Слайд 2

ЗАЧЕМ НУЖНА МОДЕЛЬ? ЦЕЛИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Модель нужна для того, чтобы:

- понять, как устроен конкретный объект: **какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающей средой;**
- научиться управлять объектом или процессом, **находить оптимальные способы управления при заданных целях и критериях;**
- прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ИНЖЕНЕРНЫХ И НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

- В инженерной практике встречаются три типа задач: *прямые задачи, обратные задачи и задачи идентификации*. **(Здесь они расположены в порядке возрастания сложности задач**).

ИСТОЧНИКИ И СТРУКТУРА ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

- ***Погрешность модели*** **возникает потому, что математическая модель, какой бы сложной она ни была, всегда остается приближенным описанием объекта исследования;**
- ***Погрешность исходных данных***; **исходные данные, как правило, получаются в результате экспериментальных исследований и всегда содержат ошибки измерений;**
- ***Погрешность метода*** **(погрешность дискретизации, погрешность аппроксимации) связана с приближенными методами решения, которые не могут точно воспроизвести математическую модель;**

- ***Вычислительная погрешность*** **(погрешность округления) связана с ошибками округления и их накоплением в процессе вычислений.**
- **Погрешность модели вместе с погрешностью исходных данных составляют *неустранимую погрешность* . Происхождение этого термина связано с тем, что принятие математической модели и задание исходных данных вносит в решение ошибку, которая уже не может быть устранена в ходе дальнейших вычислений. Единственный способ уменьшить эту погрешность – перейти к более точной математической модели и/или задать более точные исходные данные.**
- ***Полная погрешность***

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ

- Математическая задача называется ***корректной***, если выполнены следующие три условия:

- решение задачи существует при любых входных данных ;

- это решение единственно;

- решение непрерывно зависит от входных данных или, другими словами, решение устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных.

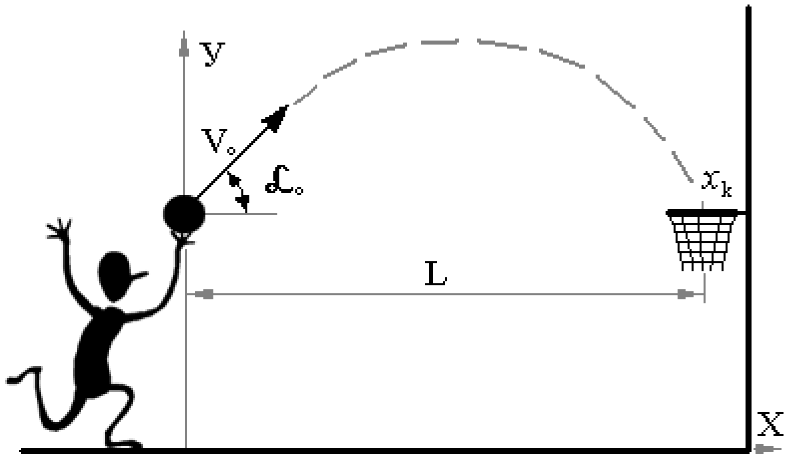
ПОНЯТИЕ О ХОРОШО И ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

Задача называется ***хорошо обусловленной***, если малым погрешностям входных данных соответствуют малые погрешности решения, и ***плохо обусловленной***, если возможны сильные изменения решения (плохо обусловленные задачи называют иногда *слабо устойчивыми*).

Слайд 3

ПРИМЕР: ЗАДАЧА О БАСКЕТБОЛИСТЕ

(содержательная постановка задачи)



- Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину.
- *Модель должна позволять*:
- вычислять положение мяча в любой момент времени;
- определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах.
- *Исходные данные*:
- масса и радиус мяча;
- начальные координаты, начальная скорость и угол броска мяча;
- координаты центра и радиус корзины.

- Движение баскетбольного мяча может быть описано в соответствии с законами классической механики Ньютона.

Примем следующие гипотезы:

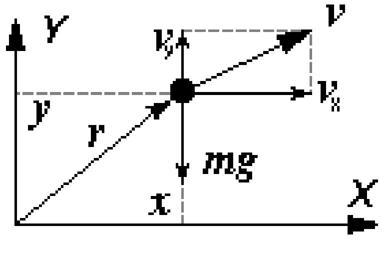
- объектом моделирования является баскетбольный мяч радиуса ***R***;

- мяч будем считать материальной точкой массой ***m***, положение которой совпадает с центром масс мяча;
- движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения ***g*** и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
- движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
- пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча вокруг центра масс;
- параметры движения мяча: координаты (x и y) и скорость (ее проекции v_x и v_y).
- *Концептуальная постановка задачи*: определить закон движения материальной точки массой ***m*** под действием силы тяжести, если известны начальные координаты точки x_o и y_o, ее начальная скорость v_o и угол бросания α_o. Центр корзины имеет координаты x_k и y_k. Вычислить точность броска $\Delta = x(t_k) - x_k$, где t_k

  определяется из условий : $t_k > 0, \quad v_y < 0, \quad y(t_k) = y_k$

<u>Слайд 4</u>

- Найти зависимости $x(t)$, $y(t)$ и $v_x(t)$ *и* $v_y(t)$ из решения системы дифференциальных уравнений:



$$m\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad v_x = \frac{dx}{dt},$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

- при следующих начальных условиях: $x(0) = x_o, \quad y(0) = y_o, \quad v_x(0) = v_o\cos\alpha_o, \quad v_y(0) = v_o\sin\alpha_o$

- Вычислить параметр Δ как $\Delta = x(t_k) - x_k$

  где t_k определить из условий $t_k > 0, \quad v(t_k) < 0, \quad y(t_k) = y_k$

- Аналитическое решение:

$$x(t) = x_o + v_o t \cos \alpha_o, \qquad y(t) = y_o + v_o t \sin \alpha_o - \frac{gt^2}{2},$$
$$v_x(t) = v_o \cos \alpha_o, \qquad v_y(t) = v_o \sin \alpha_o - gt.$$

Слайд 5

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА НА МАКРОУРОВНЕ

- На макроуровне осуществляют проектирование (или моделирование режима работы) различных машин и механизмов.
- Объекты моделирования на макроуровне рассматриваются как сложные *технические системы*, состоящие из совокупности взаимодействующих *дискретных элементов*. Задача проектирования таких объектов состоит в определении оптимальных параметров и структуры исходя из заданного описания внешней среды и технических требований к объекту.
- Отдельный элемент макроуровня – это сложный объект (система) микроуровня. Объекты моделирования на *микроуровне* описываются уравнениями в частных производных, т. е. рассматриваются как *динамические системы с распределенными параметрами*. Эти модели универсальны, дают наиболее детальное описание физических свойств и позволяют решать любые задачи анализа технического объекта. Однако они достаточно *сложны* даже для *отдельного элемента* машины или механизма. Поэтому, если рассматривать каждый элемент объекта макроуровня как сплошную среду, т.е. описывать его с той же степенью

детализации что и на микроуровне, то задача оптимизации структуры и параметров макрообъекта становится практически неразрешимой. Вместе с тем многие задачи проектирования успешно решаются с использованием более простых (но более грубых) моделей макроуровня.

- Математическая модель макроуровня может быть построена огрублением (осреднением) модели микроуровня. При этом отдельные подсистемы микроуровня с непрерывно изменяющимися параметрами заменяются дискретными элементами с постоянными параметрами. Постоянные параметры элементов макроуровня получаются осреднением распределенных параметров микроуровня. Полученная в результате осреднения система называется *динамической системой с сосредоточенными параметрами*.
- Другой распространенный метод построения математических моделей макроуровня основан на составлении *уравнений Лагранжа второго рода*. Этот подход отличается универсальностью, его можно применять к объектам любой физической природы.

Слайд 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

- ***Математическая модель динамической системы с сосредоточенными параметрами*** – это система обыкновенных дифференциальных уравнений (в общем случае нелинейных)

$$\frac{du}{dt} = f\left(u, w, x, t\right) \qquad (*)$$

где u - вектор фазовых переменных (фазовых координат), вектор состояния системы;

w - вектор внешних воздействий;

x - вектор параметров элементов технического объекта (внутренние параметры характеризуют свойства или режим работы элементов, из которых состоит объект);

t - время.

- ***Фазовые переменные*** – это физические величины, характеризующие состояние объекта в процессе его функционирования. Такими величинами являются:

  - в ***механических системах*** – силы и скорости;

  - в ***пневмогидравлических системах*** – давления и расходы;

  - в ***тепловых системах*** – тепловые потоки и температуры;

  - в ***электрических системах*** – напряжения и токи.

- ***Выходные параметры*** характеризуют свойства технического объекта, это показатели (критерии) качества и эффективности объекта. Их подразделяют на следующие *группы*: - назначения; - надежности; - безопасности; - стандартизации и унификации; - экономические (экономного использования сырья, материалов, топлива, энергии, трудовых ресурсов); - экологические (ограничения вредных воздействий продукции).
- Выходные параметры объекта непосредственно не фигурируют в системе дифференциальных уравнений (*). Они определяются по результатам решения этой системы уравнений.
- Система дифференциальных уравнений (*) описывает динамические режимы функционирования технического объекта.
- ***Анализ*** этих режимов заключается в решении системы уравнений (*) (аналитически или численно) и последующем определении выходных параметров объекта или иных характеристик.

Слайд 7

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА, РЕШАЕМЫЕ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

- В вычислительном эксперименте при проектировании обычно задают некоторые стандартные типовые (тестовые) воздействия на объект: ступенчатые, импульсные, гармонические, кусочно-линейные, экспоненциальные и т.п.

В зависимости от модельного режима, положенного в основу решения конкретной проектной задачи, различают следующие **виды анализа**:

- - ***анализ статических состояний*** (анализируется состояние покоя системы);
- - ***анализ переходных процессов*** (анализируется процесс перехода из одного установившегося режима функционирования в другой установившийся режим; установившееся состояние системы достигается при неизменных характеристиках внешних воздействий);
- - ***анализ устойчивости*** (изучается способность системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим при наложении различных возмущений);
- - ***анализ стационарных режимов колебаний*** (изучается установившийся процесс вынужденных колебаний при гармоническом внешнем воздействии после затухания свободных колебаний);
- - ***анализ частотных характеристик*** (определяются резонансные режимы функционирования);
- - ***анализ чувствительности*** (оценивается влияние изменения параметров объекта на изменение целевой функции; из множества внутренних параметров объекта отбираются *управляемые параметры*, которые наиболее эффективно влияют на функцию цели; эти параметры используются на стадии оптимизации);
- - ***анализ выходных процессов*** (по входным параметрам и описанию системы определяются выходные параметры; многократное решение этой задачи и обработка результатов решения методами регрессионного анализа

позволяет построить упрощенную *экспериментальную факторную модель* системы);

- - ***анализ управляемости*** (изучается способность системы переходить из заданного начального состояния в заданное конечное состояние под влиянием входного управляющего воздействия);
- - ***статистический анализ*** (применяется на заключительно этапе проектирования для анализа случайных воздействий внешней среды и случайного разброса параметров объекта, обусловленного технологическим процессом изготовления).

Слайд 8

ДИСКРЕТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА МАКРОУРОВНЕ

- При построении математической модели на макроуровне производится выделение дискретных элементов.
- Основные физические свойства технических объектов любой природы - *инерционные, упругие и диссипативные* – отображаются в динамических моделях соответственно *инерционными, упругими и диссипативными элементами*. Различают *простые и сложные элементы*. Простой элемент наделен только одним физическим свойством, сложный – более чем одним.
- При построении структурной модели выделяются сосредоточенные массы, эквивалентные массам соответствующих частей ТО, и элементы, лишенные массы (невесомые), отображающие характер взаимодействия сосредоточенных масс.
- *Сосредоточенные массы* обладают инерционными свойствами и способностью накапливать кинетическую энергию. Их называют ***инерционными элементами***. Количество выделяемых сосредоточенных масс в динамической модели равно числу ее степеней свободы.

- Взаимодействие сосредоточенных масс осуществляется посредством *упругих, диссипативных, фрикционных и трансформаторных элементов*.
- ***Упругие элементы*** отображают упругие свойства динамической системы. Они обладают способностью накапливать потенциальную энергию.
- ***Диссипативные элементы*** отображают свойства диссипации (рассеивания) энергии конструктивными элементами технического объекта вследствие внутреннего и внешнего трения.
- ***Фрикционные элементы*** отображают физические свойства фрикционных механизмов, т.е. механизмов для передачи или преобразования движения с помощью трения (фрикционные передачи, муфты, тормоза).
- ***Трансформаторные элементы*** отображают безынерционное преобразование потока энергии, осуществляемое техническими устройствами, называемыми трансформаторами.

Слайд 9

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИЗ ТИПОВЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ.

- При построении модели технического объекта, в котором протекают процессы различной физической природы, необходимо для каждого из таких процессов выделить ***типовые подсистемы***: *механическую, гидравлическую, тепловую, электрическую.*
- Для сравнительно простых объектов, содержащих небольшое количество типовых элементов, непосредственно записываются физические законы для всех элементов, объединение которых в общую систему уравнений дает *математическую модель макроуровня*.
- Для сложных технических объектов удобно оперировать ***эквивалентными схемами***, основанными на *аналогиях* между математическими моделями элементов, принадлежащих *различным физическим системам*. При этом

предпочтительнее привлекать аналогии между *электрической системой* и другими физическими системами. Эти аналогии позволяют применять достаточно универсальные приемы построения математических моделей электрических систем, формализованные с использованием *законов Кирхгофа и ориентированных графов*.

Первый закон Кирхгоффа записывается для узлов электрической схемы и формулируется так: алгебраическая сумма токов I_k во всех ветвях электрической цепи, имеющих общий узел равна нулю $\sum_k I_k = 0$

- ***Второй закон Кирхгоффа***: алгебраическая сумма падений напряжения при обходе любого замкнутого контура электрической цепи равна нулю

<u>Слайд 10</u>

$$\sum_k U_k = 0$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

<u>МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ</u>

Тип элемента	Вид системы				
	Механическая		Гидравлическая	Тепловая	Электрическая
	Поступательная	Вращательная			
Инерционный	$F_u = m\frac{dv_u}{dt}$ $v_u = m^{-1}\int F_u dt$	$M_u = J\frac{d\omega_u}{dt}$ $\omega_u = J^{-1}\int M_u dt$	$p_u = m_g\frac{dQ_u}{dt}$ $Q_u = m_g^{-1}\int p_u dt$	$\Phi_u = c_T\frac{dT_u}{dt}$ $T_u = c_T^{-1}\int \Phi_u dt$	$U_u = L\frac{dI_u}{dt}$ $I_u = L^{-1}\int U_u dt$
Диссипативный	$F_d = \mu v_d$ $v_d = \mu^{-1}F_d$	$M_d = \mu\omega_d$ $\omega_d = \mu^{-1}M_d$	$p_d = \mu_g Q_d$ $Q_d = \mu_g^{-1}p_d$	$\Phi_d = \mu_T T_d$ $T_d = \mu_T^{-1}\Phi_d$	$U_d = RI_d$ $I_d = R^{-1}U_d$
Упругий	$F_y = c\int v_y dt$ $v_y = c^{-1}\frac{dF_y}{dt}$	$M_y = c\int \omega_y dt$ $\omega_y = c^{-1}\frac{dM_y}{dt}$	$p_y = c_g\int Q_y dt$ $Q_y = c_g^{-1}\frac{dp_y}{dt}$		$U_y = C^{-1}\int I_y dt$ $I_y = C\frac{dU_y}{dt}$

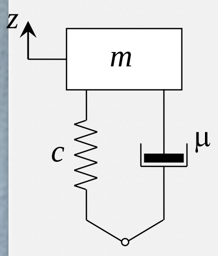
ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЕДИНИЦЫ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ (СИ).

Фазовая перемен-ная	Вид системы				
	Механическая		Гидравлическая	Тепловая	Электрическая
	Поступательная	Вращательная			
Типа потенциала (обобщенная сила)	F Сила $[F]=\text{Н}$	M Вращающий момент $[M]=\text{Н}\cdot\text{м}$	p Давление $[p]=\text{Па}$	Φ Тепловой поток $[\Phi]=\text{Вт}$	U Падение напряжения $[U]=\text{В}$
Типа потока (обобщенное перемещение)	v Скорость $[v]=\frac{\text{м}}{\text{с}}$	ω Угловая скорость $[\omega]=\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	Q Расход $[Q]=\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$	T Температура $[T]=\text{К}$	I Сила тока $[I]=\text{А}$

ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕМЕНТОВ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЕДИНИЦЫ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ (СИ)

Тип элемента	Вид системы				
	Механическая		Гидравлическая	Тепловая	Электрическая
	Поступательная	Вращательная			
Инерционный	m Масса $[m]=\text{кг}$	J Момент инерции относительно оси $[J]=\text{кг}\cdot\text{м}^2$	m_g Коэффициент массы (масса на квадрат площади) $[m_g]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^4}$	c_T Теплоемкость $[c_T]=\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	L Индуктивность $[L]=\text{Гн}$
Диссипативный	μ Коэффициент сопротивления $[\mu]=\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$	μ Коэффициент сопротивления при вращении $[\mu]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$	μ_g Коэффициент гидравлического сопротивления $[\mu_g]=\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^5}$	μ_T Коэффициент теплового сопротивления $[\mu_T]=\frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{К}}$	R Сопротивление $[R]=\text{Ом}$
Упругий	c Коэффициент жесткости $[c]=\frac{\text{Н}}{\text{м}}$	c Коэффициент жесткости при вращении $[c]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}$	c_g Коэффициент гидравлической жесткости $[c_g]=\frac{\text{Н}}{\text{м}^5}$		C Емкость $[C]=\text{Ф}$

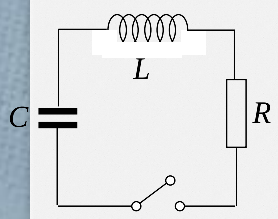
ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ.



$$m\frac{d^2z}{dt^2}+\mu\frac{dz}{dt}+cz=0 \qquad z\big|_{t=0}=z_0,\quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}=v_0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0 \qquad q\big|_{t=0}=q_0,\quad \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0}=I_0$$

$$\bar{z}=\frac{z}{z_0},\quad \bar{q}=\frac{q}{q_0},\quad \bar{t}=\frac{t}{t_0}$$



$$\frac{m}{ct_0^2}\frac{d^2\bar{z}}{d\bar{t}^2}+\frac{\mu}{ct_0}\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}+\bar{z}=0 \qquad \bar{z}\big|_{\bar{t}=0}=1,\quad \left.\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}\right|_{\bar{t}=0}=\frac{v_0t_0}{z_0}$$

$$\frac{LC}{t_0^2}\frac{d^2\bar{q}}{d\bar{t}^2}+\frac{RC}{t_0}\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}+\bar{q}=0 \qquad \bar{q}\big|_{\bar{t}=0}=1,\quad \left.\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}\right|_{\bar{t}=0}=\frac{I_0t_0}{q_0}$$

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int_0^t IdT=0$$

$$q(t)=\int_0^t Idt$$

$$\frac{m}{ct_0^2}=\frac{LC}{t_0^2} \qquad \frac{\mu}{ct_0}=\frac{RC}{t_0} \qquad \frac{v_0t_0}{z_0}=\frac{I_0t_0}{q_0} \qquad \bar{z}(\bar{t})=\bar{q}(\bar{t})$$