

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Обыкновенные дифференциальные уравнения

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора *А. П. Рябушко*

Часть 2

*Допущено Министерством
народного образования БССР
в качестве учебного пособия
для студентов инженерно-технических
специальностей вузов*

Минск
«Вышэйшая школа»
1991

ББК 22.11я73
С23
УДК 51(075.8)

Авторы: А. П. Рябушко, В. В. Бархатов,
В. В. Державец, И. Е. Юреть

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института; зав. кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Черкас

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2/А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; Под общ. ред. А. П. Рябушко.—Мн.: Выш. шк., 1991.—352 с.: ил.

ISBN 5-339-00327-2.

Книга является составной частью комплекса учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов вузов. Содержатся теоретические сведения и наборы задач для аудиторных и индивидуальных заданий по следующим разделам: комплексные числа, неопределенные и определенные интегралы, функции нескольких переменных и обыкновенные дифференциальные уравнения.

Для студентов инженерно-технических специальных вузов.

1602010000—132
С—11—90
М304(03)—91

ББК 22.11я73

ISBN 5-339-00327-2 (ч. 2)
ISBN 5-339-00483-X

© Коллектив авторов,
1991

ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия

1. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа.— М.: Наука, 1969.— 736 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1988.— 432 с.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.— М.: Наука, 1989.— 464 с.
4. Долгов Н. М. Высшая математика.— Киев: Вища шк., 1988.— 416 с.
5. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика: В 5 ч.— Мн.: Выш. шк., 1984.— 1988.— Ч. 2.— 1985.— 221 с.; Ч. 3.— 1985.— 208 с.
6. Зорич В. А. Математический анализ: В 2 т.— М.: Наука, 1981.— Т. 1.— 543 с.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2 ч.— М.: Наука, 1971—1973.— Ч. 1.— 1971.— 600 с.; Ч. 2.— 1973.— 448 с.
8. Краснов М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Высш. шк., 1983.— 128 с.
9. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: В 3 т.— М.: Высш. шк., 1988.— Т. 1.— 712 с.; Т. 2.— 576 с.
10. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т.— М.: Наука, 1967.— 1970.— Т. 1.— 1967.— 704 с.; Т. 2.— 1970.— 671 с.
11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т.— М.: Наука, 1985.— Т. 1.— 432 с.; Т. 2.— 576 с.
12. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.— 350 с.

Сборники задач и упражнений

13. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа.— М.: Наука, 1985.— 446 с.
14. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.— М.: Высш. шк., 1986.— Ч. 1.— 446 с.; Ч. 2.— 464 с.
15. Демидович В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М.: Наука, 1977.— 528 с.
16. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов/Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1978.— 380 с.
17. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Высш. шк., 1978.— 288 с.

18. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты.— М.: Высш. шк., 1983.— 176 с.

19. *Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике.— Мн.: Высш. шк., 1976.— 456 с.

20. *Марон И. А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной.— М.: Наука, 1970.— 400 с.

21. Сборник задач по курсу высшей математики/Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарниа, П. Е. Дюбюк и др.; Под ред. Г. И. Кручковича.— М.: Высш. шк., 1973.— 576 с.

22. Сборник задач по математике для вузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 2 ч./В. А. Болгов, Б. П. Демидович, В. А. Ефимейко и др.; Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1981.— Ч. 2.— 368 с.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

11.8. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ.11

ИДЗ-11.1

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1

- 1.1. $e^{x+3y} dy = x dx$. (Ответ: $e^{3y} = 3(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)
- 1.2. $y' \sin x = y \ln y$. (Ответ: $\ln y = C \operatorname{tg}(x/2)$.)
- 1.3. $y' = (2x - 1) \operatorname{ctg} y$. (Ответ: $\ln |\cos y| = x - x^2 + C$.)
- 1.4. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dy + \sec^2 y \operatorname{tg} x dx = 0$. (Ответ: $C = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x$.)
- 1.5. $(1 + e^x) y dy - e^y dx = 0$. (Ответ: $-e^{-y}(y + 1) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C$.)
- 1.6. $(y^2 + 3) dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0$. (Ответ: $\ln(y^2 + 3) = 2(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)
- 1.7. $\sin y \cos x dx = \cos y \sin x dx$. (Ответ: $C = \cos x / \cos y$.)
- 1.8. $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$. (Ответ: $\sqrt{2y + 1} = C / \cos x$.)
- 1.9. $(\sin(x + y) + \sin(x - y)) dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$ (Ответ: $\operatorname{tg} y = C + 2 \cos x$.)
- 1.10. $(1 + e^x) y y' = e^x$. (Ответ: $y^2 = 2 \ln C(e^x + 1)$.)
- 1.11. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$. (Ответ: $\ln |\sin y| = C + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$.)
- 1.12. $3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0$. (Ответ: $\sin y = C(e^x - 1)^3$.)
- 1.13. $y' = e^{2x} / \ln y$. (Ответ: $y(\ln y - 1) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$.)
- 1.14. $3^{x^2+y} dy + x dx = 0$. (Ответ: $3^y = \frac{1}{2} 3^{-x^2} + C \ln 3$.)
- 1.15. $(\cos(x - 2y) + \cos(x + 2y)) y' = \sec x$. (Ответ: $\sin 2y = \operatorname{tg} x + C$.)
- 1.16. $y' = e^{x^2} x(1 + y^2)$. (Ответ: $\operatorname{arctg} y = C + \frac{1}{2} e^{x^2}$.)
- 1.17. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$. (Ответ: $\operatorname{tg}^2 y = \operatorname{ctg}^2 x + 2C$.)
- 1.18. $\sin x \cdot y' = y \cos x + 2 \cos x$. (Ответ: $y = C \sin x - 2$.)

1.19. $1 + (1 + y')e^y = 0$. (Ответ: $C(e^y - 1) = e^{-x}$.)

1.20. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$. (Ответ: $y = C \cos x + 2$.)

1.21. $\frac{e^{-x^2} dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$. (Ответ: $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \sin 2y = C - \frac{1}{2}e^{x^2}$.)

1.22. $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$. (Ответ: $\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) \right| = C - e^x$.)

1.23. $(1 + e^{3y})x dx = e^{3y} dy$. (Ответ: $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{3} \ln(1 + e^{3y}) + C$.)

1.24. $(\sin(2x + y) - \sin(2x - y))dx = \frac{dy}{\sin y}$. (Ответ: $\operatorname{ctg} y = C - \sin 2x$.)

1.25. $\cos y dx = 2\sqrt{1 + x^2} dy + \cos y \sqrt{1 + x^2} dy$. (Ответ: $2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) \right| + y = \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| + C$.)

1.26. $y' \sqrt{1 - x^2} - \cos^2 y = 0$. (Ответ: $\operatorname{tg} y = \arcsin x + C$.)

1.27. $e^x \operatorname{tg} y dx = (1 - e^x) \sec^2 y dy$. (Ответ: $\operatorname{tg} y = C/(e^x - 1)$.)

1.28. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$. (Ответ: $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = C - 2 \sin x$.)

1.29. $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x + y) = \cos(2x - y)$. (Ответ: $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \sin 2y = \sin 2x + C$.)

1.30. $3^{y^2 - x^2} = yy'/x$. (Ответ: $3^{-y^2} = 3^{-x^2} - 2C \ln 3$.)

2

2.1. $(xy + x^3 y)y' = 1 + y^2$. (Ответ: $Cx = \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}$.)

2.2. $y'/7^{y-x} = 3$. (Ответ: $7^{-y} = 3 \cdot 7^{-x} + C \ln 7$.)

2.3. $y - xy' = 2(1 + x^2 y')$. (Ответ: $y = Cx/\sqrt{1 + 2x^2} + 2$.)

2.4. $y - xy' = 1 + x^2 y'$. (Ответ: $y = Cx/(x + 1) + 1$.)

- 2.5. $(x + 4)dy - xydx = 0$. (Ответ: $y = Ce^x/(x + 4)^4$.)
- 2.6. $y' + y + y^2 = 0$. (Ответ: $y/(y + 1) = C - x$.)
- 2.7. $y^2 \ln x dx - (y - 1)xdy = 0$. (Ответ: $\frac{1}{y} + \ln y = C + \frac{1}{2} \ln^2 x$.)
- 2.8. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2dx = 0$. (Ответ: $y + \ln \frac{(y-1)^2}{y} = C + \ln x$.)
- 2.9. $y' + 2y - y^2 = 0$. (Ответ: $\sqrt{(y-2)/y} = Ce^x$.)
- 2.10. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0$. (Ответ: $\frac{y^2}{2} + \ln y = C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.)
- 2.11. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$. (Ответ: $\sqrt[3]{y^3 + 1} = C/\sqrt{x^2 - 1}$.)
- 2.12. $(1 + y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = C + \operatorname{arctg} x$.)
- 2.13. $y' = 2xy + x$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln |2y + 1| = x^2/2 + C$.)
- 2.14. $y - xy' = 3(1 + x^2y')$. (Ответ: $y = C\sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{x + 3} + 3$.)
- 2.15. $2xyy' = 1 - x^2$. (Ответ: $y^2 = \ln |x| - \frac{x^2}{2} + C$.)
- 2.16. $(x^2 - 1)y' - xy = 0$. (Ответ: $y = C\sqrt{x^2 - 1}$.)
- 2.17. $(y^2x + y^2)dy + xdx = 0$. (Ответ: $y^3 = 3(C - x + \ln |x + 1|)$.)
- 2.18. $(1 + x^3)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy = 0$. (Ответ: $\ln y + \frac{1}{2y^2} = C + x - \frac{1}{2x^2}$.)
- 2.19. $xy' - y = y^2$. (Ответ: $y/(y + 1) = Cx$.)
- 2.20. $\sqrt{y^2 + 1} dx = xydy$. (Ответ: $\sqrt{y^2 + 1} = \ln Cx$.)
- 2.21. $y' - xy^2 = 2xy$. (Ответ: $\ln |y/(y + 2)| = C + x^2$.)
- 2.22. $2x^2yy' + y^2 = 2$. (Ответ: $\ln |2 - y^2| = C + 1/x$.)

- 2.23. $y' = (1 + y^2)/(1 + x^2)$. (Ответ: $\operatorname{arctg} y = C + \operatorname{arctg} x$.)
- 2.24. $y'\sqrt{1 + y^2} = x^2/y$. (Ответ: $\sqrt{(1 + y^2)^3} = C + x^3$.)
- 2.25. $(y + 1)y' = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + xy$. (Ответ: $y + \ln y = \arcsin x + x^2/2 + C$.)
- 2.26. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$. (Ответ: $y = \frac{C\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}$.)
- 2.27. $xyy' = \frac{1 + x^2}{1 - y^2}$. (Ответ: $2y^2 - y^4 = 4 \ln |x| + 2x^2 + C$.)
- 2.28. $(xy - x)^2 dy + y(1 - x)dx = 0$. (Ответ: $\frac{y^2}{2} - 2y + \ln |y| = \ln |x| + \frac{1}{x} + C$.)
- 2.29. $(x^2y - y)^2 y' = x^2y - y + x^2 - 1$. (Ответ: $\frac{y^2}{2} - y + \ln |y + 1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$.)
- 2.30. $\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$. (Ответ: $\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + C$.)

3

- 3.1. $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$. (Ответ: $\sin \frac{y}{x} = \ln \frac{C}{|x|}$.)
- 3.2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$. (Ответ: $(y^2 - x^2)^2 Cx^2y^3$.)
- 3.3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$. (Ответ: $y = Cx^2 - x$.)
- 3.4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$. (Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{y^2 + x^2}{x^2} = \ln \frac{C}{x}$.)
- 3.5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. (Ответ: $y/(x - y) = Cx$.)
- 3.6. $y^2 + x^2y' = xyy'$. (Ответ: $e^{y/x} = Cy$.)
- 3.7. $xy' - y = x \operatorname{tg} (y/x)$. (Ответ: $\sin (y/x) = Cx$.)
- 3.8. $xy' = y - xe^{y/x}$. (Ответ: $e^{-y/x} = \ln Cx$.)
- 3.9. $xy' - y = (x + y) \ln ((x + y)/x)$. (Ответ: $\ln |1 + y/x| = Cx$.)

- 3.10. $xy' = y \cos \ln(y/x)$. (Ответ: $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x}\right) =$
 $= \ln Cx$.)
- 3.11. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$. (Ответ: $y = \frac{x}{4} \ln^2 Cx$.)
- 3.12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$. (Ответ: $\arcsin(y/x) = \ln Cx$.)
- 3.13. $y = x(y' - \sqrt[3]{e^y})$. (Ответ: $-e^{-y/x} = \ln Cx$.)
- 3.14. $y' = y/x - 1$. (Ответ: $y = x \ln(C/x)$.)
- 3.15. $y'x + x + y = 0$. (Ответ: $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$.)
- 3.16. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$. (Ответ: $\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} =$
 $= \ln Cx$.)
- 3.17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$. (Ответ: $y + \sqrt{x^2 + y^2} =$
 $= Cx^2$.)
- 3.18. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$. (От-
вет: $\frac{2}{5} \ln\left(\frac{y+x}{x}\right) + \frac{9}{5} \ln\left(\frac{y^2+4x^2}{x^2}\right) - \frac{3}{10} \operatorname{arctg} \frac{y}{2x} = \ln \frac{C}{x}$.)
- 3.19. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$. (Ответ: $y = x/\ln Cx$.)
- 3.20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$. (Ответ: $\frac{y}{x} + 2 \ln \frac{y}{x} =$
 $= \ln \frac{C}{x}$.)
- 3.21. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$. (Ответ: $\frac{x}{y} + 2 \ln \frac{y}{x} =$
 $= -\ln Cx$.)
- 3.22. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$. (Ответ: $y = x \ln^2 |Cx|$.)
- 3.23. $xy' + y\left(\ln \frac{y}{x} - 1\right) = 0$. (Ответ: $y = xe^{C/x}$.)
- 3.24. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$. (Ответ: $y^2 = C^3/3^x - x^2/3$.)
- 3.25. $(y^2 - 2xy)dx - x^2dy = 0$. (Ответ: $(y - 3x)/y =$
 $= \ln^3(Cx)$.)
- 3.26. $(x + 2y)dx + xdy = 0$. (Ответ: $y = C^3/(3x^2) - x/3$.)
- 3.27. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$.
(Ответ: $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln Cx$.)
- 3.28. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$. (Ответ: $y^2 = x^2/\ln(Cx)^4$.)

3.29. $x^2 y' = y(x + y)$. (Ответ: $y = -x/\ln(Cx)$.)

3.30. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. (Ответ: $y^2 = x^2 \ln(Cx)^2$.)

4. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

4.1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$. (Ответ: $y = (x^3 + 3x)/(x^2 + 1)^2$.)

4.2. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$, $y(0) = 0$. (Ответ: $y = \sin x$.)

4.3. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$. (Ответ: $y = e^{-x} \ln \frac{1}{1-x}$.)

4.4. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$. (Ответ: $y = x^4 - x^2$.)

4.5. $y' = 2x(x^2 + y)$, $y(0) = 0$. (Ответ: $y = x^2 + 1 - e^{x^2}$.)

4.6. $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$. (Ответ: $y = (x + 1)e^x$.)

4.7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2e}$. (Ответ: $y = \frac{e^{-x^2}}{2x}$.)

4.8. $\cos y dx = (x + 2 \cos y) \sin y dy$, $y(0) = \pi/4$.
(Ответ: $x = \left(\sin^2 y - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\cos y}$.)

4.9. $x^2 y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$. (Ответ: $y = -(\ln x)/x$.)

4.10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$. (Ответ: $x = y^3 + y^2$.)

4.11. $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$, $y(0) = 1$. (Ответ: $x = 2 \ln y + 1 - y$.)

4.12. $y' = y/(3x - y^2)$, $y(0) = 1$. (Ответ: $x = y^2 - y^3$.)

4.13. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$, $y(0) = 1$. (Ответ: $x(y - 1)^2 = (y - \ln y - 1)$.)

4.14. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$. (Ответ: $y = e^x \ln x$.)

4.15. $y = x(y' - x \cos x)$, $y(\pi/2) = 0$. (Ответ: $y = (\sin x - 1)x$.)

4.16. $(xy' - 1) \ln x = 2y$, $y(e) = 0$. (Ответ: $y = (\ln^5 x - \ln^2 x)/3$.)

4.17. $(2e^y - x)y' = 1$, $y(0) = 0$. (Ответ: $x = e^y - e^{-y}$.)

4.18. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$, $y(1) = 0$. (Ответ: $y = (x^2 - 1/x)e^{-x}$.)

4.19. $(x + y^2)dy = ydx$, $y(0) = 1$. (Ответ: $x = y^2 - y$.)

4.20. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$, $y(0) = \pi/2$. (Ответ: $x = -\sin y \cos y$.)

4.21. $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$. (Ответ: $y = \frac{3x^4 + 4x^3}{12(x + 1)}$.)

4.22. $(xy' - 2y + x^2) = 0$, $y(1) = 0$. (Ответ: $y = -x^2 \ln x$.)

4.23. $xy' + y = \sin x$, $y(\pi/2) = 2/\pi$. (Ответ: $y = (1 - \cos x)/x$.)

4.24. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(\sqrt{2}) = 1$. (Ответ: $y = x^2 - 1$.)

4.25. $(1 - x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$. (Ответ: $y = x + \sqrt{1 - x^2}$.)

4.26. $y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x$, $y(0) = 0$. (Ответ: $y = \frac{6 \sin x - 2 \sin^3 x}{3 \cos x}$.)

4.27. $x^2 y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$. (Ответ: $y = -1/x$.)

4.28. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$. (Ответ: $y = 0,5x^2 e^{-x^2}$.)

4.29. $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$, $y(0) = 0$. (Ответ: $y = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3}$.)

4.30. $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$. (Ответ: $y = \ln x$.)

5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

5.1. $y' + y = x\sqrt{y}$. (Ответ: $y = (xe^{x/2} - 2e^{x/2} + C)^2 e^{-x}$.)

5.2. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x} \sec^2 y dy$. (Ответ: $x = (y \operatorname{tg} y + \ln |\cos y| + C)^2 / y^2$.)

5.3. $y' + 2y = y^2 e^x$. (Ответ: $y = 1/(Ce^{2x} + e^x)$.)

5.4. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$. (Ответ: $y = 1/(\cos x \sqrt[3]{C - \operatorname{tg} x})$.)

5.5. $xydy = (y^2 + x)dx$. (Ответ: $y = x\sqrt{2(C - 1/x)}$.)

5.6. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$. (Ответ: $y = 1/(x^2 \sqrt{2(e^x + C)})$.)

5.7. $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$. (Ответ: $x = \sqrt{y/(C - \cos y)}$.)

5.8. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$. (Ответ: $x = 1/(y(C - \ln^2 y))$.)

5.9. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$. (Ответ: $y = \sqrt{C - \sqrt{x^2 - 1}} \sqrt[4]{x^2 - 1}$.)

5.10. $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$. (Ответ: $y = \frac{x^4}{4}(C + \ln x)^2$.)

5.11. $xy^2 y' = x^2 + y^3$. (Ответ: $y = x\sqrt[3]{3(C - 1/x)}$.)

5.12. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$. (Ответ: $y = 1/((x + 1)(C + \ln |x + 1|))$.)

5.13. $y' x + y = -xy^2$. (Ответ: $y = 1/(x(C + \ln x))$.)

5.14. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$. (Ответ: $y = e^{x^2/2} / \sqrt{2(C + x)}$.)

5.15. $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$. (Ответ: $y = x(x^2/2 + C)^2$.)

- 5.16. $y' + xy = x^3 y^3$. (Ответ: $y = e^{-x^2/2} / \sqrt{x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}$.)
- 5.17. $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y$. (Ответ: $y = e^x \sqrt{x^2 + C}$.)
- 5.18. $yx' + x = -yx^2$. (Ответ: $x = 1/(y(C + \ln y))$.)
- 5.19. $x(x-1)y' + y^3 = xy$. (Ответ: $y = (x-1) / \sqrt{2(x - \ln x + C)}$.)
- 5.20. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$. (Ответ: $y = \sqrt{C - x/x^{3/2}}$.)
- 5.21. $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right) dy$. (Ответ: $x = y/(y^2 + C)$.)
- 5.22. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$. (Ответ: $y = e^{3x} \left(\frac{x}{3} e^{-2x} + \frac{1}{6} e^{-2x} + C\right)^{3/2}$.)
- 5.23. $xy' + y = y^2 \ln x$. (Ответ: $y = 1/(\ln x + 1 + Cx)$.)
- 5.24. $x dx = (x^2/y - y^3) dy$. (Ответ: $x = y\sqrt{C - y^2}$.)
- 5.25. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$. (Ответ: $y = 2e^{-x^2} / \sqrt{2x^2 e^{-2x^2} + e^{-2x^2} + 4C}$.)
- 5.26. $y' + y = x/y^2$. (Ответ: $y = e^{-x} \sqrt[3]{xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C}$.)
- 5.27. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$. (Ответ: $y = 1/((x + C) \cos x)$.)
- 5.28. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. (Ответ: $y = \left(\frac{x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C}{x}\right)^2$.)
- 5.29. $y' - y + y^2 \cos x = 0$. (Ответ: $y = 2e^x / (e^x (\cos x + \sin x) + C)$.)
- 5.30. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}$. (Ответ: $y = \left(\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{3/4} + C\right)^2 \sqrt{x^2 - 1}$.)

ИДЗ-11.2

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

1.1. $y''' = \sin x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.
(Ответ: 1,23.)

1.2. $y''' = 1/x$, $x_0 = 2$, $y(1) = 1/4$, $y'(1) = y''(1) = 0$.
(Ответ: 0,38.)

1.3. $y'' = 1/\cos^2 x$, $x_0 = \pi/3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3/5$. (Ответ: 2,69.)

1.4. $y''' = 6/x^3$, $x_0 = 2$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = 1$.
(Ответ: 6,07.)

1.5. $y'' = 4 \cos 2x$, $x_0 = \pi/4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. (Ответ: 4,36.)

1.6. $y'' = 1/(1+x^2)$, $x_0 = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (Ответ: 0,44.)

1.7. $xy''' = 2$, $x_0 = 2$, $y(1) = 1/2$, $y'(1) = y''(1) = 0$. (Ответ: 0,77.)

1.8. $y''' = e^{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $y(0) = \frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{1}{2}$. (Ответ: 1,22.)

1.9. $y''' = \cos^2 x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1/8$, $y''(0) = 0$. (Ответ: 3,58.)

1.10. $y'' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $x_0 = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. (Ответ: 5,57.)

1.11. $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}$, $x_0 = \frac{5}{4}\pi$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. (Ответ: 3,93.)

1.12. $y'' = x + \sin x$, $x_0 = 5$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$. (Ответ: 5,31.)

1.13. $y'' = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$. (Ответ: 0,15.)

1.14. $y'' = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$, $x_0 = \pi/4$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$. (Ответ: -0,39.)

1.15. $y''' = e^{x/2} + 1$, $x_0 = 2$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 2$. (Ответ: 25,08.)

1.16. $y'' = x/e^{2x}$, $x_0 = -1/2$, $y_0(0) = 1/4$, $y'(0) = -1/4$. (Ответ: 0,34.)

1.17. $y'' = \sin^2 3x$, $x_0 = \pi/12$, $y(0) = -\pi^2/16$, $y'(0) = 0$. (Ответ: -0,01.)

1.18. $y''' = x \sin x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. (Ответ: 0,14.)

1.19. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$, $x_0 = 5\pi/2$, $y(\pi/2) = \pi/2$, $y'(\pi/2) = 1$, $y''(\pi/2) = -1$. (Ответ: 7,85.)

1.20. $y'' = \cos x + e^{-x}$, $x_0 = \pi$, $y(0) = -e^{-\pi}$, $y'(0) = 1$. (Ответ: 1,00.)

1.21. $y'' = \sin^3 x$, $x_0 = 2,5\pi$, $y(\pi/2) = -7/9$, $y'(\pi/2) = 0$. (Ответ: -0,78.)

1.22. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x$, $x_0 = 1$, $y(0) = -1/8$, $y'(0) = \frac{1}{8} \cos 2$, $y''(0) = \frac{1}{2}$. (Ответ: 0,08.)

1.23. $y'' = \frac{1}{\cos^2(x/2)}$, $x_0 = 4\pi$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Ответ: 12,56.)

1.24. $y'' = 2 \sin x \cos^2 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = -5/9$, $y'(0) = -2/3$. (Ответ: $-1,00$.)

1.25. $y'' = 2 \sin^2 x \cos x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 1/9$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $4,14$.)

1.26. $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $1,90$.)

1.27. $y'' = 2 \cos x \sin^2 x - \cos^3 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $3,47$.)

1.28. $y'' = x - \ln x$, $x_0 = 2$, $y(1) = -5/12$, $y'(1) = 3/2$. (Ответ: $1,62$.)

1.29. $y'' = 1/x^2$, $x_0 = 2$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$. (Ответ: $4,31$.)

1.30. $y''' = \cos 4x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 15/16$, $y''(0) = 0$. (Ответ: $5,14$.)

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

2.1. $(1 - x^2)y'' - xy = 2$. (Ответ: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$.)

2.2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$. (Ответ: $9C_2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$, $y = \pm x + C$.)

2.3. $x^3y'' + x^2y' = 1$. (Ответ: $y = C_1 \ln x + 1/x + C_2$.)

2.4. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. (Ответ: $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x + C_2$.)

2.5. $y''x \ln x = y'$. (Ответ: $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$.)

2.6. $xy'' - y' = x^2e^x$. (Ответ: $y = e^x(x - 1) + C_1x^2 + C_2$.)

2.7. $y''x \ln x = 2y'$. (Ответ: $y = C_1(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) + C_2$.)

2.8. $x^2y'' + xy' = 1$. (Ответ: $y = (\ln^2 x)/2 + C_1 \ln x + C_2$.)

2.9. $y'' = -x/y$. (Ответ: $y = \frac{C_1^2}{2} \arcsin \frac{x}{C_1} + \frac{x}{2} \sqrt{C_1^2 - x^2} + C_2$.)

2.10. $xy'' = y'$. (Ответ: $y = C_1x^2/2 + C_2$.)

2.11. $y'' = y' + x$. (Ответ: $y = -x^2/2 - x + C_1e^x + C_2$.)

2.12. $xy'' = y' + x^2$. (Ответ: $y = x^3/3 + C_1x^2/2 + C_2$.)

2.13. $xy'' = y' \ln(y'/x)$. (Ответ: $y = \frac{x}{C_1} e^{C_1x+1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1x+1} + C_2$.)

2.14. $xy'' + y' = \ln x$. (Ответ: $y = (x + C_1) \ln x - 2x + C_2$.)

2.15. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$. (Ответ: $y = -C_1 \cos x - x + C_2$.)

2.16. $y'' + 2xy'^2 = 0$. (Ответ: $y = \frac{1}{2C_1} \ln \frac{x - C_1}{x + C_1} + C_2$.)

2.17. $2xy'y'' = y'^2 + 1$. (Ответ: $y = \frac{2}{3C_1}(C_1x - 1)^{3/2} + C_2$.)

2.18. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$. (Ответ: $y = x^4/8 - x^3/6 + C_1x^2/2 - C_1x + C_2$.)

2.19. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$. (Ответ: $y = -\sin x - C_1 \cos x + C_2x + C_3$.)

2.20. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$. (Ответ: $y = -\sin^3 x/3 + C_1x/2 - C_1 \sin 2x/4 + C_2$.)

2.21. $y'' + 4y' = 2x^2$. (Ответ: $y = x^3/6 - x^2/8 + x/16 - C_1e^{-4x}/4 + C_2$.)

2.22. $xy'' - y' = 2x^2e^x$. (Ответ: $y = 2e^x(x-1) + C_1x^2/2 + C_2$.)

2.23. $x(y'' + 1) + y' = 0$. (Ответ: $y = -x^2/4 + C_1 \ln x + C_2$.)

2.24. $y'' + 4y' = \cos 2x$. (Ответ: $y = \frac{1}{10} \sin 2x - \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{C_1}{4} e^{-4x} + C_2$.)

2.25. $y'' + y' = \sin x$. (Ответ: $y = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x - C_1e^{-x} + C_2$.)

2.26. $x^2y'' = y'^2$. (Ответ: $y = C_1x - C_1^2 \ln(x + C_1) + C_2$.)

2.27. $2xy''y' = y'^2 - 4$. (Ответ: $y = \frac{2}{3C_1}(C_1x + 4)^{3/2} + C_2$.)

2.28. $y'''x \ln x = y''$. (Ответ: $y = \frac{C_1x^2}{4}(2 \ln x - 3) + C_2x + C_3$.)

2.29. $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$. (Ответ: $y = 2x + C_1 \sin x + C_2$.)

2.30. $(1 + x^2)y'' = 2xy'$. (Ответ: $y = C_1x^3/3 + C_1x + C_2$.)

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

3.1. $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = -\ln |1 - x|$, $y = 0$.)

3.2. $y'^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = (1 \pm 3x/2)^{2/3}$, $y = 1$.)

3.3. $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = \sqrt{2x+1}$, $y = 1$.)

3.4. $y'' + 2yy'^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$. (Ответ: $x = y^3/3 - y - 2/3$, $y = 2$.)

3.5. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$. (Ответ: $y = \operatorname{arctg}(2-2x)$, $y = \pi/2$.)

3.6. $2yy'' = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$, $y = 1$.)

3.7. $yy'' - y'^2 = y^4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $x = \pm \ln(1 + \sqrt{2}) \pm \ln \frac{y}{1 + \sqrt{y^2 + 1}}$.)

3.8. $y'' = -1/(2y^3)$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = \sqrt{2}$. (Ответ: $y = \sqrt{x\sqrt{2} + 1/4}$.)

3.9. $y'' = 1 - y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $x = \pm \ln |e^y + \sqrt{e^y - 1}|$.)

3.10. $y''^2 = y'$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = (x+2)^3/12$, $y = 2/3$.)

3.11. $2yy'' - y'^2 + 1 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1$.)

3.12. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = 2 \sin x + 2$.)

3.13. $y'' = 1/y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $x = \sqrt{y^2 + 1}$.)

3.14. $yy'' - 2y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = \frac{1}{1-2x}$, $y = 1$.)

3.15. $y'' = y' + y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $x = \ln \frac{2e^y - 1}{e^y}$, $y = 0$.)

3.16. $y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = 1 - \frac{1}{x+1}$, $y = 0$.)

3.17. $y''(1+y) = 5y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+y)^4}$, $y = 0$.)

3.18. $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. (Ответ: $y = \frac{3}{2}(e^x - 1)$, $y = 0$.)

3.19. $4y''^2 = 1 + y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $x = 2 \ln \frac{1}{2} |y + 1 + \sqrt{(y + 1)^2 - 4}|$.)

3.20. $2y'^2 = (y - 1)y''$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = 1 + \frac{1}{1 - 2x}$, $y = 2$.)

3.21. $1 + y'^2 = yy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $x = \ln |y + \sqrt{y^2 - 1}|$.)

3.22. $y'' + yy'^3 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = \sqrt[3]{6x + 1}$, $y = 1$.)

3.23. $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = e^{2x}$, $y = 1$.)

3.24. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $x = \ln |\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1}|$.)

3.25. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $x = \frac{1}{1 - \ln y} - 1$, $y = 1$.)

3.26. $y''(1 + y) = y'^2 + y'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = 2e^x$, $y = 2$.)

3.27. $y'' = y'/\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = (x + 1)^2$, $y = 1$.)

3.28. $y'' = 1(1 + y'^2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^y - 1}$.)

3.29. $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = e^{\operatorname{tg} x}$, $y = 1$.)

3.30. $y'' = 1/\sqrt{y}$, $y(0) = y'(0) = 0$. (Ответ: $x = \frac{2}{3}y^{3/4}$.)

4. Проинтегрировать следующие уравнения.

4.1. $\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0$. (Ответ: $y/x = C$.)

4.2. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$. (Ответ: $\operatorname{arctg}(x/y) = C$.)

4.3. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy$. (Ответ: $x^2 + y^2 - xy + x - y = C$.)

$$4.4. \quad xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{x^2 + y^2}{2} + \arctg \frac{x}{y} + C.)$$

$$4.5. \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 \right) dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{x^2 - y^2} - x = C.)$$

$$4.6. \quad \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{e^y - 1}{1 + x^2} = C.)$$

$$4.7. \quad \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.)$$

$$4.8. \quad (1 - e^{x/y}) dx + e^{x/y} (1 - x/y) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } x + ye^{x/y} = C.)$$

$$4.9. \quad x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0. \quad (\text{Ответ: } x^4 + x^2y^2 + y^4 = C.)$$

$$4.10. \quad (3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.)$$

$$4.11. \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{x^2 + y^2} + \ln |xy| + \frac{x}{y} = C.)$$

$$4.12. \quad \left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3} \right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2} \right) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C.)$$

$$4.13. \quad \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y} \right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy. \quad (\text{Ответ: } x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = C.)$$

$$4.14. \quad \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} = C.)$$

$$4.15. \quad (3x^2 - 2x - y) dx + (2y - x + 3y^2) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C.)$$

$$4.16. \quad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 + y^2} = C.)$$

4.17. $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$. (Ответ: $xy(x^2 + y^2) = C$.)

4.18. $y(x^2 + y^2 + a^2)dy + x(x^2 - y^2 - a^2)dx = 0$. (Ответ: $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = C$.)

4.19. $(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$. (Ответ: $\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = C$.)

4.20. $\frac{y + \sin x \cos^2 yx}{\cos^2 yx} dy + (\frac{x}{\cos^2 xy} - \sin y) dy = 0$.
(Ответ: $\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = C$.)

4.21. $(3x^2 - y \cos xy + y)dx + (x - x \cos xy)dy = 0$.
(Ответ: $x^3 - \sin xy + xy = C$.)

4.22. $(12x^3 - e^{x/y} \frac{1}{y})dx + (16y + \frac{x}{y^2} e^{x/y})dy = 0$.
(Ответ: $3x^4 + 8y^2 - e^{x/y} = C$.)

4.23. $(\frac{y}{2\sqrt{xy}} + 2xy \sin x^2y + 4)dx + (\frac{x}{2\sqrt{xy}} + x^2 \sin x^2y)dy = 0$. (Ответ: $\sqrt{xy} - \cos x^2y + 4x = C$.)

4.24. $y \cdot 3^{xy} \ln 3 dx + (x \cdot 3^{xy} \ln 3 - 3)dy = 0$. (Ответ: $3^{xy} - 3y = C$.)

4.25. $(\frac{1}{x-y} + 3x^2y^7)dx + (7x^3y^6 - \frac{1}{x-y})dy = 0$. (Ответ: $\ln |x - y| + x^3y^7 = C$.)

4.26. $(\frac{2y}{x^3} + y \cos xy)dx + (\frac{1}{x^2} + x \cos xy)dy = 0$. (Ответ: $\sin xy - \frac{y}{x^2} = C$.)

4.27. $(\frac{y}{\sqrt{-x^2y^2}} - 2x)dx + \frac{xdy}{\sqrt{1-x^2y^2}} = 0$. (Ответ: $\arcsin xy - x^2 = C$.)

4.28. $(5x^4y^4 + 28x^6)dx + (4x^5y^3 - 3y^2)dy = 0$. (Ответ: $x^5y^4 - y^3 + 4x^7 = C$.)

4.29. $(2xe^{x^2+y^2} + 2)dx + (2ye^{x^2+y^2} - 3)dy = 0$. (Ответ: $e^{x^2+y^2} + 2x - 3y = C$.)

4.30. $(3y^3 \cos 3x + 7)dx + (3y^2 \sin 3x - 2y)dy = 0$. (Ответ: $y^3 \sin 3x - y^2 + 7x + C$.)

5. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловый коэффициент

касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз.

5.1. $A(0, 2)$, $k = 3$. (Ответ: $y = -2e^{3x}$.)

5.2. $A(0, 5)$, $k = 7$. (Ответ: $y = 5e^{7x}$.)

5.3. $A(-1, 3)$, $k = 2$. (Ответ: $y = 3e^{2x+2}$.)

5.4. $A(-2, 4)$, $k = 6$. (Ответ: $y = 4e^{6x+12}$.)

5.5. $A(-2, 1)$, $k = 5$. (Ответ: $y = -e^{5x+10}$.)

5.6. $A(3, -2)$, $k = 4$. (Ответ: $y = -2e^{4x-12}$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

5.7. $A(2, 5)$, $n = 8$. (Ответ: $y = \frac{5}{256}x^8$.)

5.8. $A(3, -1)$, $n = 3/2$. (Ответ: $y = -x\sqrt{x}/(3\sqrt{3})$.)

5.9. $A(-6, 4)$, $n = 9$. (Ответ: $y = -x^9/11664$.)

5.10. $A(-8, -2)$, $n = 3$. (Ответ: $y = x^3/256$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

5.11. $A(0, 4)$, (Ответ: $y = -\frac{1}{16}x^2 + 4$.)

5.12. $A(0, -8)$. (Ответ: $y = x^2/32 - 8$.)

5.13. $A(0, 1)$. (Ответ: $y = -x^2/4 + 1$.)

5.14. $A(0, -3)$. (Ответ: $y = x^2/12 - 3$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ и обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой, равна абсциссе точки касания.

5.15. $A(2, 3)$. (Ответ: $(x - 13/4)^2 + y^2 = 169/16$.)

5.16. $A(-4, 1)$. (Ответ: $(x + 17/8)^2 + y^2 = 289/64$.)

5.17. $A(1, -2)$. (Ответ: $(x - 2,5)^2 + y^2 = 6,25$.)

5.18. $A(-2, -2)$. (Ответ: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$.)

5.19. $A(4, -3)$. (Ответ: $(x - 25/8)^2 + y^2 = 625/64$.)

5.20. $A(5, 0)$. (Ответ: $(x - 2,5)^2 + y^2 = 6,25$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ и обладающей следующим свойством: отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси Oy , равен квадрату абсциссы точки касания.

5.21. $A(4, 1)$. (Ответ: $y = 17x/4 - x^2$.)

5.22. $A(-2, 5)$. (Ответ: $y = -9x/2 - x^2$.)

5.23. $A(3, -2)$. (Ответ: $y = 7x/3 - x^2$.)

5.24. $A(-2, -4)$. (Ответ: $y = 4x - x^2$.)

5.25. $A(3, 0)$. (Ответ: $y = 3x - x^2$.)

5.26. $A(2, 8)$. (Ответ: $y = 6x - x^2$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной к кривой на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

5.27. $A(9, -4)$. (Ответ: $y = \frac{5}{3}\sqrt{x} - x$.)

5.28. $A(4, 10)$. (Ответ: $y = 7\sqrt{x} - x$.)

5.29. $A(18, -2)$. (Ответ: $y = 4\sqrt{x} - x$.)

5.30. $A(1, -7)$. (Ответ: $y = -6\sqrt{x} - x$.)

ИДЗ-11.3

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1

1.1. а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

1.2. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

1.3. а) $y'' - 4y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0$; в) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1.4. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 3y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1.5. а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 0$;
в) $y'' - 2y' = 0$.

1.6. а) $y'' - 4y = 0$; б) $y'' + 2y' + 17y = 0$; в) $y'' - y' - 12y = 0$.

1.7. а) $y'' + y' - 6y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

1.8. а) $y'' - 49y = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 2y' - 3y = 0$.

1.9. а) $y'' + 7y' = 0$; б) $y'' - 5y' + 4y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.

1.10. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 5y = 0$;

- В) $y'' + 5y' = 0$.
- 1.11. а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.
- 1.12. а) $y'' + 4y' + 20y = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$;
- В) $y'' - 16y = 0$.
- 1.13. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$;
- В) $y'' + y = 0$;
- 1.14. а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$;
- В) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
- 1.15. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = 0$;
- В) $y'' + 4y' = 0$.
- 1.16. а) $y'' + 6y' = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0$.
- 1.17. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.
- 1.18. а) $y'' - 3y' = 0$; б) $y'' - 7y' - 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.
- 1.19. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' + 13y = 0$;
- В) $y'' + 2y' = 0$.
- 1.20. а) $y'' + 25y' = 0$; б) $y'' - 10y' + 16y = 0$; в) $y'' - 8y' + 16y = 0$.
- 1.21. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$; б) $y'' - 6y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
- 1.22. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 2y' - 15y = 0$;
- В) $y'' - 8y' = 0$.
- 1.23. а) $y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' + 6y' + 25y = 0$;
- В) $y'' - 4y' = 0$.
- 1.24. а) $y'' + 10y' = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$; в) $4y'' + 4y' + y = 0$.
- 1.25. а) $y'' + 5y = 0$; б) $9y'' - 6y' + y = 0$; в) $y'' + 6y' + 8y = 0$.
- 1.26. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
- В) $y'' - 5y' + 4y = 0$.
- 1.27. а) $y'' - y = 0$; б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.
- 1.28. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$.
- 1.29. а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$; б) $y'' + 16y = 0$; в) $4y'' - 4y' + y = 0$.
- 1.30. а) $9y'' - 6y' + y = 0$; б) $y'' + 12y' + 37y = 0$;
- В) $y'' - 2y' = 0$.

2

2.1. $y'' + y' = 2x - 1$. (Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - 3x$.)

2.2. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos 2x$. (Ответ: $y =$

$$= e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x} \cos 2x.)$$

2.3. $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x.$ (Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} + 3 \cos 2x.$)

2.4. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$ (Ответ: $y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x} + 7x^2 e^{6x}.)$

2.5. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}.$ (Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}.)$

2.6. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}.$ (Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}.)$

2.7. $y'' + y = 2 \cos x - (4x + 4) \sin x.$ (Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x^2 + 2x) \cos x.)$

2.8. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}.$ (Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^{3x}.)$

2.9. $y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x.$ (Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 6 \cos x + \sin x.)$

2.10. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^x.$ (Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + (3x - 1)e^x.)$

2.11. $y'' + 5y' = 72e^{2x}.$ (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + 3e^{2x}.)$

2.12. $y'' - 5y' - 6y = 3 \cos x + 19 \sin x.$ (Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x} + \cos x - 2 \sin x.)$

2.13. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2.$
(Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x} + 3x^4 - x^2.)$

2.14. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}.$ (Ответ: $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{5} e^{5x}.)$

2.15. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}.$ (Ответ: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} + 3e^{-2x}.)$

2.16. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3.$ (Ответ: $y = C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x - x^3 + 2x + 1.)$

2.17. $y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x.$ (Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\cos x - 2 \sin x).)$

2.18. $y'' + 2y' - 24y = 6 \cos 3x - 33 \sin 3x.$ (Ответ: $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{4x} + \sin 3x.)$

2.19. $y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x.$ (Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 4 \cos 2x - 3 \sin 2x.)$

2.20. $y'' + 5y' = 39 \cos 3x - 105 \sin 3x.$ (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + 4 \cos 3x + 5 \sin 3x.)$

2.21. $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x.$ (Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + 5 \cos 5x + \sin 5x.)$

2.22. $y'' - 4y' + 5y = (24 \sin x + 8 \cos x)e^{-2x}.$ (Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(\cos x + \sin x).)$

2.23. $y'' + 16y = 8 \cos 4x.$ (Ответ: $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + x \sin 4x.)$

2.24. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27.$ (Ответ: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x^4 - 3.)$

- 2.25. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$. (Ответ: $y = e^{6x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{2}e^{6x}$.)
- 2.26. $y'' + 4y' = e^x(24 \cos 2x + 2 \sin 2x)$. (Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-4x} + 2e^x \sin 2x$.)
- 2.27. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$. (Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 3x^2e^{-x}$.)
- 2.28. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$. (Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x) + x^2 - x + 2$.)
- 2.29. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$. (Ответ: $y = C_1e^{x/2} + C_2e^{-x/3} + e^{2x}$.)
- 2.30. $2y'' + 7y' + 3y = 222 \sin 3x$. (Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x/2} + 7 \cos 3x + 5 \sin 3x$.)
- 3.1. $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$. (Ответ: $y = e^{4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^{2x}$.)
- 3.2. $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$. (Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + (x - 1)e^{3x}$.)
- 3.3. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$. (Ответ: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + 3xe^{4x}$.)
- 3.4. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$. (Ответ: $y = C_1 + C_2e^{2x} + 4x^3 + 3x^2 + 3x$.)
- 3.5. $y'' - 6y' + 34y = 18 \cos 5x + 60 \sin 5x$. (Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + 2 \cos 5x$.)
- 3.6. $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$. (Ответ: $y = C_1 + C_2e^{2x} + (x^2 + x)e^{2x}$.)
- 3.7. $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$. (Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 4x^3 - 2x$.)
- 3.8. $y'' - 4y' = 8 - 16x$. (Ответ: $y = C_1 + C_2e^{4x} + 2x^2 - x$.)
- 3.9. $y'' - 2y' + y = 4e^x$. (Ответ: $y = C_1e^x + C_2xe^x + 2x^2e^x$.)
- 3.10. $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$. (Ответ: $y = e^{4x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \sin 2x$.)
- 3.11. $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x} \sin 2x$. (Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2e^{-3x} \cos 2x$.)
- 3.12. $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^x$. (Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x + (x^3 - x)e^x$.)
- 3.13. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$. (Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + 3x^2e^{-2x}$.)
- 3.14. $y'' + 3y' = 10 - 6x$. (Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-3x} - x^2 + 4x$.)
- 3.15. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3$. (Ответ: $y = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x} - 8x^3 + 4x$.)

- 3.16. $y'' + 4y' + 20y = 4 \cos 4x - 52 \sin 4x$. (Ответ: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + 3 \cos 4x - \sin 4x$.)
- 3.17. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$. (Ответ: $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7$.)
- 3.18. $y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x}$. (Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + (2x^3 - 5x^2)e^{-x}$.)
- 3.19. $y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x}$. (Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - (3x^2 + x)e^{2x}$.)
- 3.20. $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$. (Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + 2e^{3x}$.)
- 3.21. $y'' + 16y = 80e^{2x}$. (Ответ: $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + 4e^{2x}$.)
- 3.22. $y'' + 4y' = 15e^x$. (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + 3e^x$.)
- 3.23. $y'' + y' - 2y = 9 \cos x - 7 \sin x$. (Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + 3 \sin x - 2 \cos x$.)
- 3.24. $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$. (Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + (3x^3 + 4x^2)e^{-x}$.)
- 3.25. $y'' - 14y' + 49y = 144 \sin 7x$. (Ответ: $y = C_1 e^{7x} + C_2 x e^{7x} + 2 \cos 7x$.)
- 3.26. $y'' + 9y = 10e^{3x}$. (Ответ: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + e^{3x}$.)
- 3.27. $4y'' - 4y' + y = -25 \cos x$. (Ответ: $y = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2} + 3 \cos x + 4 \sin x$.)
- 3.28. $3y'' - 5y' - 2y = 6 \cos 2x + 38 \sin 2x$. (Ответ: $y = C_1 e^{-x/3} + C_2 e^{2x} + \cos 2x - 2 \sin 2x$.)
- 3.29. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$. (Ответ: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + e^{-x}$.)
- 3.30. $4y'' + 3y' - y = 11 \cos x - 7 \sin x$. (Ответ: $y = C_1 e^{x/4} + C_2 e^{-x} + 2 \sin x - \cos x$.)
4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.
- 4.1. $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = -2e^x - 4xe^x + 3 \sin 2x$.)
- 4.2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = -6e^{3x} + 22xe^{3x} + x^2 - 3x + 5$.)
- 4.3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. (Ответ: $y = e^{-x}(\cos x + 3 \sin x) + x^2 + 2x$.)
- 4.4. $y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$. (Ответ: $y = e^{3x}(2 \cos 4x - 3 \sin 4x) + \sin 4x$.)
- 4.5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$. (Ответ: $y = 3e^{7x} \sin 2x + x^3 + x$.)
- 4.6. $y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8 \sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$. (Ответ: $y = \sin 4x - \cos 4x + e^x \cos 4x$.)
- 4.7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = e^{2x}(\cos 4x - 1/4 \sin 4x) + xe^{2x}$.)

- 4.8. $y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$. (Ответ: $y = e^{6x} - 2xe^{6x} + \cos 2x$.)
- 4.9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. (Ответ: $y = 4 \cos x + 2 \sin x + x^3 - 4x^2 + x - 2$.)
- 4.10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. (Ответ: $y = e^x - e^{-x} + (4x^2 - 3x)e^{-x}$.)
- 4.11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = -2e^{-4x} - 6xe^{-4x} + x^2 - 2x + 5$.)
- 4.12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$. (Ответ: $y = e^{-5x}(\cos 3x + 2 \sin 3x) - e^{-5x}$.)
- 4.13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12) \sin x - 36x \cos 3x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = e^{3x}(4 \cos 4x - 3 \sin 4x) + 2x \sin 3x$.)
- 4.14. $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10 \sin 5x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$. (Ответ: $y = 2 \cos 5x - \sin 5x + e^x \cos 5x$.)
- 4.15. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x} \sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$. (Ответ: $y = e^{-x}(2 \cos 2x + 3 \sin 2x) + 2xe^{-x} \cos 2x$.)
- 4.16. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = 3e^{5x} - 2xe^{5x} + x^2e^{5x}$.)
- 4.17. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$. (Ответ: $y = e^{3x} + e^{-4x} + (2x + 1)e^{4x}$.)
- 4.18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = e^x(2 \cos 2x - \sin 2x) + x^2 + 2x - 2$.)
- 4.19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. (Ответ: $y = 4xe^{-4x} + x^3 - x + 1$.)
- 4.20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$. (Ответ: $y = e^x \sin 6x + 3xe^x \sin 6x$.)
- 4.21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 14$. (Ответ: $y = 2e^{8x} - 3 + 4x^4 - 2x$.)
- 4.22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = \cos 6x + 8 \sin 6x + 2x^3 - 2x$.)
- 4.23. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = 4e^{-3x} - 7 + (4x + 3)e^{2x}$.)
- 4.24. $y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = 2e^{6x} - 3e^{3x} - \sin x + \cos x$.)
- 4.25. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = 3 + 2e^{-8x} - x^4 + 3x^3$.)
- 4.26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7 \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$. (Ответ: $y = e^x + 2e^{2x} - \cos x + 2 \sin x$.)
- 4.27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = 3 - e^{-2x} + x^3 - x^2$.)
- 4.28. $y'' + 16y = 32e^{4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = \cos 4x - \sin 4x + e^{4x}$.)
- 4.29. $y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.

(Ответ: $y = 2e^{-2x} + e^{-3x} - 5 \cos 2x + \sin 2x$.)

4.30. $y'' - 4y = 8e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$. (Ответ: $y = 3e^{-2x} - 2e^{2x} + 2xe^{2x}$.)

5. Определить и записать структуру частного решения y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения по виду функции $f(x)$.

5.1. $2y'' - 7y' + 3y = f(x)$; а) $f(x) = (2x + 1)e^{3x}$;

б) $f(x) = \cos 3x$.

5.2. $3y'' - 7y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = 3xe^{2x}$; б) $f(x) = \sin 2x - 3 \cos 2x$.

5.3. $2y'' + y' - y = f(x)$; а) $f(x) = (x^2 - 5)e^{-x}$; б) $f(x) = x \sin x$.

5.4. $2y'' - 9y' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = -2e^{4x}$; б) $f(x) = e^x \cos 4x$.

5.5. $y'' + 49y = f(x)$; а) $f(x) = x^3 + 4x$; б) $f(x) = 3 \sin 7x$.

5.6. $3y'' + 10y' + 3y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}$; б) $f(x) = 2 \cos 3x - \sin 3x$.

5.7. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = x + 2e^x$; б) $f(x) = 3 \cos 4x$.

5.8. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = \sin 2x + 2e^x$;

б) $f(x) = x^2 - 4$.

5.9. $y'' - y' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^x \cos x$; б) $f(x) = 7x + 2$.

5.10. $y'' - 3y' = f(x)$; а) $f(x) = 2x^2 - 5x$; б) $f(x) = e^{-x} \sin 2x$.

5.11. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$; а) $f(x) = 3xe^{-4x}$; б) $f(x) = x \sin x$.

5.12. $y'' + 36y = f(x)$; а) $f(x) = 4xe^{-x}$; б) $f(x) = 2 \sin 6x$.

5.13. $y'' - 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = (x - 2)e^{3x}$;

б) $f(x) = 4 \cos x$.

5.14. $4y'' - 5y' + y = f(x)$; а) $f(x) = (4x + 2)e^x$; б) $f(x) = e^x \sin 3x$.

5.15. $4y'' + 7y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = 3e^{-2x}$; б) $f(x) = (x - 1) \cos 2x$.

5.16. $y'' - y' - 6y = f(x)$; а) $f(x) = 2xe^{3x}$; б) $f(x) = 9 \cos x - \sin x$.

5.17. $y'' - 16y = f(x)$; а) $f(x) = -3e^{4x}$; б) $f(x) = \cos x - 4 \sin x$.

5.18. $y'' - 4y' = f(x)$; а) $f(x) = (x - 2)e^{4x}$; б) $f(x) = 3 \cos 4x$.

5.19. $y'' - 2y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (2x - 3)e^{4x}$;

б) $f(x) = e^x \sin x$.

5.20. $5y'' - 6y' + y = f(x)$; а) $f(x) = x^2 e^x$; б) $f(x) = \cos x - \sin x$.

5.21. $5y'' + 9y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = x^3 - 2x$; б) $f(x) = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x$.

5.22. $y'' - 2y' - 15y = f(x)$; а) $f(x) = 4xe^{3x}$; б) $f(x) = x \sin 5x$.

5.23. $y'' - 3y' = f(x)$; а) $f(x) = 2x^3 - 4x$; б) $f(x) = 2e^{3x} \cos x$.

5.24. $y'' - 7y' + 12y = f(x)$; а) $f(x) = xe^{3x} + 2e^x$;
б) $f(x) = 3x \sin 2x$.

5.25. $y'' + 9y' = f(x)$; а) $f(x) = x^2 + 4x - 3$; б) $f(x) = xe^{2x} \sin x$.

5.26. $y'' - 4y' + 5y = f(x)$; а) $f(x) = -2xe^x$; б) $f(x) = x \cos 2x - \sin 2x$.

5.27. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (3x - 7)e^{-x}$;
б) $f(x) = \cos x - 3 \sin x$.

5.28. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$; а) $f(x) = 2xe^{4x}$; б) $f(x) = \cos 4x + 2 \sin 4x$.

5.29. $y'' + y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$;
б) $f(x) = 3x \cos 2x$.

5.30. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$; а) $f(x) = 6xe^{-x}$; б) $f(x) = x^2 \sin 2x$.

ИДЗ-11.4

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

1.1. $y''' - 7y'' + 6y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 30$.
(Ответ: $y = 5 - 6e^x + e^{6x}$.)

1.2. $y^{IV} - 9y''' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$,
 $y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 0$. (Ответ: $y = 1 - x$.)

1.3. $y''' - y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$. (Ответ: $y = 1 + x - e^x$.)

1.4. $y''' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$. (Ответ: $y = e^{2x} - 1$.)

1.5. $y''' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$. (Ответ: $y = 1 - \cos x - \sin x$.)

1.6. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$. (Ответ: $y = -4 + e^{-x} + 3e^x$.)

1.7. $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 8$. (Ответ: $y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x} - 2e^x$.)

1.8. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -14$. (Ответ: $y = e^x - 3xe^x - e^{-3x}$.)

1.9. $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$. (Ответ: $y = 1 - e^{-x}$.)

1.10. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$. (Ответ: $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{8}xe^{2x}$.)

1.11. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$. (Ответ: $1 - 2e^{-x} + e^{-2x}$.)

1.12. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. (Ответ: $y = -e^{-x}(1 + x)$.)

1.13. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$, $y(0) = -2,5$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. (Ответ: $y = -\frac{45}{26}e^{2x} - \frac{10}{13}\cos 2x + \frac{15}{13}\sin 2x$.)

1.14. $y''' + 9y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$, $y''(0) = -18$. (Ответ: $y = -2 + 2\cos 3x + 3\sin 3x$.)

1.15. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 133$. (Ответ: $y = 10 - 11e^x + e^{12x}$.)

1.16. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 0$. (Ответ: $y = -e^x - \frac{7}{3}e^{-x} + \frac{7}{12}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$.)

1.17. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 8$, $y'''(0) = 24$. (Ответ: $y = -2e^x + e^{-x} + e^{3x}$.)

1.18. $y''' - y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$. (Ответ: $y = \sin x$.)

1.19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4$. (Ответ: $y = 2x^2e^x$.)

1.20. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$. (Ответ: $y = -2e^x + \cos 2x + \sin 2x$.)

1.21. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 2$. (Ответ: $y = 1 - e^x + xe^x$.)

1.22. $y^{IV} - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = -4$. (Ответ: $y = e^{-x} - e^x + 2\sin x$.)

1.23. $y^{IV} - 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$,

- $y'''(0) = -8$. (Ответ: $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\sin 2x$.)
- 1.24. $y''' + y'' - 4y' - 4 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 12$. (Ответ: $y = e^{2x} + 3e^{-2x} - 4e^{-x}$.)
- 1.25. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = -9$. (Ответ: $y = \cos 3x - \sin 3x$.)
- 1.26. $y^{\text{IV}} - 6y^{\text{IV}} + 9y''' = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, $y^{\text{IV}}(0) = 27$. (Ответ: $y = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - e^{3x} + xe^{3x}$.)
- 1.27. $y''' + 2y'' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -3$. (Ответ: $y = 1 - e^{-x} + xe^{-x}$.)
- 1.28. $y''' - y'' - y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. (Ответ: $y = -4e^x + 7xe^x + 3e^{-x}$.)
- 1.29. $y^{\text{IV}} + 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = -16$. (Ответ: $y = 2\sin 2x + \cos x$.)
- 1.30. $y^{\text{IV}} + 10y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = -9$, $y'''(0) = -27$. (Ответ: $y = \cos 3x + \sin 3x$.)

2. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами: а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка; б) с помощью характеристического уравнения.

- 2.1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{5t} + C_2e^t, \\ y = 3C_1e^{5t} - C_2e^t. \end{cases}$)
- 2.2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^t, \\ y = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t}. \end{cases}$)
- 2.3. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}, \\ y = \frac{1}{2}C_1e^{3t} - \frac{1}{4}C_2e^{-3t}. \end{cases}$)
- 2.4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{-3t} + C_2e^t, \\ y = \frac{1}{3}C_1e^{-3t} - C_2e^t. \end{cases}$)
- 2.5. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{5t}, \\ y = C_1 - 4C_2e^{5t}. \end{cases}$)
- 2.6. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t}, \\ y = 3C_1e^t + C_2e^{-t}. \end{cases}$)
- 2.7. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{5t}, \\ y = 3C_1e^{-t} + C_2e^{5t}. \end{cases}$)
- 2.8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-t}, \\ y = -2C_1 - 3C_2e^{-t}. \end{cases}$)

- 2.9. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}. \end{cases}$)
- 2.10. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^t - \frac{3}{2} C_2 e^{2t}. \end{cases}$)
- 2.11. $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-2t}, \\ y = C_1 e^t + C_2. \end{cases}$)
- 2.12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{8t}. \end{cases}$)
- 2.13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}, \\ y = 2C_1 e^{2t} + \frac{1}{3} C_2 e^{7t}. \end{cases}$)
- 2.14. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}. \end{cases}$)
- 2.15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + \frac{5}{3} C_2 e^{7t}. \end{cases}$)
- 2.16. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 + 3C_2 e^{7t}. \end{cases}$)
- 2.17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{9t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{9t}. \end{cases}$)
- 2.18. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases}$)
- 2.19. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{3t}. \end{cases}$)
- 2.20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{7t}. \end{cases}$)
- 2.21. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}. \end{cases}$)
- 2.22. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{4t} + \frac{1}{3} C_2 e^{8t}. \end{cases}$)
- 2.23. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{5t}. \end{cases}$)

$$2.24. \begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{6t}, \\ y = -\frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{2} C_2 e^{6t}. \end{cases} \right)$$

$$2.25. \begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \\ y = -\frac{3}{4} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{9t}. \end{cases} \right)$$

$$2.26. \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -4C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$$

$$2.27. \begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - \frac{1}{5} C_2 e^{2t}. \end{cases} \right)$$

$$2.28. \begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}, \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t}. \end{cases} \right)$$

$$2.29. \begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t}. \end{cases} \right)$$

$$2.30. \begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t}. \end{cases} \right)$$

3. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

$$3.1. y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}. \left(\text{Ответ: } y = \left(-\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + e_1 \right) e^{-x} + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + e_2 \right) e^x. \right)$$

$$3.2. y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}. \left(\text{Ответ: } y = \left(\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C_2 \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2} x + C_2 \right) \sin 2x. \right)$$

$$3.3. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}. \left(\text{Ответ: } y = (\ln |\cos x| + C_1) e^{2x} \cos x + (x + C_2) e^{2x} \sin x. \right)$$

$$3.4. y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \left(\text{Ответ: } y = \frac{1}{\cos x} + C_1 + (\ln |\cos x| + C_2) \cos x + (x - \operatorname{tg} x + C_3) \sin x. \right)$$

$$3.5. y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}. \left(\text{Ответ: } y = \left(-\frac{1}{3} x + C_1 \right) \cos 3x + \left(\frac{1}{9} \ln |\sin 3x| + C_2 \right) \sin 3x. \right)$$

- 3.6. $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$. (Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x}{4}e^x - \frac{1}{4}e^x - xe^{-x} + xe^{-x} \ln x$.)
- 3.7. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$. (Ответ: $y = (\ln |\cos x| + C_1)e^{-x} \cos x + (x + C_2)e^{-x} \sin x$.)
- 3.8. $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$. (Ответ: $y = (\ln(\operatorname{ctg} \frac{x}{2}) + C_1)e^x \cos x + (\frac{1}{\sin x} + C_2)e^x \sin x$.)
- 3.9. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x$. (Ответ: $y = C_1e^{-x} \cos x + C_2e^{-x} \sin x + e^{-x} \sin x \cdot \ln |\operatorname{tg}(x/2)|$.)
- 3.10. $y'' - 2y' + 2y = e^x/\sin x$. (Ответ: $y = (-x + C_1)e^x \cos x + (\ln |\sin x| + C_2)e^x \sin x$.)
- 3.11. $y'' - 2y' + y = e^x/x^2$. (Ответ: $y = (-\ln x + C_1)e^x + (-1/x + C_2)xe^x$.)
- 3.12. $y'' + y = \operatorname{tg} x$. (Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln |\operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)|$.)
- 3.13. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$. (Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \ln |\operatorname{tg} x|$.)
- 3.14. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$. (Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln |\operatorname{tg}(x/2)|$.)
- 3.15. $y'' - 2y' + y = e^x/x$. (Ответ: $y = (-x + C_1)e^x + (\ln x + C_2)xe^x$.)
- 3.16. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x$. (Ответ: $y = (-x + C_1)e^{-x} + (\ln x + C_2)xe^{-x}$.)
- 3.17. $y'' + y = 1/\cos x$. (Ответ: $y = (\ln |\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x$.)
- 3.18. $y'' + y = 1/\sin x$. (Ответ: $y = (-x + C_1) \cos x + (\ln |\sin x| + C_2) \sin x$.)
- 3.19. $y'' + 4y = 1/\sin 2x$. (Ответ: $y = (-\frac{x}{2} + C_1) \cos 2x + (\frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + C_2) \sin 2x$.)
- 3.20. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$. (Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} \ln |\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})| \cos 2x$.)
- 3.21. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}/x^3$. (Ответ: $y = (C_1 + C_2x + 1/(2x))e^{-2x}$.)
- 3.22. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}/x^3$. (Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{2x}/2x$.)

$$3.23. y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}. \quad (\text{Ответ: } y = \\ = \left(-\frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5} + 2\sqrt{(x+1)^3} + C_1\right)e^{-x} + (2\sqrt{(x+1)^3} + \\ + C_2)xe^{-x}.)$$

$$3.24. y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x. \quad (\text{Ответ: } y = C_1 \cos x + \\ + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln |\operatorname{tg}(x/2)| + 2.)$$

$$3.25. y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos(e^x). \quad (\text{Ответ: } y = C_1 + C_2 e^x - \\ - \cos(e^x).)$$

$$3.26. y'' - y' = e^{2x} \sin(e^x). \quad (\text{Ответ: } y = C_1 + C_2 e^x - \\ - \sin(e^x).)$$

$$3.27. y'' + y = \operatorname{tg}^2 x. \quad (\text{Ответ: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \\ + \sin x \cdot \ln |\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)| - 2.)$$

$$3.28. y'' + y = 2/\sin^2 x. \quad (\text{Ответ: } y = C_1 \cos x + \\ + C_2 \sin x + 2 \cos x \ln |\operatorname{ctg}(x/2)| - 2.)$$

$$3.29. y'' + 2y' + 5y = \frac{e^{-x}}{\sin 2x}. \quad (\text{Ответ: } y = \left(-\frac{x}{2} + \\ + C_1\right)e^{-x} \cos 2x + \left(\frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + C_2\right)e^{-x} \sin 2x.)$$

$$3.30. y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}. \quad (\text{Ответ: } y = \left(\frac{1}{9} \ln |\cos 3x| + \\ + C_1\right) \cos 3x + \left(\frac{x}{3} + C_2\right) \sin 3x.)$$

4. Решить следующие задачи.

4.1. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, образованного касательной к кривой, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равна b^2 . (Ответ: $y = 2b^2/(C \pm x)$.)

4.2. Записать уравнение кривой, если известно, что точка пересечения любой касательной к кривой с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат. (Ответ: $y = C(x^2 + y^2)$.)

4.3. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной к кривой и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, есть величина постоянная, равная $3a^2$. (Ответ: $y = Cx^2 + 2a^2/x$.)

4.4. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат

нат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2 . (Ответ: $x = a^2/y + Cy$.)

4.5. Записать уравнение кривой, если известно, что расстояние от любой касательной до начала координат равно абсциссе точки касания. (Ответ: $Cx = x^2 + y^2$.)

4.6. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания. (Ответ: $y = Cx^2$.)

4.7. Записать уравнения кривых, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a . (Ответ: $\pm x = C + a \ln y - y$ ($0 < y < a$)).

4.8. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную $2/3$ абсциссы точки касания. (Ответ: $y = Cx^3$.)

4.9. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равна $2l$. (Ответ: $x = C + l \ln(l \pm \sqrt{l^2 - y^2}) \mp \sqrt{l^2 - y^2}$.)

4.10. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, 4)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равна кубу абсциссы точки касания. (Ответ: $y = 2\sqrt{3x}/\sqrt{x^2 - 1}$.)

4.11. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 5)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания. (Ответ: $y = 3x \ln x + 5x$.)

4.12. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 2)$ и обладающей следующим свойством: отношение ординаты любой ее точки к абсциссе этой точки пропорционально угловому коэффициенту касательной к искомой кривой, проведенной в той же точке. Коэффициент пропорциональности равен 3. (Ответ: $y^3 = 8x$.)

4.13. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, -1)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания. Коэффициент пропорциональности равен 6. (Ответ: $y = e^{6x-12}$.)

4.14. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 2)$, если известно, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке и суммы координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. (Ответ: $y = 2(y - x)^2$.)

4.15. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(0, -2)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен утроенной ординате этой точки. (Ответ: $y = -2e^{3x}$.)

4.16. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания. (Ответ: $y^2 = Cx - x^2$.)

4.17. Записать уравнение кривой, для которой угловой коэффициент касательной в какой-либо ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту точку с началом координат. (Ответ: $y = Cx^n$.)

4.18. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам. (Ответ: $xy = C$.)

4.19. Записать уравнение кривой, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в какой-либо точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. (Ответ: $y = \frac{1}{2}(Cx^2 - \frac{1}{C})$.)

4.20. Записать уравнение кривой, для которой произведение абсциссы какой-либо ее точки и длины отрезка, отсекаемого нормалью в этой точке на оси Oy , равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат. (Ответ: $x^2 + y^2 = Cx^4$.)

4.21. Записать уравнение кривой, для которой треугольник, образованный осью Oy , касательной и радиусом-вектором точки касания, является равнобедренным. (Ответ: $x^2 + y^2 = Cy$, $y^2 = C^2 - 2Cx$, $xy = C$.)

4.22. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, 0)$ и обладающую следующим свойством: отрезок касательной между точкой касания и осью Oy имеет постоянную длину, равную 2. (Ответ: $\pm y = \sqrt{4 - x^2} + \ln \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{2 + \sqrt{4 - x^2}}$.)

4.23. Записать уравнение кривой, все касательные к

которой проходят через начало координат. (Ответ: $y = Cx$.)

4.24. Записать уравнение кривой, каждая касательная к которой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. (Ответ: $y = C/x + 1$.)

4.25. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: если через любую ее точку провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой на две части, причем площадь одной из них вдвое больше площади другой. (Ответ: $y = Cx^2$.)

4.26. Записать уравнение кривой, если касательная к ней отсекает на оси Oy отрезок, равный по длине $\frac{1}{n}$ -й сумме координат точки касания. (Ответ: $y = Cx^{(n-1)/n} - x$.)

4.27. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого нормалью в точке $M(x, y)$ на оси Ox , равна y^2/x . (Ответ: $y = x\sqrt{2 \ln(C/x)}$.)

4.28. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy , равна квадрату абсциссы точки касания. (Ответ: $y = Cx - x^2$.)

4.29. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка отсекаемого нормалью в точке $M(x, y)$ на оси Oy равна x^2/y . (Ответ: $C = x^2/(2y^2) + \ln y$.)

4.30. В точке с ординатой 2 кривая наклонена к оси Oy под углом 45° . Любая ее касательная отсекает на оси абсцисс отрезок, равный по длине квадрату ординаты точки касания. Записать уравнение данной кривой. (Ответ: $x = (5 - y)y$.)

11.9. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 11

1. Ускорение локомотива прямо пропорционально силе тяги F и обратно пропорционально массе поезда m . Начальная скорость локомотива v_0 , сила тяги $F = b - kv$, где v — скорость; b, k — постоянные величины. Найти силу тяги локомотива по истечении времени t , если в начальный момент времени при $t = 0$ $F = F_0 = b - kv_0$. (Ответ: $F = F_0 e^{-kt/m}$.)

2. Стальная проволока длиной l и площадью поперечного сечения S растягивается с силой, значение которой постоянно возрастает до P . Найти работу силы растяжения, если удлинение проволоки определяется по формуле $\Delta l = k \frac{P}{F} l_0$, где k — коэффициент удлинения; l_0 — первоначальная длина проволоки. (Ответ: $A = \frac{kl_0}{2F} P^2$.)

3. Моторная лодка движется по озеру со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. Через 40 с после выключения ее мотора

скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/ч. Определить скорость лодки через 2 мин после выключения мотора. (Сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости.) (Ответ: 1,28 км/ч.)

4. Наполненный водой цилиндрический сосуд высотой H и площадью дна S_1 имеет в дне отверстие площадью S_2 . Определить время полного истечения воды через отверстие. (Скорость истечения определяется по формуле $v = \sqrt{2gh}$, где h — высота слоя воды в данный момент; g — ускорение свободного падения.) (Ответ:

$$T = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2H}{g}}.)$$

5. Концы каната цепного моста находятся на высоте $H = 5$ м, а его середина — на высоте $h = 4$ м от проезжей части моста. Длина моста $2l = 20$ м. Найти кривую провисания каната. (Ответ: $y - 4 = x^2/100$.)

6. В куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Определить возраст горной породы, если известно, что период полураспада урана составляет $4,5 \cdot 10^9$ лет и при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. (Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных продуктов распада урана и свинца, который распадается гораздо быстрее.) (Ответ: $975 \cdot 10^6$ лет.)

7. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M , без топлива — m , скорость истечения продуктов горения из ракеты — c , начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой ее тяжести и сопротивлением воздуха. (Ответ: $c \ln(M/m)$.)

8. С высоты 18 м над уровнем Земли брошено вертикально вверх тело со скоростью 30 м/с. Найти высоту, на которой тело находится в момент времени t , как функцию времени. Определить наибольшую высоту подъема тела. (Ответ: $S = h = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t + 18$, $h_{\text{наиб}} = 63,9$ м.)

9. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха. Температура тела в течение 20 мин снижается от 100 до 60 °С. Температура воздуха равна 20 °С. Определить время, за которое температура тела понизится до 25 °С. (Ответ: 1 ч 20 мин.)