Обыкновенные дифференциальные уравнения

Краткий конспект лекций

Составитель
В.А.Чуриков
Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Высшей математики
Томского политехнического университета.

http://www.tpu.ru/

Национальный исследовательский
Томский политехнический университет:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

E-mail: vachurikov@list.ru (основной)
vachurikov@tpu.ru (дополнительный)

Сайт: http://portal.tpu.ru/SHARED/v/VACHURIKOV

Оглавление

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Общие понятия

Понятие дифференциального уравнения.

Определение. Соотношение

$$f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n, если функция $y(x)$ является неизвестной, а n - порядок наивысшей производной данного соотношения

Определение. Решением (или частным решением или частным интегралом) дифференциального уравнения

$$f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

является функция $y(x)$, при подстановке которой в уравнение вместе со всеми производными получается тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ произвольные константы (постоянные) интегрирования, которые появляются при интегрировании (нахождении решения) дифференциального уравнения.

Иногда неявное задание решения дифференциального уравнения называется его *интегралом* $\varphi(x, y)$.

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего решения при подстановке в него конкретных значений констант интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения представляет в общем случае бесконечное множество частных решений.

2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

$$f(x, y, y') = 0.$$

Если возможно представление дифференциального уравнения в виде

$$\frac{dy}{dx} \equiv y'_x = f(x, y),$$

или

$$dy = f(x, y)dx,$$

то говорят, что уравнение разрешимо относительно производной. В противном случае уравнения неразрешимы относительно производной.

Оперирование с дифференциалами ***dx*** **и** ***dy*** **в дифференциальных уравнениях**

Можно умножать и делить.

Возможно эквивалентное представление уравнения

$$\frac{dx}{dy} \equiv x'_y = \frac{1}{f(x, y)},$$

или

$$dx = \frac{dy}{f(x, y)}.$$

Автономное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

когда функция $f(x)$ не зависит от y, можно записать, комбинируя дифференциалы

$$\int dy = \int f(x)dx + C.$$

Интегрируя дальше, получим общее решение, которое представляет множество частных решений для разных значений постоянной интегрирования C

$$y = F(x) + C.$$

Из всего многообразия решений необходимо выбрать те частные решения, которые будет удовлетворять условиям поставленной задачи. Обычно это одно частное решение.

Для нахождения нужного частного решения необходимо выбрать постоянную интегрирования. Для этого в общее решение подставляют *начальное условие*, которое задаётся при формулировании задачи

$$y\big|_{x=x_0} \equiv y\big|_{x_0} \equiv y(x_0) = y_0 = (F(x) + C)\big|_{x_0}.$$

После этого из полученного уравнения, в которое подставлены начальные условия x_0, y_0, находят необходимую константу интегрирования C_0 и тогда искомое частное решение в общем виде можно записать $y = \varphi(x, C_0)$, или в нашем частном случае $y = F(x) + C_0$

Другая форма записи

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C, \; y(x_0) = y_0 = C.$$

Формула Барроу для частного решения с начальными условиями.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Задачу на нахождение частных решений по начальным условиям называют *задачей Коши*. Если задача Коши имеет единственное решение, то это решение называется частным решением уравнения.

Каждому частному решению соответствуе кривая на плоскости xOy, которые называют *интегральными кривыми* данного уравнения.

В общем случае через каждую точку проходит не одна интегральная кривая, а больше, вплоть до бесконечности. Кроме этого возможны точки, через которые не проходит ни одной интегральной кривой (или ни одного решения). Все такие точки называют *особыми точками* дифференциального уравнения.

Если существуют линии, состоящие только из особых точек, то такие линии называют *особыми линиями* дифференциального уравнения.

Пример:

$$y' = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = 2xdx$$

$$\int dy = 2\int xdx$$

интегрирование левой и правой части даёт *общее решение*

$$y = x^2 + C$$

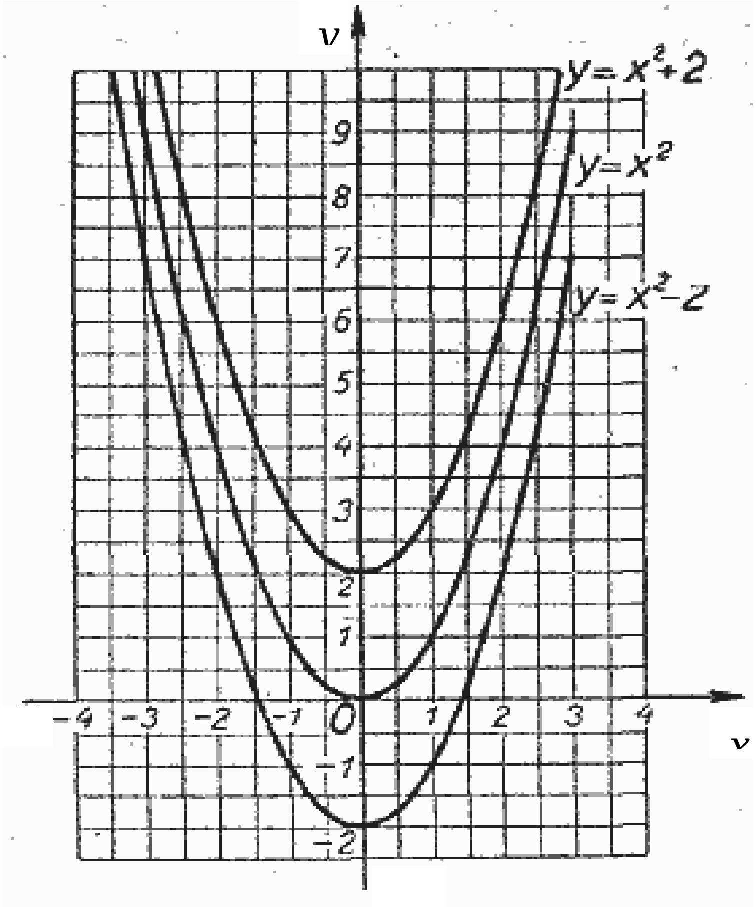


Рис. Интегральные кривые дифференциального уравнения

3. Геометрическое представление решений дифференциальных уравнений

Геометрически множество решений представлены бесконечным множеством кривых, которые называют интегральными кривыми данного уравнения.

Интегральные кривые частных решений уравнения

Геометрическое представление частных решений дифференциального уравнения (интегральных кривых) образуют *семейство кривых*

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Решим простое уравнение, представляющее два уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = \pm\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \pm\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \pm\ln|Cx|$$

$$y = Cx^{\pm 1} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y = Cx \\ y = \dfrac{C}{x} \end{cases}$$

4. Регулярные и особые точки решений дифференциальных уравнений

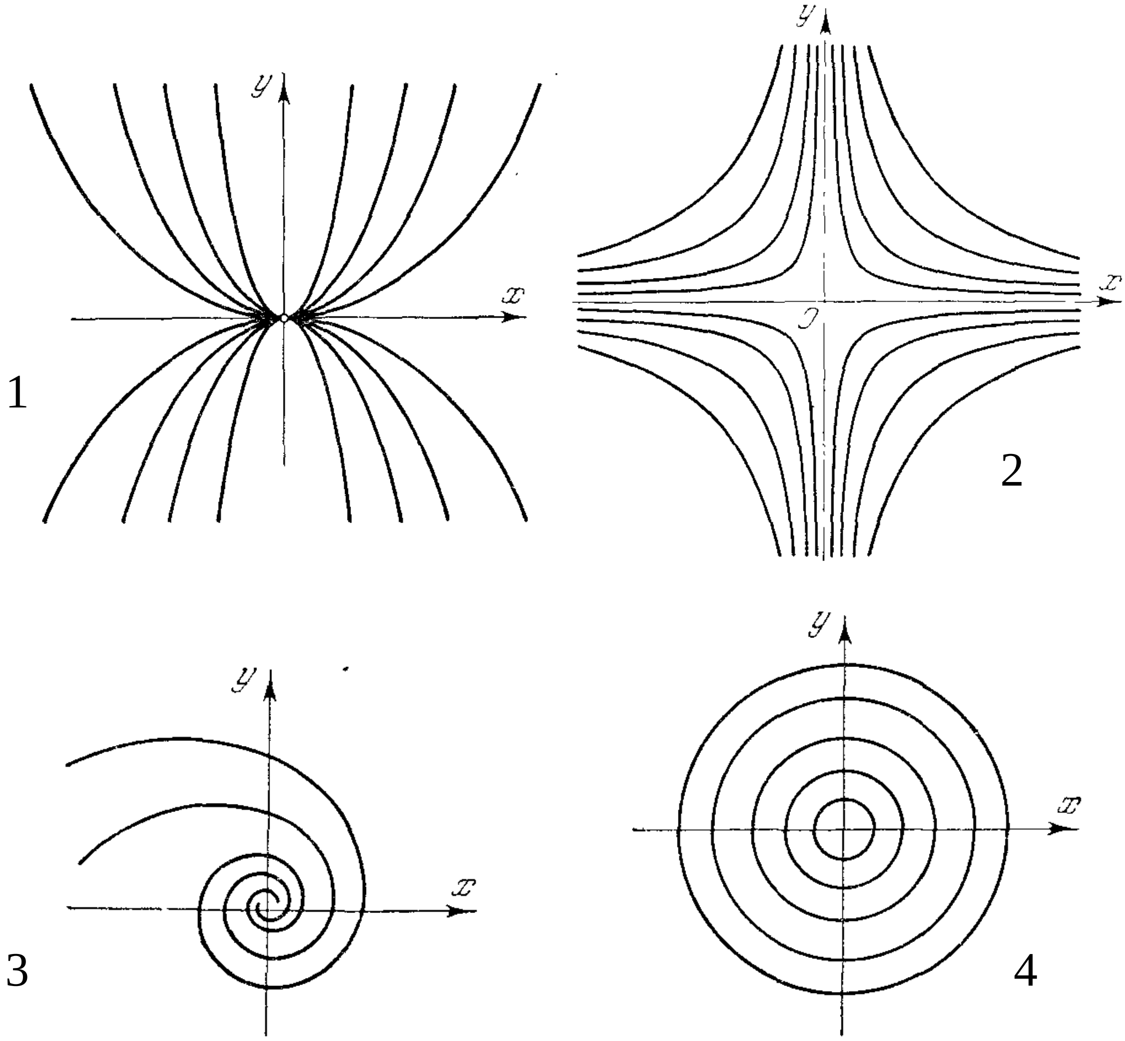


Рис. Особые точки: 1 - узел; 2 - седловина; 3 - фокус; 4 – центр

Пример. Уравнение радиоактивного распада

$$y' = -ky \qquad k = \text{konst}, \quad k \geq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

$$\frac{dy}{y} = -kdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -k \int dx$$

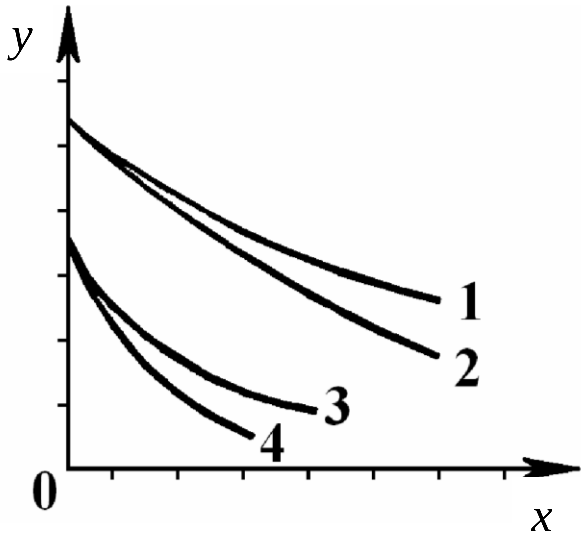
$$\ln|y| - \ln|C| = -kx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -kx$$

$$\exp\left(\ln\left|\frac{y}{C}\right|\right) = \exp(-kx)$$

$$\frac{y}{C} = e^{-kx}$$

$$y = Ce^{-kx}$$



Пример. *Уравнение размножения (Мальтуса)*

$$y' = ky$$

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = kdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dx$$

$$\ln|y| - \ln|C| = kx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = kx$$

$$\exp\left(\ln\left|\frac{y}{C}\right|\right) = \exp(kx)$$

$$\frac{y}{C} = e^{kx}$$

$$y = Ce^{kx}$$

5. Теорема существования и единственности решения

Теорема существования и единственности решения (Коши, Пеано).
Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

Тогда, если функция $f(x, y)$ непрерывна в открытой области D на плоскости XOY, содержащей точку $P_0(x_0, y_0) \in D$, тогда дифференциальное уравнение $y'_x = f(x, y)$ имеет решение $y = y(x)$, при котором $y(x_0) = y_0$. При этом, если частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна, то данное решение уравнения будет единственным.

6. Классификация дифференциальныхе уравнений первого порядка

Неполные дифференциальные уравнения

Определение. *Полные и неполные уравнения*.

Если явная зависимость имеется только от одной из переменных $f(x)$ или $f(y)$.

Автономные уравнения

$$f(x, y') = 0,$$

$$y' = f(x).$$

Неполное уравнение, в котором нет явной зависимости от переменной x

$$y' = f(y).$$

Пример.

$$y' = x^2 \cos x.$$

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{sh}(x).$$

Уравнения неразрешимые относительно производной

$$f(x, y, y') = 0,$$

$$f(y, y') = 0.$$

Пример.

$$\sin(x + y') = (y + y')^2.$$

Разрешимые относительно производной

$$y' = f(x, y).$$

Пример.

$$y' = \frac{y}{x^3}.$$

7. Уравнения с разделяющимися переменными

Если уравнение в общем виде можно записать так

$$f_2(x)g_2(y)\frac{dy}{dx} = f_1(x)g_1(y),$$

тогда после перегруппировки можно записать

$$\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx,$$

или в других обозначениях

$$Y(y)dy = X(x)dx, \qquad Y(y) = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}, \qquad X(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Далее после интегрирования

$$\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = \int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + C.$$

Наиболее простой метод для получения решений дифференциальных уравнений. Часто если уравнение не приводит к разделению переменных, то путём различных преобразований пытаются свести уравнение к новому уравнению в котором переменные разделяются.

Пример.

$$x(y+1)dx = (x^2+1)ydy.$$

После преобразования получим

$$\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{y}{y+1}dy.$$

Интегрируя $\int\frac{x}{x^2+1}dx = \int\frac{y}{y+1}dy + C$, получим общее решение

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+1| = y - \ln|y+1| + C.$$

8. Уравнения сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c), b \neq 0.$$

Для разделения переменных используется замена $u = ax+by+c$ Дифференцируя, получим

$$\frac{du}{dx} = b\frac{dy}{dx} + a,$$

и далее

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{du}{dx} - \frac{a}{b}.$$

Далее, подставляя полученное выражение в основное уравнение получим

$$\frac{du}{dx} = bf(u) + a.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{du}{bf(u)+a} = dx,$$

и далее

$$\int \frac{du}{bf(u)+a} + C = x.$$

Интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0) находится

$$\int_{ax_0+by_0+c}^{ax+by+c} \frac{du}{bf(u)+a} = x - x_0.$$

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = (ax + by + c)^2, \qquad b \neq 0.$$

Сделав замену переменных и поставив в формулу для общего решения

$$\frac{1}{b}\int \frac{du}{u^2 + \frac{a}{b}} = \int dx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{ba}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}u + C = x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{ba}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}(ax + by + c) + C = x.$$

9. Однородные уравнения

Однородные уравнения, это уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, в которых функцию $f(x, y)$ можно представить в виде отношения своих аргументов

$$f(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

тогда сделав замену переменной

$$u = \frac{y}{x},$$

или

$$y = xu,$$

получим

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(u).$$

Тогда производные функций будут находиться в соотношении

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

После замены переменных уравнение будет выглядеть

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u),$$

которое можно представить в виде

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Дальнейшее интегрирование даёт

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C.$$

При этом должно выполняться условие $f(u) - u \neq 0$, что возможно только при некотором значении u_0, но первоначальная функция в данном случае будет являться решением исходного уравнения $y = xu_0$

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

Для решения уравнения делаем замену $u = \dfrac{y}{x}$

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \frac{1}{u},$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

$$udu = \frac{dx}{x},$$

$$\int u\,du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| - \ln|C|,$$

$$u = \pm\sqrt{2\ln\left|\frac{x}{C}\right|},$$

$$y = \pm x\sqrt{2\ln\left|\frac{x}{C}\right|}.$$

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}},$$

сделав замену

$$u = \frac{y}{x},$$

или

$$y = xu,$$

получим уравнение

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u - u^2}{1 - 2u},$$

после преобразований получим

$$\left(\frac{u - u^2}{1 - 2u} - u\right)dx = x\,du \text{ далее } \frac{(1 - 2u)du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования получим

$$\int \frac{(1 - 2u)du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|,$$

$$-\frac{1}{u}-2\ln|u|=-\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\frac{1}{u}+2\ln|u|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$

$$\ln e^{\frac{1}{u}}+2\ln|u|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

и далее

$$\ln\left(e^{\frac{1}{u}}u^2\right)=\ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$

поле потенцирования получим

$$e^{\frac{1}{u}}u^2=\frac{C}{x},$$

или

$$x=Ce^{-\frac{1}{u}}u^{-2}.$$

Если $C > 0$, тогда интегральные кривые частных решений лежат в полуплоскости $x > 0$, а в случае $C < 0$, тогда интегральные кривые частных решений лежат в полуплоскости $x < 0$.

10. Уравнения сводящиеся к однородным, вида $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Уравнения сводящиеся к однородным, вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

1. Если $c_1 = c_2 = 0$, тогда получим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right),$$

которое сводится к однородному заменой $y=ux$, тогда

$$dy=udx+xdu\,,$$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\,,$$

тогда получим

$$x\frac{du}{dx}+u=f\left(\frac{a_1x+b_1ux}{a_2x+b_2ux}\right).$$

Разделив левую и правую часть, а так же числитель и знаменатель под знаком функции на x, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left(f\left(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u}\right)-u\right),$$

После разделения переменных, получим

$$\frac{du}{f\left(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u}\right)-u}=\frac{dx}{x},$$

2. Рассмотрим более общий случай, когда хотябы одна из констант c_1 и c_2 отличен от нуля. Тогда, если выполняется условие

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

вводятся новые переменные

$$x = u + \alpha, \qquad y = v + \beta.$$

Константы α, β находятся из системы уравнений

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \qquad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0.$$

Это приводит к однородному уравнению относительно переменных u, v.

3. Если $\delta = 0$, то, полагая в уравнении, что

$$a_1 x + b_1 y = u.$$

Тогда

$$a_1 + b_1 y' = u', \qquad \text{или} \qquad y' = \frac{u'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}.$$

Тогда уравнение преобразуется

$$\frac{du}{dx} = b_1 f\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1,$$

$$a_1 x + b_1 y = k(a_1 x + b_1 y), \qquad k = \text{const},$$

или разделив переменные, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{b_1 f\left(\dfrac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1} = dx.$$

4. Если

$$h(a_1 x + b_1 y + c_1) = a_2 x + b_2 y + c_2, \qquad h = \text{const}, \quad h \neq 0,$$

тогда функция $f=\text{const}$, а уравнение является уравнением с разделющимися переменными.

$$dy=f(h)dx.$$

11. Линейные уравнения первого порядка

Линейные уравнения первого порядка

У равнения в которых искомая функция и её производная находятся в линейной зависимости. Функции $p(x), q(x)$ известны, причём, если

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x).$$

Существует несколько методов решения линейного уравнения

Если уравнение без правой части $q(x)=0$ (однородное линейное уравнение), то переменные разделяются

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0,$$

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

и легко получить его решение $\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C|$, и окончательно

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Если уравнение с правой частью (неоднородное линейное уравнение)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \qquad q(x)\neq 0.$$

Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)

В этом случае вначале находим решение этого уравнения без правой части $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, а константу заменяем на функцию $C = u(x)$ и подставляем полученную функцию $y = u(x)e^{-\int p(x)dx}$ в уравнение с правой частью и находим функцию $u(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)e^{-\int p(x)dx}\right) + p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Далее решая

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{d}{dx}u(x) + u(x)\frac{d}{dx}e^{-\int p(x)dx} + p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{d}{dx}u(x) + u(x)e^{-\int p(x)dx}\frac{d}{dx}\left(-\int p(x)dx\right) + p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{d}{dx}u(x) - u(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

после сокращения получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно $u(x)$

$$\frac{d}{dx}u(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

далее получим

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Окончательно получим общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Общее решение линейного уравнения всегда можно представить в виде суммы решений

$$y = C\varphi_0(x) + \varphi(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Здесь общее решение одногродного уравнения

$$\varphi_0(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

и $\varphi(x)$ - частное решение неоднородного уравнения, общее решение однородного уравнения

$$\varphi(x) = e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx.$$

Общее решение можно записать в более компактном виде

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int q(x)\mu(x)dx + C.$$

Здесь введён *интегрирующий множитель*

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

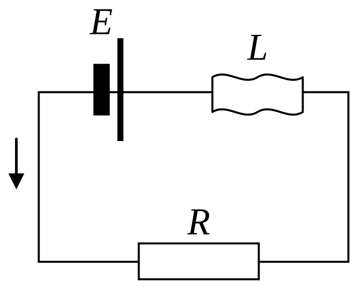
Если заданы начальные условия $x{=}x_0$ и $y{=}y_0$, тогда частное решение можно выразить через определённые интегралы, верхний предел которого переменный

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx} \left(\int\limits_{x_0}^{x} q(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx} dx + y_0 \right), \qquad y_0 = C.$$

Частное решение получается при подстановке начального условия в общее решение

$$y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

Пример:



$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}, \qquad R, L = \text{const}.$$

Решение однородного уравнения

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0,$$

$$\int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int dt,$$

$$\ln |I| - \ln |I_0| = -\frac{R}{L} t,$$

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right).$$

Получим решение неоднородное уравнение

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}, \qquad R, L = \text{const}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будет

$$I = \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)\left(\frac{1}{L}\int E \exp\left(\frac{R}{L} t\right) dt + I_0\right),$$

$$t_0 = 0, \qquad E_0 = E|_{t=0} = \text{const},$$

$$I = \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)\left(\frac{E_0}{L}\int_0^t \exp\left(\frac{R}{L} t\right) dt + I_0\right),$$

$$I = \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)\left(\frac{E_0}{L}\frac{L}{R} \exp\left(\frac{R}{L} t\right)\Bigg|_0^t + I_0\right),$$

$$I = \left(\frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R}\exp\left(-\frac{R}{L}t \right) + I_0 \right),$$

$$I = \left(\frac{E_0}{R} + I_0 - \frac{E_0}{R}\exp\left(-\frac{R}{L}t \right) \right),$$

$$I_0 = 0,$$

$$I = \frac{E_0}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t \right) \right).$$

Метод подстановки решения неоднородного линейного уравнения первого порядка (метод Бернулли)

В равнении $y' + p(x)y = q(x)$ делаем замену $y(x) = u(x)v(x)$ и подставляем в уравнение, тогда производная будет

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x).$$

После комбинирования членов получим

$$v(u' + p(x)u) + (uv' - q(x)) = 0.$$

Уравнение в первой скобке приравниваем к нулю, для чего решаем дифференциальное уравнение в скобках

$$\frac{du}{dx} + p(x)u = 0.$$

Решается это уравнение путём разделения переменных $\frac{du}{u} = -p(x)dx$

$$\int \frac{du}{u} = -\int p(x)dx,$$

$$\ln|u| - \ln|C| = -\int p(x)dx,$$

$$u = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Выбирая частное решение для $C = 1$

$$u_1 = e^{-\int p(x)dx}.$$

И подставляя частное решение u_1 в дифференциальное уравнение во второй скобке и получим

$$u_1 \frac{dv}{dx} - q(x) = 0.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных получим

$$dv = \frac{q(x)}{u_1} dx.$$

Интегрируя которое получим

$$v = \int \frac{q(x)}{u_1} dx + C = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Тогда общее решение уравнения будет

$$y(x) = u_1(x) v(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

То же самое решение, как в методе вариации постоянной

12. Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли, это уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x) y^n.$$

В частном случае $n = 1$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными, а в случае $n = 0$ к линейному уравнению. В остальных случаях решение ищется следующим образом

Разделив обе части на y^n получим

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x) y^{-n+1} = q(x).$$

Для решения делаем замену

$$z = y^{-n+1}$$

$$dz = (-n+1)y^{-n}y'dx$$

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}y'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{(-n+1)}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)p(x)z = (-n+1)q(x)$$

$$P(x)z \equiv (-n+1)p(x), \qquad Q(x) \equiv (-n+1)q(x),$$

$$\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x).$$

Это уравнение является линейным уравнением, которое решается обычным образом

Решение уравнения Бернулли *методом подстановки* (*методом Бернулли*)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n.$$

Приняв

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Уравнение Бернулли примет вид

$$\frac{d}{dx}(uv) + p(x)uv = q(x)u^n v^n.$$

Рамписав производную произведения *uv*, получим

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)u^n v^n.$$

Собрав в сокобки слагаемые с сомножителем *u*

$$u(v' + p(x)v) + u'v = q(x)u^n v^n .$$

Приравняв

$$v' + p(x)v = 0,$$

найдем решение уравнения этого уравнения

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 .$$

Разделив переменные и поставив под знак интеграла

$$\int \frac{dv}{v} = \int -p(x)dx ,$$

и легко получить его решение

$$\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C|,$$

и окончательно получим

$$v = Ce^{-\int p(x)dx} .$$

Подставит полученное решению для функци *v*, и прироавняв константу *C*=1, получим частное решение для *v*

$$v_1 = e^{-\int p(x)dx} .$$

Решая далее оставшуюся часть относительно функции *u*

$$u'v = q(x)u^n v^n ,$$

$$\frac{du}{dx} = q(x)u^n v^{n-1},$$

$$\int \frac{du}{u^n} = \int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx,$$

$$u^{1-n} = (1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx + C,$$

$$u = \left((1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx + C\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

Получим общее решение уравнения Бернулли

$$y = v_1 u = e^{-\int p(x)dx}\left((1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx + C\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

13. Уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение первого порядка разрешённое относительно производной можно записать в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Если соотношение слева является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, тогда его полный дифференциал будет

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

тогда уравнение называется *уравнением в полных дифференциалах*, решение которых будет

$$u(x, y) = C.$$

Или, более кратко. Соотношение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом, если выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Общее решение получается в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C,$$

или в эквивалентном виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C.$$

Пример.

$$(2x + y)dx + (x - 4y)dy = 0,$$

$$P = (2x + y), \qquad Q = (x - 4y) = 1,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Беря интеграл в начале координат $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ получим

$$u(x, y) = \int_{0}^{x} (2x + y)dx + \int_{0}^{y} (-4y)dy = x^2 + xy - 2y^2 = C.$$

Кроме того, решенное уравнение является ещё и однородным.

Интегрирующий множитель

Если соотношение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не является полным дифференциалом, тогда в некоторых случаях удаётся подобрать функцию $M(x, y)$, которая при умножении на неё данного соотношения, делает его полным дифференциалом некоторой функции

$$M(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = 0.$$

Функция $M(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*.

Пример.

$$2ydx + xdy = 0.$$

Введя интегрирующий множитель $M = x$

$$x(2ydx + xdy) = d(x^2 y).$$

Получим решение $x^2 y = C$.

Любое дифференциальное уравнение имеет множество интегрирующих множителей, но нет общих методов их поиска.

Домножив на интегрирующий множитель $M(x, y)$ уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, которое не является уравнением в полных дифференциалах, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, получим, урамнение в полных дифференциалах

$$M(x, y)P(x, y)dx + M(x, y)Q(x, y)dy = 0,$$

тогда

$$\frac{\partial (MP)}{\partial y} = \frac{\partial (MQ)}{\partial x}.$$

Расписав частные производные подробно, получим

$$\frac{\partial M}{\partial y} P + \frac{\partial P}{\partial y} M = \frac{\partial M}{\partial x} Q + \frac{\partial Q}{\partial x} M,$$

после перегруппировки, получим

$$\frac{\partial M}{\partial y}P-\frac{\partial M}{\partial x}Q=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)M\ ,$$

разделив левую и правую часть на *M*, получим

$$\frac{\partial M}{M\partial y}P-\frac{\partial M}{M\partial x}Q=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,,$$

используя равенства

$$\frac{\partial M}{M\partial y}=\frac{\partial \ln M}{\partial y},\qquad \frac{\partial M}{M\partial x}=\frac{\partial \ln M}{\partial x}\,,$$

получим уравнение, которому удовлетворяет интегрирующий множитель.

Данное уравнение является уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \ln M}{\partial y}P-\frac{\partial \ln M}{\partial x}Q=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

Общих методов решения этого уравнения нет, поэтому рассмотрим частный случай, когда интегрирующий множитель зависит только от одной переменной x

$$\frac{\partial \ln M(x)}{\partial x}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

$$d\ln M=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,,$$

$$\ln M(x)-\ln M_0(y)=\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,,$$

$$\ln\left(\frac{M(x)}{M_0(y)}\right)=\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx,$$

$$M(x)=M_0(y)\exp\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx.$$

Здесь $M_0(y)$ - неизвестная функции, зависящая от переменной *y*. Обычно принимают $M_0(y)=1$, тогда для интегрирующего множителя получим

$$M(x)=\exp\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx.$$

Если интегрирующий множитель зависит только от одной переменной *y*, тогда можно получить аналогичные решения для $M(y)$

$$M(y)=M_0(x)\exp\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy.$$

Здесь $M_0(x)$ - неизвестная функции, зависящая от переменной *x*. Принимая $M_0(y)=1$, получим для интегрирующего множителя

$$M(y)=\exp\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy.$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2+y^2+x)dx+ydy=0.$$

Здесь

$$P(x,y)=x^2+y^2+x, \qquad Q(x,y)=y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, т. к.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \neq 0.$$

Выражение

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{y} 2y = 2,$$

не зависит от y. Значит, у данного уравнения имеется интегрирующий множитель $M = M(x)$, который можно получить по формуле

$$M(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx} = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

Умножив оба слагаемых первоначального уравнения на $M(x) = e^{2x}$, получим

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x} y dy = 0.$$

Тогда

$$du = e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x} y dy.$$

Для нахождения решения $u(x, y)$ применим формулу получения общего интеграла, выбрав в качестве начальных условий $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, начало координат. В этом случае будем иметь

$$u(x, y) = \int_0^x e^{2x}(x^2 + x)dx + \int_0^y e^{2x} y dy = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}\Big|_0^x + \frac{1}{2} y^2 e^{2x}\Big|_0^y =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{2} y^2 e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x}(x^2 + y^2).$$

Следовательно, получим общий интеграл уравнения

$$\frac{1}{2}e^{2x}(x^2 + y^2) = C,$$

или, переобозначив $2C = \tilde{C}$

$$u(x, y) = e^{2x}(x^2 + y^2) = \tilde{C}.$$

14. Уравнения первого порядка неразрешимые относительно производной

Частные случаи обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка неразрешимые относительно производной.

Случай, когда уравнение разрешимо относительно y

$$y = f(x, y').$$

Случай

$$y = f(y').$$

Случай, когда уравнение разрешимо относительно x

$$x = f(y, y').$$

В частности возможны уравнения

$$x = f(y').$$

Случай, когда уравнения удаётся разрешить относительно производной и записать в виде системы нескольких уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

В этом случае в каждой точке имеется n решений, что геометрически представляется тем, что точка решения образуется пересечением n интегральных кривых.

Пример. Решить уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x + y)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

После разрешения этого уравнение относительно производной получим систему двух уравнений

$$\left(\frac{dy}{dx}-x\right)\left(\frac{dy}{dx}-y\right)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\frac{dy}{dx}-y\frac{dy}{dx}+xy=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=x, \qquad \frac{dy}{dx}=y.$$

Решения этих уравнений будут

$$y=\frac{x^2}{2}+C_1, \qquad y=C_2e^x.$$

Интегральные кривые уравнения состоят из двух пересекающихся семейств парабол и экспонент

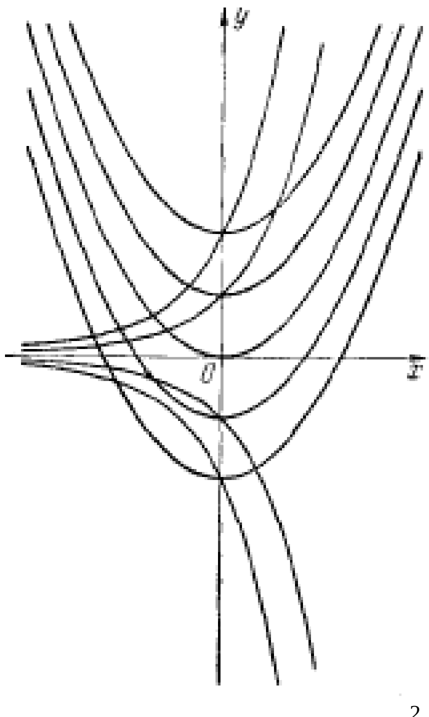


Рис. Два семейства интегральных кривых $y=\frac{x^2}{2}+C_1$, $y=C_2e^x$ уравнения

$$y''-(x+y)y'+xy=0.$$

Метод введения параметра

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ p=\chi(u,v),$$

$$p = y',\ dy = pdx,\ x = \varphi(p)$$

$$f(x, y, p) = 0.$$

15. Уравнение Эйлера — Лагранжа — Даламбера

Уравнение Эйлера — Лагранжа — Даламбера (уравнение Лагранжа или уравнение Даламбера)

$$a(y')x + b(y')y + c(y') = 0,\ F(y_x)x + G(y_x)y = H(y_x).$$

Разделив все слагаемые на $b(y') \neq 0$, получим уравнение

$$y = -\frac{a(y')}{b(y')}x - \frac{c(y')}{b(y')},$$

или, введя новые обозначения получим уравнение

$$y = xq(y') + f(y'),$$

где введены обозначения

$$q(y') = -\frac{a(y')}{b(y')},\ f(y') = -\frac{c(y')}{b(y')}.$$

Введём параметр $p = y'$ и подставим в уравнение

$$y = xq(p) + f(p),$$

полученное уравнение продифференцируем по *x*, получим уравнение

$$p = q(p) + xq'(p)p' + f'(p)p',$$

или

$$p = q(p) + (xq'(p) + f'(p))p',$$

далее домножив на *dx*, получим

$$pdx = q(p)dx + (xq'(p) + f'(p))dp,$$

далее домножив на dp, получим

$$p\frac{dx}{dp}=q(p)\frac{dx}{dp}+(xq'(p)+f'(p)),$$

или

$$(p-q(p))\frac{dx}{dp}=xq'(p)+f'(p),$$

и окончательно получим

$$\frac{dx}{dp}-x\frac{q'(p)}{p-q(p)}=\frac{f'(p)}{p-q(p)}.$$

Это неоднородное линейное уравнение.

Если $a(p)x+b(p)p=0$, то получим *уравнение Клеро* (частный случай уравнения Лагранжа (д’Аламбера))

Уравнение Клеро

$$y=y'x+f(y'),\ y=y_x x+H(y_x).$$

Общее решение

$$y=Cx+f(C).$$

Дифференциальные уравнения высших порядков

Понятие дифференциального уравнения.

Определение. Соотношение

$$f(x,y,y',y'',y''',\ldots,y^{(n)})=0,$$

называется *обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n*, где n - порядок наивысшей производной данного соотношения. Неизвестными являются как сама функция y, так и все её производные включая высшую.

Обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n, *разрешённое относительно высшей производной* является соотношение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}).$$

16. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка в общем виде

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения разрешенные относительно высшей производной

$$y'' = f(x, y, y').$$

Общее решение

$$y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Константы интегрирования получаются в результате двух операций интегрирования.

Для уравнений второго порядка для нахождения частных решений необходимо задать три частных условия, которые задаются

$$x_0, \qquad y_0 = y(x_0) = y|_{x=x_0}, \qquad y'_0 = y'(x_0) = y'|_{x=x_0}.$$

Автономные уравнения

Уравнения разрешённые относительно производной и не содержащие y, y' называются автономными уравнениями

$$y'' = f(x).$$

Решаются просто путём последовательного интегрирования два раза.

Первое интегрирование даёт

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Интегрируя второй раз, получим общее решение

$$y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2.$$

Пример. Решить уравнение $y''=x$ с заданными начальными условиями x_0, y_0, y'_0.

Интегрироу последовательно два раза подряд, получим

$$y'=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C_1,$$

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2.$$

Константы интегрирования находятся из уравнений получающихся после подстановки начальных условий в полученные решения

$$\begin{cases} y'_0=\dfrac{x_0^2}{2}+C_1 \\ y_0=\dfrac{x_0^3}{6}+C_1x_0+C_2 \end{cases}$$

Решив данную систему линейных алгебраических уравнений, получим решения для констант интегрирования C_1, C_2.

Уравнения, приводящие к понижению порядка

Уравнения не содержащие y

$$y''=f(x,y').$$

Произведя замену $z=y', z'=y''$, получим уравнение первого порядка

$$z'=f(x,z).$$

Если решение этого уравнения найдено $z=\varphi(x,C_1)$, тогда можно найти решение

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2.$$

Пример. Решить уравнение

$$(1+x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0.$$

Введя переменную $\frac{dy}{dx}=g(x)$, $y=\int g(x)dx+C$ тогда уравнение перепишется в виде уравнения первого порядка

$$(1+x)\frac{dg(x)}{dx}+g(x)=0.$$

Это приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dg(x)}{g(x)}=-\frac{dx}{1+x}.$$

Уравнения не содержащие аргумент явно

Если уравнение не содержит явно аргумент, решатся такие уравнения могут *методом введения параметра*

$$y''=f(y,y').$$

Для решения делают замену $y'=p,\, y''=p'$. Избавляясь от x, сделаем преобразование

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}y'=\frac{dp}{dy}p.$$

Подставив в уравнение, получим уравнение первого порядка относительно y

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p).$$

Если решение этого уравнения будет функция $p=\varphi(y,C_1)$, то искомое решение получим

$$\frac{dy}{dx}=p=\varphi(y,C_1), \qquad \frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx,$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример. Решить уравнение $2yy'' + y'^2 = 0$.

Сделав замену $y' = p,\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получим уравнение

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

Сокращая на p, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}.$$

Получим решение

$$\ln p = -\frac{1}{2}\ln y + \ln C_1,$$

или

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

далее находим

$$y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2,$$

или

$$y = (C_1 x + C_2)^{\frac{2}{3}}.$$

Сокращение на p дало ещё одно решение $y' = p = 0, y = \text{const}$. В данном случае оно получается из общего решения при $C_1 = 0$.

17. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид уравнения

$$g_0(x)y'' + g_1(x)y' + g_2(x)y = h(x).$$

Данное уравнение сводится к уравнению деля все члены уравнения на $g_0(x)$. Если функция $g_0(x)$ принимает нулевые значения $g_0(x) = 0$, то это соответствует особым решениям, где нарушается условие единственности решения.

После преобразования получим уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = q(x),$$

$$a_1(x) = \frac{g_1(x)}{g_0(x)}, \qquad a_2(x) = \frac{g_2(x)}{g_0(x)}, \qquad q(x) = \frac{h(x)}{g_0(x)}.$$

Функция называется правой частью уравнения $q(x)$.

Если $q(x) = 0$, то уравнение называют *однородным уравнением* (или *уравнением без правой части*).

Если $q(x) \neq 0$, то уравнение называют *неоднородным уравнением* (или *уравнением с правой частью*).

Функции $a_1(x), a_2(x), q(x)$ непрерывны на некотором отрезке $b \geq x \geq a$.

Начальные условия задаются

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \qquad x \in (a, b).$$

Линейные однородно уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Теорема. Если $y_1(x), y_2(x)$ решения линейного однородного дифференциального уравнения, то функция, которая является суперпозицией этих решений $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ при любых константах, тоже является решением данного уравнения.

Доказывается подстановкой данного соотношения в уравнение.

Теорема. Если $y_1(x), y_2(x)$ решения линейного однородного дифференциального уравнения, и их отношение $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$, то суперпозицией этих решений $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ является общим решением данного уравнения.

Для случая

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k = \text{const},$$

следует

$$y = (C_1 + C_2 k) y_1(x) = C y_1(x), \qquad C = \text{const},$$

имеет место *тривиальное (нулевое) решение* $y = 0$.

Если заданы начальные условия

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0, \qquad x \in (a, b).$$

Если $a_1, a_2 = \text{const}$. Подставляя начальные условия в решение $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ и в производную решений. Получим систему

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_{10}(x_0) + C_2 y_{20}(x_0) \\ y'_0 = C_1 y'_{10}(x_0) + C_2 y'_{20}(x_0) \end{cases}$$

Чтобы эта система имела решения при всех правых частях необходимо и достаточно, чтобы определитель системы не был равен нулю

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если определитель равен нулю $y_{10} y'_{20} - y_{20} y'_{10} = 0$, то система имеет решение, если выполняется условие

$$\frac{y_0}{y'_0} = \frac{y_{10}}{y'_{10}} = \frac{y_{20}}{y'_{20}},$$

которому удовлетворяют не любые начальные условия y_0, y'_0.

Линейные неоднородно уравнения второго порядка

$$b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = g(x),\ g(x) \neq 0,$$

или после деления на b_0

$$y'' + \frac{b_1(x)}{b_0(x)}y' + \frac{b_2(x)}{b_0(x)}y = \frac{g(x)}{b_0(x)},$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = q(x),$$

$$a_1 \equiv \frac{b_1(x)}{b_0(x)}, \qquad a_2 \equiv \frac{b_2(x)}{b_0(x)}, \qquad q(x) \equiv \frac{g(x)}{b_0(x)} \neq 0.$$

Теорема. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения y можно представить как сумму общего решения однородного уравнения $\Phi(x)$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения $\varphi(x)$

$$y = \Phi(x) + \varphi(x).$$

18. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Если в линейном уравнении функции $g_0(x), g_1(x), g_2(x)$ являются константами, $g_0, g_1, g_2 = \text{const}$, то такие уравнения называются *линейными неоднеородного уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами*

$$g_0 y'' + g_1 y' + g_2 y = h(x).$$

Переобозначив

$$a_1 = \frac{g_1}{g_0}, \qquad a_2 = \frac{g_2}{g_0}, \qquad q = \frac{h}{g_0},$$

получим

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x), \qquad a_1, a_2 = \text{const}.$$

Начнём с исследования линейного уравнения второго однородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Представим решение этого уравнения в виде

$$y = e^{rx},$$

тогда

$$y' = re^{rx} \qquad \text{и} \qquad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Тогда уравнение будет

$$e^{rx}(r^2 + a_1 r + a_2) = 0.$$

Поскольку $e^{rx} \neq 0$, и равенство нулю левой части может обеспечить только выражение в скобках, поэтому получим, уравнение, которое называется *характеристическим уравнением*

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения r_1, r_2.

Возможны следующие случаи решений характеристического уравнения в зависимости от дискриминанта.

1) Два несовпадающий вещественных корня

$$r_1 \neq r_2.$$

2) Два совпадающий вещественных корня

$$r_1 = r_2.$$

3) Два несовпадающий комплексно-сопряжённые числа, $r_1 \neq r_2$

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta, \qquad \beta \neq 0.$$

Рассмотрим эти случаи.

1) Решения получаются при их подстановке в экспоненту и общее решение уравнения будет

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

а частные решения будут

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}.$$

Отношение решений не равно нулю $\dfrac{e^{r_2 x}}{e^{r_1 x}} = e^{(r_2 - r_1)x} \neq 0$.

Тогда *определитель Вронского* (*Вронскиан*) будет, с помощью которого определяют, будут ли линейно независимыми частные решения $y_1 = e^{r_1 x}$ и $y_2 = e^{r_2 x}$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_2 + r_1)x}(r_2 - r_1) \neq 0, \qquad r_2 \neq r_1.$$

Определитель отличен от нуля, что говорит о линейной независимости функций $y_1 = e^{r_1 x}$ и $y_2 = e^{r_2 x}$.

2) В случае совпадающих корней, которые будут вещественными, т. е. $r_1 = r_2$, система частных решений будет

$$y_1 = e^{rx}, \qquad y_2 = xe^{rx},$$

а общее решение уравнения будет

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

Решения $y_1 = e^{rx}, y_2 = xe^{rx}$ будут линейно независимыми, что легко показать, найдя определитель Вронского, который будет отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & x_0 e^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & e^{r_1 x} + r_1 x_0 e^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} \neq 0.$$

Покажем, что функция $y_2 = xe^{rx}$ является решением первоначального уравнения

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Для этого подставим $y_2 = xe^{rx}$ в это уравнение

$$a(x\exp(rx))'' + b(x\exp(rx))' + cx\exp(rx) = 0.$$

Найдём первую и вторую производные

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(x\exp(rx)) = \exp(rx) + xr\exp(rx),$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(x\exp(rx)) = \frac{d}{dx}(\exp(rx) + xr\exp(rx)) =$$

$$= r\exp(rx) + r\exp(rx) + xr^2\exp(rx) = 2r\exp(rx) + xr^2\exp(rx),$$

подставив их в первоначальное уравнение, получим

$$2ar\exp(rx) + ar^2x\exp(rx) + b\exp(rx) + brx\exp(rx) + cx\exp(rx) = 0,$$

далее, после простых преобразований, получим

$$(2ar + ar^2x + b + brx + cx)\exp(rx) = 0,$$

далее получим

$$(2ar + b + (ar^2 + br + c)x)\exp(rx) = 0.$$

Для случая, когда $r_1 = r_2 = r$, дискриминант равен нулю ($D = b^2 - 4ac = 0$), и два кратных решения будут

$$r = \frac{-b}{2a}.$$

Следовательно, будут справедливы равенства

$$ar^2 + br + c = 0, \qquad 2ar + b = 0,$$

которые обеспечивают равенство $(2ar + b + (ar^2 + br + c)x) = 0$.

Значит, для первоначального уравнения функция $y(x) = x\exp(rx)$ будет решением, т. е. выполняться

$$a(x\exp(rx))'' + b(x\exp(rx))' + cx\exp(rx) = 0.$$

3) В случае несовпадающих комплексно-сопряжённых корней, $r_1 \neq r_2$

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta, \qquad \beta \neq 0.$$

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \qquad \tilde{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Частные решения можно преобразовать к «вещественному» виду, не содержащему комплексных чисел, сделав следующие замены

$$y_1 = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2), \qquad y_2 = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2).$$

Тогда после простых преобразований

$$y_1 = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) =$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) - e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)) = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

окончательн получим

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Общие решения можно выразить через частные решения $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$

$$\tilde{y} = \tilde{C}_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{C}_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

В новых переменных y_1, y_2, общие решения можно записать

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Тогда константы интегрирования будут связаны между собой соотношениями

$$C_1 = \frac{1}{2}(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2), \qquad C_2 = \frac{1}{2i}(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2).$$

Покажем, что решения $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ являются линейно независимыми. Это легко сделать, показав, что определитель Вронского отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_1' & \tilde{y}_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_2+r_1)x}(r_2 - r_1) = e^{(r_2+r_1)x}(\alpha - i\beta - \alpha - i\beta) = -2i\beta e^{(r_2+r_1)x_0} \neq 0.$$

Очевидно, что из линейной независимости функций $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$, следует линейная независимость и функций y_1, y_2.

Множество из двух частных линейно независимых решений y_1 и y_2 (или функций $A_1 y_1$ и $A_2 y_2$, где $A_1, A_1 = \text{const}, A_1, A_1 \neq 0$) рассматриваемого уравнения второго порядка, называется *фундаментальной системой решений* уравнения.

Любое частное решение уравнения в этом случае является линейной комбинацией функций фундаментальной системы решений.

Таблица частных решений, образующих фундаментальную систему решений и общие решения линейных однородных уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Корни характеристического уравнения	Частные решения фундаментальнойсистемы решений дифференциального уравнения	Общее решение дифференциального уравнения
$r_1 \neq r_2$	$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r = r_1 = r_2$	$y_1 = e^{rx}, \qquad y_2 = xe^{rx}$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$
$r_1 = \alpha + i\beta,$ $r_2 = \alpha - i\beta,$ $\beta \neq 0$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ или, эквивалентная система $\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \tilde{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ или, эквивалентное решение $\tilde{y} = \tilde{C}_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{C}_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$

Пример. Найти общее решение уравнения и частное решение с начальными условиями $x_0 = 0{,}5,\ y_0 = 0{,}5,\ y_0' = -4$

$$y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение данного уравнения будет

$$r^2 y'' + 4ry' - 4 = 0.$$

Решения характеристического уравнения будут $r_1 = r_2 = -2$.

Линейно независимые решения будут $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$.

Общее решение будет

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

Первая производная от общего решения будет

$$y' = (-2C_1 + C_2(1-2x))e^{-2x}.$$

Подставляя начальные данные в общее решение и его первую производную, получим систему

$$\begin{cases} (C_1 + 0{,}5C_2)e^{-1} = 0{,}5 \\ -2C_1 e^{-1} = -4 \end{cases}$$

Решая эту систему получим $C_1 = 2e, C_2 = -3e$, подставляя их в общее решение, получим искомое частное решение

$$y = (2e - 3ex)e^{-2x}.$$

Пример. Найти общее решение *уравнения свободных колебаний без трения*

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega = \text{const}.$$

Характеристическое уравнение данного уравнения будет

$$r^2 + \omega^2 = 0.$$

Решения характеристического уравнения будут

$$r_1 = i\omega, \qquad r_2 = -i\omega.$$

Общее решение будет

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x),$$

а для α=0

$$y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x.$$

Константы интегрирования представим как

$$C_1 = A\sin\varphi, \qquad C_2 = A\cos\varphi.$$

Тогда

$$C_1 = A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \varphi = \mathrm{tg}\frac{C_1}{C_2}.$$

Общее решение можно записать

$$y = A(\sin\varphi\cos\omega x + \cos\varphi\sin\omega x) = A\sin(\omega x + \varphi).$$

Проверка линейной независимости частных решений

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{vmatrix} = \omega \neq 0.$$

19. Линейные неоднородно уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x), \qquad a_1, a_2 = \mathrm{const}, \qquad q(x) \neq 0.$$

Теорема. Общее решение линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, $y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x)$, выражается в виде суммы

$$y = y_0 + y_1,$$

где y_0 - общее решение соответствующего одногодного уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, а y_1 - частное решение неоднородного уравнения.

Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)

Это общий метод решения линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x).$$

Если фундаментальная система решений урвынения y_1, y_2, то общее решение однородного уравнения представляется

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 .$$

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде, когда константы интегрирования C_1, C_2 принимаются за неизвестные функции

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 .$$

Производная функции y будет

$$y' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y_1' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2' .$$

Наложим дополнительное условие

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 .$$

Тогда получим

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' .$$

Находим вторую производную

$$y'' = C_1'(x) y_1' + C_1(x) y_1'' + C_2'(x) y_2' + C_2(x) y_2'' .$$

Подставляя в уравнение y, y', y''

$$C_1'(x) y_1' + C_1(x) y_1'' + C_2'(x) y_2' + C_2(x) y_2'' +$$

$$+ a_1 C_1(x) y_1' + a_1 C_2(x) y_2' + a_2 C_1(x) y_1 + a_2 C_2(x) y_2 = q(x).$$

Вынесем за скобки $C_1(x), C_2(x)$, получим

$$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + C_1(x)[y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1] + C_2(x)[y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2] = q(x) .$$

Выражения в квадратных скобках равны нулю как решения однородного уравнения. Получим уравнение

$$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = q(x) ,$$

которое вместе с уравнением

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0.$$

Образуют систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = q(x) \end{cases}$$

Определитель данной системой не равен нулю

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

При решении системы вначале находим $C'(x)_1, C_2'(x)$, после чего, интегрируя полученные выражения по *x*, находим функции $C_1(x), C_2(x)$.

Метод подбора (поиск частного решения линейных неоднородных ОДУ методом неопределённых коэффициентов, или подгонки функций)

Метод подбора, это поиск частного решения линейных неоднородных ОДУ методом неопределённых коэффициентов, или подгонки функций.

Решают для случаев, когда правая часть является определённым типом функций

Это метод пригодин для простых функций, которые можно представить в общем виде.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение. Соотношение

$$\begin{cases} F_1(x;\, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)};\, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)};\, \ldots;\, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}) = 0 \\ F_2(x;\, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)};\, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)};\, \ldots;\, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}) = 0 \\ \ldots \\ F_{n-1}(x;\, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)};\, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)};\, \ldots;\, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}) = 0 \\ F_n(x;\, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)};\, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)};\, \ldots;\, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}) = 0 \end{cases}$$

Краткая запись

$$F_m(x;\, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)};\, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)};\, \ldots;\, y_n, y_n', \ldots, , y_n^{(k_n)}) = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Порядок системы ОДУ

$$p = k_1 + k_2 + \ldots + k_n\,.$$

Решениями системы ОДУ, называется система функций

$$\begin{cases} \varphi_1(x;\, C_1, C_1^1, \ldots, C_1^{k_1};\, C_2, C_2^1, \ldots, C_2^{k_2};\, \ldots;\, C_n, C_n^1, \ldots, C_n^{k_n}) = 0 \\ \varphi_2(x;\, C_1, C_1^1, \ldots, C_1^{k_1};\, C_2, C_2^1, \ldots, C_2^{k_2};\, \ldots;\, C_n, C_n^1, \ldots, C_n^{k_n}) = 0 \\ \ldots \\ \varphi_{n-1}(x;\, C_1, C_1^1, \ldots, C_1^{k_1};\, C_2, C_2^1, \ldots, C_2^{k_2};\, \ldots;\, C_n, C_n^1, \ldots, C_n^{k_n}) = 0 \\ \varphi_n(x;\, C_1, C_1^1, \ldots, C_1^{k_1};\, C_2, C_2^1, \ldots, C_2^{k_2};\, \ldots;\, C_n, C_n^1, \ldots, C_n^{k_n}) = 0 \end{cases}$$

Всего в решениях будет p констант интегрирования.

Каноническая система ОДУ, это система ОДУ разрешённая относительно старших производных

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1^{(k_1)}}{dx} = F_1(x;\, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1-1)};\, y_2, y_2', \dots, y_2^{(k_2-1)}; \dots;\, y_n, y_n', \dots, y_n^{(k_n-1)}) = 0 \\ \dfrac{dy_2^{(k_2)}}{dx} = F_2(x;\, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1-1)};\, y_2, y_2', \dots, y_2^{(k_2-1)}; \dots;\, y_n, y_n', \dots, y_n^{(k_n-1)}) = 0 \\ \dots \\ \dfrac{dy_{n-1}^{(k_{n-1})}}{dx} = F_{n-1}(x;\, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1-1)};\, y_2, y_2', \dots, y_2^{(k_2-1)}; \dots;\, y_n, y_n', \dots, y_n^{(k_n-1)}) = 0 \\ \dfrac{dy_n^{(k_n)}}{dx} = F_n(x;\, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k_1-1)};\, y_2, y_2', \dots, y_2^{(k_2-1)}; \dots;\, y_n, y_n', \dots, y_n^{(k_n-1)}) = 0 \end{cases}$$

Система ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} F_1(x;\, y_1, y_2, \dots, y_n;\, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \\ F_2(x;\, y_1, y_2, \dots, y_n;\, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \\ \dots \\ F_{n-1}(x;\, y_1, y_2, \dots, y_n;\, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \\ F_n(x;\, y_1, y_2, \dots, y_n;\, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \end{cases}$$

Нормальная система ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x;\, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x;\, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f_{n-1}(x;\, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x;\, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Стационарная (автономная) система ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f_{n-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Система линейных неоднородных ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2 \\ \dots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = a_{n-11}y_1 + a_{n-12}y_2 + \dots + a_{n-1n}y_n + b_{n-1} \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \end{cases}$$

Система линейных однородных ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = a_{n-11}y_1 + a_{n-12}y_2 + \dots + a_{n-1n}y_n \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Общие решения систем линейных ОДУ

$$\begin{cases} \varphi_1(x; C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \\ \varphi_2(x; C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \\ ... \\ \varphi_{n-1}(x; C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \\ \varphi_n(x; C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \end{cases}$$

Всего будет p констант интегрирования.

Частные решения систем линейных ОДУ получаются из общих путём подстановки вместо всех неопределённых констант интегрирования конкретных значений.

20. Решение систем ОДУ методом исключения

Пример. Решить систему с начальными условиями t_0=0, $x(0)$=1, $y(0)$=-1

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - y,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + y + x - y,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0.$$

Решая это уравнение, получим характеристическое уравнение, решая которое, получим общее решение для x

$$r^2 - 2 = 0,$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2},$$

$$x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}.$$

Подставив x в первое уравнение системы, получим общее решение для y

$$C_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - C_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} = C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t} + y,$$

$$y = C_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - C_2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t}.$$

Найдём частное решение, соответствующее начальным условиям. Подствив начальные условия в решения для x и y, получим систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_1 и C_2

$$1 = C_1 + C_2,$$

$$-1 = C_1(\sqrt{2}-1) - C_2(\sqrt{2}+1).$$

Решая эту систему методом Крамера, получим решения для C_1 и C_2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+1 = 2\sqrt{2},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}-1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}-1-1 = -\sqrt{2}-1-1 = -\sqrt{2}-2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 \end{vmatrix} = -1-\sqrt{2}+1 = \sqrt{2},$$

получим решения для C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Запишем частное решение для заданных начальных условий

$$x=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{\sqrt{2}t}+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}t},$$

$$y=-\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}t}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\sqrt{2}t}.$$

21. Метод интегрирующих комбинаций

Метод интегрирующих комбинаций

Пример. Дана система уравнений

$$x'=-\frac{y}{t},\qquad y'=-\frac{x}{t},\qquad t>0.$$

Сложив правые и левые части уравнений

$$\frac{d}{dt}(x+y)=-\frac{1}{t}(x+y).$$

Разделив переменные

$$\int\frac{d(x+y)}{x+y}=-\int\frac{1}{t}dt.$$

Получим решение

$$\ln|x+y|=-\ln|t|+\ln|C_1|,$$

$$x+y=\frac{C_1}{t}.$$

Вычтя из правого уравнения левое уравнение

$$\frac{d}{dt}(x-y)=\frac{1}{t}(x-y).$$

Разделив переменные

$$\int\frac{d(x-y)}{x-y}=\int\frac{1}{t}dt.$$

Получим решение

$$\ln|x-y| = \ln|t| + \ln|C_2|,$$

$$x - y = C_2 t.$$

Получили решения для суммы и разности функций x и y

$$x + y = \frac{C_1}{t}, \qquad x - y = C_2 t.$$

Выражая отсюда x и y, получим общее решение сстемы

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{t} + C_2 t\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{t} - C_2 t\right).$$

22. Матричная запись системы линейных ОДУ

Рассмотрим система линейных неоднородных ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2 \\ \ldots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = a_{n-11}y_1 + a_{n-12}y_2 + \ldots + a_{n-1n}y_n + b_{n-1} \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n \end{cases}$$

Введём обозначения

$$Y \equiv y_j = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad Y' \equiv \frac{dy_i}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix},$$

$$A \equiv a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B \equiv b_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему линейных ОДУ можно записать коротко в матричном виде

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j + b_i \qquad i,\ j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

или ещё более кратко систему можно записать

$$Y' = YA + B.$$

23. Решения системы линейных однородных ОДУ с постоянными коэффициентами методом Эйлера

Пример. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Решения системы будем искать в виде экспонент

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \qquad y = \beta e^{\lambda t}, \qquad \alpha, \beta, \lambda = \text{const}.$$

Подставив эти функции в первоначальную систему получим

$$\begin{cases} \alpha\lambda e^{\lambda t} = \alpha e^{\lambda t} + 4\beta e^{\lambda t} \\ \beta\lambda e^{\lambda t} = \alpha e^{\lambda t} - 2\beta e^{\lambda t} \end{cases}$$

Сократив экспоненты, получим

$$\begin{cases} \alpha(1-\lambda)+4\beta=0 \\ \alpha-2\beta(1-\lambda)=0 \end{cases}$$

Запишем данную систему в матричном виде

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Нахождение определителя матрицы даёт *характеристическое уравнение* системы

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(-2-\lambda)-4=\lambda^2+\lambda-6\,.$$

Решениями характеристическое уравнение будут

$$\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2},$$

$$\lambda_1=-3, \qquad \lambda_2=2.$$

Уравнения на нахождение собственных векторов матрицы $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, получим две системы уравнений, каждое из которых соответствует собственному значению функции

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{p}_1=(A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=0, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=0,$$

$$(A-\lambda_2 I)\mathbf{p}_2=(A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=0, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=0.$$

Получим две системы уравнений

$$\begin{cases} 4a_1 + 4b_1 = 0 \\ a_1 + b_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a_2 + 4b_2 = 0 \\ a_2 - 4b_2 = 0 \end{cases}$$

Из системы получим решение $a_1 = -b_1$, полагая $b_1 = -1 \Rightarrow a_1 = 1$, тогда получим проекции собственный вектор матрицы A

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для другого вектора найдём аналогично, полагая $b_2 = 4^{-1} \Rightarrow a_2 = 1$, тогда проекции другого собственного вектора матрицы A

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4^{-1} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы будет

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\mathbf{p}_1 e^{-3t} + C_2\mathbf{p}_2 e^{2t} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 4^{-1} \end{pmatrix} e^{2t}.$$