительному интервалу.

Введем в диапазон A1–A7 исходный ряд чисел. В ячейке A8 найдем среднее значение =18,571с помощью функции СРЗАНЧ.

Затем необходимо проверить, загружен ли пакет анализа, для этого на вкладке *Файл* выбираем команду *Параметры Excel* → *Надстройки* → *Пакет* анализа, нажимаем *Перейти* (рис. 19), после чего на экране появляется окно диалога *Надстройки*.

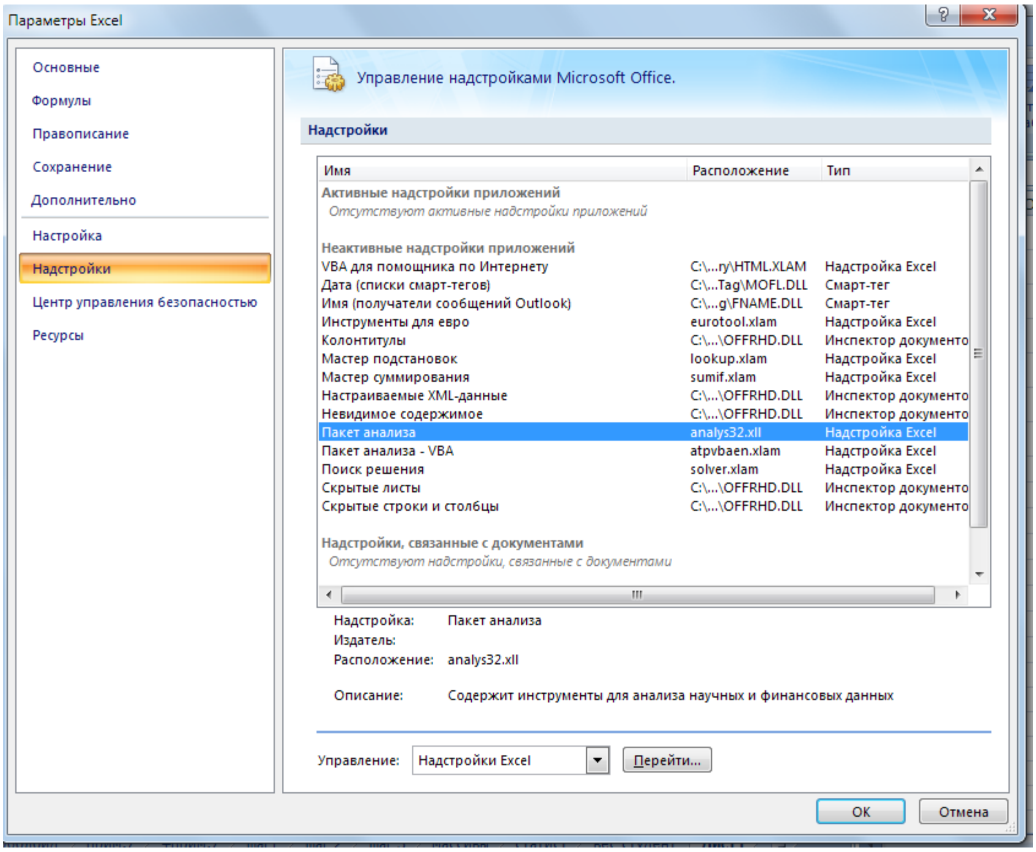


Рис. 19. Окно «Параметры Excel»

Теперь в поле *Доступные надстройки* установим флажок рядом с пунктами *Пакет анализа* и *Поиск решения* (рис. 20) и нажмем кнопку ОК. В случае недоступности данного пакета он будет загружен из Интернета.

Далее во вкладке *Данные* находим *Анализ* и нажимаем. На экране появляется окно *Анализа данных*, и в появившемся списке *Инструменты анализа* выбираем строку *Описательная статистика*.

На экране появляется окно *Описательной статистики*. Для поля *Входной интервал* мышкой указываем диапазон ячеек A1–A7. Активизируем поле *Выходной интервал* и мышкой указываем ячейку B1. Проверим, что поле *Группирование* активизировано *по столбцам*, устанавливаем флажок в поле *Уровень надежности* и вносим 95 % (рис. 21), нажимаем OK.

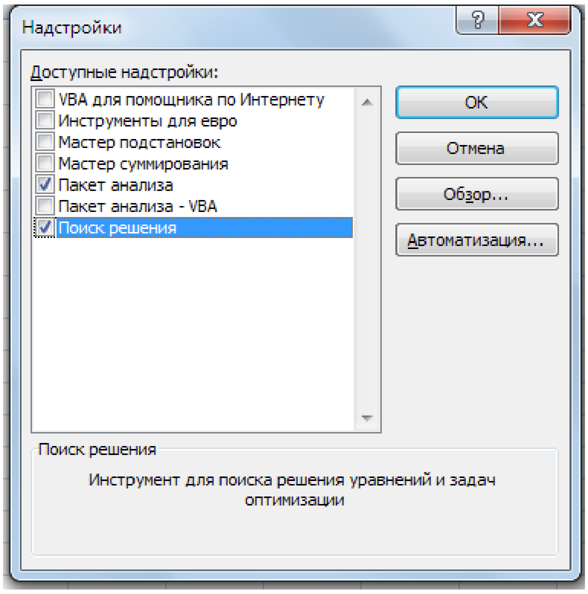


Рис. 20. Окно «Надстройки»

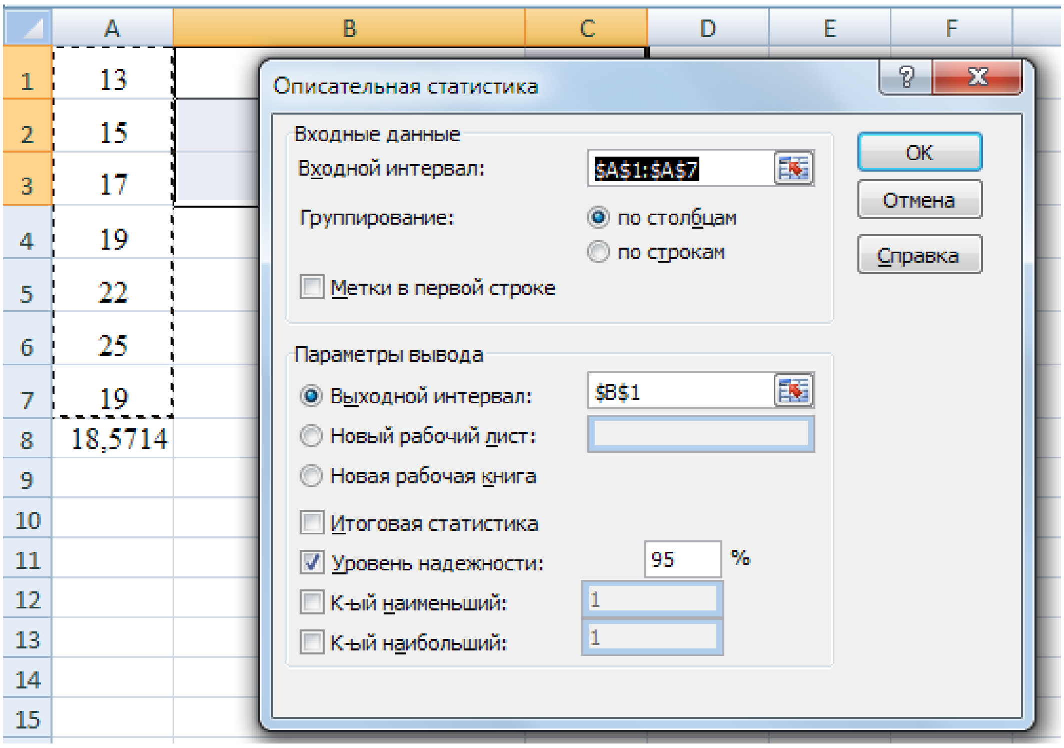


Рис. 21. Окно «Описательная статистика»

В результате в ячейке B1 появляется значение доверительного интервала 3,77.

Иными словами, с вероятностью 95 % среднее арифметическое для генеральной совокупности находится в интервале 18,571 ± 3,77. Уровень надежности – это половина доверительного интервала для среднего арифметического.

Для нахождения доверительных границ для «выскакивающей» варианты необходимо полученный доверительный интервал умножить на $\sqrt{n}$, таким образом, для данного примера $3{,}77 \cdot \sqrt{n} \approx 9{,}975$. Также мы можем сказать, что варианта принадлежит данной совокупности с вероятностью 0,95, если она попадает в интервал 18,571 ± 9,975. Тогда считается, что выходящая за эти граница варианта может быть отброшена с уровнем значимости α = 0,05.

Отбраковка грубых измерений

Иногда при проведении многократных измерений одной величины оказывается, что одно или несколько значений существенно отличаются от остальных. Такие измерения, как правило, содержат грубую ошибку и называются *грубыми*, или *выбросами*. Перед построением доверительного интервала при заданной доверительной вероятности β необходимо серию измерений проверить на наличие выбросов. Проверка на выбросы проводится по U-критерию, рассчитывается по формуле

$$U^p = \frac{|X^{\text{под}} - X^{\text{ср}}|}{\sqrt{S_x^2 \frac{n-1}{n}}},$$

где $X^{\text{под}}$ – измерение, подозреваемое на наличие грубой ошибки.

Сравниваем U^p с табличным значением $U_{p,f}$ (табл. 1), которое определяется уровнем значимости p и количеством степеней свободы $f = n - 2$. Если $U^p > U_{p,f}$, то значение $X^{\text{под}}$ содержит грубую ошибку и это измерение необходимо исключить из серии. После исключения всех измерений, содержащих грубые ошибки, можно переходить к построению доверительного интервала.

Пример 13. Пусть имеется выборка объемом 4 измерения: $x_1 = 4{,}13$; $x_2 = 4{,}65$; $x_3 = 4{,}62$; $x_4 = 4{,}54$. Уровень значимости α = 0,05. Провести отбраковку измерений, т. е. определить измерения, содержащие грубую ошибку и исключить их из серии.

1. Введем исходные данные, рассчитаем среднее значение выборки с помощью функции СРЗНАЧ, $x_{\text{ср}} = 4{,}485$, рассчитаем дисперсию случайной величины с помощью функции ДИСП ($S_x^2 = 0{,}058$).

Таблица 1

Зависимость параметра $U_{p,f}$ от количества измерений (n) и вероятности (p)

n	**$U_{p,f}$ при p**			**n**	**$U_{p,f}$ при p**		
	0,9	**0,95**	**0,99**		**0,9**	**0,95**	**0,99**
3	1,41	1,41	1,41	**15**	2,33	2,49	2,8
4	1,64	1,69	1,72	**16**	2,35	2,52	2,84
5	1,79	1,87	1,96	**17**	2,38	2,55	2,87
6	1,89	2	2,13	**18**	2,4	2,58	2,9
7	1,97	2,09	2,26	**19**	2,43	2,6	2,93
8	2,04	2,17	2,37	**20**	2,45	2,62	2,96
9	2,1	2,24	2,46	**25**	2,54	2,72	3,07
10	2,15	2,29	2,54	**30**	2,61	2,79	3,16
11	2,19	2,34	2,61	**35**	2,67	2,85	3,22
12	2,23	2,39	2,66	**40**	2,72	2,9	3,27
13	2,26	2,43	2,71	**45**	2,76	2,95	3,32
14	2,3	2,46	2,76	**50**	2,8	2,99	3,37

2. Исследуем выборку на наличие грубых ошибок. Для этого рассчитаем значение критерия U^p для всех измерений, подозреваемых на ее наличие, сравним с табличным значением $U_{p,f}$, и, используя функции ЕСЛИ, заполним столбец E, исключив из выборки грубые ошибки (рис. 22).

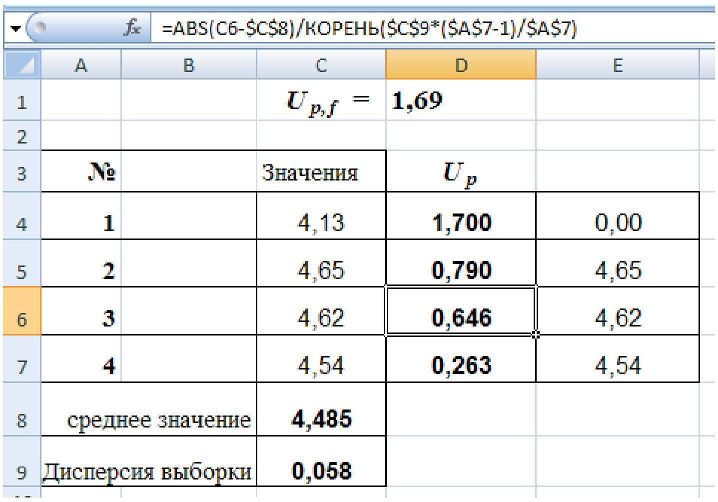


Рис. 22. Отбраковка измерений

3. После исключения из выборки грубых ошибок объем выборки уменьшается. Теперь можно переходить к построению доверительного интервала (прим. 4).

Сравним результаты расчетов до и после отбраковки (рис. 23):

а)

Уровень надежности(95,0%)	0,383767	
Доверительные границы	3,7175	5,2525

б)

Уровень надежности(95,0%)	0,141254	
Доверительные границы	4,3587	4,8480

Рис. 23. Значение доверительного интервала и границ:
а) до исключения грубых ошибок; б) после исключения из выборки грубых ошибок

Задачи для самостоятельного решения

Взять у преподавателя свой вариант. В соответствии с полученным вариантом:

Задание 1. Для выборки, состоящей из 50 значений, построить диаграмму относительных и накопленных частот. Для наглядности сделать график с двумя вертикальными осями, на котором относительные частоты отображены в виде гистограммы со своей шкалой, а накопленные частоты отображены в виде линейного графика уже со своей шкалой. Проверить соответствие выборочных данных нормальному закону распределения. Объяснить результат.

Задание 2. Определить границы 90%-го и 99%-го доверительного интервала для среднего значения и для «выскакивающей» варианты – значения выборки, не принадлежащего доверительному интервалу. Сравнить между собой результаты, сделать выводы.

Задание 3. Провести отбраковку измерений, исключить их из серии. Для получившейся новой выборки меньшего объема определить границы 90%-го доверительного интервала (используя табл. 1). Сравнить полученные в этом задании результаты с результатами задания 2, объяснить причины, по которым доверительный интервал расширился или сузился.

	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	3,8	11,1	14,34	10,05	13,05	4,44	6,79	3,37	17,4	23,75
2	-0,79	6,17	11,86	3,14	16,05	2,14	6,1	1,18	17,51	24,8
3	7,12	7,4	1,45	26,21	0,81	5	0,6	14,19	19,48	20,86
4	12,58	8,83	0,41	-15,13	-0,72	6,94	0,94	-10,61	19,58	18,59
5	12,49	7,6	1,14	0,09	8,83	6,68	2,15	0,08	22,03	21,98
6	15,47	8,53	5,23	11,51	7,55	7,68	5,63	11,63	21,81	25,9
7	-3,82	-3,69	1,33	3,5	9,95	-0,22	3	4,07	21,13	27,41
8	6,23	1,8	5,78	-0,28	0,79	3,62	6,55	-0,37	25,06	22,38
9	13,18	5,51	-0,55	-3,46	3,54	6,23	1,96	-5,03	28,77	17,96
10	2,57	-1,26	3,89	-19,3	8,05	1,83	5,42	-33,88	27,06	27,61
11	4,85	-0,25	-2,78	2,3	-4,04	2,58	0,52	4,01	27,84	26,03
12	0,15	-3,4	3,36	-0,54	1,2	0,55	5,2	-1,02	25,38	21,4
13	-0,33	-4	1,83	-9,46	8,03	0,2	4,11	-19,17	28,89	21,4
14	4,81	-1,5	3,96	6,4	11,03	1,91	5,77	13,87	28,38	25,5
15	5,63	-0,99	1,08	-5,35	8,91	2,29	3,65	-12,33	30,77	25,92
16	-0,79	-5,1	-0,1	9,83	14,02	-1,42	2,8	24,01	26,86	32,58
17	7,26	-0,53	-1,08	-7,02	4,69	2,66	2,1	-18,11	28,21	29,2
18	8,38	-0,1	0,82	1,67	2,93	2,96	3,55	4,52	28,64	30,87
19	11,37	1,46	-0,05	-5,21	-2,2	4,02	2,92	-14,86	30,64	28,74
20	9,17	-0,1	4,85	0,34	4,54	-3	6,62	1,01	30,07	26,1
21	9,67	-0,03	1,28	0,34	8,67	3,06	3,96	10,06	28,4	34,9
22	9,75	-0,2	8,18	-0,35	-3	2,96	9,15	-1,15	31,4	30,76
23	18,61	4,9	3,64	0,9	-4,98	6,37	5,76	3,04	30,51	28,47
24	11,77	0,58	1,29	1,42	-8,79	3,49	4,01	5,01	29,19	32,24
25	-11,57	0,24	6,23	-3	-0,49	3,28	7,72	-10,93	33,59	30,71
26	10,23	-0,77	0,25	5,85	5,49	2,61	3,25	22,12	30,73	30,25
27	22,96	6,66	5,67	1,29	-1,35	7,57	7,32	5,04	33,44	27,51
28	17,73	3,31	-7,51	1,65	7,47	-5,34	-2,56	6,68	27,83	27,85
29	25,58	7,82	7,13	2,39	-2,78	9,35	8,42	9,97	31,81	36,72
30	10,73	-1,3	2,66	0,1	2,23	-2,27	5,08	0,43	29,64	32,21
31	22,61	5,63	-11,23	5,94	7,58	6,9	-4,33	26,32	30,46	28,81
32	6,54	-4,21	1,62	3,35	5,27	0,34	4,31	15,28	30,76	33,99
33	17,59	2,22	-2,31	1,04	1,38	4,63	1,36	4,86	25,32	18,77
34	19,71	3,29	0,67	2,54	-2,33	5,34	3,6	12,23	27,27	27,42
35	25,09	6,33	-1,76	1,98	0,96	7,37	1,78	9,79	20,06	26,07
36	15,38	0,3	-2	-3,35	4,16	3,35	1,6	-16,98	22,43	14,53
37	13,48	-1,03	2,12	-3,5	-6,82	2,46	4,69	-18,2	29,09	22,07
38	19,78	2,55	-1,65	-0,41	-14,24	4,85	1,87	-2,2	18,97	28,59
39	14,79	-0,63	7,56	1,05	5,1	2,73	8,77	5,69	19,06	22,41
40	20,79	2,77	1,46	-0,41	2,76	5	4,2	-2,31	20,26	22,64
41	10,08	-3,84	-4,77	2,11	-2,86	0,59	-0,47	12,03	28,27	21,86
42	13,36	-2,07	7,27	-4,1	4,28	1,77	8,56	-23,88	24,57	20,78
43	10,29	-4,1	-4,7	-0,52	0,82	5,41	-0,41	-3,08	27,43	22,3
44	16,39	-0,63	1,15	-2,21	-0,47	2,72	3,97	-13,42	24,83	32,89
45	18,34	0,35	2,91	0,26	5,76	3,38	5,29	1,61	21,87	31,77
46	18,94	0,52	-2,88	-1,15	-1,45	3,49	0,95	-7,25	10,86	25,68
47	17,49	-0,54	-0,99	-0,6	5,12	2,78	2,36	-3,88	21,87	29,1
48	30,37	7	-1,77	-0,12	-1,07	7,81	1,78	-0,81	17,07	23
49	10,99	-4,82	-0,63	-0,25	-6,66	-0,17	2,64	-1,65	20,32	10,67
50	16,32	-1,81	1,01	-0,65	3,98	1,93	3,86	-4,42	22,67	21,49

Практическая работа № 4
Решение одного уравнения с одним неизвестным

Цель работы: систематизация знаний решения уравнений с одним неизвестным и формирование навыков использования численных методов решения таких уравнений с использованием программных возможностей Excel.

Задачи: решение уравнений с одним неизвестным с первоначальным отделением корней табулированием функции и графически и дальнейшим уточнением корней методами половинного деления и встроенным *Подбором параметров*.

Решить одно уравнение с одним неизвестным вида $F(x) = 0$ – это значит найти такие значения неизвестного, при подстановке которых уравнение обращается в тождество. Все численные методы решения уравнений являются итерационными и дают решение с заданной степенью точности.

Алгоритм решения уравнения $F(x) = 0$ состоит из двух этапов:

1. Отделение корней, т. е. нахождение таких отрезков, на которых локализован только один корень. Отделение корней производится либо с использованием табулирования функции (построением таблицы значений функции на заданном интервале), либо графически (построением графика функции).

2. Уточнение корней. Пусть на отрезке $[a, b]$ дана непрерывная и монотонная функция $F(x)$, имеющая значения разных знаков на концах этого отрезка, т. е. $F(a)F(b) < 0$. Требуется найти и уточнить положение корня с точностью ε.

Пример 14. Найти корни уравнения $x^2\cos(2x) + 1 = 0$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

Для отделения корней построим таблицу значений функции $y = x^2\cos(2x) + 1$ на интервале $[0; 2\pi]$ с шагом $\pi/12$. Для этого заполним диапазон ячеек A4–A28 последовательностью 1, 2, …, 20, диапазон ячеек B4–B28 последовательностью от 0 до $+ 2\pi$ с шагом $\pi/6$. В ячейках C4–C23 рассчитаем значения функции $y = x^2\cos(2x) + 1$, в качестве аргумента функции указываем адрес соответствующей ячейки в столбце B, для чего щелкаем мышкой по нужной ячейке (рис. 24).

Выделим отрезки, на которых функция меняет знак с (+) на (–) или наоборот. Для нахождения таких интервалов используем функцию ЕСЛИ. Сначала запишем в ячейку D4 для $x = 0$ условие так, как показано на рис. 25.

Затем скопируем функцию ЕСЛИ в ячейки D5:D28 для других значений x. Тогда в итоге в столбце D появится информация об интервалах, в которых находится корень уравнения: такого интервала, в котором находится корень, в строке будет текст «корень». В вашем файле выделите цветом ячейки, в которых появился текст «корень» и убедитесь, что у вас это интервалы [1,047; 1,309], [2,094; 2,356], [3,927; 4,189] и [5,236; 5,498].

Построим график функции $y = x^2\cos(2x) + 1$. Для этого выделим диапазон ячеек C3:C28 (вместе с заголовком); в главном меню вызываем *Вставка* → *График* и выбираем один вариант из предложенных типов графиков. На экране появляется график функции в первоначальном варианте. Теперь необходимо привести его в соответствие требованиям стандарта НИ ТПУ.

	A	B	C	D
3	**№**	***x***	**$y = x^2\cos(2x)+1$**	**поиск**
4	1	0,00000	1,000000	
5	2	0,261799	1,059356	
6	3	0,523599	1,137078	
7	4	0,785398	1,000000	
8	5	1,047198	0,451689	корень
9	6	1,308997	-0,483911	
10	7	1,570796	-1,467401	
11	8	1,832596	-1,908466	
12	9	2,094395	-1,193245	корень
13	10	2,356194	1,000000	
14	11	2,617994	4,426946	
15	12	2,879793	8,182130	
16	13	3,141593	10,869604	
17	14	3,403392	11,031239	
18	15	3,665191	7,716814	
19	16	3,926991	1,000000	корень
20	17	4,188790	-7,772982	
21	18	4,450590	-16,154013	
22	19	4,712389	-21,206610	
23	20	4,974188	-20,427677	
24	21	5,235988	-12,707784	корень
25	22	5,497787	1,000000	
26	23	5,759587	17,586419	
27	24	6,021386	32,399560	
28	25	6,283185	40,478418	
29				

Рис. 24. Таблица функции $y = x^2\cos(2x) + 1$ на интервале [0; 2π]

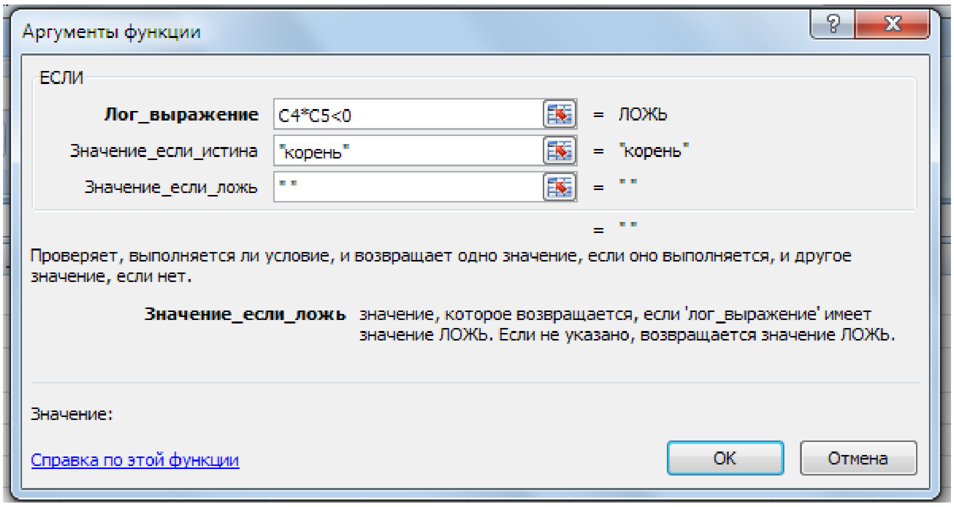


Рис. 25. Окно мастера функции ЕСЛИ для примера 14

В третьей строке меню выбираем подменю *Выбрать данные*, после чего на экране появится окно *Выбор источника данных*. В нашем случае необходимо изменить подписи горизонтальной оси. Для этого надо нажать *Изменить* – в появившемся окне курсор будет в строке *Диапазон подписи оси*, мышкой выделяем диапазон аргументов – ячейки B4–B28 и нажимаем OK. Видим, что на графике по оси x появились необходимые значения – снова нажимаем OK (рис. 26).

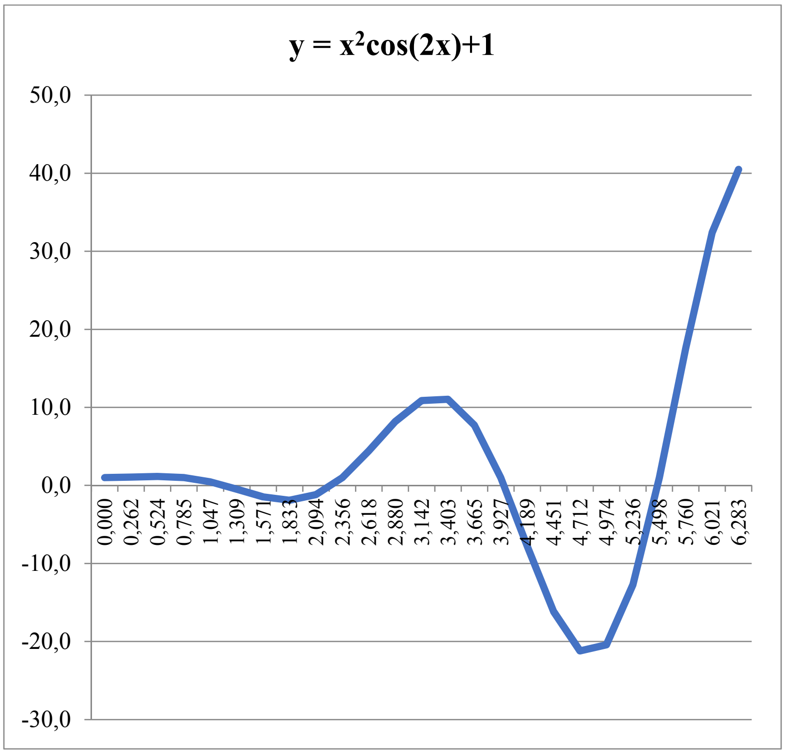


Рис. 26. График функции $y = x^2\cos(2x) + 1$ на интервале $[0; 2\pi]$

Уточнение корней продемонстрируем на двух методах: методе подбора параметров (А) и методе половинного деления (Б).

А. При использовании встроенной возможности Excel *Подбор параметров* корень находится путем последовательных приближений, но это делают внутренние возможности системы. Для пользователей необходимо только вручную ввести значение, очень близкое к искомому корню. Например, для первого отрезка локализации корня [1,047; 1,309] возьмем за начальное приближение точку этого отрезка 1,25 и запишем его в ячейку E1. В ячейку F1 введем формулу функции, для которой мы ищем корни. В главном меню находим *Данные → Анализ «что-если» → Подбор параметра*, на экране появляется диалоговое окно. В поле *Установить в ячейке* вводим ссылку на ячейку, содержащую формулу, в поле *Значение* записываем значение правой части уравнения, в поле *Изменяя* значение в ячейке записываем адрес ячейки, содержащей переменную (рис. 27).

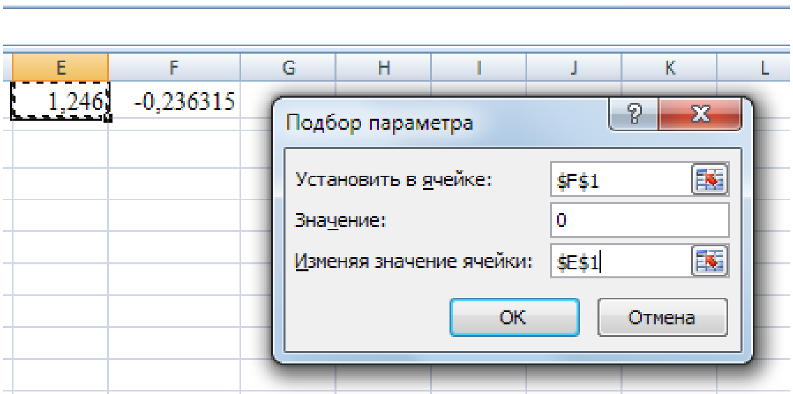


Рис. 27. Окно «Подбор параметра»

Нажимаем ОК. На экране появляется *Результат подбора параметра*, в котором показано найденное решение. Значение корня и функции появляются в ячейках E1 и F1 соответственно (рис. 28).

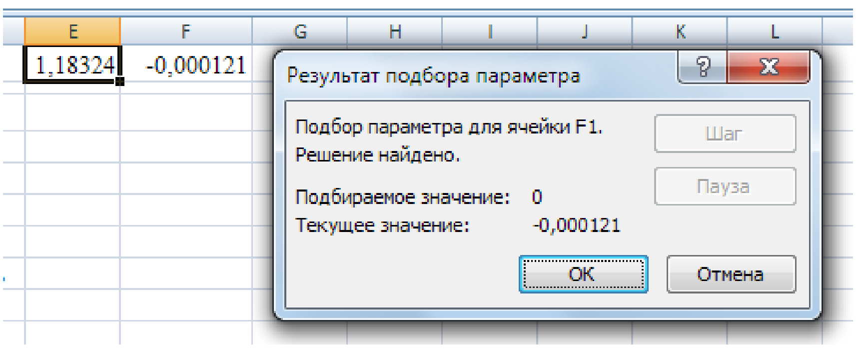


Рис. 28. Окно «Результат подбора параметра»

Аналогично необходимо найти другие три корня. Для этого для каждого корня в какой-либо ячейке вручную введем значение, близкое к искомому корню, используя найденные на первом этапе интервалы, например число 2,2 для интервала [2,094; 2,356], число 4 для интервала [3,927; 4,189], и число 5,3 для интервала [5,236; 5,498]. Каждый раз в ячейку, находящуюся справа от приближенного значения запишем формулу функции, для которой мы ищем корни. И в итоге для данного примера в качестве решения уравнения с точностью 0,001 в ячейках должны быть получены значения: 1,183; 2,257; 3,959; 5,481.

Б. Алгоритм метода *Половинного деления* сводится к последовательному делению отрезка локализации корня пополам. Процесс деления отрезка продолжается до тех пор, пока его длина не станет меньше 2ε, где ε – точность нахождения корня. В этом случае любая точка отрезка локализации отличается от корня не более чем на ε.

В качестве первого приближения к корню возьмем середину отрезка $[a, b]$, т. е. $x = (a + b)/2$.

Если $F(a)F(x) \leq 0$, то корень находится в интервале $[a, x]$, который берем за новый отрезок локализации корня. Если $F(a)F(b) > 0$, то за новый отрезок локализации берем интервал $[x, b]$.

Новый отрезок локализации в два раза меньше первоначального. Процесс деления отрезка продолжаем до тех пор, пока его длина не станет меньше 2ε.

Рассмотрим этот алгоритм для второго отрезка локализации, найденного на первом этапе – [2,094; 2,356] с точностью 0,001. Создадим новую таблицу следующим образом:

1. Занесем в ячейку A2 начальную точку интервала, в ячейку B2 – конечную точку интервала, значение функции $y = x^2\cos(2x) + 1$ для нее – в ячейке E2. Рассчитаем среднюю точку в ячейке C2, используя встроенную функцию СРЕДЗН(), значение функции для нее – в ячейке D2. В ячейке F2 – проведем вычисление $F(a)F(x)$ для определения знака результата умножения (сама расчетная величина для нас не имеет никакого значения!!) для установления нового отрезка локализации.

2. В соответствующей строке столбца G мы будем сравнивать длину отрезка с двойной точностью нахождения корня решать, следует ли продолжать процесс деления отрезка или корень найден.

3. В ячейке A3 мы запишем формулу: ЕСЛИ(D2<=0;A2;C2), а в ячейке B3 – ЕСЛИ(D2<=0;C2;B2), таким образом, мы проверим условие для определения нового отрезка локализации. В ячейки C3–G3 мы скопируем ячейки C2–G2.

4. Далее мы копируем ячейки A3–G3 в ячейки A4–G4, A4–G4 в ячейки A5–G5 и т. д. до тех пор, пока в столбце F не появится надпись: «Корень равен …» (рис. 29).

G4 =ЕСЛИ((B4-A4)<2*$I$1;"Корень равен "&C4;"Корень не найден")

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	x	$F(x)$	$F(a)$	$F(a)\cdot F(x)$	
2	2,094	2,356	2,2250	-0,2841352	-1,1954180	0,3397	Корень не найден
3	2,225	2,356	2,2905	0,3126637	-0,2841352	-0,0888	Корень не найден
4	2,2250	2,2905	2,2578	0,0028430	-0,2841352	-0,0008	Корень не найден
5	2,2250	2,2578	2,2414	-0,1435388	-0,2841352	0,0408	Корень не найден
6	2,2414	2,2578	2,2496	-0,0710668	-0,1435388	0,0102	Корень не найден
7	2,2496	2,2578	2,2537	-0,0342911	-0,0710668	0,0024	Корень не найден
8	2,2537	2,2578	2,2557	-0,0157688	-0,0342911	0,0005	Корень не найден
9	2,2557	2,2578	2,2567	-0,0064741	-0,0157688	0,0001	Корень не найден
10	2,2567	2,2578	2,2572	-0,0018183	-0,0064741	0,0000	Корень равен 2,25723828125

Рис. 29. Результаты уточнения корня методом половинного деления

Задачи для самостоятельного решения

Взять у преподавателя свой вариант. В соответствии с полученным вариантом построить графики функций $y = f_n(x)$. Предварительно необходимо определить достаточный для наглядного представления точек пересечения с осью x интервал и с шаг, для этого первоначально построить график на интервале [–10; +10] с шагом 1.

Найти корни уравнения $f_n(x) = 0$ с точностью 0,001: 1) методом половинного деления; 2) используя встроенные функции. Сравнить полученные корни и убедиться в их идентичности. Сделать выводы.

№	Уравнение для многочленов $y = f_n(x)$
1.	$12x^5 + 108x^4 + 315x^3 + 360x^2 + 303x + 252$
2.	$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$
3.	$x^5 - 87x^3 + 82x^2 + 1032x - 1728$
4.	$x^5 - 4x^4 - 36x^3 + 226x^2 - 397x + 210$
5.	$x^5 - 2x^4 - 45x^3 + 230x^2 - 376x + 192$
6.	$7x^5 - 99x^4 + 511x^3 - 1149x^2 + 994x - 120$

Практическая работа № 5
Решение систем линейных алгебраических уравнений

Цель работы: закрепление умения решения систем линейных алгебраических уравнений и усвоение правил работы с массивами в Excel.

Задачи: знакомство со встроенными в Excel функциями, предназначенными для расчета большого массива данных, проведение расчетов с матрицами, а также решение систем линейных алгебраических уравнений методами Крамера, Гаусса и матричным с использованием программного обеспечения Excel.

При работе с таблицами часто возникает необходимость выполнить одну и ту же операцию над некоторым диапазоном ячеек, т. е. провести расчеты большого массива данных. В общем, матрицей размеров $m \times k$ называется прямоугольная таблица из чисел, имеющая m строк и k столбцов. Числа, из которых состоит матрица, называются ее элементами. Обычно матрицу записывают в виде $A = (a_{ij})_{m \times k}$. В Excel под «массивом» понимается прямоугольный диапазон формул или значений, который программа обрабатывает как единую группу.

Рассмотрим следующие операции над матрицами: транспонирование матриц, сложение, вычитание и умножение матрицы, а также нахождение обратной матрицы определителя, выполненные с использование возможностей, заложенных в программное обеспечение Excel.

Транспонированной называется матрица (A^T), в которой элементы столбца исходной матрицы ($A_{n,m}$) заменяются элементами соответствующей строки, т. е. $\underline{A}^T_{j,i} = A_{i,j}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Пример 15. Пусть в диапазон ячеек A1:E2 введена матрица размера 2*5. Необходимо получить транспонированную матрицу.

Выделяем указателем мыши блок ячеек, где будет находиться транспонированная матрица. Пусть это будет диапазон A4:B8. Нажимаем кнопку f_x на панели инструментов *Стандартная*, выбираем категорию Ссылки и массивы, находим функцию ТРАНСП. При обращении к мастеру функций в качестве аргумента функции мышкой выделяем в диапазон исходных ячеек A1:E2 (рис. 30), после чего переходим мышкой в строку формулы, нажимаем клавишу F2, а затем – сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. В результате в диапазоне A4:B8 появляется транспонированная матрица.

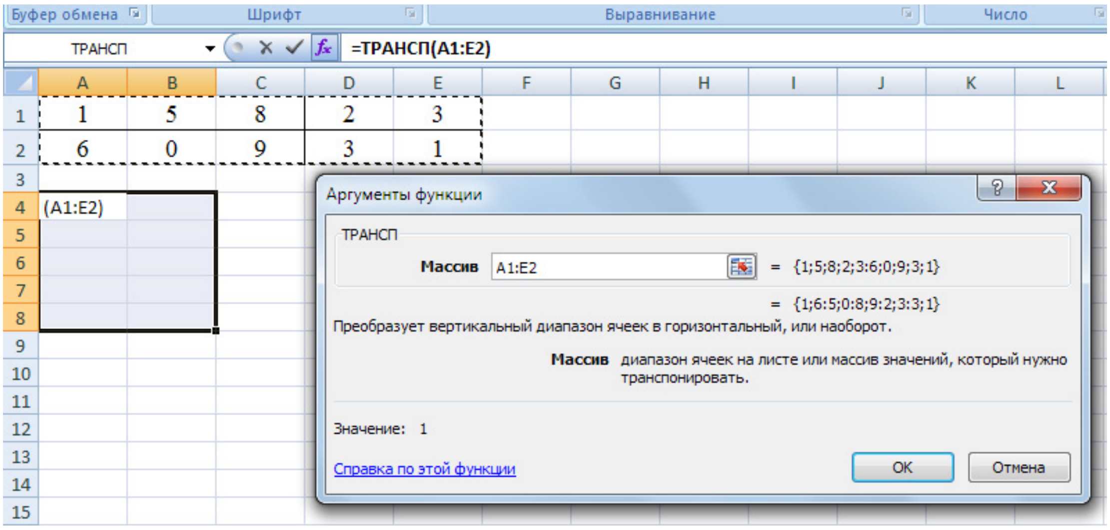


Рис. 30. Окно мастера функции ТРАНСП() для примера 15

Определитель матрицы – это многочлен, комбинирующий элементы квадратной матрицы таким образом, что его значение сохраняется при транспонировании и линейных комбинациях строк или столбцов.

Пусть в диапазон A1:C3 введена матрица. Необходимо вычислить ее определитель. Для этого выделим ячейку, в которой мы хотим получить значение определителя матрицы – D4. Нажимаем кнопку f_x на панели инструментов *Стандартная*, выбираем категорию *Математические*, находим функцию МОПРЕД, в появившемся окне мастера функций в качестве аргумента функции мышкой выделяем матрицу (рис. 31), нажимаем OK. В ячейке D4 появится результат.

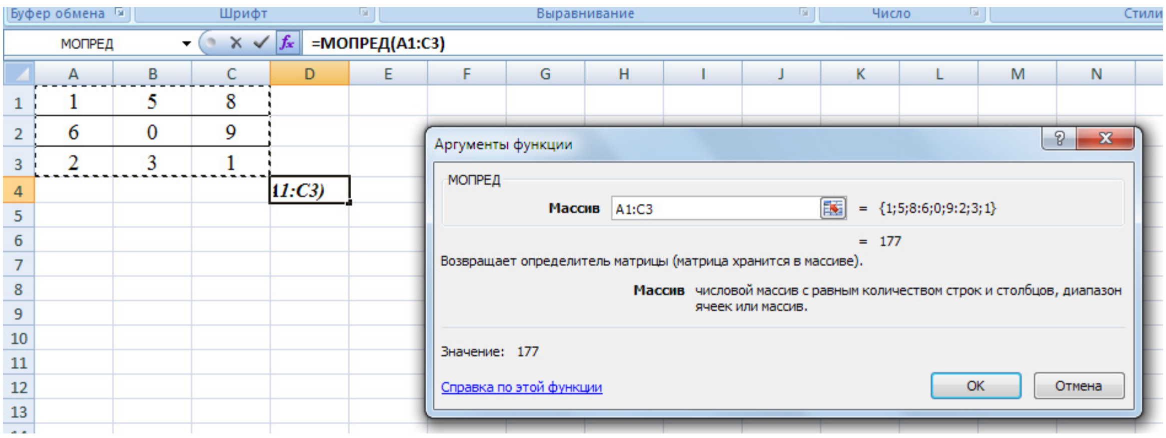


Рис. 31. Окно мастера функции МОПРЕД()

Матрица (A^{-1}) называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на исходную и справа и слева получается единичная матрица: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы является невырожденность исходной (т. е. ее определитель отличен от 0).

Пример 16. Пусть в диапазон ячеек A1:C3 введена матрица. Необходимо в диапазоне A5:C7 получить обратную матрицу.

Выделяем ячейки A5:C7 под обратную матрицу. Нажимаем кнопку f_x на панели инструментов *Стандартная*, выбираем категорию *Математические*, находим функцию МОБР, в появившемся окне мастера функций в качестве аргумента функции мышкой выделяем исходную матрицу A1:C3 (рис. 32), после чего переходим мышкой в строку формулы, нажимаем клавишу F2, а затем – сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. В результате в диапазоне A5:C7 появляется обратная матрица.

Складывать (вычитать) матрицы можно только одного размера. В Excel для выполнения этих операций используются специальные формулы.

Пример 17. Пусть матрица A введена в диапазон ячеек A1:C2, а матрица B – в диапазон A4:C5. Необходимо найти матрицу C, являющуюся их суммой в диапазоне E1:G2: $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}}$.

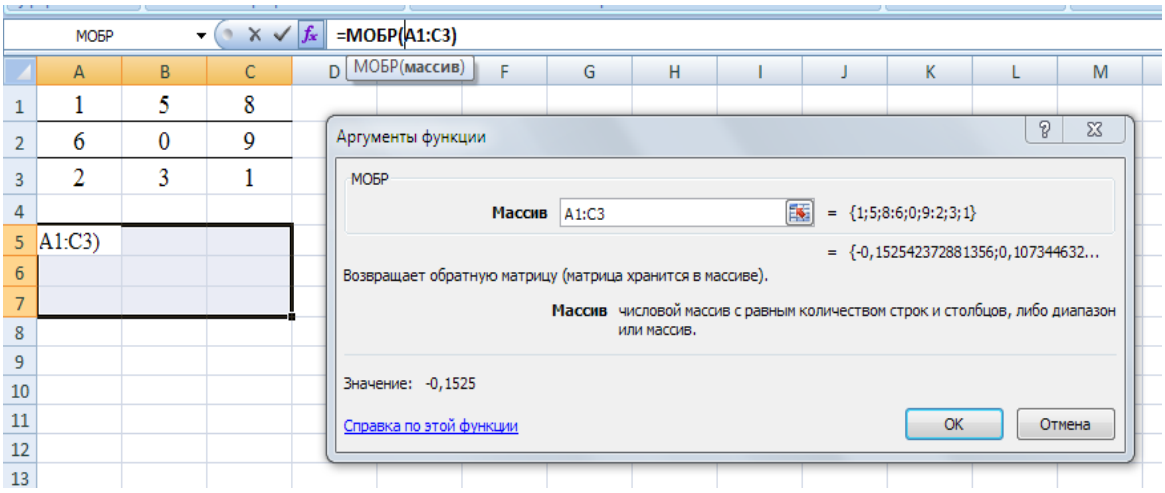


Рис. 32. Окно мастера функции МОБР() для примера 16

Устанавливаем курсор в E1 – верхнюю левую ячейку матрицы, являющуюся результатом, и вводим формулу для вычисления первого элемента =A1+A4, затем копируем данную формулу в остальные ячейки матрицы C. В результате в ячейках E1:G2 формируется матрица, являющаяся суммой двух исходных (рис. 33).

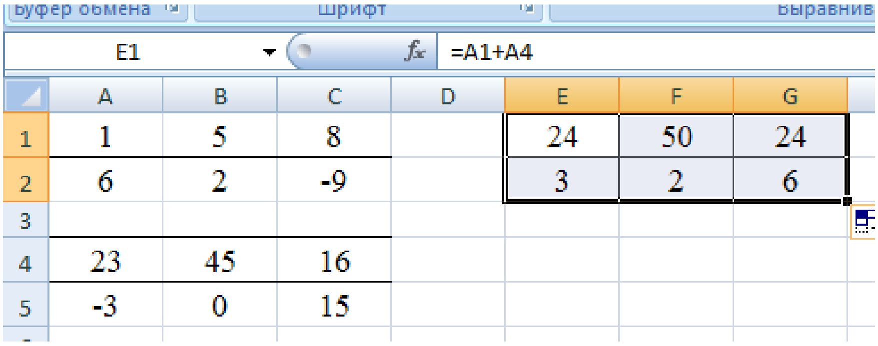


Рис. 33. Сложение двух матриц

Подобным образом вычисляется разность матриц. При умножении (делении) матрицы на число формула в каждой ячейке результирующей матрицы будет следующей: $= A_i k$ ($= A_i / k$).

Операцию сложения (вычитания) матриц можно реализовать через операцию над массивами. Для этого необходимо мышкой выделить область ячеек E1:G2, нажать знак =, мышкой выделить ячейки A1:C2, нажать знак +, мышкой выделить ячейки A4:C5, перейти мышкой в строку формулы, нажать клавишу F2, а затем – сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. В результате в диапазоне E1:G2 появится результирующая матрица.

Произведение двух матриц возможно только при условии, что число столбцов первой матрицы (множимого) равно число строк второй матрицы (множителя).

Пример 18. Пусть матрица A введена в диапазон ячеек A1:D3, а матрица B – в диапазон A5:C8. Необходимо найти матрицу C, являющуюся их произведением: $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}} * \overline{\overline{B}}$.

В нашем случае матрица A имеет размерность 3*4, а матрица B – 3*3, поэтому результирующая матрица C будет иметь размерность 3*3. Внимательно следя за соблюдением размеров, выделяем диапазон ячеек для размещения матрицы C. Пусть это будут ячейки F1:H3.

На панели инструментов *Стандартная* нажимаем кнопку f_x, выбираем категорию *Математические*, находим функцию МУМНОЖ, нажимаем OK, появляется окно мастера функций. Мышкой выделяем ячейки A1:D3 матрицы A в качестве *Массива 1*, после чего переходим мышкой в строку формулы, нажимаем клавишу F2, в качестве *Массива 2* выделяем ячейки A5:C8 матрицы B (рис. 34), нажимаем клавишу F2, а затем – сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. В результате в диапазоне F1:H3 появляется матрица, являющаяся произведением матриц A и B.

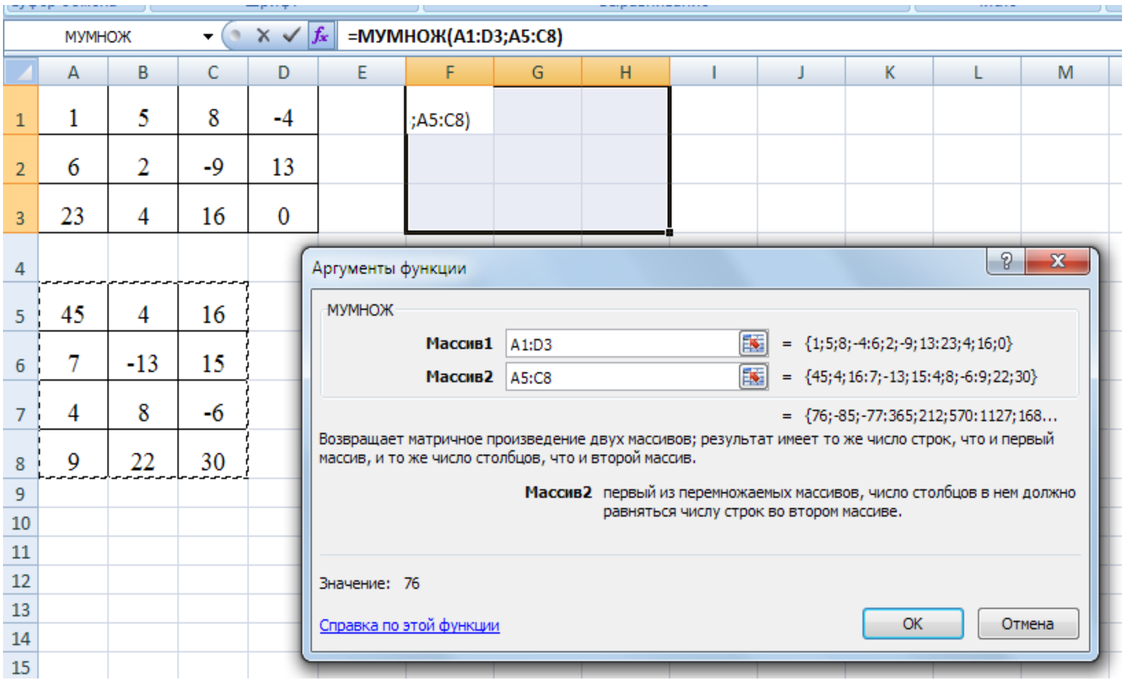


Рис. 34. Перемножение двух матриц

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Многие прикладные задачи в технике, экономике и других областях сводятся к решению матриц, которые фактически представляют собой представленных систему линейных алгебраических уравнений (в дальнейшем СЛАУ), в которой элементы матрицы являются соответствующими коэффициентами. Примерно в 75 % вычислительных задач на каком-либо этапе необходимо решит СЛАУ. Поэтому, конечно, этот раздел является очень важным для специалистов, занимающихся описанием любых физический процессов. Существует много современных пакетов прикладных программ, но для того чтобы успешно их использовать, необходимо разбираться в основах построения методов и алгоритмов, иметь представление об их недостатках и преимуществах. Все методы решения СЛАУ можно разбить на две группы: прямые (или точные) методы, которые позволяют получить решение за конечное число арифметических операций; и итерационные (или приближенные) методы, где решением является предел некоторой бесконечной последовательности единообразных действий.

Пусть дана линейная система n уравнений с n неизвестными, где a_{ij}, b_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ – соответственно коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \quad\quad\quad\quad\quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Данную систему можно записать в виде матричного уравнения: $\overline{\overline{A}} * \overline{X} = \overline{B}$, где $\overline{\overline{A}}$ – матрица коэффициентов, $\overline{X}$ – вектор неизвестных, $\overline{B}$ – столбец свободных членов. Вектор неизвестных $\overline{X}$ можно найти, решая систему линейных алгебраических уравнений с использованием обратной матрицы. Для чего умножаем левую и правую часть матричного уравнения на обратную матрицу $\overline{\overline{A}}^{-1}$ слева, получим следующее соотношение: $\overline{X} = \overline{\overline{A}}^{-1} \cdot \overline{B}$. Данный метод называется матричным. Рассмотрим пример решения СЛАУ матричным методом.

Пример 19. Пусть матрица коэффициентов $\overline{\overline{A}}$ введена в диапазон ячеек A1:C3, а вектор-столбец правой части $\overline{B}$ – в диапазон E1:E3. Найдем обратную матрицу коэффициентов $\overline{\overline{A}}^{-1}$ с помощью функции МОБР. Результирующую матрицу расположим в диапазоне A5:C7 (рис. 35).

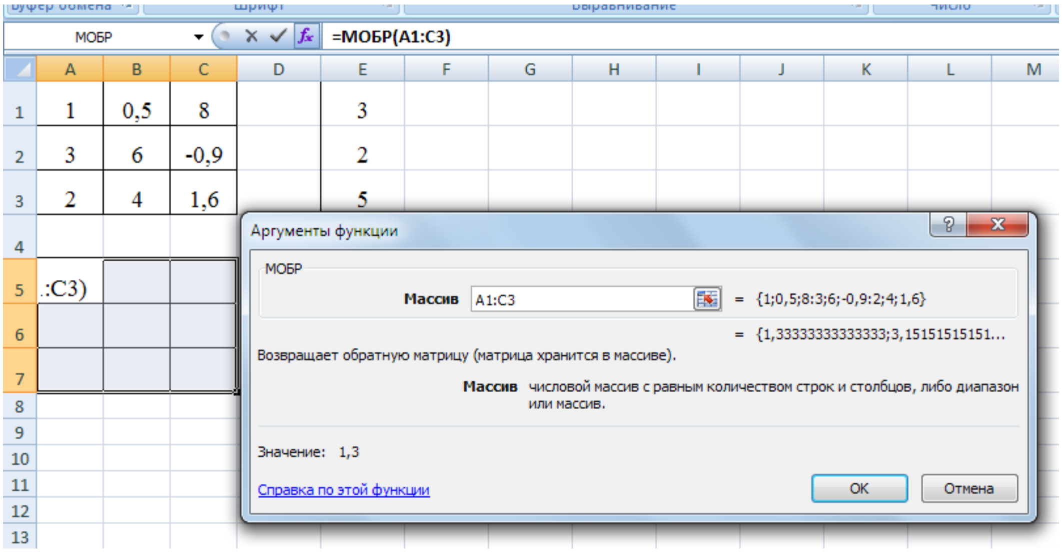
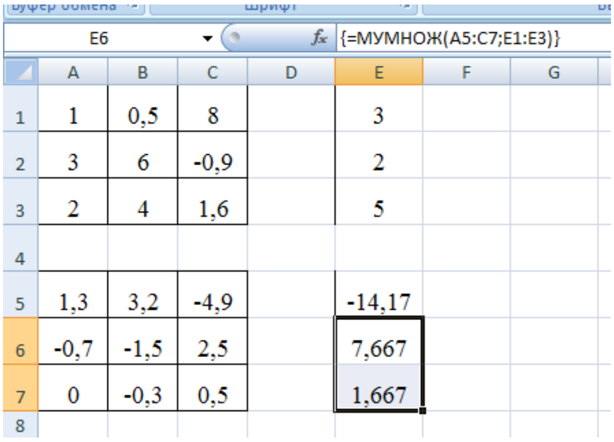


Рис. 35. Нахождение обратной матрицы

Для нахождения вектора неизвестных $\overline{X}$ выделим диапазон для его расположения – ячейки E5:E7, а затем по формуле: $\overline{X} = \overline{\overline{A}}^{-1} \cdot \overline{B}$ с помощью функции МУМНОЖ получим результат (рис. 36).



	A	B	C	D	E
1	1	0,5	8		3
2	3	6	-0,9		2
3	2	4	1,6		5
4					
5	1,3	3,2	-4,9		-14,17
6	-0,7	-1,5	2,5		7,667
7	0	-0,3	0,5		1,667

Рис. 36. Результат решения системы линейных уравнений

Пример 20. Имеются три вертикальные скважины, в которых определены абсолютные отметки кровли пласта (табл. 2).

Таблица 2

Номер скважины n	Координаты скважины, м			Абсолютная отметка пласта z, м
	x	y	z	
1	355	142	1	125,6
2	210	163	1	148,2
3	224	281	1	105,2

Необходимо рассчитать абсолютную отметку кровли пласта с координатами $x = 240$ м, $y = 200$ м.

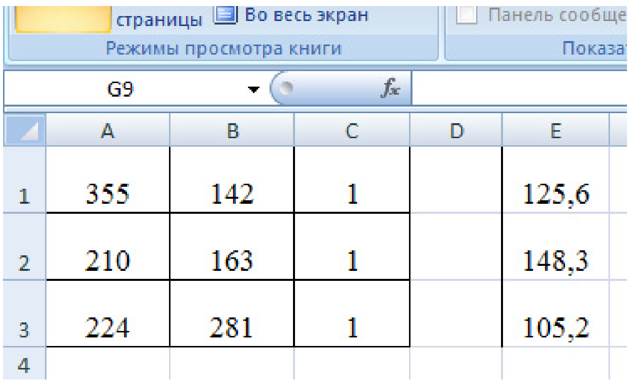
Составим систему уравнений:

$$355a + 142b + c = 125{,}6;$$

$$210a + 163b + c = 148{,}3;$$

$$224a + 201b + c = 105{,}2.$$

Для решения данной системы в программе Excel в диапазон ячеек A1:C3 введем матрицу исходных данных, а в диапазон E1:E3 – вектор-столбец правой части (рис. 37).

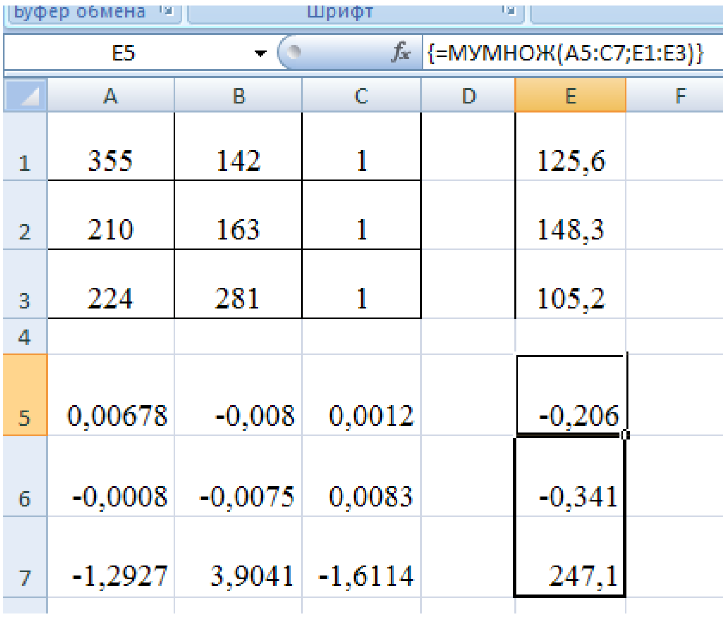


	A	B	C	D	E
1	355	142	1		125,6
2	210	163	1		148,3
3	224	281	1		105,2
4					

Рис. 37. Исходные данные для решения СЛАУ

Первым шагом в диапазоне A5:C7 получим обратную матрицу с помощью функции МОБР. Для этого выделяем ячейки A5:C7, на панели инструментов *Стандартная* нажимаем кнопку f_x, выбираем категорию *Математические*, находим функцию МОБР, нажимаем OK, появляется окно мастера функций. Мышкой выделяем ячейки A1:C3 в качестве *Массива*, после чего переходим мышкой в строку формулы, нажимаем клавишу F2, затем – сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. В результате в диапазоне A5:C7 появляется обратная матрица.

Теперь выделим диапазон в ячейках E5:E7 и с помощью функции МУМНОЖ найдем коэффициенты *a*; *b* и *c*. Для этого на панели инструментов *Стандартная* нажимаем кнопку f_x, выбираем категорию *Математические*, находим функцию МУМНОЖ и нажимаем Enter. Мышкой выделяем ячейки A5:C7 в качестве *Массива 1*, после чего переходим мышкой в строку формулы, нажимаем клавишу F2, в качестве *Массива 2* выделяем ячейки E1:E3, нажимаем клавишу F2, а затем – сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. В результате в диапазоне E5:E7 появляется матрица, являющаяся решением системы уравнений (рис. 38).



	A	B	C	D	E	F
1	355	142	1		125,6	
2	210	163	1		148,3	
3	224	281	1		105,2	
4						
5	0,00678	-0,008	0,0012		-0,206	
6	-0,0008	-0,0075	0,0083		-0,341	
7	-1,2927	3,9041	-1,6114		247,1	

Рис. 38. Результат решения системы линейных уравнений

Другими словами, значения коэффициентов $a = -0{,}206$;

$b = -0{,}341$;

$c = 247{,}1$.

Следовательно, уравнение имеет вид

$$z = -0{,}206x - 0{,}341y + 247{,}1.$$

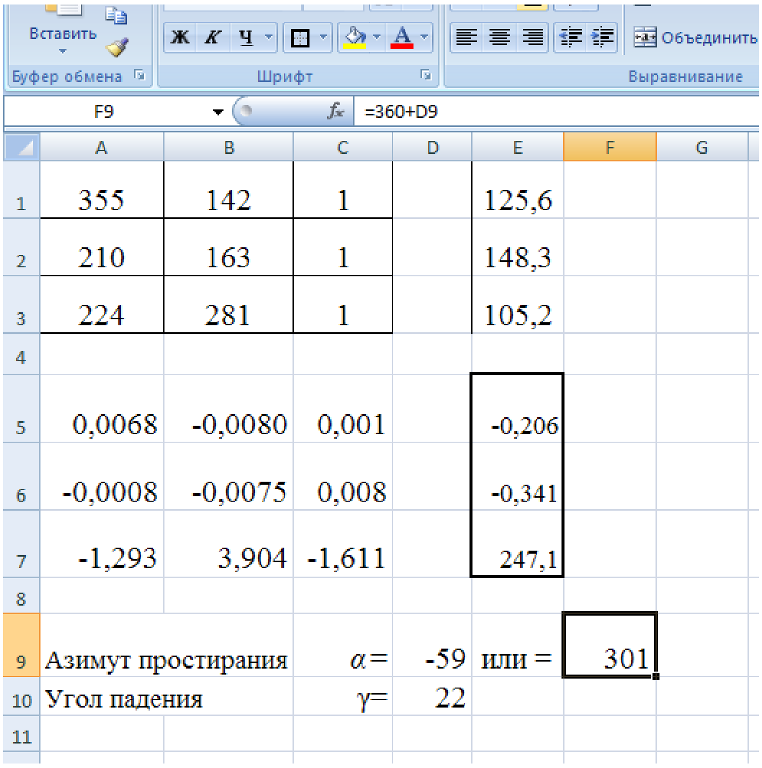
Для того чтобы найти абсолютную отметку кровли пласта в точке с координатами $x = 240$ м, $y = 200$ м, подставим заданные значения в уравнение:

$$z = -0{,}206 \cdot 240 - 0{,}341 \cdot 200 + 247{,}1 = 129{,}5 \text{ м.}$$

Зная коэффициенты уравнения, можно извлечь дополнительную геологическую информацию об элементах залегания кровли пласта (рис. 39): азимут простирания $\alpha = \mathrm{arctg}(-b/a)$, угол падения $\gamma = \mathrm{arctg}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Для данного примера рассчитаем в Excel:

- азимут простирания α = ATAN(–E6/E5)*180/ПИ() = –59° = 301°;
- угол падения γ = ATAN(КОРЕНЬ(E5^2+E6^2))*180/ПИ() = 22°.



	A	B	C	D	E	F	G
1	355	142	1		125,6		
2	210	163	1		148,3		
3	224	281	1		105,2		
4							
5	0,0068	-0,0080	0,001		-0,206		
6	-0,0008	-0,0075	0,008		-0,341		
7	-1,293	3,904	-1,611		247,1		
8							
9	Азимут простирания		α =	-59	или =	301	
10	Угол падения		γ=	22			
11							

Рис. 39. Результат выполнения примера 20

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Метод Крамера относится к прямым методам решения линейных систем. Он основан на замене i-го столбца на столбец свободных членов и нахождении неизвестных с помощью определителей матриц $x_i = \det A_i / \det A$.

Пусть дана линейная система n уравнений с n неизвестными, где a_{ij} – коэффициенты при неизвестных; b_i – свободные члены уравнений; $i, j = 1, \ldots, n$, $n \leq 5$.

Составляем основную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, находим ее определитель D. На базе матрицы A составляем вспомогательные матрицы $A_1, \ldots, A_n$ следующим образом: в матрице A_1 вместо первого столбца подставляем столбец свободных членов $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, в матрице A_2 второй столбец заменяем столбцом свободных членов и т. д. Вычисляем их определители $D_1, \ldots, D_n$. Каждое неизвестное x_i находится делением D_i на D.

Пример 21. Пусть дана линейная система из пяти уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7; \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8; \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Запишем систему в виде матрицы A, а также вспомогательные матрицы $A_1, \ldots, A_5$ в каждой из которых заменяем соответствующий i-й столбец столбцом свободных членов (рис. 40).

Вычислим определители матриц, используя функцию МОПРЕД. Для этого выделим ячейку, в которой мы хотим получить значение определителя матрицы, на панели инструментов нажмем кнопку f_x, найдем функцию МОПРЕД, в появившемся окне мастера функций в качестве аргумента функции мышкой выделим нужную нам матрицу (рис. 41). В ячейках A19:A24 расположим результаты вычислений определителей матриц $A, A_1, \ldots, A_5$.

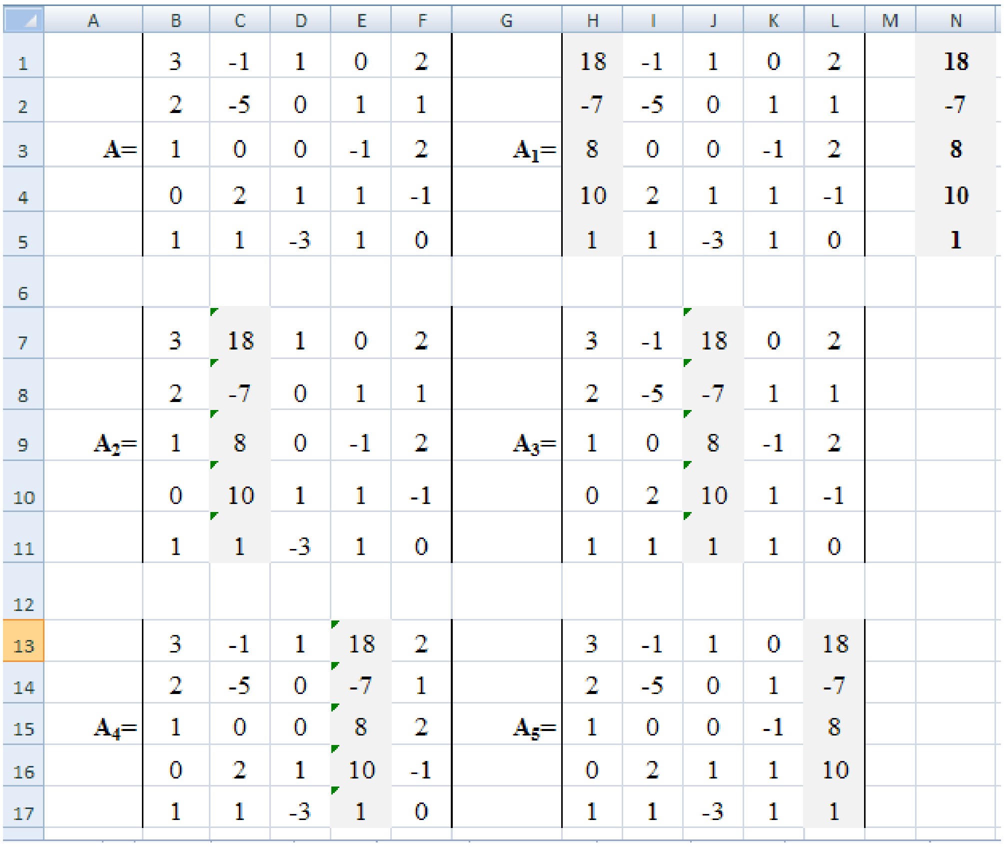
Далее вычисляем $x_1 = \det A_1 / \det A = 5$;

$x_2 = \det A_2 / \det A = 4$;

$x_3 = \det A_3 / \det A = 3$;

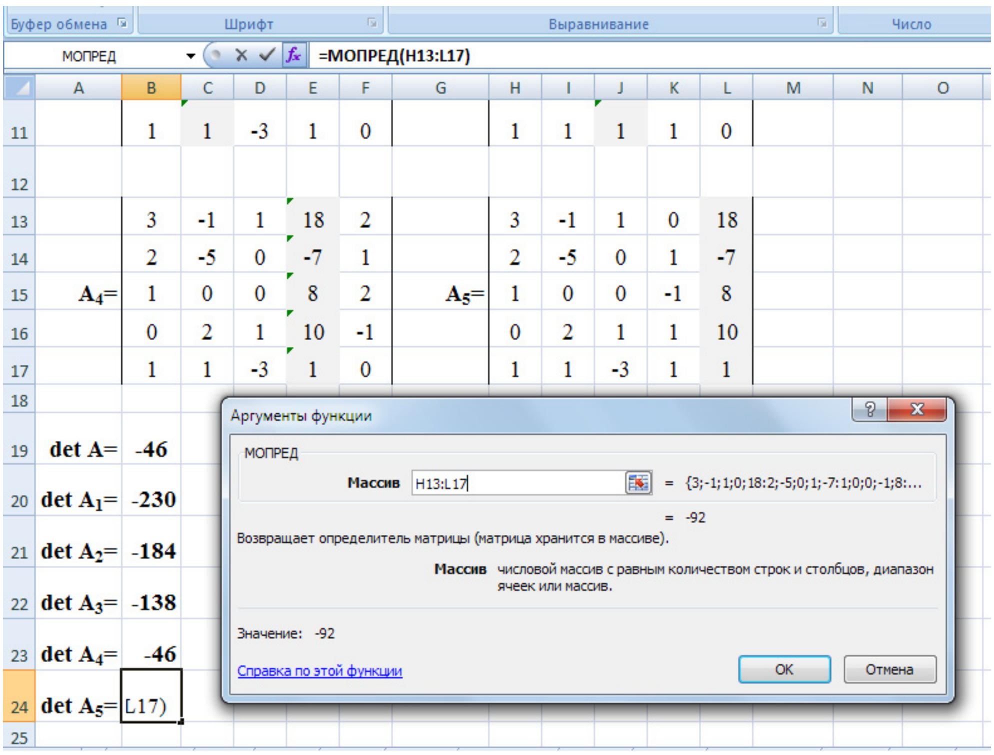
$x_4 = \det A_4 / \det A = 1$;

$x_5 = \det A_5 / \det A = 2$.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		3	-1	1	0	2		18	-1	1	0	2		18
2		2	-5	0	1	1		-7	-5	0	1	1		-7
3	A=	1	0	0	-1	2	A_1=	8	0	0	-1	2		8
4		0	2	1	1	-1		10	2	1	1	-1		10
5		1	1	-3	1	0		1	1	-3	1	0		1
6														
7		3	18	1	0	2		3	-1	18	0	2		
8		2	-7	0	1	1		2	-5	-7	1	1		
9	A_2=	1	8	0	-1	2	A_3=	1	0	8	-1	2		
10		0	10	1	1	-1		0	2	10	1	-1		
11		1	1	-3	1	0		1	1	1	1	0		
12														
13		3	-1	1	18	2		3	-1	1	0	18		
14		2	-5	0	-7	1		2	-5	0	1	-7		
15	A_4=	1	0	0	8	2	A_5=	1	0	0	-1	8		
16		0	2	1	10	-1		0	2	1	1	10		
17		1	1	-3	1	0		1	1	-3	1	1		

Рис. 40. Основная и вспомогательные матрицы примера 21



Буфер обмена | Шрифт | Выравнивание | Число

МОПРЕД =МОПРЕД(H13:L17)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
11		1	1	-3	1	0		1	1	1	1	0
12												
13		3	-1	1	18	2		3	-1	1	0	18
14		2	-5	0	-7	1		2	-5	0	1	-7
15	A_4=	1	0	0	8	2	A_5=	1	0	0	-1	8
16		0	2	1	10	-1		0	2	1	1	10
17		1	1	-3	1	0		1	1	-3	1	1
18												
19	det A=	-46										
20	det A_1=	-230										
21	det A_2=	-184										
22	det A_3=	-138										
23	det A_4=	-46										
24	det A_5=	L17)										
25												

Аргументы функции

МОПРЕД

Массив H13:L17 = {3;-1;1;0;18:2;-5;0;1;-7:1;0;0;-1;8:...

= -92

Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

Массив числовой массив с равным количеством строк и столбцов, диапазон ячеек или массив.

Значение: -92

Справка по этой функции

ОК Отмена

Рис. 41. Расчет определителей матриц A, A_1, ..., A_5

Для того чтобы убедиться в правильности расчетов и полученных результатов, делаем проверку (рис. 42).

fx =B1*$G$19+C1*$G$20+D1*$G$21+E1*$G$22+F1*$G$23

E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	2		18	-1	1	0	2		**18**	18
1	1		-7	-5	0	1	1		**-7**	-7
-1	2	**A_1=**	8	0	0	-1	2		**8**	8
1	-1		10	2	1	1	-1		**10**	10
1	0		1	1	-3	1	0		**1**	1

Рис. 42. Проверка решения системы линейных уравнений примера 21

Пример 22. Пусть дана линейная система из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20; \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11; \\ 2x_1+10x_2+9x_3+9x_4=40; \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$$

Запишем систему в виде матрицы A, а также вспомогательные матрицы $A_1, \ldots, A_4$, в каждой из которых заменяем соответствующий i-й столбец столбцом свободных членов, вычислим определители всех матриц: $A, A_1, \ldots, A_4$, а затем неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4 аналогично примеру 21 (рис. 43).

	2	5	4	1		20	5	4	1		**20**
A=	1	3	2	1	**A_1=**	11	3	2	1		**11**
	2	10	9	9		40	10	9	9		**40**
	3	8	9	2		37	8	9	2		**37**
	2	20	4	1		2	5	20	1		
A_2=	1	11	2	1	**A_3=**	1	3	11	1		
	2	40	9	9		2	10	40	9		
	3	37	9	2		3	8	37	2		
	2	5	4	20	**det A=**	-9					
A_4=	1	3	2	11	**det A_1=**	-9			**x_1=**	**1**	
	2	10	9	40	**det A_2=**	-18			**x_2=**	**2**	
	3	8	9	37	**det A_3=**	-18			**x_3=**	**2**	
					det A_4=	-0			**x_4=**	**0**	

Рис. 43. Решение СЛАУ примера 22 методом Крамера

Сделаем проверку.

Задачи для самостоятельного решения

Взять у преподавателя свой вариант.

1. Для заданных абсолютных отметок кровли пласта трех вертикальные скважин необходимо рассчитать:

– абсолютную отметку кровли пласта с координатами $x_0 = 180$ м и $y_0 = 200$ м;

– азимут простирания пласта;

– угол его падения.

Для решения систем линейных уравнений использовать два методами: матричный и Крамера. Убедиться в адекватности полученных результатов.

вариант	Номер скважины, n	Координаты скважины, м			Абсолютная отметка пласта z, м	вариант	Номер скважины, n	Координаты скважины, м			Абсолютная отметка пласта z, м
		x	y	z				x	y	z	
1	1	737,1	453,6	631,8	793,8	15	1	615,6	469,8	380,7	818,1
	2	307,8	332,1	226,8	542,7		2	307,8	332,1	218,7	785,7
	3	332,1	461,7	97,2	469,8		3	234,9	170,1	307,8	631,8
2	1	575,1	550,8	494,1	567	16	1	291,6	129,6	97,2	477,9
	2	405	388,8	429,3	494,1		2	129,6	97,2	32,4	218,7
	3	664,2	631,8	575,1	469,8		3	97,2	32,4	64,8	128
3	1	819	504	702	882	17	1	684	522	423	909
	2	342	369	252	603		2	342	369	243	873
	3	369	513	108	522		3	261	189	342	702

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Используя формулы и встроенные функции. Вручную должны быть набраны только исходные данные.

1. $$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 + 40x_3 = 21 \\ 9x_1 - 5x_2 + 50x_4 = 14 \\ 25x_1 + 4x_3 - x_4 = 13 \\ 32x_2 + 9x_4 = 21 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 8x_1 + 40x_2 - 3x_3 = 28 \\ -7x_1 + 5x_2 + 50x_4 = 0 \\ 8x_1 + 64x_3 - 11x_4 = 18 \\ 32x_1 + 5x_4 = 12 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 32x_3 = 27 \\ 4x_1 + 25x_2 - 3x_4 = 34 \\ 20x_1 + 2x_3 - 7x_4 = -28 \\ -9x_3 + 40x_4 = 5 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 - x_3 = 18 \\ -5x_1 + 2x_2 + 32x_4 = -15 \\ 2x_1 + 16x_3 - 3x_4 = 0 \\ 12x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 4x_1 + 20x_2 + x_3 = 24 \\ 16x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -13 \\ -4x_1 + 4x_3 - 32x_4 = 0 \\ 2x_1 + 10x_3 = 7 \end{cases}$$

Практическая работа № 6
Аппроксимация экспериментальных данных

Цель работы: расширение, систематизация и закрепление умений аппроксимировать исходные данные, используя программу Excel.

Задачи: строить линейную, полиноминальную и экспоненциальную аппроксимации классическим методом, а также с использованием специальных дополнительных возможностей Excel.

Пусть величина y является функцией аргумента x, но вид аналитической зависимости $y = f(x)$ неизвестен, функция задана в виде таблицы в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, где значения $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$. Решается задача замены функции $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$, чтобы эти функции совпадали в заданной области наилучшим образом. Одним из методов решения данной проблемы является аппроксимация. Построение функции $\varphi(x) = P_k(x)$, *аппроксимирующей* данную функцию (x) и являющейся многочленом степени k вида $P_k(x) = \Sigma p_j x^j (j = 0, \ldots, k)$, коэффициенты которого p_j определяются из условия минимизации суммы квадратов отклонений (*метод наименьших квадратов*) в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значений многочлена $P_k(x)$ от $y_0, y_1, \ldots, y_n$ соответственно, т. е. путем решения задачи: $\min S = \Sigma(P_k(x_i) - y_i)^2$.

Для аппроксимации функции сначала необходимо выбрать степень аппроксимирующего многочлена, т. е. среди многочленов разной степени выбрать тот, который лучше отражает поведение заданной таблично функции. Возможны следующие варианты функций.

1. Линейная – $\varphi(x) = ax + b$. Обычно применяется в простейших случаях, когда экспериментальные данные возрастают или убывают с постоянной скоростью.

2. Полиноминальная – $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_nx^n$, где a_i – константы. Степень полинома определяется количеством экстремумов.

3. Логарифмическая – $\varphi(x) = = a\ln x + b$. Применяют для описания данных, которые вначале быстро растут или убывают, а затем стабилизируются.

4. Степенная – $\varphi(x) = ax^n$. Данные не должны иметь нулевых или отрицательных значений.

5. Экспоненциальная – $\varphi(x) = be^{ax}$. Данные не должны иметь нулевых или отрицательных значений.

Затем с помощью метода наименьших квадратов определить параметры p_j аппроксимирующего многочлена, чтобы $S = \Sigma(P_k(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$. Для их поиска дифференцируют функционал S по p_j и получают систему линейных уравнений, содержащую $(k + 1)$ линейное уравнение, зависящее от $(k + 1)$ неизвестного параметра $p_0, p_1, ..., p_k$: $S = \Sigma(p_0 + p_1x + p_2x^2 + + p_kx^k - y_i)^2$. После определенных математических операций получим:

$$(n+1)p_0 + p_1\Sigma x_i + p_2\Sigma x_i^2 + \ldots + p_k\Sigma x_i^k = \Sigma y_i\ ,\ i = 0, \ldots, n$$
$$p_0\Sigma x_i + p_1\Sigma x_i^2 + p_2\Sigma x_i^3 + \ldots + p_k\Sigma x_i^{k+1} = \Sigma y_i\, x_i\ ,\ i = 0, \ldots, n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$p_0\Sigma x_i^k + p_1\Sigma x_i^{k+1} + p_2\Sigma x_i^{k+2} + \ldots + p_k\Sigma x_i^{2k} = \Sigma y_i\, x_i^k\ ,\ i = 0, \ldots, n$$

Решая эту систему уравнений, находим значения параметров.

Пример 23. Найти с помощью метода наименьших квадратов аппроксимирующий многочлен для таблично заданной функции $y = f(x)$, приняв предположение, что $f(x)$ является линейной:

x	0,75	1,5	2,25	3,0	3,75
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Решение. Поскольку исходная функция предполагается линейной, то в качестве аппроксимирующего многочлена выберем многочлен первой степени вида

$$P_1(x) = p_0 + p_1 x.$$

Тогда $S = \Sigma(p_0 + p_1 x_i - y_i)^2$, $i = 0, \ldots, 4$. Система линейных уравнений для поиска параметров p_0 и p_1 будет иметь следующий вид:

$$(n+1)p_0 + p_1\Sigma x_i = \Sigma\, y_i\ ,\ \ i = 0, \ldots, 4,\ \text{т. е. } n = 4;$$
$$p_0\Sigma x_i + p_1\Sigma x_i^2 = \Sigma\, y_i\, x_i\ ,\ \ i = 0, \ldots, 4.$$

Проведем расчеты значений коэффициентов при неизвестных параметрах (табл. 3).

Таблица 3

$n + 1 = 5$

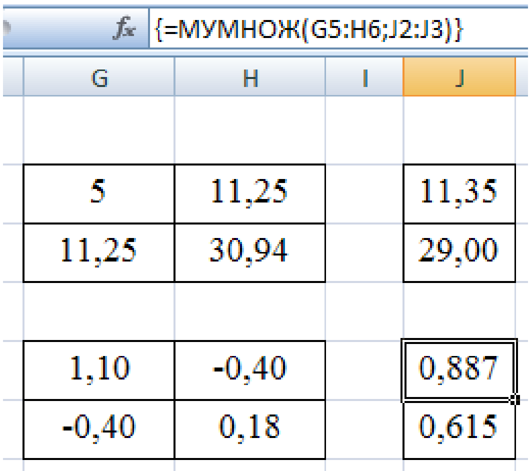
i	***x***	***y***	x^2	***x y***
0	0,75	2,5	0,56	1,88
1	1,5	1,2	2,25	1,80
2	2,25	1,12	5,06	2,52
3	3	2,25	9,00	6,75
4	3,75	4,28	14,06	16,05
Σ	11,25	11,35	30,94	29,00

Получаем систему

$$\begin{cases} 5p_0 + 11{,}25p_1 = 11{,}35; \\ 11{,}25p_0 + 30{,}94p_1 = 29, \end{cases}$$

решая которую любым известным методом (например, матричным – рис. 44), получим $p_0 \approx 0{,}89$, $p_1 \approx 0{,}62$.

Тогда аппроксимирующая функция имеет вид $y = 0{,}89 + 0{,}62x$. Рассчитаем для нее таблицу и построим график, отобразив исходные данные (рис. 45).



{=МУМНОЖ(G5:H6;J2:J3)}

G	H	I	J
5	11,25		11,35
11,25	30,94		29,00
1,10	-0,40		0,887
-0,40	0,18		0,615

Рис. 44. Решение СЛАУ матричным методом

i	***x***	***y*** *линей*
0	0,75	1,348
1	1,5	1,809
2	2,25	2,27
3	3	2,731
4	3,75	3,192

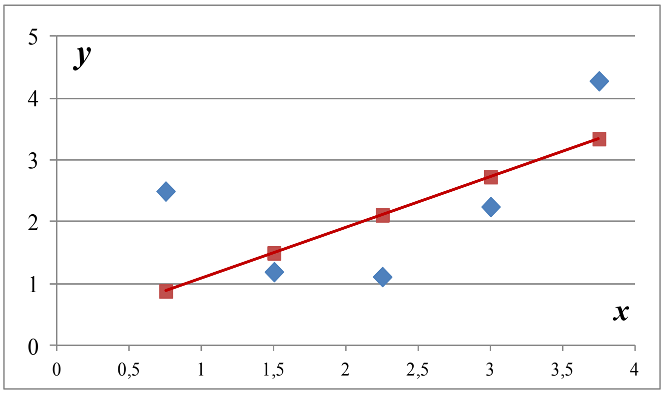


Рис. 45. Таблица и график линейной аппроксимации и исходных данных

Пример 24. Найти с помощью метода наименьших квадратов аппроксимирующий многочлен для функции $y = f(x)$ примера 1, приняв предположение, что $f(x)$ является квадратичной:

x	0,75	1,5	2,25	3,0	3,75
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Решение. Поскольку исходная функция предполагается квадратичной, то в качестве аппроксимирующего многочлена выберем многочлен второй степени вида:

$$P_2(x) = p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2.$$

Тогда $S = \Sigma(p_0 + p_1 x_i + p_2 x_i{}^2 - y_i)^2$, $i = 0, \ldots, 4$. Система линейных уравнений для поиска параметров p_0, p_1 и p_2 будет иметь следующий вид:

$$(n+1)p_0 + p_1\Sigma x_i + p_2\Sigma x_i^2 = \Sigma\, y_i,\ \ i = 0, \ldots, 4;$$
$$p_0\Sigma x_i + p_1\Sigma x_i^2 + p_2\Sigma x_i^3 = \Sigma\, y_i\, x_i,\ \ i = 0, \ldots, 4;$$
$$p_0\Sigma\, x_i^2 + p_1\Sigma x_i^3 + p_2\Sigma x_i^4 = \Sigma\, y_i\, x_i^2,\ \ i = 0, \ldots, 4.$$

Проведем расчеты значений коэффициентов при неизвестных параметрах (табл. 4).

Получаем систему

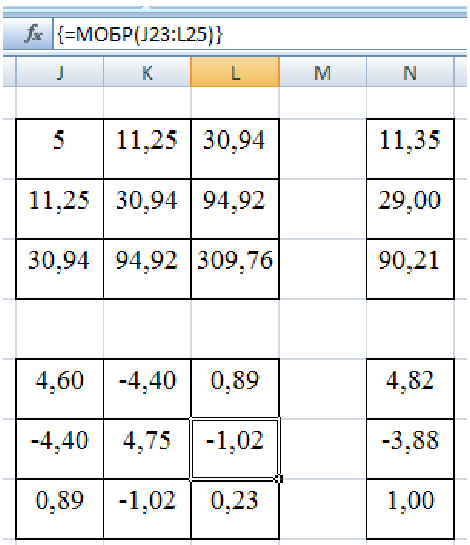
$$\begin{cases} 5p_0 + 11{,}25p_1 + 30{,}94p_2 = 11{,}35; \\ 11{,}25p_0 + 30{,}94p_1 + 94{,}92p_2 = 29; \\ 30{,}94p_0 + 94{,}92p_1 + 309{,}76p_2 = 90{,}21, \end{cases}$$

решая которую любым известным методом получим $p_0 \approx 4{,}82$, $p_1 \approx -3{,}88$, $p_2 \approx 1{,}00$ (рис. 46).

Таблица 4

$n + 1 = 5$

i	x	y	x^2	x^3	x^4	$x\,y$	$x^2\,y$
0	0,75	2,5	0,56	0,42	0,32	1,88	1,41
1	1,5	1,2	2,25	3,38	5,06	1,80	2,70
2	2,25	1,12	5,06	11,39	25,63	2,52	5,67
3	3	2,25	9,00	27,00	81,00	6,75	20,25
4	3,75	4,28	14,06	52,73	197,75	16,05	60,19
Σ	11,25	11,35	30,94	94,92	309,76	29,00	90,21



fx {=МОБР(J23:L25)}

J	K	L	M	N
5	11,25	30,94		11,35
11,25	30,94	94,92		29,00
30,94	94,92	309,76		90,21
4,60	-4,40	0,89		4,82
-4,40	4,75	-1,02		-3,88
0,89	-1,02	0,23		1,00

Рис. 46. Решение СЛАУ матричным методом

Аппроксимирующая функция имеет вид $y = 4{,}82 - 3{,}88x + x^2$. Рассчитаем для нее таблицу и построим график, отобразив исходные данные (рис. 47).

i	*x*	$y_{кв.}$
0	0,75	2,472
1	1,5	1,247
2	2,25	1,146
3	3	2,169
4	3,75	4,316

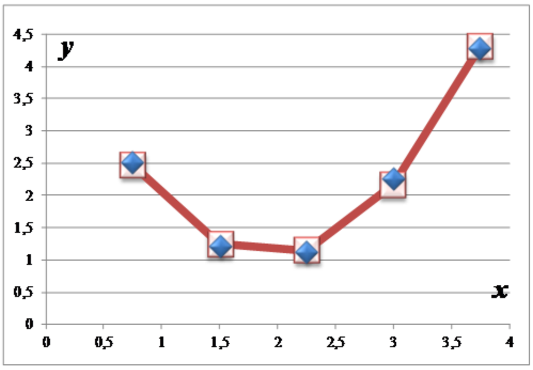


Рис. 47. Таблица и график квадратичной аппроксимации и начальных данных

Пример 25. Найти с помощью метода наименьших квадратов аппроксимирующий многочлен для таблично заданной функции $y = f(x)$, приняв предположение, что $f(x)$ является экспоненциальной:

x	0,75	1,5	2,25	3,0	3,75
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Решение. Экспоненциальная функция имеет вид $y = a_0e^{a1x}$. Приведем ее к линейному виду, прологарифмируя: $\ln y = \ln a_0 + a_1x$; и обозначив:

$$\varphi = \ln y;\ \ p_0 = \ln a_0;\ \ p_1 = a_1.$$

Тогда система линейных уравнений для поиска параметров p_0 и p_1 будет иметь следующий вид: $(n+1)p_0 + p_1\Sigma x_i = \Sigma\varphi_i$, $i = 0, \ldots, 4$,

$$p_0\Sigma x_i + p_1\Sigma x_i^2 = \Sigma\ \varphi_i x_i\ ,\ \ i = 0, \ldots, 4.$$

Проведем расчеты значений коэффициентов при неизвестных параметрах (табл. 5).

Таблица 5

i	*x*	*y*	x^2	*φ*	*φx*
0	0,75	2,5	0,56	0,916	0,687
1	1,5	1,2	2,25	0,182	0,273
2	2,25	1,12	5,06	0,113	0,255
3	3	2,25	9,00	0,811	2,433
4	3,75	4,28	14,06	1,454	5,452
Σ	11,25	11,35	30,94	3,48	9,10

Получаем систему

$$\begin{cases} 5p_0 + 11{,}25p_1 = 3{,}48; \\ 11{,}25p_0 + 30{,}94p_1 = 9{,}1, \end{cases}$$

решая которую любым методом получим $p_0 \approx 0{,}18$, $p_1 \approx 0{,}23$ (рис. 48):

fx {=МУМНОЖ(H55:I56;K52:K53)}

H	I	J	K
5	11,25		3,48
11,25	30,94		9,10
1,10	-0,40		0,184
-0,40	0,18		0,227

Рис. 48. Решение СЛАУ матричным методом

После этого возвратимся к показательной функции и найдем параметры $a_0 = e^{p0} = e^{0,18} = 1{,}2$ и $a_1 = 0{,}23$.

Следовательно, аппроксимирующая функция имеет вид $y = 1{,}2e^{0,23x}$. Рассчитаем для нее таблицу и построим график, отобразив исходные данные (рис. 49).

i	x	y	y экс.
0	0,75	2,5	1,426
1	1,5	1,2	1,690
2	2,25	1,12	2,004
3	3	2,25	2,377
4	3,75	4,28	2,818

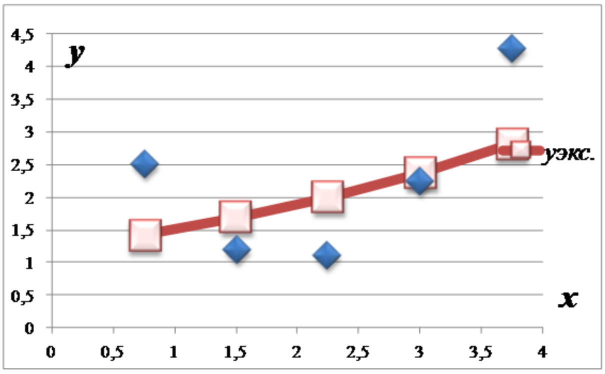


Рис. 49. Таблица и график экспоненциальной аппроксимации и начальных данных

В Excel имеются специальные возможности, помогающие найти и построить аппроксимирующие функции:

1) функция для вычисление коэффициентов регрессии:

ЛИНЕЙН (массив_y; массив_x; Конст; статистика). Конст – необязательное значение, которое указывает, требуется ли, чтобы выполнялось соотношение $y = ax$. Статистика – логическое значение, указывающее требуется ли вернуть дополнительную статистику по регрессии;

2) функция для расчета значения по методу наименьших квадратов.

ТЕНДЕНЦИЯ (массив_y; массив_x; Новый_массив_x; Конст), где массив_y – значения функции, которые уже известны для соотношения $y = ax + b$. Новый_массив_x – новые значения x, для которых функция ТЕНДЕНЦИЯ возвращает ожидаемые значения y. Если этот параметр пропущен, то предполагается, что он совпадает с массивом x. Конст – аналогично ЛИНЕЙН().

Пример 26. Для таблично заданной функции $y = f(x)$, построить аппроксимирующую функцию.

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
1	2,39	2,81	3,25	3,75	4,11	4,45	4,85	5,25

Вычислить ожидаемое значение в точках 0; 0,75; 1,75; 2,8; 4,5.

Решение. Для того чтобы рассчитать значения коэффициентов p_0 и p_1, выделим ячейки K72:L72, обратимся к мастеру функций и в категории *Статистические* выберем функцию ЛИНЕЙН. Заполним появившееся диалоговое окно соответствующим образом (рис. 50), установив курсор в окне редактирования, нажмем клавишу F2, а затем комбинацию клавиш Ctrl + Shift + Enter. В результате в ячейках K72:L72 появятся значения $p_0 = 0{,}95$, $p_1 = 1{,}64$.

В случае линейно заданной функции аппроксимирующая функция будет иметь вид $y = 0{,}95 + 1{,}64x$.

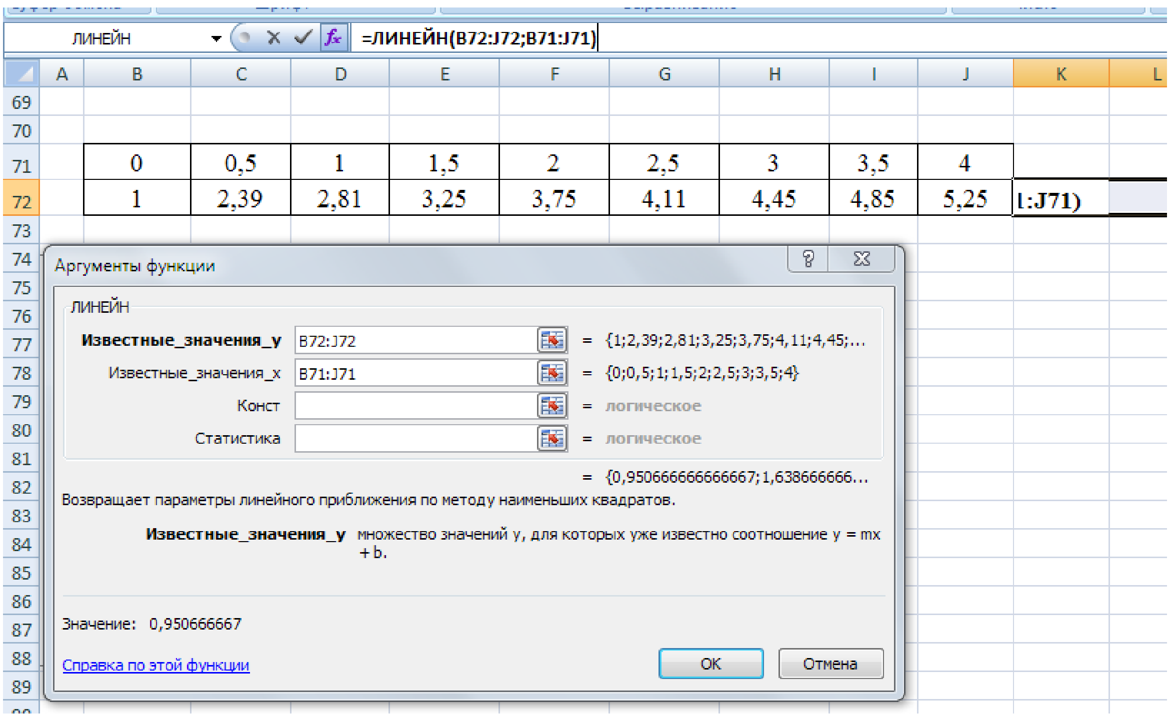


Рис. 50. Окно мастера функции ЛИНЕЙН()

Для вычисления ожидаемого значения в точках 0; 0,75; 1,75; 2,8; 4,5 занесем их в ячейки B74:F74. Затем выделим диапазон ячеек B75:F75, обратимся к мастеру функций и в категории *Статистические* выберем функцию ТЕНДЕНЦИЯ. Заполним появившееся диалоговое окно соответствующим образом: *известные значения y* из ячеек B–J строки 72, *известные значения x* из ячеек B–J строки 71, *константа* оставим незаполненным (рис. 51), установив курсор в окне редактирования, нажмем клавишу F2, а затем комбинацию клавиш Ctrl + Shift + Enter.

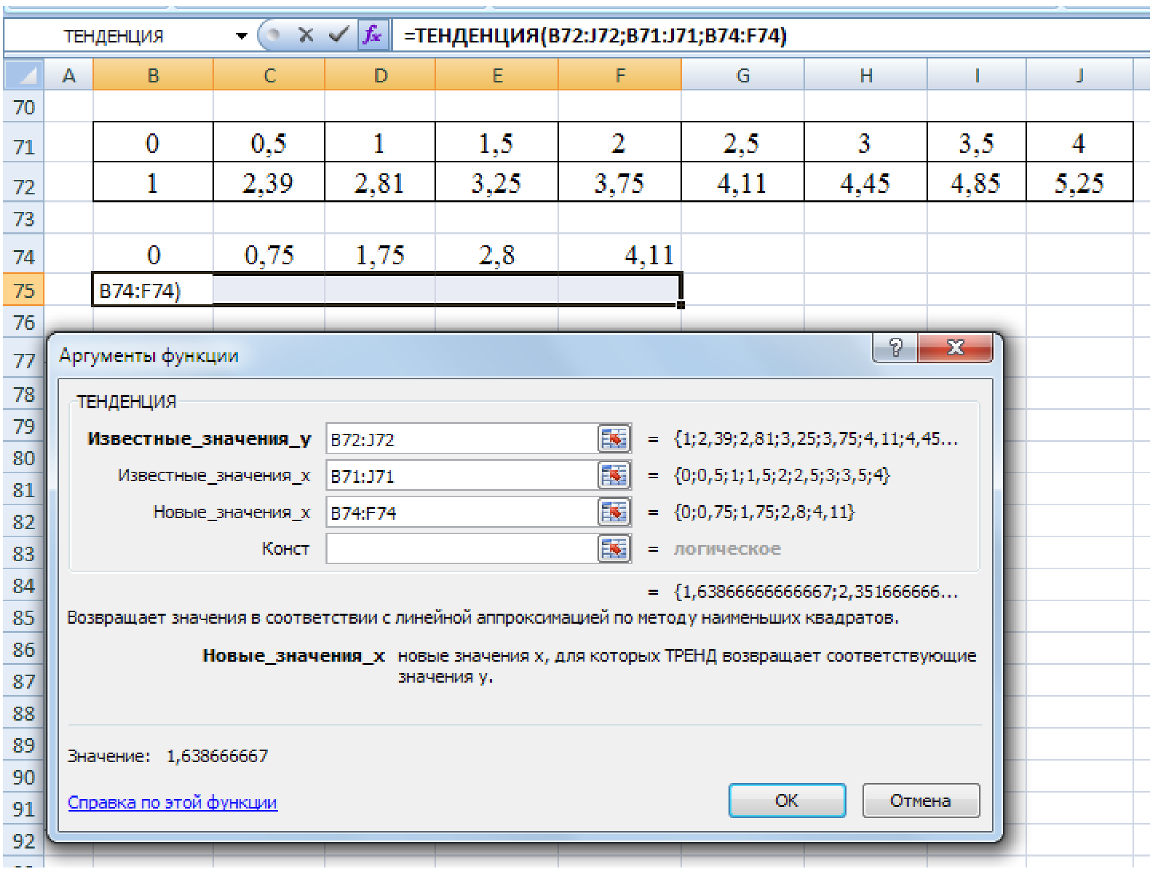


Рис. 51. Окно мастера функции ТЕНДЕНЦИЯ()

В результате в ячейках B75:F75 появятся значения функции *y*:

1,639	2,352	3,302	4,301	5,546

Теперь подберем аппроксимирующую функцию графическим методом. Для этого по исходным данным строим график. Щелкаем правой кнопкой мыши по одной из точек графика. В появившемся диалоговом окне выбираем команду *Добавить линию тренда* (рис. 52).

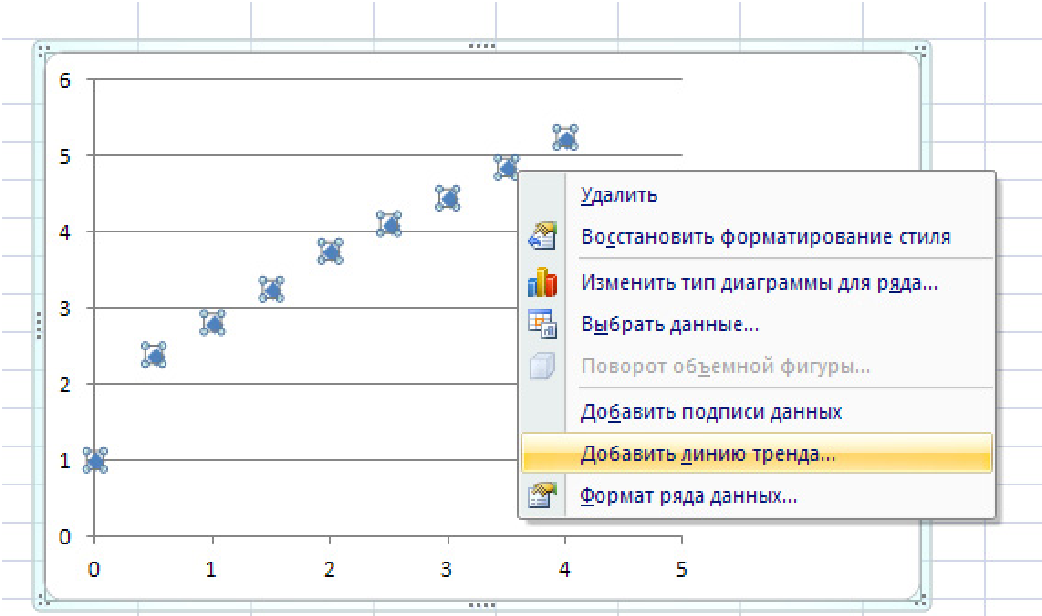


Рис. 52. Контекстное меню графика

Появляется диалоговое окно *Линия тренда* (рис. 53). На первой вкладке мы можем выбрать тип линии тренда (линейный, полиноминальный, степенной и т. д.) и задать название тренду, а также установить флажок на закладке, если есть необходимость. Обратите внимание, что полиномиальный тренд может быть любой степени: 2, 3 и т. д.

Для наглядности графика, а также для визуализации коэффициентов и их дальнейшего использования для расчетов, можно вывести уравнение функции на диаграмме, установив соответствующий значок.

Также на диаграмме можно показать величину достоверности R^2, установив значок в этой строке. Данный коэффициент показывает зависимость аппроксимирующей функции к исходным данным. Чем ближе данный коэффициент к 1, тем выше степень приближения аппроксимирующей функции к данным.

На других вкладках есть возможность форматирования линий аппроксимации: толщина, цвет и т. д. Что рекомендуется использовать, так как зачастую линии различных видов аппроксимации сливаются в одну.

Проанализировав полученные на графике данные для рассматриваемого примера, можно сделать вывод, что лучше всего аппроксимирует исходные данные аппроксимирующая полиноминальная функция 3-й степени ($R^2 = 0{,}9920$) по сравнению с линейной ($R^2 = 0{,}9528$) и полиноминальной функцией 23-й степени или, другими словами, квадратичной ($R^2 = 0{,}9796$) аппроксимациями, построенными нами (рис. 54).

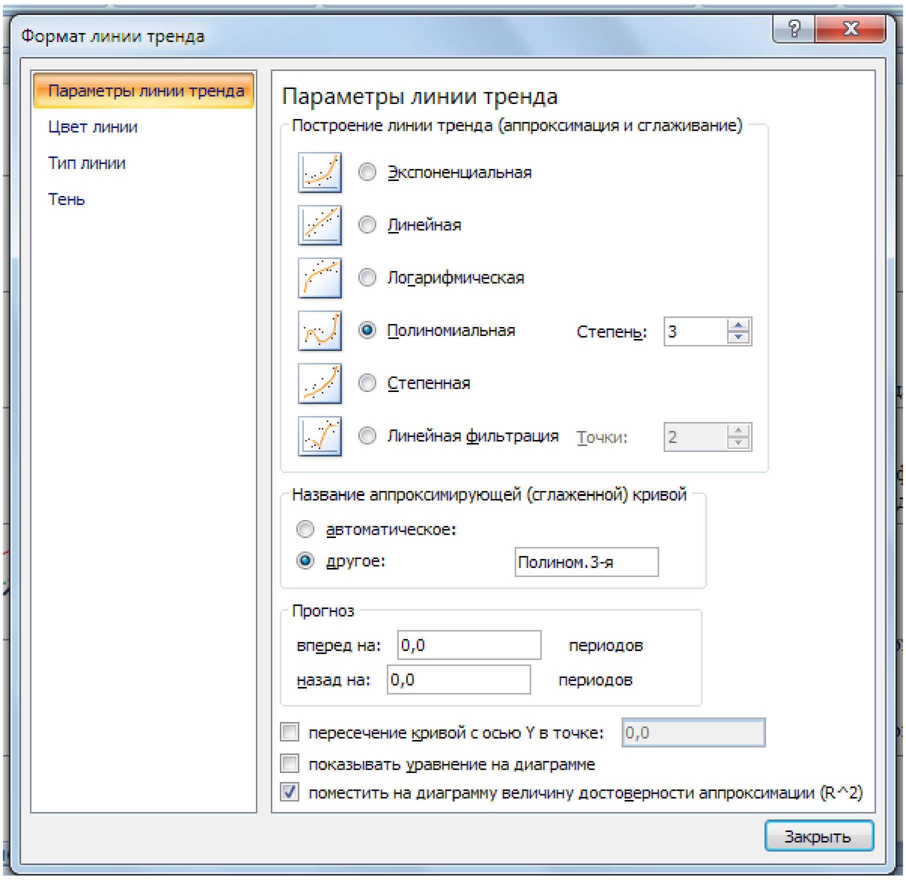


Рис. 53. Диалоговое окно Линии тренда

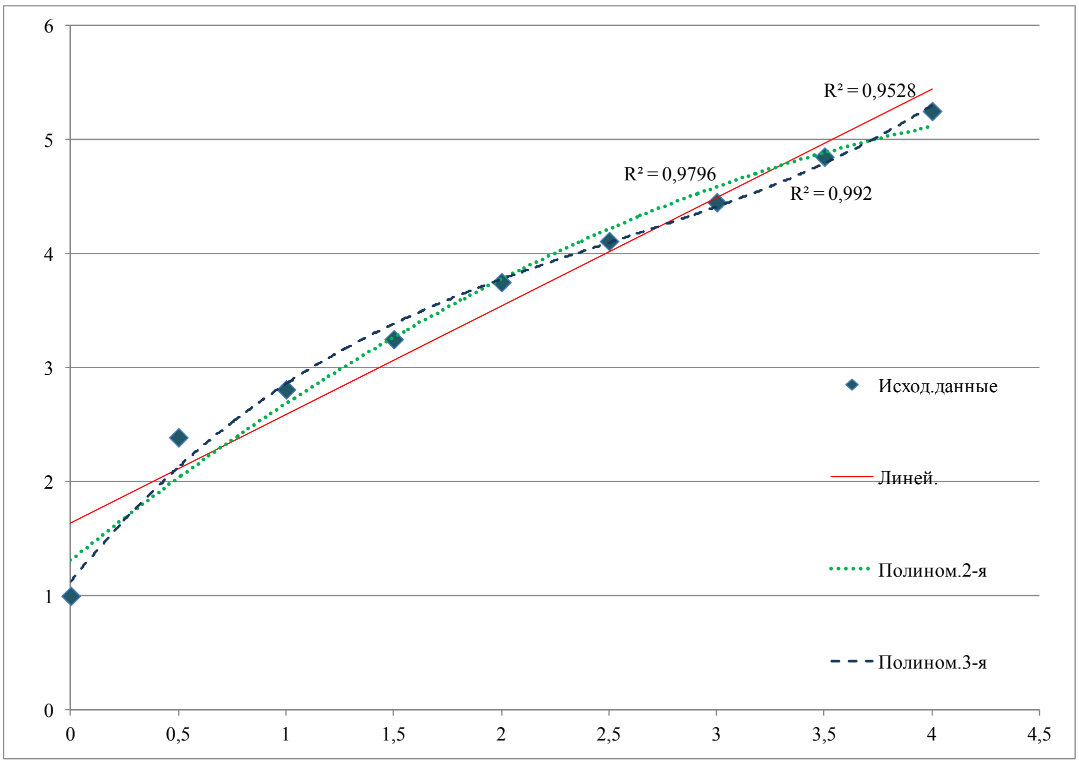


Рис. 54. Линии аппроксимирующих функций

Задачи для самостоятельного решения

Взять у преподавателя свой вариант. В соответствии с полученным вариантом:

1. Для таблично заданной функции $y = f(x)$, вычислить ожидаемое значение функции $y_{ожид}$ в предлагаемых точках $x_{ожид}$. Построить аппроксимирующие функции и определить функцию наилучшей аппроксимации.

$x_{ожид}$	*x*	*y*	$x_{ожид}$	*x*	*y*	$x_{ожид}$	*x*	*y*	$x_{ожид}$	*x*	*y*	$x_{ожид}$	*x*	*y*
1			**2**			**3**			**4**			**5**		
-0,88	-1,0	-2,25	0,111	0,0	4,568	-0,88	-1,0	3,614	-0,38	-0,5	0,72	-1,98	-2,1	14,198
-0,55	-0,7	-0,77	0,222	0,375	3,365	-0,55	-0,74	1,199	-0,15	-0,25	1,271	-1,37	-1,8	11,445
-0,06	-0,43	0,21	0,444	0,563	2,81	-0,06	-0,48	-0,125	0,08	0,0	1,2	-0,76	-1,5	9,159
0,08	-0,14	0,44	0,88	0,750	2,624	0,08	-0,21	-0,584	0,31	0,25	0,736	-0,18	-1,2	7,243
0,22	0,14	0,64	1,12	1,125	0,674	0,22	0,05	-0,538	0,62	0,50	0,24	0,22	-0,9	6,364
0,84	0,43	0,03	1,28	1,313	0,557	0,84	0,31	-0,286	0,84	0,75	-0,175	0,74	-0,6	4,818
1,11	0,71	-0,22	1,46	1,5	0,384	1,11	0,58	0,111	1,11	1,00	-0,36	0,99	-0,3	6,109
1,97	1,0	-0,84	1,80	1,69	-0,566	1,97	0,84	0,453	1,97	1,25	-0,328	1,31	0,0	3,954
2,55	1,29	-1,20	2,00	1,875	-1,44	2,55	1,10	0,671	2,55	1,5	0,0	1,68	0,3	4,687
2,91	1,57	-1,03	2,71	2,063	-1,696	2,91	1,36	0,663	2,91	1,75	0,354	1,91	0,6	4,760
	1,86	-0,37		2,250	-1,91		1,63	0,45		2,0	0,72		0,9	5,851
	2,14	0,61		2,438	-2,819		1,89	0,157		2,25	0,697		1,2	7,101
	2,43	2,67		2,625	-3,625		2,15	-0,188		2,5	0,0		1,5	9,179
	2,71	5,04		2,813	-3,941		2,41	-0,542		2,75	-1,792		1,8	11,421
	3,0	8,9		3,0	-4,367		2,95	-0,198		3,0	-5,16		2,1	14,097

2. Найти с помощью метода наименьших квадратов аппроксимирующий многочлен для таблично заданной функции $y = f(x)$, приняв предположение, что $f(x)$ является: а) линейной; б) полиноминальной; в) экспоненциальной. Построить графики. Найти функцию наилучшей аппроксимации по среднеквадратичной ошибке.

1	***x***	0,5	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	
	Y	3,99	5,65	6,41	7,71	11,215	17,611	27,83	38,19	39,3	
2	***x***	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4		
	Y	1,65	2,1	2	2,1	2,3	2,4	2,22	2,59		
3	***x***	1	2	3	4	5	6	7			
	Y	0,529	0,298	0,267	0,171	0,156	0,124	0,1			
4	***x***	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5			
	Y	5,21	4,196	3,759	3,672	4,592	4,621	5,758			
5	***x***	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
	Y	0,61	0,6	0,592	0,58	0,585	0,583	0,582	0,57	0,572	0,571
6	***x***	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	
	Y	5,197	7,78	11,14	15,09	19,24	23,11	26,25	28,6	30,3	

Практическая работа № 7
Интерполяция экспериментальных данных

Цель работы: расширение, систематизация и закрепление умений интерполировать исходные данные, используя программу Excel.

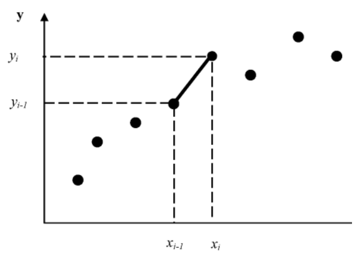
Задачи: научиться строить линейную и квадратичную интерполяции, интерполяционный многочлен Лагранжа и сплайн-интерполяцию.

Пусть величина y является функцией аргумента x, но вид аналитической зависимости $y = f(x)$ неизвестен, функции задана в виде таблицы в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, где значения $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$. Решается задача замены функции $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$, чтобы эти функции совпадали в заданной области наилучшим образом. Одним из методов решения данной проблемы является интерполяция, то есть построение функции $\varphi(x) = P_n(x)$, обладающей таким свойством, что ее значения в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ обязательно совпадают со значениями функций $f(x)$ и являющейся *интерполяционным многочленом* степени *n*. Интерполяция функции производится на некотором отрезке $[x_0, x_n]$.

Различают *глобальную* интерполяцию, когда на весь интервал строится один многочлен, и *локальную*, когда для каждой части интервала строится свой многочлен.

Простейшая локальная интерполяция – линейная, при которой заданные точки соединяются прямыми отрезками, функция получается в виде ломаной с вершинами в данных точках. Для каждого участка $[x_{i-1}, x_i]$ в качестве интерполяционного многочлена используется уравнение прямой, проходящей через концы этого отрезка.

Для i-го интервала: $y = a_i x + b_i$, $x_{i-1} \le x \le x_i$, $a_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$, $b_i = y_{i-1} - a_i \cdot x_{i-1}$. Поэтому для нахождения приближенного значения функции в точке x сначала определяем, в какой интервал попадает значение x, а затем подставляем его в формулу.



Пример 27. Найти значение функции $y = f(x)$, заданной таблично в точке $x = 2$ при линейной интерполяции:

i	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***
x	0,75	1,5	2,25	3,0	3,75
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Решение. Видно, что $x = 2$ лежит во втором интервале [1,5; 2,25], то есть $i = 2$, а коэффициенты a_2 и b_2 рассчитываются следующим образом:
$a_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1{,}12 - 1{,}2}{2{,}25 - 1{,}5} = -0{,}1067$, $b_2 = y_1 - a_2 x_1 = 1{,}2 - (-0{,}1067)\,1{,}5 = 1{,}36$.
Значение функции в точке $x = 2$: $y = a_2 x + b_2 = -0{,}1067 \cdot 2 + 1{,}36 = 1{,}147$ (рис. 55).

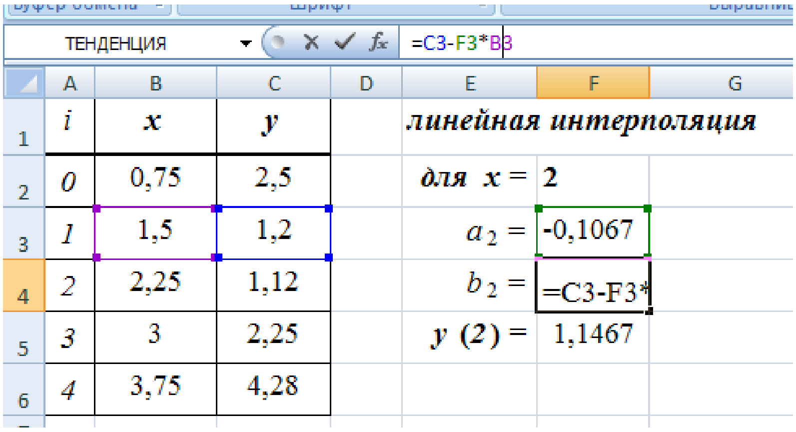
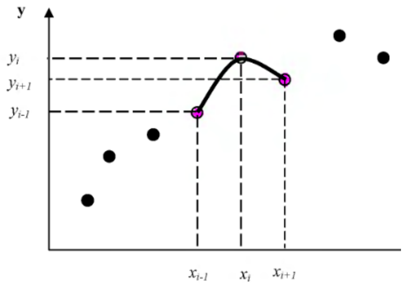


Рис. 55. Расчет линейной интерполяции для x = 2

При локальной квадратичной интерполяции в качестве интерполяционной функции на участке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ используется квадратный трехчлен: $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$, $x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$, графиком которого является парабола. Функция строится по трем точкам x_{i-1}, x_i, x_{i+1}.



Для нахождения коэффициентов a, b и c необходимо составить систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} a x_{i-1}^2 + b x_{i-1} + c = y_{i-1}; \\ a x_i^2 + b x_i + c = y_i; \\ a x_{i+1}^2 + b x_{i+1} + c = y_{i+1} \end{cases}$$

и решить ее на интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, а затем подставить найденные коэффициенты в уравнение $y = ax^2 + bx + c$.

Пример 28. Найти значение функции $y = f(x)$, заданной таблично в точке $x = 2$ при квадратичной интерполяции:

i	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***
x	0,75	1,5	2,25	3,0	3,75
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Решение. Видим, что $x = 2$ лежит в интервале [1,5; 2,25]. Тогда коэффициенты a, b и c рассчитываются из условия

$$\begin{cases} x_1^2 a + x_1 b + c = y_1; \\ x_2^2 a + x_2 b + c = y_2; \\ x_3^2 a + x_3 b + c = y_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1{,}5^2 a + 1{,}5b + c = 1{,}2; \\ 2{,}25^2 a + 2{,}25b + c = 1{,}12; \\ 3^2 a + 3b + c = 2{,}25, \end{cases}$$

а $y(2) = a2^2 + b2 + c$ следующим образом (рис. 56):

fx =J14*M11^2+J15*M11+J16

F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
2,25	1,50	1,00		1,20		***квадратичная интерполяция***			
5,06	2,25	1,00		1,12		***для x =***	**2**		
9,00	3,00	1,00		2,25		***y* (2) =**	1,012		
0,89	-1,78	0,89	***a* =**	1,08					
-4,67	8,00	-3,33	***b* =**	-4,14					
6,00	-8,00	3,00	***c* =**	4,99					

Рис. 56. Расчет квадратичной интерполяции для x = 2

В результате получаем $a = 1{,}08$; $b = 4{,}14$ и $c = 4{,}99$, а значение функции $y(2) = 1{,}08{\cdot}2^2 + 4{,}14{\cdot}2 + 4{,}99$.

Заметим, что значения, полученные при локальных линейной и квадратичной интерполяциях различаются.

Имеются различные формулы для построения интерполяционного многочлена: формулы Лагранжа, Ньютона, Гаусса.

Рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа. Он имеет вид: $P_n(x) = \Sigma y_j p_j(x)$, где $p_j(x) = \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)}$.

Необходимо обратить внимание на отличительное свойство многочлена $p_j(x)$, а именно, каждый $p_j(x)$ обращается в ноль при всех табличных значениях аргумента x, кроме $x = x_j$. А при $x = x_j$ его значение равно единице. При этом полученный интерполяционный многочлен $P_n(x)$ обладает необходимым свойством: его значения в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ совпадают со значениями $y_0, y_1, \ldots, y_n$ функции $f(x)$ в этих же точках. Можно также заметить, что степень его на единицу меньше количества табличных значений функции.

Пример 29. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для таблично заданной функции $y = f(x)$. Найти его значение в точке $x = 2$. Построить график интерполяционного многочлена Лагранжа для $y = f(x)$.

i	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***
x	0,75	1,5	2,25	3,0	3,75
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Решение. Так как имеется пять значений функции, то интерполяционный многочлен будет четвертой степени и иметь вид

$$P_4(x) = \Sigma y_i p_i(x),\ i = 0,\ \ldots,\ 4,$$

где $p_i(x)$ являются также многочленами четвертой степени от x и получаются следующим образом:

$$p_0(x) = \frac{(x-1{,}5)(x-2{,}25)(x-3{,}0)(x-3{,}75)}{(0{,}75-1{,}5)(0{,}75-2{,}25)(0{,}75-3{,}0)(0{,}75-3{,}75)};$$

$$p_1(x) = \frac{(x-0{,}75)(x-2{,}25)(x-3{,}0)(x-3{,}75)}{(1{,}5-0{,}75)(1{,}5-2{,}25)(1{,}5-3{,}0)(1{,}5-3{,}75)};$$

$$p_2(x) = \frac{(x-0{,}75)(x-1{,}5)(x-3{,}0)(x-3{,}75)}{(2{,}25-0{,}75)(2{,}25-1{,}5)(2{,}25-3{,}0)(2{,}25-3{,}75)};$$

$$p_3(x) = \frac{(x-0{,}75)(x-1{,}5)(x-2{,}25)(x-3{,}75)}{(3{,}0-0{,}75)(3{,}0-1{,}5)(3{,}0-2{,}25)(3{,}0-3{,}75)};$$

$$p_4(x) = \frac{(x-0{,}75)(x-1{,}5)(x-2{,}25)(x-3{,}0)}{(3{,}75-0{,}75)(3{,}75-1{,}5)(3{,}75-2{,}25)(3{,}75-3{,}0)}.$$

Сам интерполяционный многочлен имеет вид

$$P_4(x) = 2{,}50p_0(x) + 1{,}2p_1(x) + 1{,}12p_2(x) + 2{,}25p_3(x) + 4{,}28p_4(x).$$

Рассчитаем знаменатели коэффициентов $p_i(x)$ (рис. 57).

D30 f_x =ПРОИЗВЕД(D25:D29)

	A	B	C	D	E	F
23						
24	*i*	*для* p_0	*для* p_1	*для* p_2	*для* p_3	*для* p_4
25	*0*		0,75	1,50	2,25	3,00
26	*1*	-0,75		0,75	1,50	2,25
27	*2*	-1,5	-0,75		0,75	1,50
28	*3*	-2,25	-1,50	-0,75		0,75
29	*4*	-3	-2,25	-1,50	-0,75	
30	***П***	7,594	-1,898	1,266	-1,898	7,594

Рис. 57. Расчет знаменателей $p_i(x)$

Тогда многочлены $p_i(x)$ получаются следующими:

$$p_0(x) = \frac{(x-1{,}5)(x-2{,}25)(x-3{,}0)(x-3{,}75)}{7{,}594};$$

$$p_1(x) = \frac{(x-0{,}75)(x-2{,}25)(x-3{,}0)(x-3{,}75)}{-1{,}898};$$

$$p_2(x) = \frac{(x-0{,}75)(x-1{,}5)(x-3{,}0)(x-3{,}75)}{1{,}266};$$

$$p_3(x) = \frac{(x-0{,}75)(x-1{,}5)(x-2{,}25)(x-3{,}75)}{-1{,}898};$$

$$p_4(x) = \frac{(x-0{,}75)(x-1{,}5)(x-2{,}25)(x-3{,}0)}{7{,}594}.$$

Для расчета значения $P_4(x)$ в точке $x = 2$ сначала найдем значения $p_0(2) = \dfrac{(2-1{,}5)(2-2{,}25)(2-3{,}0)(2-3{,}75)}{7{,}594} = -0{,}029$; затем аналогично $p_1(2)$, $p_2(2)$, $p_3(2)$, и $p_4(2)$.

После чего мы можем рассчитать, $P_4(2) = 2{,}50(-0{,}029) + 1{,}2(0{,}288) + 1{,}12(0{,}864) + 2{,}25(-0{,}144) + 4{,}28(0{,}021) = 1{,}006$ (рис. 58).

=C19*I21+C20*J21+C21*K21+C22*L21+C23*M21

G	H	I	J	K	L	M
интерполяцион. многочлен Лагранжа						
для x =	**2**					
		***p*₀**	***p*₁**	***p*₂**	***p*₃**	***p*₄**
		-0,029	0,288	0,864	-0,144	0,021
***y*(2) =**	**1,006**					

Рис. 58. Расчет $P_4(x)$ в точке $x = 2$

Далее построим график интерполяционного многочлена Лагранжа.

Для этого создадим таблицу: в первой колонке – значения x на интервале [0,75; 3,75] с шагом $h = 0,1$. Шаг выбираем самостоятельно исходя из необходимости и достаточности их количества для построения графика. Заполняем столбец А, как и в предыдущих примерах, рассчитывая каждое последующее значение, как предыдущее плюс шаг. Например, в ячейке А37 значение x рассчитано по формуле =А36+$B$34.

Для каждого значения x рассчитаем $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ и $p_4(x)$ (рис. 59).

Например, $p_0(0,85)$ в ячейке В37 рассчитывается по формуле =((A37-$C$32)*(A37-$D$32)*(A37-$E$32)*(A37-$F$32))/$B$30,

$p_1(0,85)$ в ячейке С37 рассчитывается по формуле = ((A37 – $B$32)*(A37 – $D$32)*(A37 – $E$32)*(A37 – $F$32))/ $C$30 и т. д.

C37 =((A37-$B$32)*(A37-$D$32)*(A37-$E$32)*(A37-$F$32))/$C$30

	A	B	C	D	E	F	G
32	***x***	0,75	1,5	2,25	3	3,75	
33	***y***	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28	
34	***h*=**	**0,1**					
35		***p*₀**	***p*₁**	***p*₂**	***p*₃**	***p*₄**	***P4(x)***
36	0,75	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,50
37	0,85	0,75	0,46	-0,32	0,14	-0,03	2,26
38	0,95	0,54	0,79	-0,50	0,21	-0,04	2,05
39	1,05	0,37	1,00	-0,56	0,23	-0,04	1,85
40	1,15	0,24	1,11	-0,53	0,21	-0,04	1,67

Рис. 59. Расчет $p_i(x)$ для интервала [0,75; 3,75]

Теперь мы можем рассчитать значения интерполяционного многочлена $P_4(x)$ по формуле

$$2{,}50p_0(x) + 1{,}2p_1(x) + 1{,}12p_2(x) + 2{,}25p_3(x) + +4{,}28p_4(x).$$

Например, в ячейке G40 находится формула =$B$33*B40+$C$33*C40+$D$33*D40+$E$33*E40+$F$33*F40.
После того, как таблица заполнена, убедимся, что полученный интерполяционный многочлен Лагранжа $P_4(x)$ обладает необходимым свойством: его значения функции $f(x)$ в точках, заданных таблично $x_0, x_1, ..., x_n$, совпадают со значениями $y_0, y_1, ..., y_{n,}$, а именно для $x_0 = 0{,}75$; $y_0 = 1{,}5$; причем оно рассчитано по формуле! И аналогично рассчитанные для $x_1 = 2{,}25$; $y_1 = 2{,}5$; для $x_2 = 1{,}2$ рассчитанное $y_2 = 2{,}25$, для $x_3 = 1{,}12$ рассчитанное $y_3 = 4{,}28$ (рис. 60).

=$B$33*B37+$C$33*C37+$D$33*D37+$E$33*E37+$F$33*F37

	A	B	C	D	E	F	G
32	x	0,75	1,5	2,25	3	3,75	
33	y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28	
34	h=	0,1					
35		p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	P4(x)
36	0,75	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,50
37	0,85	0,75	0,46	-0,32	0,14	-0,03	2,26
38	0,95	0,54	0,79	-0,50	0,21	-0,04	2,05
39	1,05	0,37	1,00	-0,56	0,23	-0,04	1,85
40	1,15	0,24	1,11	-0,53	0,21	-0,04	1,67
41	1,25	0,14	1,15	-0,43	0,16	-0,03	1,51
42	1,35	0,07	1,13	-0,28	0,10	-0,02	1,37
43	1,45	0,02	1,05	-0,10	0,03	-0,01	1,25
44	1,55	-0,01	0,94	0,10	-0,03	0,01	1,16
45	1,65	-0,03	0,81	0,30	-0,09	0,01	1,08
46	1,75	-0,04	0,66	0,49	-0,13	0,02	1,03
47	1,85	-0,04	0,51	0,66	-0,15	0,02	1,00
48	1,95	-0,03	0,36	0,81	-0,15	0,02	1,00
49	2,05	-0,02	0,22	0,91	-0,13	0,02	1,02
50	2,15	-0,01	0,10	0,98	-0,08	0,01	1,06
51	2,25	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,12
52	2,35	0,01	-0,08	0,98	0,10	-0,01	1,20
53	2,45	0,02	-0,13	0,91	0,22	-0,02	1,31
54	2,55	0,02	-0,15	0,81	0,36	-0,03	1,44
55	2,65	0,02	-0,15	0,66	0,51	-0,04	1,58
56	2,75	0,02	-0,13	0,49	0,66	-0,04	1,75
57	2,85	0,01	-0,09	0,30	0,81	-0,03	1,94
58	2,95	0,01	-0,03	0,10	0,94	-0,01	2,14
59	3,05	-0,01	0,03	-0,10	1,05	0,02	2,36
60	3,15	-0,02	0,10	-0,28	1,13	0,07	2,60
61	3,25	-0,03	0,16	-0,43	1,15	0,14	2,85
62	3,35	-0,04	0,21	-0,53	1,11	0,24	3,12
63	3,45	-0,04	0,23	-0,56	1,00	0,37	3,39
64	3,55	-0,04	0,21	-0,50	0,79	0,54	3,68
65	3,65	-0,03	0,14	-0,32	0,46	0,75	3,98
66	3,75	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	4,28

Рис. 60. Расчет $P_4(x)$ для интервала [0,75; 3,75]

Построим график полученного интерполяционного многочлена Лагранжа $P_4(x) = 2{,}50p_0(x) + 1{,}2p_1(x) + 1{,}12p_2(x) + 2{,}25p_3(x) + 4{,}28p_4(x)$ (рис. 61).

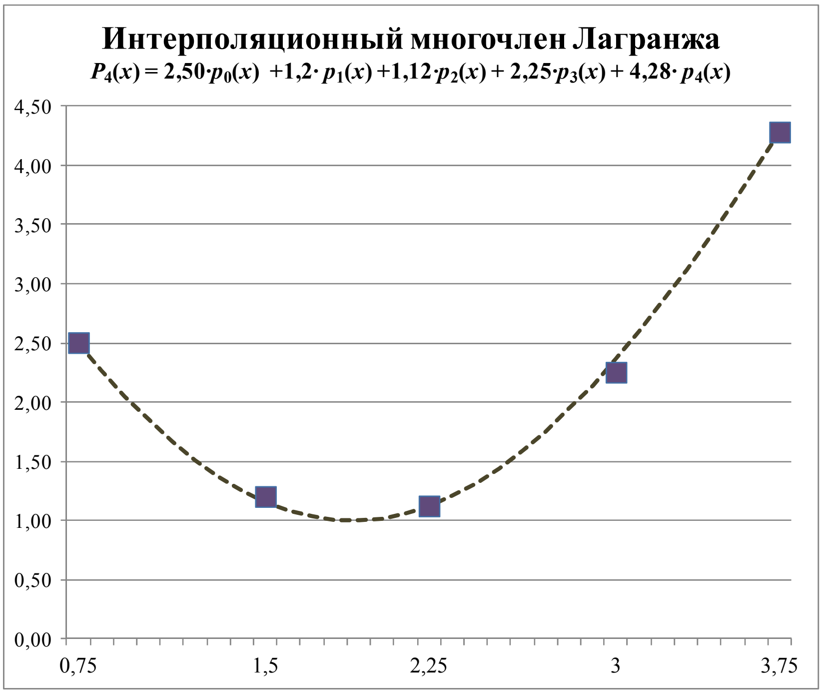


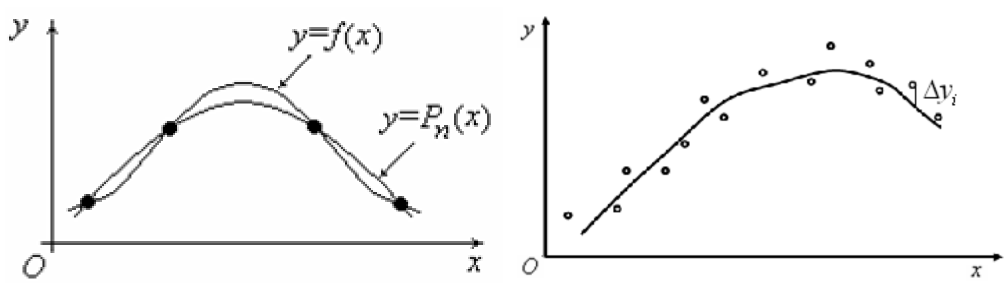
Рис. 61. График $P_4(x)$ на интервале [0,75; 3,75]

Сплайн-интерполяция

Пусть функции задана в виде таблицы в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, где значения $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$. Решается задача замены функции $f(x)$ более простой, чтобы эти функции совпадали в заданной области наилучшим образом. Для решения такой проблемы используют два подхода:

1. Построение функции $\varphi(x) = P_n(x)$, *интерполирующей* данную (рис. 62, *а*).

2. Построение функции $\varphi(x) = P_k(x)$, *аппроксимирующей* данную (рис. 62, *б*).



а *б*

Рис. 62. Графическая интерпретация принципа построения интерполяционного полинома (а) и аппроксимирующей линии (б) для точечно заданной функции

Имеются различные формулы для построения интерполяционного многочлена: Лагранжа, Ньютона и др. Мы уже рассмотрели интерполяционный многочлен Лагранжа, который является полиномом высокой степени.

Идея сплайн-интерполяции заключается в замене кривой полинома высокой степени непрерывной кривой из фрагментов полиномов низких порядков через все заданные точки. Чаще всего в качестве интерполирующего полинома используется кубическая парабола, рассчитываемая для каждого промежутка между точками.

Кубические сплайны – специальным образом построенные многочлены третьей степени. Между каждой парой соседних узлов интерполяция записывается в следующем виде:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,\ x_{i-1} \le x \le x_i.$$

В каждом полиноме четыре неизвестных коэффициента a, b, c, d => всего имеем $4(n - 1)$ неизвестный коэффициент. Их нужно подобрать так, чтобы:

- в точках $x_1, \ldots, x_n$ значения полиномов должны совпадать с измеренными;
- в пунктах стыковки соседних полиномов $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ не должно быть изломов, т. е. наклоны линий должны быть одинаковыми;
- в тех же пунктах стыковки не должно быть скачка кривизны;
- в начальном и конечном пунктах должны быть заданы граничные условия.

Коэффициенты a, b, c, d рассчитываются следующим образом:

$a_i = y_{i-1}$; $i = 1, \ldots, n$;

$b_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - (c_{i+1} + 2c_i)\cdot \dfrac{h_i}{3}$, $i = 1, \ldots, n$;

$d_i = \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$, $i = 1, \ldots, n$;

$c_1 = c_{n+1} = 0$; $c_2, \ldots, c_n$ находятся решением системы

$$\begin{cases} 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2c_3 = 3\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1}\right); \\ h_2c_2 + 2(h_2 + h_3)c_3 + h_3c_4 = 3\left(\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2}\right); \\ \ldots \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n)c_n = 3\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}\right). \end{cases}$$

Обозначим $H_i = 2(h_{i-1} + h_i)$ и $g_i = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$, тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} H_2c_2 + h_2c_3 = g_1; \\ h_2c_2 + H_3c_3 + h_3c_4 = g_2; \\ \dots \\ h_{n-1}c_{n-1} + H_nc_n = g_{n-1}. \end{cases}$$

Решив данную систему, мы найдем c_2 , …, c_n.

Пример 30. Известно, что использование соляной HCl и кремнефтористоводородной H_2SiF_6 кислот, благодаря растворению терригенных коллекторов, углубляет и развивает сеть каналов. Но одновременно и ограничивает приток пластовых вод к скважине за счет закупорки фильтрационных каналов в водоносном пласте осадками кремнефторидов. Поиск оптимального режима обработки призабойной зоны с целью снижения пластовых потерь нефти приводит к необходимости исследования зависимости количества выпадающего осадка от свойств пластовой воды. В таблице приведены результаты эксперимента по смешиванию 25 мл пластовой воды при температуре $T = 20$ °С с кремнефтористоводородной кислотой H_2SiF_6 с последующей фильтрацией полученного раствора.

i	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
x	1,05	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,19
y	8,4	14,2	14,4	15,4	19,7	20,6	22,6

Необходимо построить зависимость процентного содержания осадка, получающегося при смешивании пластовой воды с кислотой H_2SiF_6, от плотности пластовой воды. Для построения зависимости воспользоваться методом сплайн-интерполяции для $y = f(x)$.

Решение. Занесем данные в таблицу. Добавим столбцы с расчетом $h_i = (x_i - x_{i-1})$ и $H_i = 2(h_{i-1} + h_i)$ и g_i (рис. 63).

Составим систему уравнений, и подставим в нее полученные коэффициенты:

$$\begin{cases} H_2c_2 + h_2c_3 = g_1 \\ h_2c_2 + H_3c_3 + h_3c_4 = g_2 \\ h_3c_3 + H_4c_4 + h_4c_5 = g_3 \\ h_4c_4 + H_5c_5 + h_5c_6 = g_4 \\ h_5c_5 + H_6c_6 = g_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}16c_2 + 0{,}01c_3 = -188{,}57 \\ 0{,}01c_2 + 0{,}04c_3 + 0{,}01c_4 = 240 \\ 0{,}01c_3 + 0{,}04c_4 + 0{,}01c_5 = 990 \\ 0{,}01c_4 + 0{,}04c_5 + 0{,}01c_6 = -1020 \\ 0{,}01c_5 + 0{,}08c_6 = -70 \end{cases}$$

=3*((C4-C3)/E4-(C3-C2)/E3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	x	y	$h_i = x_i - x_{i-1}$		$H_i = 2\cdot(h_{i-1} + h_i)$		g_i
2	0	1,05	8,4					
3	1	1,12	14,2	$h_1=$	0,07			-188,57
4	2	1,13	14,4	$h_2=$	0,01	$H_2=$	0,16	240
5	3	1,14	15,4	$h_3=$	0,01	$H_3=$	0,04	990
6	4	1,15	19,7	$h_4=$	0,01	$H_4=$	0,04	-1020
7	5	1,16	20,6	$h_5=$	0,01	$H_5=$	0,04	-70
8	6	1,19	22,6	$h_6=$	0,03	$H_6=$	0,08	

Рис. 63. Расчет шага h_i и коэффициентов H_i и g_i

Решим систему и таким образом найдем коэффициенты сплайна c_2, c_3, c_4, c_5 и c_6 (рис. 64):

{=МУМНОЖ(C16:G20;H10:H14)}

	C	D	E	F	G	H	J
9							
10	0,16	0,01	0	0	0	-188,57	
11	0,01	0,04	0,01	0	0	240	
12	0	0,01	0,04	0,01	0	990	
13	0	0	0,01	0,04	0,01	-1020	
14	0	0	0	0,01	0,08	-70	
15							c_i
16	6,356	-1,703	0,455	-0,117	0,015		
17	-1,703	27,246	-7,281	1,879	-0,235		-1 038,04
18	0,455	-7,281	28,670	-7,399	0,925		-2 248,47
19	-0,117	1,879	-7,399	27,716	-3,464		34 031,92
20	0,015	-0,235	0,925	-3,464	12,933		-34 879,20
21							3 484,90

Рис. 64. Расчет коэффициентов c_2, c_3, c_4, c_5 и c_6

Мы нашли коэффициенты $c_2 = -1038$, $c_3 = -2248$, $c_4 = 34\,032$, $c_5 = -34{,}798$ и $c_6 = 3484$.

Далее, учитывая, что $c_1 = c_7 = 0$, по предложенным ранее формулам найдем $b_1 - b_6$, например $b_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - (c_2 + 2c_1)\dfrac{h_1}{3}$, которая в Excel выглядит как = (C3–C2)/E3 – (2*J16+J17)*E3/3 и $d_1 - d_6$, например $d_5 = \dfrac{c_6 - c_5}{3h_5}$, которая в Excel выглядит = (J21–J20)/(3·E7) (рис. 65):

=(C8-C7)/E8-(2*J21+J22)*E8/3

	H	I	J	K	L
15		b_i	c_i	d_i	
16		107,078		-4 943,06	1
17		34,415	-1 038,04	-40 347,57	2
18		1,550	-2 248,47	1 209 346,25	3
19		319,385	34 031,92	-2 297 037,44	4
20		310,912	-34 879,20	1 278 803,51	5
21		-3,031	3 484,90	-38 721,12	6
22			0,0		7

Рис. 65. Расчет коэффициентов b_i и d_i

Найдем коэффициенты $a_1 = y_0$, $a_2 = y_1$ и т. д.

Следующим шагом для каждого участка $[x_{i-1}, x_i]$ рассчитаем значение функции со своими коэффициентами:

$$S(x) = a_i + b_i(x_i - x_{i-1}) + c_i(x_i - x_{i-1})^2 + d_i(x_i - x_{i-1})^3.$$

Шаг возьмем равным 0,005.

На интервале [1,05; 1,12] сплайн-интерполяция имеет вид (рис. 66)

$$S(x) = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3 =$$
$$= 8,4 + 107(x_i - 1,05) - 0(x_i - 1,05)^2 - 4943(x_i - 1,05)^3.$$

=$I$3+$J$3*(N3-$B$2)+$K$3*(N3-$B$2)^2+$L$3*(N3-$B$2)^3

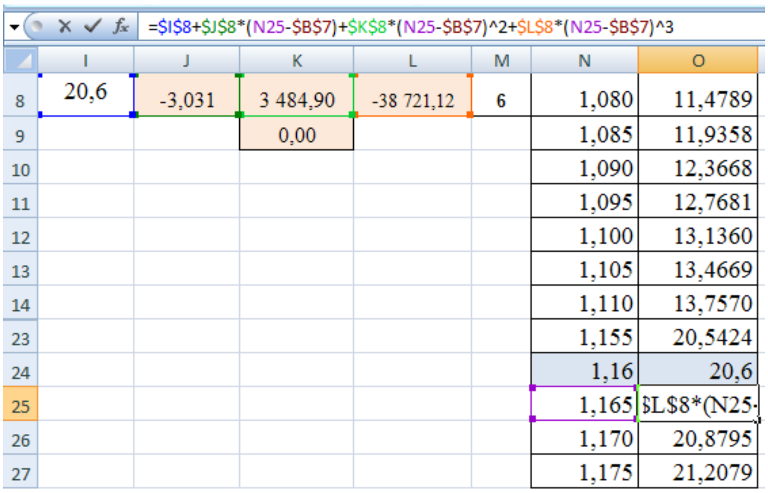
	I	J	K	L	M	N	O
1	a_i	b_i	c_i	d_i	i		
2	0				0	1,05	8,4
3	8,4	107,078	0,00	-4 943,06	1	1,055	=$I$3+J
4	14,2	34,415	-1 038,04	-40 347,57	2	1,060	9,4658
5	14,4	1,550	-2 248,47	1 209 346,25	3	1,065	9,9895
6	15,4	319,385	34 031,92	-2 297 037,44	4	1,070	10,5020
7	19,7	310,912	-34 879,20	1 278 803,51	5	1,075	10,9997
8	20,6	-3,031	3 484,90	-38 721,12	6	1,080	11,4789
9			0,00			1,085	11,9358
10						1,090	12,3668
11						1,095	12,7681
12						1,100	13,1360
13						1,105	13,4669
14						1,110	13,7570

Рис. 66. Расчет значений сплайн-интерполяции на интервале [1,05; 1,12]

На интервале [1,16; 1,19] сплайн-интерполяция имеет вид (рис. 67)

$$S(x) = a_6 + b_6(x - x_5) + c_6(x - x_5)^2 + d_6(x - x_5)^3 =$$

$$= 20{,}6 - 3031(x_i - 1{,}16) + 3485(x_i - 1{,}16)^2 - 38\,721(x_i - 1{,}16)^3.$$



=$I$8+$J$8*(N25-$B$7)+$K$8*(N25-$B$7)^2+$L$8*(N25-$B$7)^3

	I	J	K	L	M	N	O
8	20,6	-3,031	3 484,90	-38 721,12	6	1,080	11,4789
9			0,00			1,085	11,9358
10						1,090	12,3668
11						1,095	12,7681
12						1,100	13,1360
13						1,105	13,4669
14						1,110	13,7570
23						1,155	20,5424
24						1,16	20,6
25						1,165	$L$8*(N25-
26						1,170	20,8795
27						1,175	21,2079

Рис. 67. Расчет значений сплайн-интерполяции на интервале [1,16; 1,19]

Итоговая таблица и график функции имеют вид (рис. 68)

1,05	8,4
1,055	8,9348
1,060	9,4658
1,065	9,9895
1,070	10,5020
1,075	10,9997
1,080	11,4789
1,085	11,9358
1,090	12,3668
1,095	12,7681
1,100	13,1360
1,105	13,4669
1,110	13,7570
1,115	14,0026
1,12	14,2
1,125	14,3411
1,13	14,4
1,135	14,5027
1,14	15,4
1,145	17,5606
1,15	19,7
1,155	20,5424
1,16	20,6
1,165	20,6671
1,170	20,8795
1,175	21,2079
1,180	21,6236
1,185	22,0973
1,19	22,6

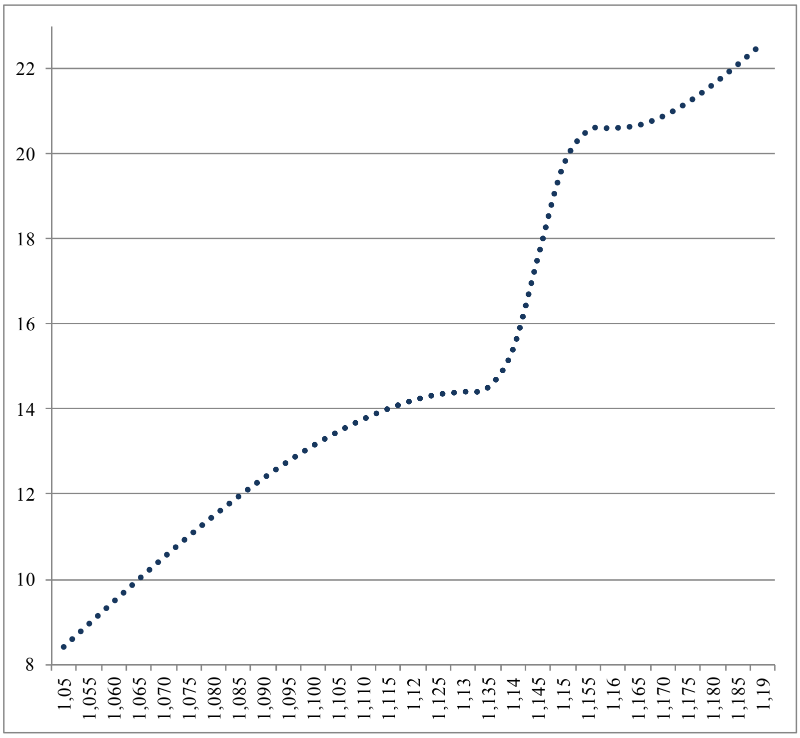


Рис. 68. Таблица и график сплайн-интерполяции зависимости %-го содержания осадка, получающегося при смешивании пластовой воды с кислотой H_2SiF_6, от плотности пластовой воды

Задачи для самостоятельного решения

Взять у преподавателя свой вариант. В соответствии с полученным вариантом:

1. Составить многочлен Лагранжа, интерполирующий профиль высот z_i на участке нефтепровода. Построить его график.

1.

x_i, км	180	180.1	180.2	180.3	180.4
z_i, м	56.2	54.2	54.9	53.2	53.5

2.

x_i, км	180.6	180.7	180.8	180.9	181
z_i, м	55.6	54.2	57.1	56.0	54.3

3.

x_i, км	181.1	181.2	181.3	181.4	181.5
z_i, м	52.3	53.4	53.0	53.9	55.7

4.

x_i, км	181.6	181.7	181.8	181.9	182
z_i, м	57.0	56.8	57.0	55.1	54.5

5.

x_i, км	182.1	182.2	182.3	182.4	182.5
z_i, м	53.6	50.0	55.5	55.3	60.7

2. Построить кубическую сплайн-интерполяцию для следующей задачи: при пяти различных значениях температуры (x_i) (в градусах Цельсия) было измерено напряжение сдвига (y_i) (Н/м^2).

№ вар.	Значение y_i, Н/м^2				
	$x_1 = 60^\circ$	$x_2 = 80^\circ$	$x_3 = 100^\circ$	$x_4 = 120^\circ$	$x_5 = 140^\circ$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	14	16	20	26	44
2	15	17	20	26	45
3	16	18	21	28	46
4	16	17	20	26	44

Заключение

В практикуме изложены методы приближенного решения нелинейных алгебраических уравнений, систем линейных алгебраических уравнений, методы аппроксимации и интерполяции, а также статистические методы и законы распределения. Приведены примеры расчетов с небольшим теоретическим изложением материала в табличном процессоре Excel. Прикладной программный пакет Excel удобен для построения диаграмм различного типа, подготовки иллюстраций для статей, научных докладов и презентаций. В конце каждого раздела приведены примеры вариантов заданий, которые студенты должны выполнить для подготовки к зачету. Практикум может быть полезен не только студентам, но и другим специалистам, занимающимся математической обработкой данных, так как математические методы универсальны и применимы в самых различных областях знаний.

Конечно, много вычислений осталось за рамками пособия, например, численное дифференцирование и интегрирование, численные методы решения задачи Коши и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы познакомиться с этими вопросами, можно воспользоваться источниками, приведенными в библиографическом списке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щукин А.Н. Основы применения численных методов в нефтяной и газовой промышленности : методические указания. В 3 частях. Часть 1 / А.Н. Щукин. – Ухта : УГТУ, 2008. – 28 с.
2. Чен-Син Э.П. Методические указания к лабораторным работам по курсу «Компьютерное моделирование» : учебное пособие / Э.П. Чен-Син, Л.Н. Панюшева. – Москва : РГУ нефти и газа, 2004. – 92 с.
3. Ильченко М.А. Excel в математических и статистических расчетах : методические указания. В 2 частях. Часть 2 / М.А. Ильченко, Л.С. Струкова. – Мичуринск : Наукоград, 2007. – 136 с.
4. Мартьянова А.Е. Статистическое моделирование на ЭВМ : учебно-методическое пособие / А.Е. Мартьянова. – Астрахань : АГТУ, 2007. – 156 с.
5. Борздова Т.В. Основы статистического анализа и обработка данных с применением Microsoft Excel : учебное пособие / Т.В. Борздова. – Минск : ГИУСТ БГУ, 2011. – 75 с.
6. Молоков К.А. Компьютерные технологии в машиностроении : методические указания к выполнению практических работ для студентов / К.А. Молоков, А.В. Славгородская, М.В. Китаев. – Владивосток : Издательский дом Дальневосточного федерального ун-та, 2013. – 40 с.

Учебное издание

ДЕЕВА Вера Степановна

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НЕФТЕГАЗОВОМ ДЕЛЕ

Практикум

Корректура *Е.Л. Тен*
Компьютерная верстка *О.Ю. Аршинова*
Дизайн обложки *А.И. Сидоренко*

Подписано к печати 19.04.2018. Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать CANON. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,21
Заказ 84-18. Тираж 100 экз.

Издательство
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ